MODERNA SUPERAÇÃO!

MATEMÁTICA

MANUAL DO PROFESSOR



MATERIAL DE DIVULGAÇÃO.
VERSÃO SUBMETIDA À AVALIAÇÃO.
PNLD 2026 - ENSINO MÉDIO
Código da coleção:
0014 P26 01 01 202 814

VOLUME II

ENSINO MÉDIO
2º ANO

Organizadora:
Editora Moderna
Obra coletiva concebida, desenvolvida e produzida pela Editora Moderna.

Editor responsável:
André Luiz Steigenberger

Área de conhecimento:
Matemática e suas Tecnologias

Componente curricular:
Matemática

MODERNA

MODERNA SUPERAÇÃO!

MATEMÁTICA

VOLUME II

ENSINO MÉDIO
2º ANO

Área de conhecimento: Matemática e suas Tecnologias
Componente curricular: Matemática

Organizadora: Editora Moderna
Obra coletiva concebida, desenvolvida e produzida pela Editora Moderna.

Editor responsável:
André Luiz Steigenberger
Licenciado em Matemática pela Universidade Estadual de Londrina (PR).
Foi professor de Matemática na rede pública.
Elaborador e editor de materiais didáticos.

MANUAL DO PROFESSOR

1ª edição
São Paulo, 2024

MODERNA

Elaboração dos originais:

André Luiz Steigenberger
Licenciado em Matemática pela Universidade Estadual de Londrina (PR).
Foi professor de Matemática na rede pública.
Elaborador e editor de materiais didáticos.

Aparecida Santana de Souza Chiari
Licenciada e bacharela em Matemática pela Universidade de São Paulo.
Mestra em Educação Matemática pela Fundação Universidade Federal de Mato Grosso do Sul.
Doutora em Educação Matemática pela Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho".
Foi professora de Matemática na rede pública e privada.
Professora universitária. Elaboradora de materiais didáticos.

Fátima Gomes Machado
Licenciada em Matemática pela Universidade Estadual de Londrina (PR).
Especialista em Docência na Educação Superior pela Universidade Estadual de Londrina (PR).
Elaboradora de materiais didáticos.

Leandro Figueira Ferreira
Licenciado em Matemática pela Universidade Estadual de Londrina (PR).
Especialista em Metodologia de Ensino de Matemática e Física pela Faculdade Venda Nova do Imigrante (ES).
Professor de Matemática na rede pública.
Elaborador de materiais didáticos.

Leonardo Bernardo de Morais
Licenciado em Matemática pela Universidade Federal de Pernambuco.
Mestre e doutor em Educação Matemática e Tecnológica pela Universidade Federal de Pernambuco.
Foi professor de Matemática na rede pública. Professor do Instituto Federal de Educação do Sertão Pernambucano.
Elaborador de materiais didáticos.

Organização dos objetos digitais: Maria Cecília da Silva Veridiano
Elaboração dos objetos digitais: Maria Cecília da Silva Veridiano e Mara Regina Garcia Gay

Produção editorial: Scriba Soluções Editoriais
Edição executiva: Lucilia Franco Lemos dos Santos
Assistência editorial: Sheila C. Molina
Gerência de planejamento editorial: Camila Rumiko Minaki
Preparação de texto e revisão: Moisés Manzano da Silva, Nicolas Hiromi Takahashi
Edição de arte: Brunna Leonardi Caciolato, Denise Maria Capozzi, Vinícius Soares Costa
Editoração eletrônica: Avits Estúdio Gráfico Ltda., Formato Comunicação Ltda., Leandro Júnior Pimenta
Pesquisa iconográfica: Alessandra Roberta Arias
Tratamento de imagens: Vinícius Soares Costa

Edição executiva: Mara Regina Garcia Gay, Maria Cecília da Silva Veridiano
Gerência de *design,* e produção gráfica e digital: Patricia Costa
Coordenação de *design* e projetos visuais: Marta Cerqueira Leite
Projeto gráfico: Bruno Tonel, Everson de Paula
Capa: Everson de Paula, Paula Miranda Santos
Foto: Homem praticando basquete © Hideki Yoshihara/Aflo/Getty Images
Coordenação de arte: Wilson Gazzoni Agostinho
Coordenação de *bureau*: Rubens M. Rodrigues
Pré-impressão: Alexandre Petreca, Marcio H. Kamoto
Coordenação de produção industrial: Wendell Monteiro
Impressão e acabamento:

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Moderna superação! matemática / organizadora Editora Moderna ; obra coletiva concebida, desenvolvida e produzida pela Editora Moderna ; editor responsável André Luiz Steigenberger. -- 1. ed. -- São Paulo : Moderna, 2024.

2º ano : ensino médio : volume II.
Componente curricular: Matemática.
Área de conhecimento: Matemática e suas tecnologias.
ISBN 978-85-16-13995-7 (aluno)
ISBN 978-85-16-13996-4 (professor)

1. Matemática (Ensino médio) I. Steigenberger, André Luiz.

24-222411 CDD-510.7

Índices para catálogo sistemático:

1. Matemática : Ensino médio 510.7

Cibele Maria Dias - Bibliotecária - CRB-8/9427

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.
Todos os direitos reservados.

EDITORA MODERNA LTDA.
Rua Padre Adelino, 758 - Belenzinho
São Paulo - SP - Brasil - CEP 03303-904
Canal de atendimento: 0303 663 3762
www.moderna.com.br
2024
Impresso no Brasil

1 3 5 7 9 0 8 6 4 2

APRESENTAÇÃO

Perceber o mundo à nossa volta e compreendê-lo, interagir e participar criticamente dos rumos da sociedade e do meio ambiente, contribuindo para o bem comum, são apenas algumas das atribuições que temos como cidadãos. Nesse sentido, o conhecimento matemático é essencial.

Ler e interpretar criticamente informações apresentadas de diferentes maneiras, provenientes dos mais diversos meios de comunicação; tomar decisões baseadas em constatações matemáticas, como escolher entre comprar à vista ou a prazo; e financiar ou adquirir um consórcio são exemplos da importância da Matemática em nossas vidas. No que diz respeito às tecnologias, fica ainda mais evidente a participação de ideias e conceitos matemáticos.

Esta coleção foi elaborada para auxiliá-lo nessa perspectiva e no caminho posterior a essa etapa de ensino, como o ingresso no Ensino Superior e no mercado de trabalho. Para ajudá-lo na compreensão dos assuntos tratados, são apresentados exemplos e problemas resolvidos, seguidos de propostas de tarefas que buscam consolidar a aprendizagem, além de seções que promovem a cidadania.

Por fim, desejamos a você, estudante, que desenvolva suas habilidades matemáticas e que, com as orientações de seu professor, use este material com dedicação, protagonismo e entusiasmo.

Bom estudo.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

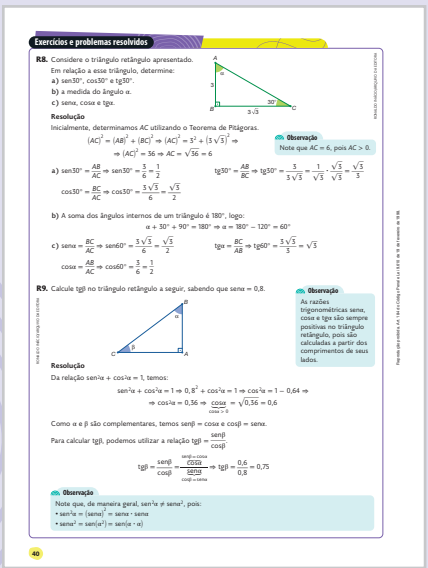
CONHEÇA SEU LIVRO

Esta coleção está dividida em capítulos que abordam assuntos interessantes e atuais e que o auxiliarão a desenvolver autonomia, criticidade e outras habilidades e competências importantes para a sua aprendizagem. Confira a seguir como seu livro está organizado e entenda o propósito de cada parte dele.



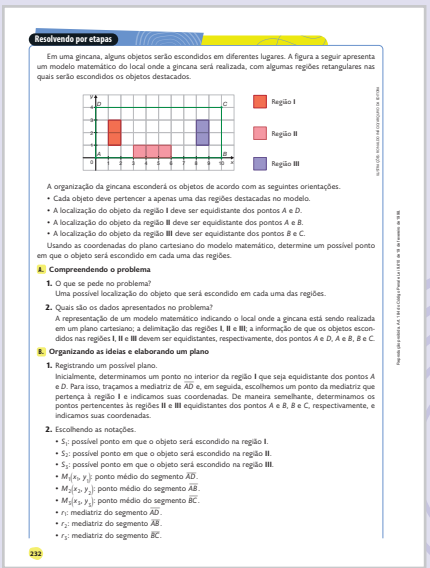
Abertura do capítulo

Na abertura de cada capítulo, você terá um contato inicial com os assuntos que serão estudados. Você poderá mostrar o que já sabe e aprimorar seus conhecimentos, trocando ideias com o professor e os colegas sobre diversas temáticas.



Exercícios e problemas resolvidos

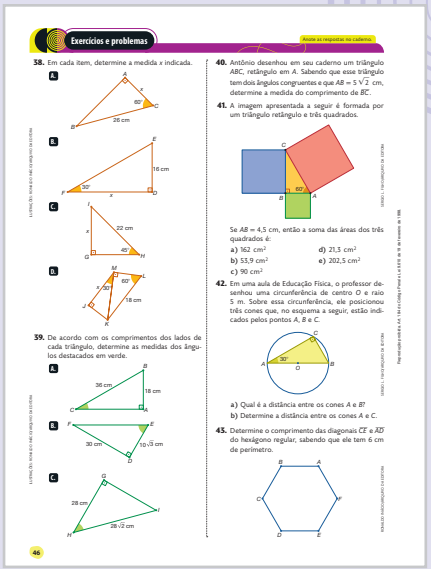
Esses exercícios e problemas auxiliam a exercitar habilidades, competências e estratégias para resolver as outras tarefas propostas, favorecendo o desenvolvimento de sua autonomia.



Resolvendo por etapas

Esta seção apresenta maneiras de organizar o pensamento com o intuito de solucionar um problema. Espera-se que, com base nela, você seja capaz de desenvolver estratégias para resolver diversos problemas, matemáticos ou não.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.


Exercícios e problemas

Anote as respostas no caderno.

58. Em cada item, determine a medida x indicada.

40. Antônio desenhou em seu caderno um triângulo ABC, retângulo em A. Sabendo que esse triângulo tem dois ângulos congruentes e que $AB = 5\sqrt{2}$ cm, determine a medida do comprimento de $\overline{BC}$.

41. A imagem apresentada a seguir é formada por um triângulo retângulo e três quadrados.

Se $AB = 4{,}5$ cm, então a soma das áreas dos três quadrados é:

a) 162 cm² d) 21,3 cm²
b) 53,9 cm² e) 202,5 cm²
c) 90 cm²

42. Em uma aula de Educação Física, o professor desenhou uma circunferência de centro O e raio 5 m. Sobre essa circunferência, ele posicionou três cones que, no esquema a seguir, estão indicados pelos pontos A, B e C.

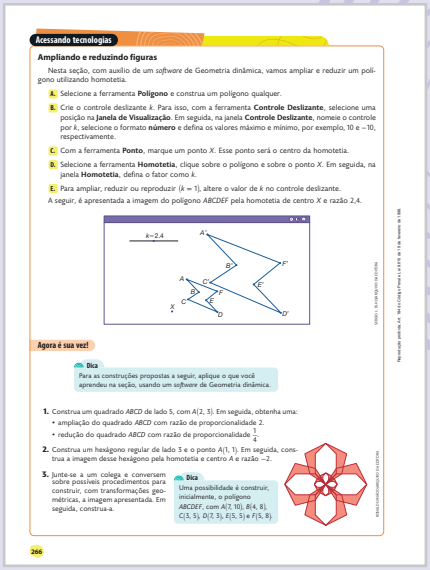
a) Qual é a distância entre os cones A e B?
b) Determine a distância entre os cones A e C.

45. Determine o comprimento das diagonais $\overline{CE}$ e $\overline{AD}$ do hexágono regular, sabendo que ele tem 6 cm de perímetro.

46

Exercícios e problemas

Esta seção apresenta exercícios e problemas diversificados para você desenvolver as ideias e os conceitos estudados. Vários deles são relacionados a outras áreas do conhecimento e a outros componentes curriculares, além de haver questões de provas de vestibulares e do Enem.


Acessando tecnologias

Ampliando e reduzindo figuras

Nesta seção, com auxílio de um *software* de Geometria dinâmica, vamos ampliar e reduzir um polígono utilizando homotetia.

A. Selecione a ferramenta **Polígono** e construa um polígono qualquer.

B. Crie o controle deslizante k. Para isso, com a ferramenta **Controle Deslizante**, selecione uma posição na **Janela de Visualização**. Em seguida, na janela **Controle Deslizante**, nomeie o controle por k, selecione o formato **número** e defina os valores máximo e mínimo, por exemplo, 10 e −10, respectivamente.

C. Com a ferramenta **Ponto**, marque um ponto X. Esse ponto será o centro da homotetia.

D. Selecione a ferramenta **Homotetia**, clique sobre o polígono e sobre o ponto X. Em seguida, na janela **Homotetia**, defina o fator como k.

E. Para ampliar, reduzir ou reproduzir ($k = 1$), altere o valor de k no controle deslizante.

A seguir, é apresentada a imagem do polígono $ABCDEF$ pela homotetia de centro X e razão 2,4.

Agora é sua vez!

Dica
Para as construções propostas a seguir, aplique o que você aprendeu na seção, usando um *software* de Geometria dinâmica.

1. Construa um quadrado $ABCD$ de lado 5, com $A(2, 5)$. Em seguida, obtenha uma:
- ampliação do quadrado $ABCD$ com razão de proporcionalidade 2.
- redução do quadrado $ABCD$ com razão de proporcionalidade $\frac{1}{2}$.

2. Construa um hexágono regular de lado 3 e o ponto $A(1, 1)$. Em seguida, construa a imagem desse hexágono pela homotetia e centro A e razão −2.

3. Junte-se a um colega e conversem sobre possíveis procedimentos para construir, com transformações geométricas, a imagem apresentada. Em seguida, construa-a.

Dica
Uma possibilidade é construir, inicialmente, o polígono $ABCDEF$, com $A(7, 10)$, $B(4, 8)$, $C(3, 5)$, $D(7, 3)$, $E(5, 5)$ e $F(5, 8)$.

266

Acessando tecnologias

Nesta seção, você vai encontrar exemplos e tarefas que complementam o que foi estudado nos capítulos, utilizando *softwares* de Geometria dinâmica, planilha eletrônica e linguagem de programação.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Ação e participação

Nesta seção, você e seus colegas se envolverão em um projeto interdisciplinar, visando resolver problemas ou refletir sobre questões sociais. As atividades propostas desenvolverão habilidades essenciais, como pensamento crítico, autonomia, criatividade, argumentação, cooperação e cidadania.


Ação e participação

Esta seção propõe um trabalho articulado com outros componentes curriculares envolvendo objetivos comuns, além da proposta de trabalho em grupo cujo objetivo principal é favorecer o desenvolvimento de habilidades e a compreensão relacionada a alguns assuntos específicos. Por ser um trabalho em grupo, vocês podem pensar em vários questionamentos durante a execução do projeto, organizar as ideias e fazer anotações no caderno. Nesse momento de surgimento de ideias e de planejamentos, é necessária a participação de todos, além de um registro escrito coletivo com as anotações que consideraram mais relevantes.

Um projeto constitui-se em uma proposta de trabalho temporária e única, ou seja, não repetitiva, caracterizada por ter início, meio e fim bem definidos e com objetivo claro e viável.

Qual tema podemos abordar?
Quais componentes curriculares estão envolvidos nesse tema?
Qual de nós vai fazer as anotações por escrito?
Quais são os nossos objetivos?
Quanto tempo vai levar?
O que podemos fazer?

O **tema** para ser trabalhado em um projeto pode surgir de diversas ideias, como a constatação de uma necessidade da comunidade escolar e da comunidade do bairro onde a escola está localizada ou até mesmo um tema de interesse da turma. Dependendo do tema escolhido, vocês precisam estudar mais sobre o assunto antes de seguir com as outras etapas.

Com um tema definido, é o momento de estabelecer os **objetivos** com metas claras que possam ser verificadas ao longo da execução do projeto.

A próxima etapa é o **planejamento**, no qual se define quem vai participar e qual será a responsabilidade de cada um. Todas essas informações devem estar anotadas e ter prazos definidos.

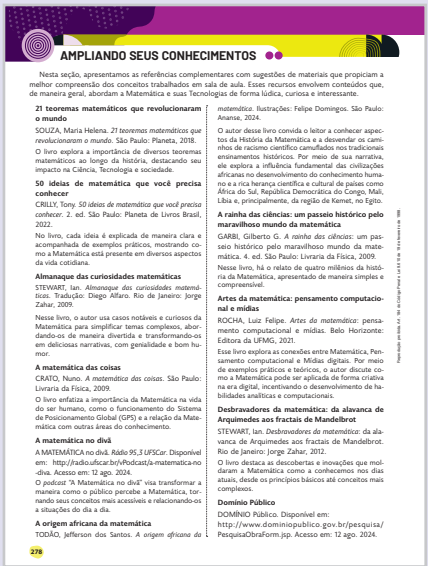
Com base no planejamento, é elaborado um cronograma de acompanhamento, e, em determinadas datas, será necessário verificar se os objetivos estão sendo atingidos até ali e se é preciso alterar algo, fazendo uma correção de rota ou novos alinhamentos.

OBJETIVOS DO PROJETO

268

Ampliando seus conhecimentos

Esta seção contém referências complementares de livros, filmes, *sites* e *podcasts* para você conhecer mais do que foi estudado nos capítulos e para ampliar seus conhecimentos.


AMPLIANDO SEUS CONHECIMENTOS

Nesta seção, apresentamos as referências complementares com sugestões de materiais que propiciam a melhor compreensão dos conceitos trabalhados em cada de aula. Esses recursos envolvem conteúdos que, de maneira geral, abordam a Matemática e suas Tecnologias de forma lúdica, curiosa e interessante.

21 teoremas matemáticos que revolucionaram o mundo

SOUZA, Maria Helena. *21 teoremas matemáticos que revolucionaram o mundo*. São Paulo: Planeta, 2018.

O livro explora a importância de diversos teoremas matemáticos ao longo da história, destacando seu impacto na Ciência, Tecnologia e sociedade.

50 ideias de matemática que você precisa conhecer

CRILLY, Tony. *50 ideias de matemática que você precisa conhecer*. 2. ed. São Paulo: Planeta de Livros Brasil, 2022.

No livro, cada ideia é explicada de maneira clara e acompanhada de exemplos práticos, mostrando como a Matemática está presente em diversos aspectos da vida cotidiana.

Almanaque das curiosidades matemáticas

STEWART, Ian. *Almanaque das curiosidades matemáticas*. Tradução: Diego Alfaro. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 2009.

Nesse livro, o autor usa casos notáveis e curiosos da Matemática para simplificar temas complexos, abordando-os de maneira divertida e transformando-os em deliciosas narrativas, com genialidade e bom humor.

A matemática das coisas

CRATO, Nuno. *A matemática das coisas*. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

O livro enfatiza a importância da Matemática na vida do ser humano, como o funcionamento do Sistema de Posicionamento Global (GPS) e a relação da Matemática com outras áreas do conhecimento.

A matemática no divã

A MATEMÁTICA no divã. *Rádio 95,3 UFSCar*. Disponível em: http://radio.ufscar.br/vPodcast/a-matematica-no-diva. Acesso em: 12 ago. 2024.

O *podcast* "A Matemática no divã" visa transformar a maneira como o público percebe a Matemática, tornando seus conceitos mais acessíveis e relacionando-os a situações do dia a dia.

A origem africana da matemática

TODÃO, Jefferson dos Santos. *A origem africana da matemática*. Ilustrações: Felipe Domingos. São Paulo: Ananse, 2024.

O autor desse livro convida o leitor a conhecer aspectos da História da Matemática e a desvendar os caminhos de racismo científico camuflados nos tradicionais ensinamentos históricos. Por meio de sua narrativa, ele explora a influência fundamental das civilizações africanas no desenvolvimento do conhecimento humano e a rica herança científica e cultural de países como África do Sul, República Democrática do Congo, Mali, Líbia e, principalmente, da região de Kemet, no Egito.

A rainha das ciências: um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da matemática

GARBI, Gilberto G. *A rainha das ciências*: um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da matemática. 4. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

Nesse livro, há o relato de quatro milênios da história da Matemática, apresentado de maneira simples e compreensível.

Artes da matemática: pensamento computacional e mídias

ROCHA, Luiz Felipe. *Artes da matemática*: pensamento computacional e mídias. Belo Horizonte: Editora da UFMG, 2021.

Esse livro explora as conexões entre Matemática, Pensamento computacional e Mídias digitais. Por meio de exemplos práticos e teóricos, o autor discute como a Matemática pode ser aplicada de forma criativa na era digital, incentivando o desenvolvimento de habilidades analíticas e computacionais.

Desbravadores da matemática: da alavanca de Arquimedes aos fractais de Mandelbrot

STEWART, Ian. *Desbravadores da matemática*: da alavanca de Arquimedes aos fractais de Mandelbrot. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 2012.

O livro destaca as descobertas e inovações que moldaram a Matemática como a conhecemos nos dias atuais, desde os princípios básicos até conceitos mais complexos.

Domínio Público

DOMÍNIO Público. Disponível em: http://www.dominiopublico.gov.br/pesquisa/PesquisaObraForm.jsp. Acesso em: 12 ago. 2024.

278


EDUCAÇÃO MIDIÁTICA

Os influenciadores digitais influenciam? OBJETO DIGITAL *Podcast:* Algoritmos das redes sociais

Início de conversa

Converse com os colegas sobre a questão a seguir.

1. Você costuma seguir ou acompanhar algum influenciador digital?

Em nosso dia a dia, utilizamos a internet e os dispositivos digitais para diversas atividades, como assistir a um filme ou uma série, jogar jogos eletrônicos, trocar mensagens com os amigos e realizar compras em lojas virtuais. Além disso, muitas pessoas costumam navegar pelas redes sociais para assistir a vídeos curtos, ler publicações sobre dicas de beleza, ficar por dentro das novidades do mundo dos games, se informar sobre o lançamento de livros e conhecer restaurantes e lanchonetes do município onde moram. Em geral, vários desses conteúdos são produzidos por influenciadores digitais.

Há cerca de vinte anos, ainda não existia a denominação **influenciador digital**. No entanto, algumas pessoas, os blogueiros, praticavam algo semelhante, como produzir conteúdo ao escrever sobre determinados temas em páginas da internet conhecidas como *blogs*. As blogueiras de moda, por exemplo, ficaram conhecidas escrevendo dicas de vestimentas, calçados e produtos de beleza. Com o surgimento das primeiras plataformas de vídeos, muitos blogueiros passaram a também produzir seu conteúdo em formato de vídeo, sendo denominados vlogueiros (junção da palavra **vídeo** com o conceito de blogueiro). A partir da década de 2010, com a popularização das redes sociais, esses profissionais passaram a ser conhecidos como influenciadores digitais, pois produziam conteúdos sobre temas específicos e expressavam suas opiniões e ideias em várias plataformas, muitas vezes, alcançando um número significativo de seguidores.

28

Educação midiática

Nesta seção, você vai refletir sobre os conceitos de mídia e informação, promovendo o uso responsável, democrático, ético e crítico dos meios digitais, seja ao interpretar, compartilhar ou produzir conteúdo.


DESENVOLVIMENTO SUSTENTÁVEL

As pessoas idosas e o direito de ir e vir

ODS 11 Cidades e Comunidades Sustentáveis

De acordo com o IBGE, a população idosa tem aumentado nos últimos anos. Em 1950, a quantidade de pessoas com 60 anos de idade ou mais no Brasil correspondia a cerca de 5% da população. Já em 2010, esse percentual era aproximadamente 10%, e projeções sugerem que, em 2050, chegue aos 29%. De acordo com o Ministério dos Direitos Humanos e da Cidadania, 47,7% das pessoas idosas são negras.

O envelhecimento da população brasileira está associado, entre outros fatores, ao aumento da esperança de vida ao nascer, que saltou de cerca de 69,8 anos em 2000 para, aproximadamente, 76,3 anos em 2018, e à redução da taxa de fecundidade.

Entre as causas do aumento da esperança de vida é possível mencionar avanços em políticas públicas relacionadas à saúde e à educação e fatores que favoreceram o desenvolvimento econômico do país nas últimas décadas.

Além disso, a criação do Estatuto da Pessoa Idosa, em 2003, contribuiu para assegurar diversos direitos às pessoas idosas. Você já ouviu falar desse documento? Conhece os direitos prescritos às pessoas idosas? Analise os exemplos a seguir.

Às pessoas idosas deve ser garantido o direito à vida, à saúde, à alimentação, ao lazer, à cultura e ao esporte.

Pessoas idosas praticando esporte ao ar livre, em 2023.

Toda pessoa idosa tem o direito de exercer atividade profissional, respeitando suas condições físicas, intelectuais e psíquicas.

Pessoa idosa trabalhando, em 2023.

O atendimento preferencial imediato e individualizado também é direito da pessoa idosa.

Profissional da saúde prestando atendimento prioritário individual a uma pessoa idosa, em 2022.

130

Desenvolvimento sustentável

Nesta seção, você vai trabalhar com os **Objetivos de Desenvolvimento Sustentável** (ODS), entendendo como eles se alinham com a Agenda 2030. A principal proposta dela é ajudar você a reconhecer a importância desses objetivos como parte de uma ação global, mostrando seus desdobramentos práticos em diversos contextos.


TRABALHO E JUVENTUDES

A relação do topógrafo com a Geometria

Como vimos, a Geometria analítica pode determinar a distância entre dois ou mais pontos por meio de coordenadas no plano.

Além dos matemáticos, os topógrafos usam a Geometria para medir, calcular e posteriormente mapear os ângulos, as alturas, os desníveis e a distância entre pontos de uma determinada porção da superfície terrestre. Nesse tipo de trabalho, o levantamento topográfico é fundamental para a elaboração e a execução de diversos projetos, principalmente os da construção civil.

Os topógrafos podem atuar em projetos públicos, participando de estudos para a construção de avenidas, viadutos, túneis, usinas hidrelétricas etc. Já em projetos privados, seus estudos podem favorecer a construção de moradias, de estabelecimentos comerciais, de indústrias, entre outras possibilidades.

Profissional fazendo levantamento topográfico para execução de um projeto em construção civil.

Observação

Para se tornar um topógrafo, é necessário realizar um curso técnico específico ou graduar-se em cursos superiores como Engenharia Civil e Engenharia de Agrimensura e, posteriormente, cursar uma pós-graduação na área, além de estar registrado no Conselho de Engenharia, Arquitetura e Agronomia (CREA).

É recomendável que, além de conhecimentos matemáticos, o topógrafo tenha habilidades para usar instrumentos tecnológicos e *softwares* de processamento de dados, já que seus equipamentos de trabalho exigem o domínio de ferramentas de alta tecnologia. OBJETO DIGITAL *Infográfico clicável:* Como funciona o teodolito óptico-mecânico

Atividades

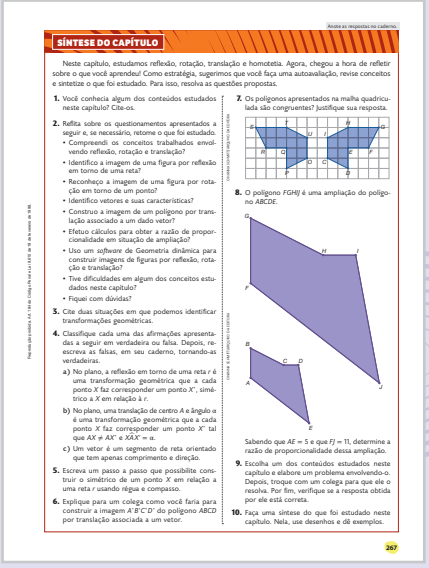
Anote as respostas no caderno.

1. Você já conhecia o trabalho de um topógrafo ou em algum momento presenciou um levantamento topográfico? O que você achou dessa profissão?
2. Se você fosse um topógrafo, em qual tipo de projeto você atuaria? Conte aos colegas explicando o porquê da sua escolha.
3. Junte-se a um colega e pesquisem em livros ou na internet outras três profissões que aplicam a Geometria analítica. Anotem os nomes e escrevam qual é a finalidade em cada uma delas. Depois, apresentem o resultado da pesquisa para os demais colegas.

227

Trabalho e juventudes

Nesta seção, você vai explorar temas relacionados ao mundo do trabalho, aprofundando sua compreensão e valorização das diversas profissões, além de mapear as possibilidades de inserção profissional e refletir sobre o impacto de cada profissão na sociedade.


Anote as respostas no caderno.

SÍNTESE DO CAPÍTULO

Neste capítulo, estudamos reflexão, rotação, translação e homotetia. Agora, chegou a hora de refletir sobre o que você aprendeu! Como estratégia, sugerimos que você faça uma autoavaliação, revise conceitos e sintetize o que foi estudado. Para isso, resolva as questões propostas.

1. Você conhecia algum dos conteúdos estudados neste capítulo? Cite-os.
2. Reflita sobre os questionamentos apresentados a seguir e, se necessário, retome o que foi estudado.
   - Compreendi os conceitos trabalhados envolvendo reflexão, rotação e translação?
   - Identifico a imagem de uma figura por reflexão em torno de uma reta?
   - Reconheço a imagem de uma figura por rotação em torno de um ponto?
   - Identifico vetores e suas características?
   - Construo a imagem de um polígono por translação associado a um dado vetor?
   - Efetuo cálculos para obter a razão de proporcionalidade em situação de ampliação?
   - Uso um *software* de Geometria dinâmica para construir imagens de figuras por reflexão, rotação e translação?
   - Tive dificuldades em algum dos conceitos estudados neste capítulo?
   - Fiquei com dúvidas?
3. Cite duas situações em que podemos identificar transformações geométricas.
4. Classifique cada uma das afirmações apresentadas a seguir em verdadeira ou falsa. Depois, reescreva as falsas, em seu caderno, tornando-as verdadeiras.
   a) No plano, a reflexão em torno de uma reta r é uma transformação geométrica que a cada ponto X faz corresponder um ponto X', simétrico a X em relação à r.
   b) No plano, uma translação de centro A e ângulo α é uma transformação geométrica que a cada ponto X faz corresponder um ponto X' tal que $AX \neq AX'$ e $\widehat{XAX'} = \alpha$.
   c) Um vetor é um segmento de reta orientado que tem apenas comprimento e direção.
5. Escreva um passo a passo que possibilite construir o simétrico de um ponto X em relação a uma reta r usando régua e compasso.
6. Explique para um colega como você faria para construir a imagem $A'B'C'D'$ do polígono $ABCD$ por translação associada a um vetor.
7. Os polígonos apresentados na malha quadriculada são congruentes? Justifique sua resposta.
8. O polígono $FGHIJ$ é uma ampliação do polígono $ABCDE$.

Sabendo que $AE = 5$ e que $FJ = 11$, determine a razão de proporcionalidade dessa ampliação.

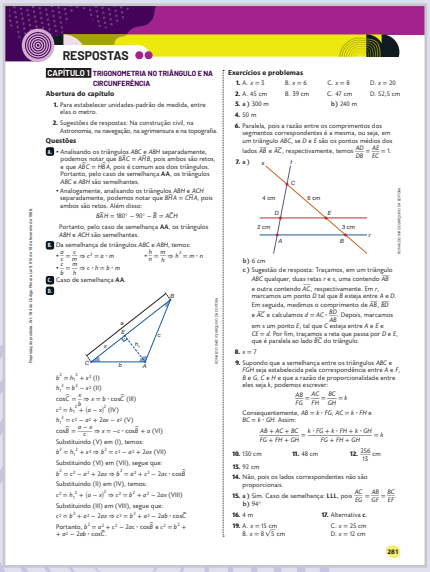
9. Escolha um dos conteúdos estudados neste capítulo e elabore um problema envolvendo-o. Depois, troque com um colega para que ele o resolva. Por fim, verifique se a resposta obtida por ele está correta.
10. Faça uma síntese do que foi estudado neste capítulo. Nela, use desenhos e dê exemplos.

267

Síntese do capítulo

Nesta seção, você pode verificar seus conhecimentos sobre os principais conteúdos estudados no capítulo.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.



RESPOSTAS

CAPÍTULO 1 TRIGONOMETRIA NO TRIÂNGULO E NA CIRCUNFERÊNCIA

Abertura do capítulo

1. Para estabelecer unidades-padrão de medida, entre elas o metro.

2. Sugestões de respostas: Na construção civil, na Astronomia, na navegação, na agrimensura e na topografia.

Questões

1. • Analisando os triângulos ABC e ABH separadamente, podemos notar que $BAC = AHB$, pois ambos são retos, e que $ABC = HBA$, pois é comum aos dois triângulos. Portanto, pelo caso de semelhança **AA**, os triângulos ABC e ABH são semelhantes.

• Analogamente, analisando os triângulos ABH e ACH separadamente, podemos notar que $BHA = CHA$, pois ambos são retos. Além disso:

$BAH = 180° - 90° - \hat{B} = A\hat{C}H$

Portanto, pelo caso de semelhança **AA**, os triângulos ABH e ACH são semelhantes.

2. Os semelhança de triângulos ABC e ABH, temos:

• $\frac{a}{c} = \frac{c}{m} \Rightarrow c^2 = a \cdot m$ • $\frac{b}{a} = \frac{m}{b} \Rightarrow b^2 = m \cdot n$

• $\frac{c}{b} = \frac{m}{h} \Rightarrow c \cdot h = b \cdot m$

3. Caso de semelhança **AA**.

4.

$b^2 = h_1^2 + x^2$ (I)

$h_1^2 = b^2 - x^2$ (II)

$\cos\hat{C} = \frac{x}{b} \Rightarrow x = b \cdot \cos\hat{C}$ (III)

$c^2 = h_1^2 + (a - x)^2$ (IV)

$h_1^2 = c^2 - a^2 + 2ax - x^2$ (V)

$\cos\hat{B} = \frac{a-x}{c} \Rightarrow x = a - c \cdot \cos\hat{B} + a$ (VI)

Substituindo (V) em (I), temos:

$b^2 = h_1^2 + x^2 \Rightarrow b^2 = c^2 - a^2 + 2ax$ (VII)

Substituindo (VI) em (VII), segue que:

$b^2 = c^2 - a^2 + 2ax \Rightarrow b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\hat{B}$

Substituindo (III) em (IV), temos:

$c^2 = h_1^2 + (a - x)^2 \Rightarrow c^2 = b^2 + a^2 - 2ax$ (VIII)

Substituindo (III) em (VIII), segue que:

$c^2 = b^2 + a^2 - 2ax \Rightarrow c^2 = b^2 + a^2 - 2ab \cdot \cos\hat{C}$

Portanto, $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\hat{B}$ e $c^2 = b^2 + a^2 - 2ab \cdot \cos\hat{C}$.

Exercícios e problemas

1. A. $x = 3$ B. $x = 6$ C. $x = 8$ D. $x = 20$

2. A. 45 cm B. 39 cm C. 47 cm D. 52,5 cm

3. a) 300 m b) 240 m

4. 50 m

6. Paralela, pois a razão entre os comprimentos dos segmentos correspondentes é a mesma, ou seja, em um triângulo ABC, se D e E são os pontos médios dos lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$, respectivamente, temos $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} = 1$.

7. a)

b) 6 cm

c) Sugestão de resposta: Traçamos, em um triângulo ABC qualquer, duas retas r e s, uma contendo $\overline{AB}$ e outra contendo $\overline{AC}$, respectivamente. Em r, marcamos um ponto D tal que B esteja entre A e D. Em seguida, medimos o comprimento de $\overline{AB}$, $\overline{BD}$ e $\overline{AC}$ e calculamos $d = AC \cdot \frac{BD}{AB}$. Depois, marcamos em s um ponto E, tal que C esteja entre A e E e $CE = d$. Por fim, traçamos a reta que passa por D e E, que é paralela ao lado $\overline{BC}$ do triângulo.

8. $x = 7$

9. Supondo que a semelhança entre os triângulos ABC e FGH seja estabelecida pela correspondência entre A e F, B e G, C e H e que a razão de proporcionalidade entre eles seja k, podemos escrever:

$\frac{AB}{FG} = \frac{AC}{FH} = \frac{BC}{GH} = k$

Consequentemente, $AB = k \cdot FG$, $AC = k \cdot FH$ e $BC = k \cdot GH$. Assim:

$\frac{AB + AC + BC}{FG + FH + GH} = \frac{k \cdot FG + k \cdot FH + k \cdot GH}{FG + FH + GH} = k$

10. 130 cm **11.** 48 cm **12.** $\frac{156}{13}$ cm

13. 92 cm

14. Não, pois os lados correspondentes não são proporcionais.

15. a) Sim. Caso de semelhança: **LLL**, pois $\frac{AC}{EG} = \frac{AB}{GF} = \frac{BC}{EF}$.

b) 94°

16. 4 m **17.** Alternativa **c**.

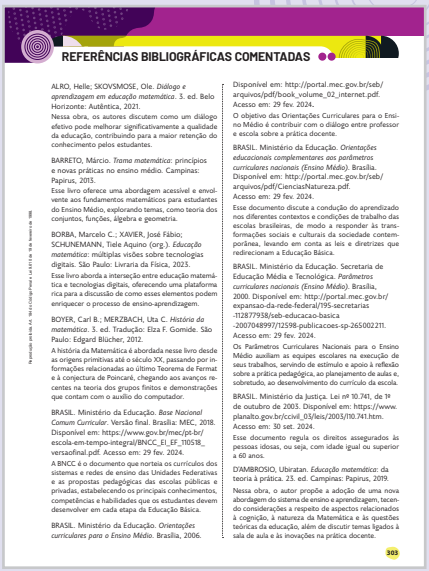
19. A. $x = 15$ cm C. $x = 25$ cm

B. $x = 8\sqrt{5}$ cm D. $x = 12$ cm

281

Respostas

Nesta seção, estão as respostas de cálculo de tarefas, atividades e questões deste volume.



REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS COMENTADAS

ALRO, Helle; SKOVSMOSE, Ole. *Diálogo e aprendizagem em educação matemática*. 3. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2021.
Nessa obra, os autores discutem como um diálogo efetivo pode melhorar significativamente a qualidade da educação, contribuindo para a maior retenção do conhecimento pelos estudantes.

BARRETO, Márcio. *Trama matemática*: princípios e novas práticas no ensino médio. Campinas: Papirus, 2015.
Esse livro oferece uma abordagem acessível e envolvente aos fundamentos matemáticos para estudantes do Ensino Médio, explorando temas, como teoria dos conjuntos, funções, álgebra e geometria.

BORBA, Marcelo C.; XAVIER, José Fábio; SCHUNEMANN, Tiele Aquino (org.). *Educação matemática*: múltiplas vozes sobre tecnologias digitais. São Paulo: Livraria da Física, 2023.
Esse livro aborda a interseção entre educação matemática e tecnologias digitais, oferecendo uma plataforma rica para a discussão de como esses elementos podem enriquecer o processo de ensino-aprendizagem.

BOYER, Carl B.; MERZBACH, Uta C. *História da matemática*. 3. ed. Tradução: Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher, 2012.
A história da Matemática é abordada nesse livro desde as origens primitivas até o século XX, passando por informações relacionadas ao último Teorema de Fermat e à conjectura de Poincaré, chegando aos avanços recentes na teoria dos grupos finitos e demonstrações que contam com o auxílio do computador.

BRASIL. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*. Versão final. Brasília: MEC, 2018. Disponível em: https://www.gov.br/mec/pt-br/escola-em-tempo-integral/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal.pdf. Acesso em: 29 fev. 2024.
A BNCC é o documento que norteia os currículos dos sistemas e redes de ensino das Unidades Federativas e as propostas pedagógicas das escolas públicas e privadas, estabelecendo os principais conhecimentos, competências e habilidades que os estudantes devem desenvolver em cada etapa da Educação Básica.

BRASIL. Ministério da Educação. *Orientações curriculares para o Ensino Médio*. Brasília, 2006. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/book_volume_02_internet.pdf. Acesso em: 29 fev. 2024.
O objetivo das Orientações Curriculares para o Ensino Médio é contribuir com o diálogo entre professor e escola sobre a prática docente.

BRASIL. Ministério da Educação. *Orientações educacionais complementares aos parâmetros curriculares nacionais (Ensino Médio)*. Brasília. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf. Acesso em: 29 fev. 2024.
Esse documento discute a condução do aprendizado nos diferentes contextos e condições de trabalho das escolas brasileiras, de modo a responder às transformações sociais e culturais da sociedade contemporânea, levando em conta as leis e diretrizes que redirecionam a Educação Básica.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. *Parâmetros curriculares nacionais (Ensino Médio)*. Brasília, 2000. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/expansao-da-rede-federal/195-secretarias-112877938/seb-educacao-basica-200704899712598-publicacoes-sp-265002211. Acesso em: 29 fev. 2024.
Os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio auxiliam as equipes escolares na execução de seus trabalhos, servindo de estímulo e apoio à reflexão sobre a prática pedagógica, ao planejamento de aulas e, sobretudo, ao desenvolvimento do currículo da escola.

BRASIL. Ministério da Justiça. Lei nº 10.741, de 1º de outubro de 2003. Disponível em: https://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/2003/l10.741.htm. Acesso em: 30 set. 2024.
Esse documento regula os direitos assegurados às pessoas idosas, ou seja, com idade igual ou superior a 60 anos.

D'AMBROSIO, Ubiratan. *Educação matemática*: da teoria à prática. 23. ed. Campinas: Papirus, 2019.
Nessa obra, o autor propõe a adoção de uma nova abordagem do sistema de ensino e aprendizagem, tecendo considerações a respeito de aspectos relacionados à cognição, à natureza da Matemática e às questões teóricas da educação, além de discutir temas ligados à sala de aula e às inovações na prática docente.

303

Referências bibliográficas comentadas

Esta seção lista as principais referências teóricas utilizadas como base para a elaboração deste livro.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Dica

Boxe com informações que auxiliam você na resolução de exercícios e problemas.

Observação

Boxe com informações complementares.

Vocabulário

Os significados de algumas palavras que você provavelmente não conheça serão apresentados na página, a fim de auxiliá-lo na compreensão de informações. Essas palavras estão destacadas no texto.

Para fixar

Boxe com informações complementares sobre o conteúdo matemático trabalhado.

Para expandir

Boxe com sugestões de livros, textos ou vídeos com informações complementares ao contexto relacionado.

Ser consciente

Nas tarefas com esse ícone, você refletirá a respeito de diferentes assuntos, como ética, educação financeira, saúde e cidadania, possibilitando uma avaliação cidadã e social da temática abordada.

Desafio

As tarefas com esse ícone têm caráter desafiador, possibilitando o desenvolvimento de estratégias próprias de resolução.

OBJETO DIGITAL

Esse ícone indica que você pode acessar um objeto digital relacionado à atividade ou ao conteúdo.

Lista de siglas

Elenca os significados das siglas de vestibulares e exames de larga escala usadas no volume.

OBJETIVOS DE DESENVOLVIMENTO SUSTENTÁVEL

Você sabia que em 2015 foi assinado, na sede da Organização das Nações Unidas (ONU), em Nova York, nos Estados Unidos, um documento em que 193 países, incluindo o Brasil, se comprometeram a tomar medidas importantes para acabar com a pobreza, proteger o meio ambiente e garantir que as pessoas possam desfrutar de paz e de prosperidade? Trata-se da **Agenda 2030**. Nela, são apresentados **17 Objetivos de Desenvolvimento Sustentável**, os ODS, que determinam metas transformadoras para promover o desenvolvimento sustentável até 2030. Vamos conhecê-los?



Para que a Agenda 2030 seja cumprida no Brasil e no mundo, é necessário promover engajamento e parcerias entre governos, setor privado e sociedade civil. Além disso, o acompanhamento e a avaliação da implementação devem ocorrer em níveis global, nacional e regional.

RELEITURA DOS ÍCONES DA ONU POR VINICIUS ROSSIGNOL FELIPE

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

A seguir, apresentamos cada objetivo da Agenda 2030. No decorrer deste livro, você vai encontrar indicações de ODS sempre que houver propostas, temas ou conceitos relacionados a eles.

ODS 1 – ERRADICAÇÃO DA POBREZA	Acabar com a pobreza em todas as formas e em todos os lugares.
ODS 2 – FOME ZERO E AGRICULTURA SUSTENTÁVEL	Erradicar a fome, alcançar a segurança alimentar, melhorar a nutrição e promover a agricultura sustentável.
ODS 3 – SAÚDE E BEM-ESTAR	Garantir o acesso à saúde de qualidade e promover o bem-estar para todos, em todas as idades.
ODS 4 – EDUCAÇÃO DE QUALIDADE	Garantir o acesso à educação inclusiva, de qualidade e equitativa e promover oportunidades de aprendizagem ao longo da vida para todos.
ODS 5 – IGUALDADE DE GÊNERO	Alcançar a igualdade de gênero e empoderar todas as mulheres e meninas.
ODS 6 – ÁGUA POTÁVEL E SANEAMENTO	Garantir a disponibilidade e a gestão sustentável da água potável e do saneamento para todos.
ODS 7 – ENERGIA LIMPA E ACESSÍVEL	Garantir o acesso a fontes de energia confiáveis, sustentáveis e modernas para todos.
ODS 8 – TRABALHO DECENTE E CRESCIMENTO ECONÔMICO	Promover o crescimento econômico inclusivo e sustentável, com emprego pleno e produtivo e trabalho digno para todos.
ODS 9 – INDÚSTRIA, INOVAÇÃO E INFRAESTRUTURA	Construir infraestruturas resilientes, promover a industrialização inclusiva e sustentável e fomentar a inovação.
ODS 10 – REDUÇÃO DAS DESIGUALDADES	Reduzir as desigualdades no interior dos países e entre países.
ODS 11 – CIDADES E COMUNIDADES SUSTENTÁVEIS	Tornar as cidades e comunidades mais inclusivas, seguras, resilientes e sustentáveis.
ODS 12 – CONSUMO E PRODUÇÃO RESPONSÁVEIS	Garantir padrões de consumo e de produção sustentáveis.
ODS 13 – AÇÃO CONTRA A MUDANÇA GLOBAL DO CLIMA	Adotar medidas urgentes para combater as alterações climáticas e os seus impactos.
ODS 14 – VIDA NA ÁGUA	Conservar e usar de forma responsável os oceanos, os mares e os recursos marinhos para o desenvolvimento sustentável.
ODS 15 – VIDA TERRESTRE	Proteger, restaurar e promover o uso sustentável dos ecossistemas terrestres, gerir de forma sustentável as florestas, combater a desertificação, reverter a degradação dos solos e preservar a biodiversidade.
ODS 16 – PAZ, JUSTIÇA E INSTITUIÇÕES EFICAZES	Promover sociedades pacíficas e inclusivas para o desenvolvimento sustentável, proporcionar o acesso à justiça para todos e construir instituições eficazes, responsáveis e inclusivas em todos os níveis.
ODS 17 – PARCERIAS E MEIOS DE IMPLEMENTAÇÃO	Reforçar os meios de implementação e revitalizar a parceria global para o desenvolvimento sustentável.

Fonte de pesquisa: ORGANIZAÇÃO DAS NAÇÕES UNIDAS. *Sobre o nosso trabalho para alcançar os Objetivos de Desenvolvimento Sustentável no Brasil.* Disponível em: https://brasil.un.org/pt-br/sdgs. Acesso em: 22 set. 2024.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

VINICIUS ROSSIGNOL FELIPE

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1 TRIGONOMETRIA NO TRIÂNGULO E NA CIRCUNFERÊNCIA 14

Teorema de Tales 16

Exercícios e problemas 19

Semelhança de triângulos 21

Casos de semelhança de triângulos 21

Exercícios e problemas 24

Relações métricas no triângulo retângulo 25

Exercícios e problemas 27

EDUCAÇÃO MIDIÁTICA 28

Os influenciadores digitais influenciam? 28

Teorema de Pitágoras 30

Exercícios e problemas 33

Acessando tecnologias 35

Trigonometria no triângulo retângulo 37

Relações envolvendo seno, cosseno e tangente 39

Exercícios e problemas 41

Ângulos notáveis 42

Tabela trigonométrica 43

Exercícios e problemas 46

Seno e cosseno de ângulos suplementares 51

Lei dos senos 51

Exercícios e problemas 53

Lei dos cossenos 56

Exercícios e problemas 59

Trigonometria na circunferência 61

Arcos da circunferência 61

Medida de um arco de circunferência 62

Exercícios e problemas 64

Circunferência trigonométrica 66

Exercícios e problemas 68

Seno, cosseno e tangente de um arco 69

Redução ao 1º quadrante 72

TRABALHO E JUVENTUDES 75

A profissão de astrônomo 75

Exercícios e problemas 76

SÍNTESE DO CAPÍTULO 77

CAPÍTULO 2 FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS 78

Estudando funções trigonométricas 80

Função seno 81

Função cosseno 82

Exercícios e problemas 84

Funções do tipo trigonométricas: $f(x) = a + b \cdot \text{sen}(cx + d)$ e $g(x) = a + b \cdot \cos(cx + d)$ 85

TRABALHO E JUVENTUDES 89

O que faz um engenheiro de som? 89

Exercícios e problemas 90

SÍNTESE DO CAPÍTULO 93

CAPÍTULO 3 FÓRMULAS DE TRANSFORMAÇÃO, RELAÇÕES E EQUAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS 94

Fórmulas de transformação 96

Exercícios e problemas 98

Relações trigonométricas 99

Exercícios e problemas 100

Equações trigonométricas 101

Resolvendo por etapas 101

Exercícios e problemas 105

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

DESENVOLVIMENTO SUSTENTÁVEL 106
Cuidando da pressão arterial 106
TRABALHO E JUVENTUDES 108
O que faz um sismólogo? 108
SÍNTESE DO CAPÍTULO 109

CAPÍTULO 4 LADRILHAMENTO E ÁREA DE FIGURAS PLANAS 110

Alguns conceitos necessários 112
Polígonos 112
Ladrilhamento do plano 112
Ladrilhamento regular 113
Resolvendo por etapas 114
Exercícios e problemas 116
Ladrilhamento semirregular 117
Exercícios e problemas 121
Estudando área de figuras planas 122
Área do quadrado, do retângulo, do paralelogramo e do losango 122
Área do quadrado 122
Área do retângulo 123
Área do paralelogramo 124
Área do losango 125
Exercícios e problemas 127
DESENVOLVIMENTO SUSTENTÁVEL 130
As pessoas idosas e o direito de ir e vir 130
Área do triângulo e do trapézio 132
Área do triângulo 132
Área do trapézio 133
Exercícios e problemas 136
Cálculo da área de um triângulo utilizando trigonometria 141
Exercícios e problemas 142
Área de polígonos regulares 143
Acessando tecnologias 146
Razão entre áreas de figuras planas 147
Exercícios e problemas 147
Área do círculo 149
Área do setor circular 150
Área da coroa circular 150
TRABALHO E JUVENTUDES 152
Qual é a função de um pedreiro? 152
Exercícios e problemas 153
SÍNTESE DO CAPÍTULO 157

CAPÍTULO 5 MATRIZES, DETERMINANTE E SISTEMAS LINEARES 158

Matrizes 160
Alguns tipos de matriz 162
Igualdade de matrizes 164
Matriz transposta 165
Matriz simétrica 165
Exercícios e problemas 166
Adição e subtração de matrizes 169
Adição de matrizes 169
Subtração de matrizes 170
Exercícios e problemas 171
Multiplicação de um número real por uma matriz 173
Exercícios e problemas 173
Multiplicação de matrizes 174
Exercícios e problemas 177
Matriz inversa 178

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Exercícios e problemas 178

EDUCAÇÃO MIDIÁTICA 180

Criptografia e segurança digital 180

Equações envolvendo matrizes 182

Exercícios e problemas 183

DESENVOLVIMENTO SUSTENTÁVEL 184

Menos sódio, mais saúde 184

TRABALHO E JUVENTUDES 186

O que faz um criptógrafo? 186

Determinante de uma matriz 187

Determinante de uma matriz de ordem 1 187

Determinante de uma matriz de ordem 2 187

Determinante de uma matriz de ordem 3 187

Exercícios e problemas 188

Teorema de Jacobi e Teorema de Binet 189

Exercícios e problemas 189

Introdução aos sistemas lineares 190

Equação linear 190

Sistema linear 192

Solução de um sistema linear 192

Sistema linear homogêneo 192

Exercícios e problemas 195

Matrizes associadas a um sistema linear 198

Classificação de um sistema linear 198

Exercícios e problemas 202

Escalonamento de um sistema linear 205

Sistemas lineares equivalentes 205

Sistema linear escalonado 206

Exercícios e problemas 208

Procedimentos para escalonar um sistema linear 209

Exercícios e problemas 211

Discussão de um sistema linear 213

Exercícios e problemas 214

SÍNTESE DO CAPÍTULO 215

CAPÍTULO 6 GEOMETRIA ANALÍTICA 216

Introdução 218

Coordenadas na reta 218

Coordenadas no plano 220

Exercícios e problemas 220

Distância entre dois pontos 223

TRABALHO E JUVENTUDES 227

A relação do topógrafo com a Geometria 227

Exercícios e problemas 228

Coordenadas do ponto médio de um segmento 230

Baricentro de um triângulo 231

Resolvendo por etapas 232

Exercícios e problemas 235

Condição de alinhamento de três pontos 237

Exercícios e problemas 238

Área da região determinada por um triângulo 240

Exercícios e problemas 241

Equação da reta 242

Equação geral da reta 242

Exercícios e problemas 244

SÍNTESE DO CAPÍTULO 247

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

CAPÍTULO 7 TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS 248

Estudando transformações geométricas 250

Reflexão 250

Exercícios e problemas 251

Rotação 253

Exercícios e problemas 253

Translação 255

Exercícios e problemas 256

Acessando tecnologias 257

Composição de transformações 260

TRABALHO E JUVENTUDES 262

O trabalho do artista plástico 262

Exercícios e problemas 263

Homotetia 264

Exercícios e problemas 265

Acessando tecnologias 266

SÍNTESE DO CAPÍTULO 267

Ação e participação 268

Projeto **A**: Grafite na escola 270

Projeto **B**: Matemática na música 274

Ampliando seus conhecimentos 278

Respostas 281

Referências bibliográficas comentadas 303

Lista de siglas 304

OBJETOS DIGITAIS

***Podcast*: Mitos e Matemática: as lendas de Tales de Mileto** 16

***Podcast*: Algoritmos das redes sociais** 28

***Carrossel de imagens*: Contribuições para a Trigonometria** 37

***Infográfico clicável*: Regras de circulação na rotatória de pista dupla** 61

***Mapa clicável*: O eclipse solar de 14/10/2023 no Brasil** 75

***Vídeo*: A roda-gigante e a função do tipo trigonométrica** 85

***Infográfico clicável*: Duração do dia: um fenômeno periódico natural** 92

***Vídeo*: Descoberto um novo ladrilhamento não periódico** 120

***Carrossel de imagens*: Mitos e verdades sobre a razão áurea** 128

***Mapa clicável*: Mapa de símbolos proporcionais** 149

***Infográfico clicável*: Sistema de irrigação por pivô central fixo** 154

***Carrossel de imagens*: Mulheres na política** 169

***Podcast*: Criptografia na Segunda Guerra Mundial** 180

***Vídeo*: Desafio lógico dos sistemas lineares com figuras** 192

***Podcast*: Geometria analítica: Descartes e Fermat** 218

***Infográfico clicável*: Como funciona o teodolito óptico-mecânico** 227

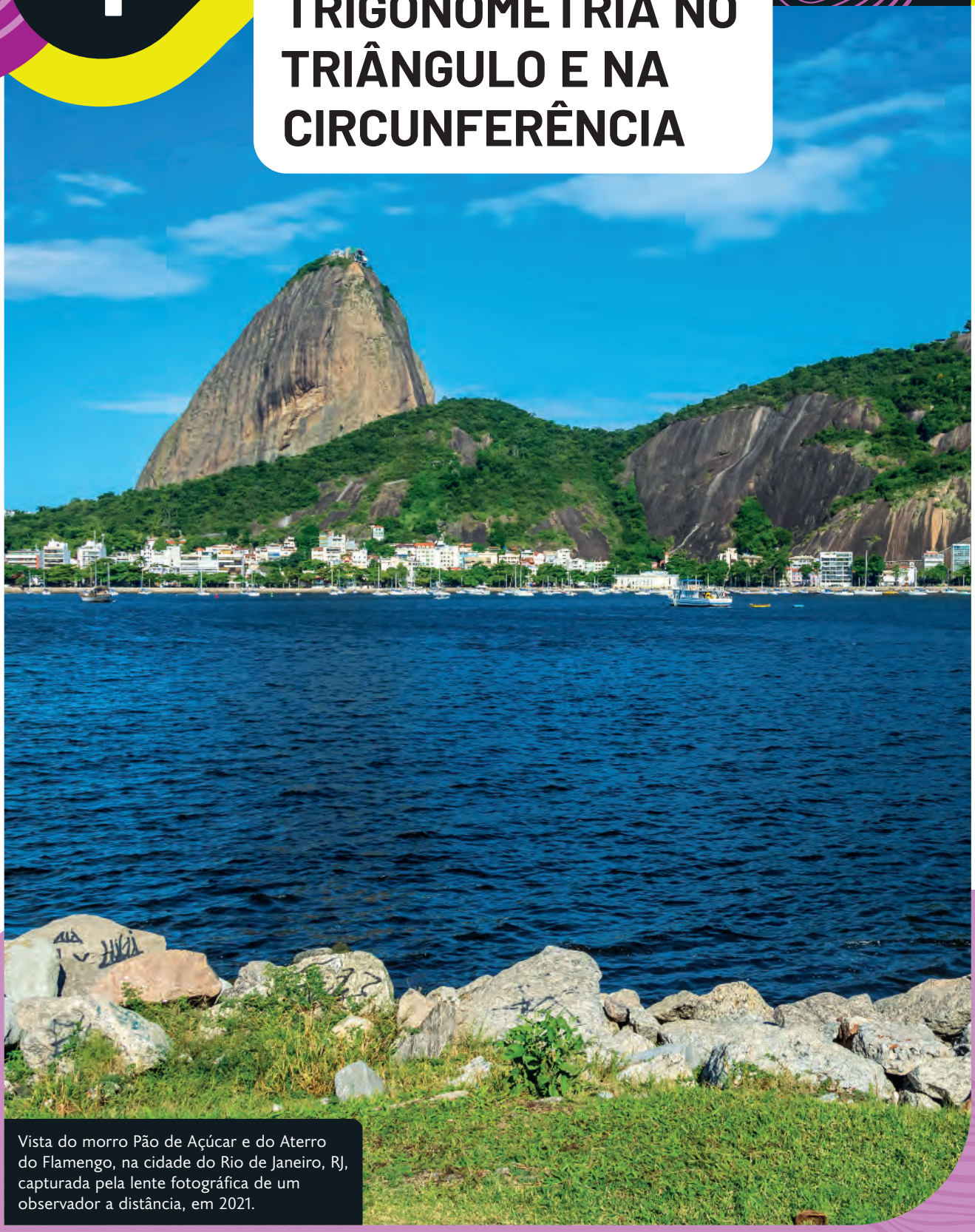
***Vídeo*: A tesselação de Escher** 263

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

CAPÍTULO

1

TRIGONOMETRIA NO TRIÂNGULO E NA CIRCUNFERÊNCIA



PINHEIRO_PHOTOS/SHUTTERSTOCK

Vista do morro Pão de Açúcar e do Aterro do Flamengo, na cidade do Rio de Janeiro, RJ, capturada pela lente fotográfica de um observador a distância, em 2021.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

A Trigonometria nos permite calcular medidas não acessadas facilmente, como a altura de montanhas, a largura de rios e até a distância da Terra à Lua. Outro exemplo é a distância entre o Polo Norte e a linha do equador, que corresponde a um quadrante do meridiano terrestre, obtida ainda no século XVIII, sem ao menos se deslocar até esses dois marcos. Uma curiosidade sobre essa medida é que ela ajudou a criar o sistema métrico decimal.

Antes do estabelecimento de unidades de medida padrão, comparar resultados de experimentos feitos em diferentes lugares ou épocas era difícil, pois cada região tinha seu próprio padrão. Para resolver isso, em 1789 foi criada a Comissão de Pesos e Medidas, que decidiu que a unidade-padrão do metro seria a décima milionésima parte da medida da distância entre o Polo Norte e a linha do equador.

Entre 1792 e 1799, Jean-Baptiste Joseph Delambre (1749-1822) e Pierre Méchain (1744-1804) realizaram uma expedição para obter essa medida indiretamente. Eles usaram uma série de medidas de comprimento menores, entre Dunquerque, na França, e Barcelona, na Espanha, além de um instrumento chamado círculo repetidor de borda, que permitia medir ângulos com grande precisão a partir de pontos de referência. Aplicando Trigonometria, calcularam a medida da distância entre o Polo Norte e a linha do equador. Dividiram essa medida por 10 000 000, definindo assim a primeira unidade-padrão do metro, materializada em uma barra de platina-irídio, chamada barra do metro padrão.

Porém, em 1983, para maior precisão, a 17ª Conferência de Pesos e Medidas redefiniu o metro como a medida da distância percorrida pela luz, no vácuo, em determinado intervalo de tempo.

Fonte de pesquisa: EVES, Howard. *Introdução à história da matemática*. Tradução: Hygino H. Domingues. 2. ed. Campinas: Editora da Unicamp, 2004.

Neste capítulo, você vai estudar:

- Teorema de Tales;
- semelhança de triângulos;
- relações métricas no triângulo retângulo;
- Teorema de Pitágoras;
- Trigonometria no triângulo retângulo;
- seno e cosseno de ângulos suplementares;
- Trigonometria na circunferência;
- seno, cosseno e tangente de um arco.

3. Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes respondam a esta questão com base em seus conhecimentos prévios, e alguns deles serão estudados neste capítulo. Eles podem dizer, por exemplo, que usariam a semelhança de triângulos.

Professor, professora: Oriente os estudantes a escrever as respostas no caderno.

1. Para que a Comissão de Pesos e Medidas foi criada em 1789?
Resposta: Para estabelecer unidades-padrão de medida, entre elas o metro.

2. Faça uma pesquisa para determinar outras situações em que a Trigonometria é utilizada. Em seguida, converse sobre essas aplicações com os colegas e o professor. Sugestões de resposta: Na construção civil, na Astronomia, na navegação, na agrimensura e na topografia.

3. Como você faria para determinar a medida do comprimento de um objeto grande e inacessível, como um morro ou um edifício, usando os conhecimentos de Matemática?

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

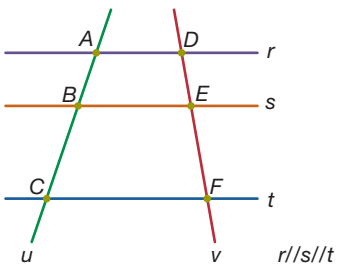
Teorema de Tales

Acredita-se que o grego Tales de Mileto, que viveu por volta da primeira metade do século VI a.C., tenha utilizado seus conhecimentos acerca de semelhança de triângulos para calcular a altura de uma pirâmide. O método empregado por ele na resolução desse problema resultou no que atualmente denominamos **Teorema de Tales**.

Para enunciar o Teorema de Tales, consideraremos inicialmente um feixe de retas paralelas e duas retas transversais.

Um conjunto de três ou mais retas paralelas contidas em um plano é chamado **feixe de retas paralelas**.

RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA



Observação

Na figura, *r*, *s* e *t* são **retas paralelas**, e *u* e *v*, **retas transversais**.

Observação

A fim de simplificar a escrita, não distinguiremos grandezas de suas respectivas medidas. Desse modo, utilizaremos expressões do tipo "segmento com 3 cm de comprimento" quando, na realidade, queremos nos referir à medida do comprimento do segmento, que nesse caso é 3 cm.

OBJETO DIGITAL
***Podcast*: Mitos e Matemática: as lendas de Tales de Mileto**

Os pontos determinados nas retas transversais pela mesma reta paralela são denominados pontos correspondentes. Na figura apresentada, os pontos *A* e *D* são correspondentes, assim como os pontos *C* e *F* e os pontos *B* e *E*.

Os segmentos determinados nas retas transversais pelo mesmo par de retas paralelas são denominados segmentos correspondentes. Na figura apresentada, os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{DE}$ são correspondentes, assim como os segmentos $\overline{BC}$ e $\overline{EF}$ e os segmentos $\overline{AC}$ e $\overline{DF}$.

De acordo com o Teorema de Tales:

Observação

Indicamos o comprimento de $\overline{AB}$ por *AB*.

Um feixe de retas paralelas determina, sobre duas retas transversais, segmentos correspondentes proporcionais.

Com base nesse teorema, em relação à figura anterior, temos:

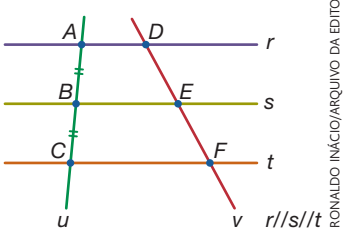
- $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$
- $\frac{AC}{AB} = \frac{DF}{DE}$
- $\frac{AC}{BC} = \frac{DF}{EF}$

Para demonstrar o Teorema de Tales, consideraremos dois casos.

1º caso

Considere um feixe de retas paralelas *r*, *s* e *t*, que divide duas transversais *u* e *v* de maneira que $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ tenham comprimentos iguais, ou seja, sejam congruentes $(\overline{AB} \cong \overline{BC})$.

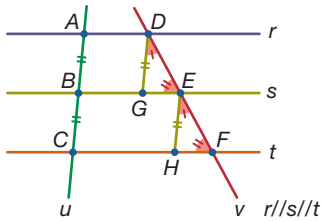
Vamos mostrar que $\overline{DE}$ e $\overline{EF}$ também são congruentes e, por consequência, $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

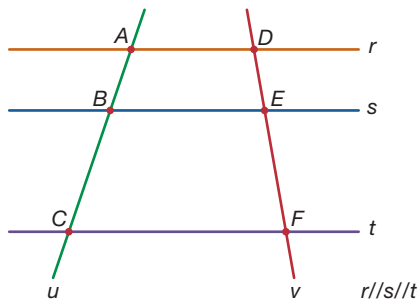
Traçando os segmentos $\overline{DG}$ e $\overline{EH}$, paralelos à reta u, obtemos os paralelogramos $ABGD$ e $BCHE$, de maneira que $AB = DG$ e $BC = EH$. Como $AB = BC$, temos $DG = EH$.



Consequentemente, pelo caso de congruência **LAA$_O$** (lado, ângulo, ângulo oposto), os triângulos DGE e EHF são congruentes. Portanto, $\overline{DE} \cong \overline{EF}$, ou seja, $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF} = 1$.

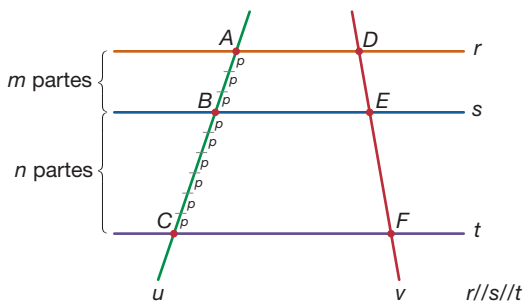
2º caso

Considere um feixe de retas paralelas r, s e t, que divide duas transversais u e v de maneira que $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ sejam comensuráveis.



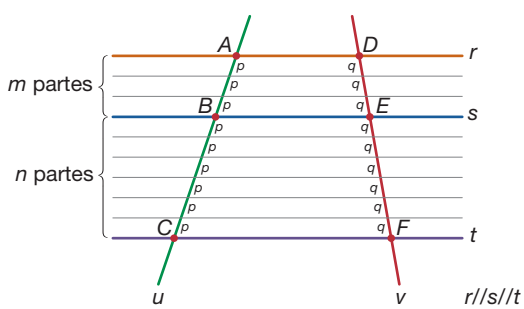
Vamos mostrar que $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$.

Como $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ são comensuráveis, existe um segmento p que cabe m vezes em $\overline{AB}$ e n vezes em $\overline{BC}$. Assim:



$$\frac{AB}{BC} = \frac{mp}{np} = \frac{m}{n}$$

Pelos pontos que dividem $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$, traçamos retas paralelas ao feixe de retas r, s e t.



Observação

Dois segmentos $\overline{XY}$ e $\overline{WZ}$ são comensuráveis quando existe um segmento x que cabe um número inteiro de vezes em $\overline{XY}$ e um número inteiro de vezes em $\overline{WZ}$.

Na figura apresentada, foi exemplificado o caso em que $m = 3$ e $n = 6$.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ ARQUIVO DA EDITORA

De acordo com o 1º caso, as retas paralelas determinam em $\overline{DE}$ e em $\overline{EF}$, respectivamente, m e n segmentos congruentes, cujo comprimento está indicado por q.

Assim:

$$\frac{DE}{EF} = \frac{mq}{nq} = \frac{m}{n}$$

Portanto, $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$.

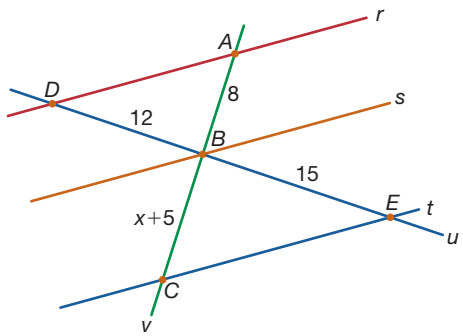
Demonstramos o Teorema de Tales para segmentos comensuráveis, porém ele também é válido para segmentos que não são comensuráveis.

Observação

É possível demonstrar que a recíproca do Teorema de Tales é verdadeira, ou seja, se um feixe de retas dividir duas transversais em partes proporcionais, as retas do feixe são paralelas. Contudo, não apresentaremos essa demonstração nesta coleção.

Exercícios e problemas resolvidos

R1. Calcule o valor de x sabendo que $r//s//t$.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

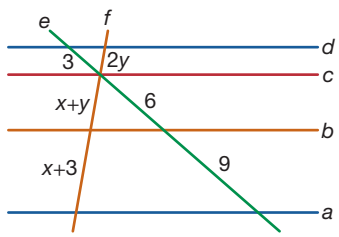
Resolução

Note que $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ estão contidos na reta v e $\overline{DB}$ e $\overline{BE}$ estão contidos na reta u.

De acordo com o Teorema de Tales, obtemos:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{DB}{BE} \Rightarrow \frac{8}{x+5} = \frac{12}{15} \Rightarrow 12x + 60 = 120 \Rightarrow 12x = 60 \Rightarrow x = 5$$

R2. Determine os valores de x e y sabendo que $a//b//c//d$.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Resolução

Utilizando o Teorema de Tales, temos:

- $\frac{3}{6} = \frac{2y}{x+y} \Rightarrow 3x + 3y = 12y \Rightarrow 3x = 9y \Rightarrow x = 3y$ (I)
- $\frac{6}{9} = \frac{x+y}{x+3} \Rightarrow 6x + 18 = 9x + 9y \Rightarrow 3x + 9y = 18$ (II)

Substituindo I em II, obtemos y.

$$3x + 9y = 18 \Rightarrow 3 \cdot (3y) + 9y = 18 \Rightarrow 18y = 18 \Rightarrow y = 1$$

Calculamos x substituindo o valor de y na igualdade $x = 3y$.

$$x = 3y \Rightarrow x = 3 \cdot 1 \Rightarrow x = 3$$

Portanto, $x = 3$ e $y = 1$.

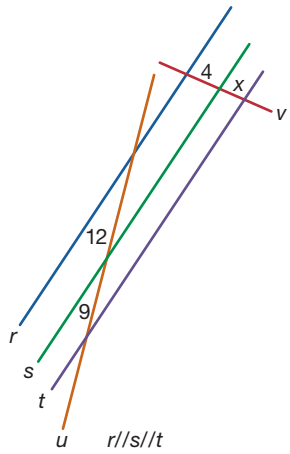
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Exercícios e problemas

Anote as respostas no caderno.

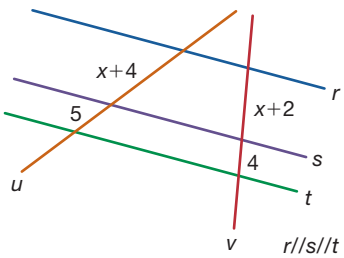
1. Determine o valor de x em cada figura.

A.



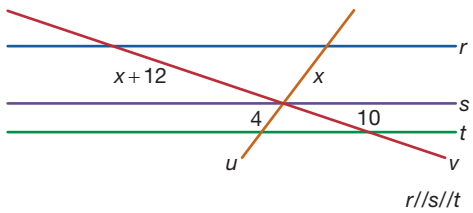
Resposta: $x = 3$

B.



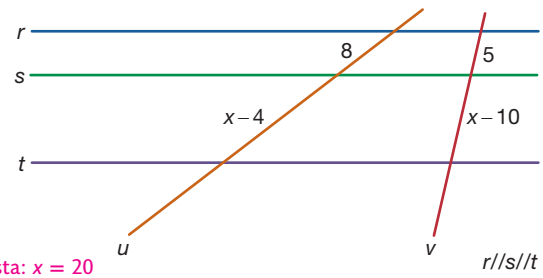
Resposta: $x = 6$

C.



Resposta: $x = 8$

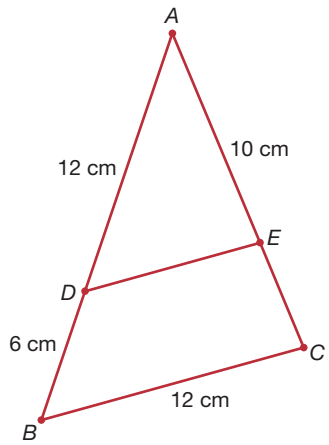
D.



Resposta: $x = 20$

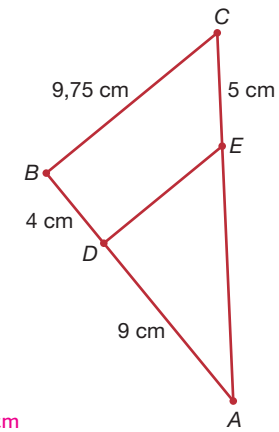
2. Em cada item, calcule o perímetro do triângulo ABC sabendo que $\overline{BC} // \overline{DE}$.

A.



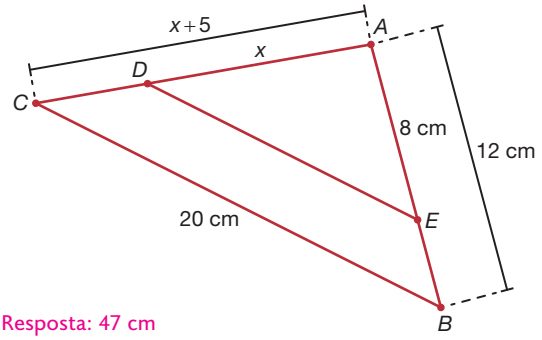
Resposta: 45 cm

B.



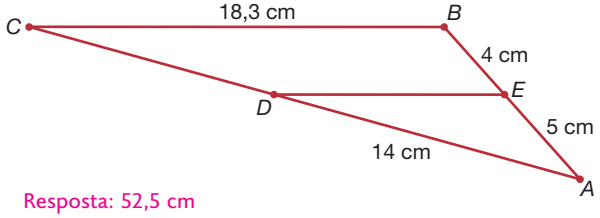
Resposta: 39 cm

C.



Resposta: 47 cm

D.



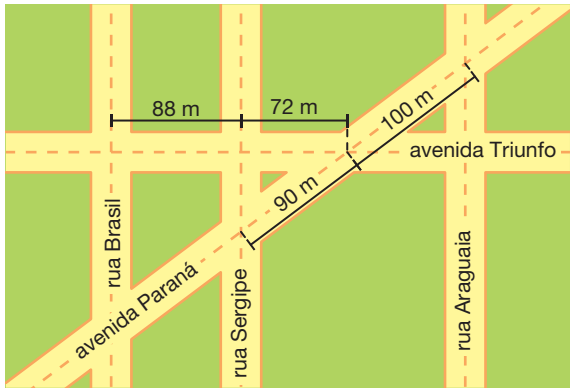
Resposta: 52,5 cm

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

3. Analise o esquema que representa parte de uma cidade.



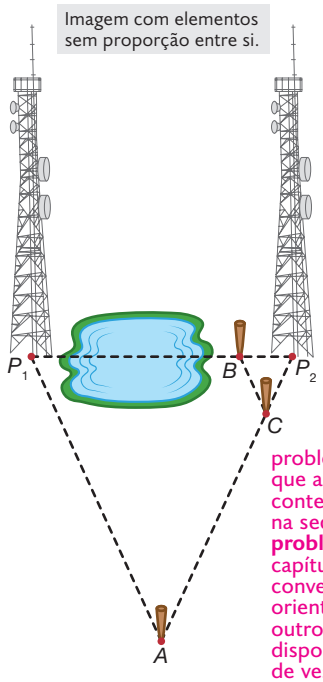
SERGIO L. FILHO/ARQUIVO DA EDITORA

Considerando as ruas como retas e sabendo que as ruas Brasil, Sergipe e Araguaia são paralelas, determine quantos metros um pedestre vai percorrer se caminhar em linha reta da esquina da rua:

a) Araguaia com a avenida Paraná à esquina da rua Brasil com a avenida Paraná. Resposta: 300 m

b) Brasil com a avenida Triunfo à esquina da rua Araguaia com a avenida Triunfo. Resposta: 240 m

4. Uma empresa de telefonia instalou duas torres idênticas (P_1 e P_2), uma em cada lado de uma lagoa, conforme o esquema a seguir, para passar por elas um cabo telefônico.



SERGIO L. FILHO/ARQUIVO DA EDITORA

Professor, professora: A tarefa **5** propõe aos estudantes que elaborem um problema utilizando os conceitos estudados, contribuindo assim para a ampliação do repertório de reflexões e questionamentos a respeito de determinadas situações. Antes de os estudantes elaborarem o problema, peça a eles que analisem os contextos propostos na seção **Exercícios e problemas** deste capítulo e, se julgar conveniente, oriente-os a investigar outros problemas disponíveis em provas de vestibular e Enem.

Para calcular o comprimento mínimo necessário de cabo (P_1P_2), foram fincadas estacas nos pontos A, B e C, de modo que $\overline{BC} // \overline{P_1A}$, e medidas as distâncias $AP_2 = 60$ m, $CP_2 = 12$ m e $BP_2 = 10$ m.

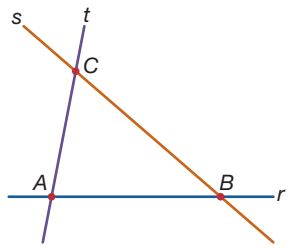
Quantos metros de cabo, no mínimo, foram utilizados entre P_1 e P_2? Resposta: 50 m

5. Elabore um problema envolvendo o Teorema de Tales. Em seguida, troque esse problema com um colega para que ele o resolva e, depois, verifique se a resposta dele está correta. Resposta pessoal. A resposta depende de cada enunciado elaborado pelos estudantes.

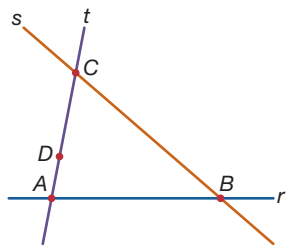
6. Em um triângulo qualquer, se traçarmos uma reta passando pelos pontos médios de dois de seus lados, ela será paralela ou concorrente a uma reta que contém o terceiro lado? Por quê? Resposta no final do **Livro do Estudante**.

7. Para traçar uma reta paralela a uma reta r dada, podemos realizar os seguintes passos.

1º. Traçamos duas retas s e t, concorrentes à r nos pontos A e B, tal que s e t se intersectem em C.

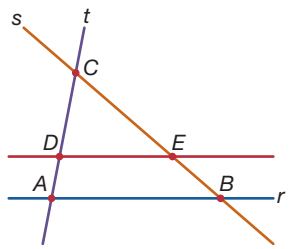


2º. Marcamos sobre t um ponto D a uma distância conveniente de A.



3º. Para obter o ponto E sobre a reta s, de maneira que $r // \overleftrightarrow{DE}$, utilizamos a igualdade $\frac{BE}{BC} = \frac{AD}{AC}$ para calcular a distância BE.

4º. Por fim, traçamos a reta $\overleftrightarrow{DE}$, paralela à r.



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

a) Utilizando esse método, trace em uma folha de papel duas retas paralelas para o caso em que $AC = 6$ cm, $AD = 2$ cm e $BC = 9$ cm. Resposta no final do **Livro do Estudante**.

b) De acordo com as medidas indicadas no item **a**, quantos centímetros tem $\overline{CE}$? Resposta: 6 cm

c) Com base no método apresentado, descreva o procedimento para traçar uma reta externa a um triângulo, que seja paralela a um de seus lados. Resposta no final do **Livro do Estudante**.

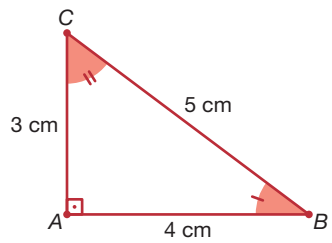
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

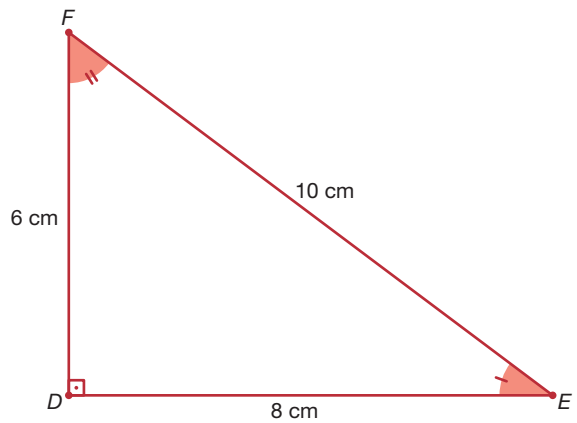
Semelhança de triângulos

Dois polígonos são **semelhantes** se têm os lados correspondentes proporcionais e os ângulos internos correspondentes congruentes.

Exemplo

Considere os triângulos *ABC* e *DEF*.





ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Esses triângulos são semelhantes, pois:

- os ângulos correspondentes são congruentes;

$$\hat{A} = \hat{D},\ \hat{B} = \hat{E} \text{ e } \hat{C} = \hat{F}$$

- os lados correspondentes são proporcionais.

$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF} = \frac{1}{2}$$

Professor, professora: Este tópico favorece o uso de *softwares* de Geometria dinâmica. No *site* do GeoGebra, *software* dinâmico de Matemática que representa conceitos de Geometria e Álgebra, é possível encontrar algumas tarefas envolvendo esse conteúdo. Disponível em: https://www.geogebra.org/search/semelhan%C3%A7a%20de%20triangulos. Acesso em: 20 set. 2024. Outras sugestões para a elaboração de tarefas envolvendo *softwares* de Geometria dinâmica e semelhança de triângulo podem ser encontradas no artigo "Atividades com o GeoGebra: uma proposta para o ensino de semelhança", de Marcos Fabrício Ferreira Pereira. Disponível em: https://jem.unifesspa.edu.br/images/2JEM/ANAIS/CC/ATIVIDADES_COM_O_GEOGEBRA_UMA_.pdf. Acesso em: 20 set. 2024.

Observação

No exemplo apresentado, a semelhança é estabelecida pela correspondência entre *A* e *D*, *B* e *E* e *C* e *F*.

Observação

Indicamos um ângulo e sua medida pelo mesmo símbolo.

O quociente comum entre o comprimento dos lados correspondentes é denominado **razão de proporcionalidade**.

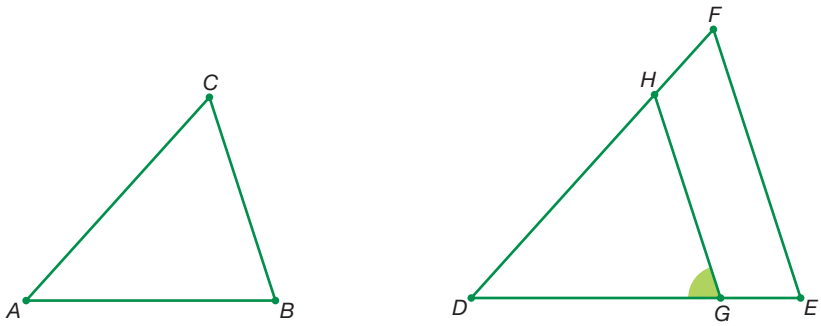
Porém, para verificar se dois triângulos são semelhantes, não é necessário analisar ambas as condições. A seguir, estudaremos os casos de semelhança de triângulos que estabelecem condições necessárias e suficientes para que dois triângulos sejam semelhantes.

Casos de semelhança de triângulos

Caso de semelhança AA: se dois triângulos têm dois ângulos internos correspondentes congruentes, então eles são semelhantes.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Demonstração: Considere os triângulos *ABC* e *DEF* em que $\widehat{A} = \widehat{D}$ e $\widehat{B} = \widehat{E}$. Como a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°, os ângulos $\widehat{C}$ e $\widehat{F}$ são congruentes. Vamos mostrar que os lados correspondentes são proporcionais. Para isso, marque sobre o lado $\overline{DE}$ do triângulo *DEF* um ponto *G* de maneira que *AB* = *DG* e, em seguida, trace o segmento $\overline{GH}$ paralelo ao lado $\overline{EF}$.



Observação

Note que $\widehat{G} = \widehat{E}$, pois são ângulos correspondentes de paralelas cortadas por uma transversal.

Note que, pelo caso de congruência **ALA** (ângulo, lado, ângulo), os triângulos *ABC* e *DGH* são congruentes, pois $\widehat{A} = \widehat{D}$, *AB* = *DG* e $\widehat{B} = \widehat{G} = \widehat{E}$.

Pelo Teorema de Tales, segue que:

$$\frac{DH}{DF} = \frac{DG}{DE} \Rightarrow \frac{AC}{DF} = \frac{AB}{DE}$$

De maneira semelhante, mostra-se que $\frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}$. Consequentemente, $\frac{AC}{DF} = \frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}$ e, portanto, os triângulos *ABC* e *DEF* são semelhantes, como queríamos demonstrar.

Vamos conhecer outros dois casos de semelhanças. Estes também podem ser demonstrados, porém não apresentaremos as demonstrações nesta coleção.

Caso de semelhança LAL: se dois triângulos têm dois lados correspondentes proporcionais e os ângulos formados por eles são congruentes, então os triângulos são semelhantes.

Exemplo

Considere os triângulos *FGH* e *MNO*.



Observação

No exemplo apresentado, a semelhança é estabelecida pela correspondência entre *F* e *M*, *G* e *N* e *H* e *O*.

Pelo caso de semelhança **LAL**, esses triângulos são semelhantes, pois:

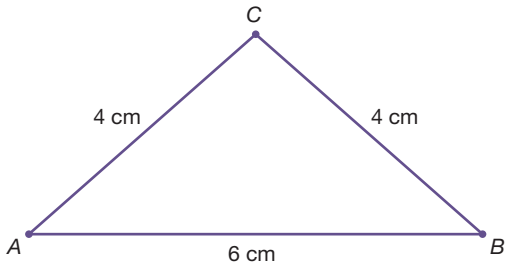
$$\frac{FG}{MN} = \frac{FH}{MO} \text{ e } \widehat{F} = \widehat{M}$$

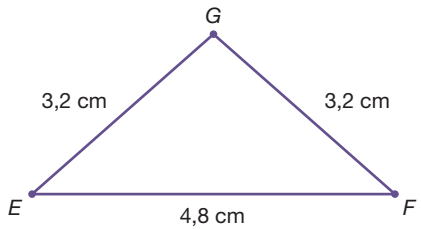
ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Caso de semelhança LLL: se dois triângulos têm os três lados correspondentes proporcionais, então eles são semelhantes.

Exemplo

Considere os triângulos *ABC* e *EFG*.





ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Observação

No exemplo apresentado, a semelhança é estabelecida pela correspondência entre *A* e *E*, *B* e *F* e *C* e *G*.

Pelo caso de semelhança **LLL**, esses triângulos são semelhantes, pois:

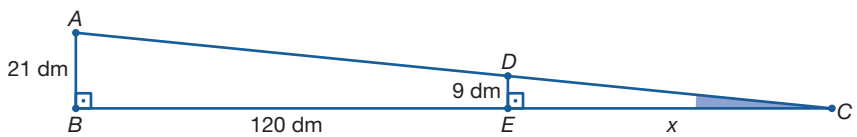
$$\frac{AB}{EF} = \frac{BC}{FG} = \frac{AC}{EG} = 1{,}25$$

Exercícios e problemas resolvidos

R3. (Unesp, 2011) Uma bola de tênis é sacada de uma altura de 21 dm, com alta velocidade inicial, e passa rente à rede, a uma altura de 9 dm. Desprezando-se os efeitos do atrito da bola com o ar e do seu movimento parabólico, considere a trajetória descrita pela bola como sendo retilínea e contida num plano ortogonal à rede. Se a bola foi sacada a uma distância de 120 dm da rede, a que distância da mesma, em metros, ela atingirá o outro lado da quadra?

Resolução

Indicando por x a distância entre a rede e a posição em que a bola atingirá o outro lado da quadra, e com base nas informações do enunciado, podemos construir o seguinte esquema.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Pelo caso de semelhança **AA**, os triângulos *ABC* e *DEC* são semelhantes. Desse modo, temos:

$$\frac{BC}{EC} = \frac{AB}{DE} \Rightarrow \frac{120 + x}{x} = \frac{21}{9} \Rightarrow 21x = 9 \cdot (120 + x) \Rightarrow 21x = 1080 + 9x \Rightarrow 21x - 9x = 1080 \Rightarrow x = \frac{1080}{12} = 90$$

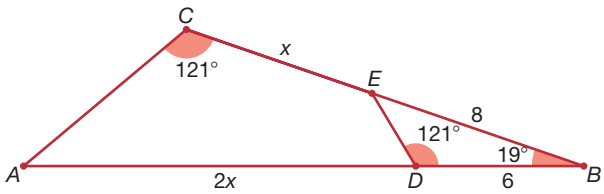
Portanto, a bola atingirá o outro lado da quadra a uma distância de 90 dm da rede, ou seja, 9 metros.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Anote as respostas no caderno.

8. Calcule o valor de x. Resposta: $x = 7$

RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

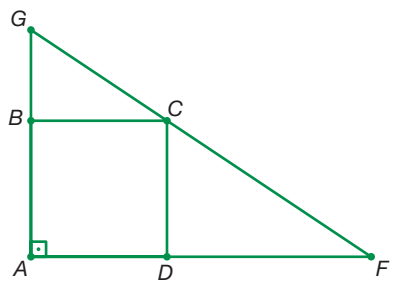


9. Considere os triângulos semelhantes ABC e FGH. Mostre que a razão de proporcionalidade entre eles é igual à razão entre seus perímetros.
Resposta no final do **Livro do Estudante**.

10. Considere um triângulo ABC cujo comprimento dos lados seja: 8,3 cm, 6,5 cm e 9,2 cm. Qual é a medida do menor lado de um triângulo, com perímetro de 480 cm, semelhante a ABC?
Resposta: 130 cm

11. O quadrado $ABCD$ tem um vértice em comum com o triângulo AFG e, além disso, os vértices B, C e D pertencem a cada um dos lados do triângulo AFG.

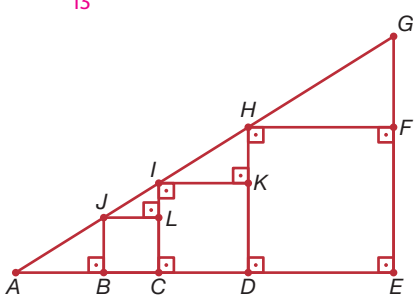
RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA



Sabendo que $AG = 20$ cm e que $AF = 30$ cm, determine o perímetro do quadrado $ABCD$.
Resposta: 48 cm

12. Na figura a seguir, $CD = 8$ cm e $DE = 13$ cm. Qual é o perímetro do quadrado $BCLJ$?
Resposta: $\frac{256}{13}$ cm

RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA



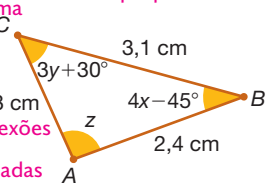
13. Considere os triângulos semelhantes ABC e MNO, cuja semelhança é estabelecida pela correspondência entre A e M, B e N e C e O. Sabendo que $AB = 25$ cm, $MN = 150$ cm e que o perímetro do triângulo MNO é 552 cm, determine o perímetro do triângulo ABC. Resposta: 92 cm

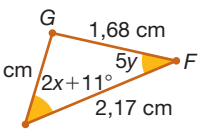
14. Considere os triângulos ABC e EFG retângulos em A e E, respectivamente. Sabendo que $AB = 5$ cm, $AC = 7$ cm, $EF = 2{,}5$ cm e $EG = 3{,}7$ cm, determine se esses triângulos são semelhantes. Justifique sua resposta. Resposta: Não, pois os lados correspondentes não são proporcionais.

15. Analise os triângulos a seguir e responda às questões.

Professor, professora: A tarefa **18** propõe aos estudantes que elaborem um problema utilizando os conceitos estudados, contribuindo assim para a ampliação do repertório de reflexões e questionamentos a respeito de determinadas situações.

Antes de os estudantes elaborarem o problema, peça a eles que analisem os contextos propostos na seção **Exercícios e problemas** deste capítulo e, se julgar conveniente, oriente-os a investigar outros problemas disponíveis em provas de vestibular e Enem.





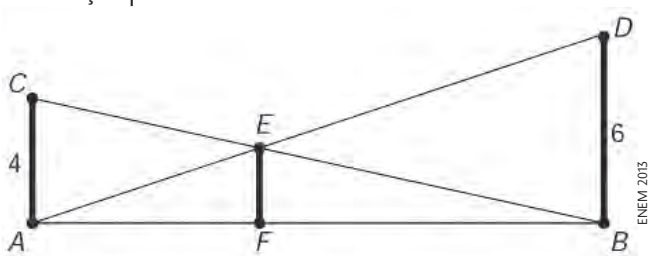
ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

a) Os triângulos ABC e GFE são semelhantes? Se sim, qual caso garante a semelhança?
Resposta: Sim. O caso que garante a semelhança é o LLL, pois $\frac{AC}{EG} = \frac{AB}{GF} = \frac{BC}{EF}$.

b) Qual é o valor de z?
Resposta: 94°

16. Determine a altura de um poste cuja sombra, em determinado momento do dia, mede 3 m, tendo como referência uma pessoa de 1,6 m de altura, cuja sombra nesse mesmo momento mede 1,2 m.
Resposta: 4 m

17. (Enem, 2013) O dono de um sítio pretende colocar uma haste de sustentação para melhor firmar dois postes de comprimentos 6 m e 4 m. A figura representa a situação real na qual os postes são descritos pelos segmentos $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ e a haste é representada pelo $\overline{EF}$, todos perpendiculares ao solo, que é indicado pelo segmento de reta $\overline{AB}$. Os segmentos $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$ representam cabos de aço que serão instalados.



ENEM 2013

Qual deve ser o comprimento da haste EF?

a) 1 m
b) 2 m
c) 2,4 m
d) 3 m
e) $2\sqrt{6}$ m

Resposta: Alternativa **c**.

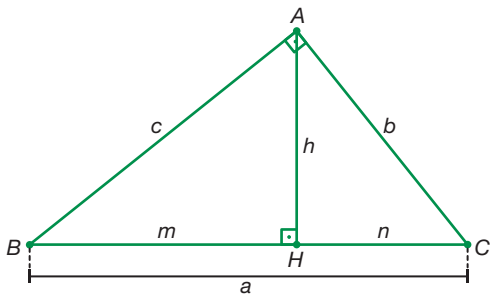
18. Elabore um problema envolvendo semelhança de triângulos. Em seguida, troque-o com um colega para que ele o resolva e, depois, verifiquem se a resposta está correta. Resposta pessoal. A resposta depende de cada problema elaborado pelos estudantes.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Relações métricas no triângulo retângulo

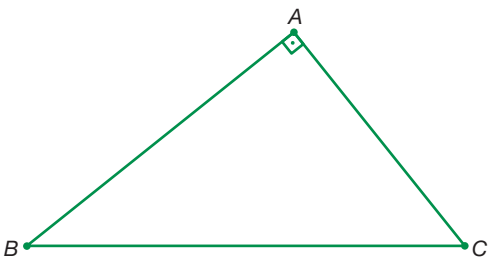
Além do **Teorema de Pitágoras**, que estudaremos no próximo tópico, os triângulos retângulos têm outras relações métricas que envolvem os comprimentos de seus lados.

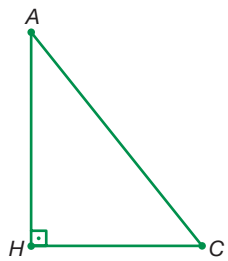
Considere o triângulo retângulo *ABC*.



- a: comprimento da hipotenusa;
- b e c: comprimentos dos catetos;
- h: comprimento da altura relativa à hipotenusa;
- m e n: comprimento das projeções dos catetos sobre a hipotenusa.

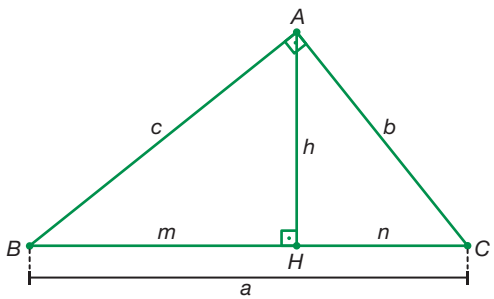
Note que ao traçarmos a altura $\overline{AH}$ relativa à hipotenusa desse triângulo, obtemos dois outros triângulos: o *AHB* e o *AHC*. Para que possamos estabelecer algumas relações métricas no triângulo retângulo, vamos mostrar que *AHC* e *BAC* são semelhantes.





Note que $B\hat{A}C = A\hat{H}C$, pois são ângulos retos, e que $A\hat{C}B = A\hat{C}H$, pois é comum aos dois triângulos. Portanto, pelo caso de semelhança **AA**, os triângulos *AHC* e *BAC* são semelhantes.

Decorrente dessa semelhança, podemos estabelecer as seguintes relações métricas no triângulo *ABC*.



$$\frac{a}{b} = \frac{c}{h}$$
$$a \cdot h = b \cdot c$$

$$\frac{b}{n} = \frac{c}{h}$$
$$b \cdot h = c \cdot n$$

$$\frac{b}{a} = \frac{n}{b}$$
$$b^2 = a \cdot n$$

Professor, professora: Na obtenção das relações métricas, deve ficar claro para os estudantes que elas são decorrências lógicas da semelhança de triângulos. Por isso, a principal preocupação nesta etapa deve ser a de conseguir fazer com que os estudantes acompanhem o raciocínio que leva às relações, capacitando-os a reproduzi-lo, se necessário, para que a resolução de problemas futuros não dependa exclusivamente da memória, mas se apoie também no entendimento, na criatividade e na dedução.

Observação

A hipotenusa é o lado oposto ao ângulo reto e o maior lado do triângulo retângulo, e os catetos são os lados adjacentes ao ângulo reto.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Questão A. De acordo com as imagens da página anterior, mostre que os triângulos:

- *ABC* e *ABH* são semelhantes.
- *ABH* e *ACH* são semelhantes.

Resposta no final do **Livro do Estudante**.

Questão B. De maneira semelhante à apresentada, mostre que: Resposta no final do **Livro do Estudante**.

- $c^2 = a \cdot m$
- $c \cdot h = b \cdot m$
- $h^2 = m \cdot n$

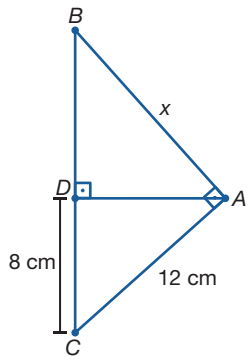
No triângulo retângulo *ABC* apresentado anteriormente, temos as seguintes relações métricas.

- $a \cdot h = b \cdot c$
- $c \cdot h = b \cdot m$
- $c^2 = a \cdot m$
- $b \cdot h = c \cdot n$
- $b^2 = a \cdot n$
- $h^2 = m \cdot n$

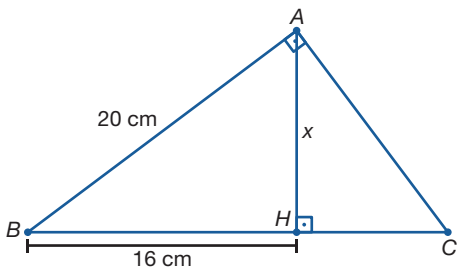
Exercícios e problemas resolvidos

R4. Em cada item, determine o valor de *x*.

A.



B.



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Resolução

A. Utilizando a relação métrica $b^2 = a \cdot n$, temos:

$$12^2 = (8 + BD) \cdot 8$$
$$144 = 64 + 8 \cdot BD$$
$$BD = 10$$

Em seguida, utilizando a relação métrica $c^2 = a \cdot m$, segue que:

$$x^2 = (CD + BD) \cdot DB$$
$$x^2 = 18 \cdot 10$$
$$x = \sqrt{180} = 6\sqrt{5}$$

Portanto, $x = 6\sqrt{5}$ cm.

B. Utilizando a relação métrica $c^2 = a \cdot m$, temos:

$$20^2 = (16 + HC) \cdot 16$$
$$400 = 256 + 16 \cdot HC$$
$$16 \cdot HC = 144$$
$$HC = \frac{144}{16}$$
$$HC = 9$$

Em seguida, utilizando a relação métrica $h^2 = m \cdot n$, segue que:

$$x^2 = 16 \cdot 9$$
$$x^2 = 144$$
$$x = \sqrt{144}$$
$$x = 12$$

Portanto, $x = 12$ cm.

Professor, professora: Na manipulação algébrica das equações resultantes das relações métricas, é muito comum que surjam casos em que a incógnita esteja elevada ao quadrado. Na resolução do item **a**, por exemplo, obtém-se a equação $x^2 = 180$. Sempre que oportuno, não se esqueça de alertar aos estudantes que esse tipo de equação tem duas raízes (uma positiva e outra negativa), mas que apenas uma delas é a solução para o problema, pois o comprimento de um segmento de reta é sempre um valor positivo.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

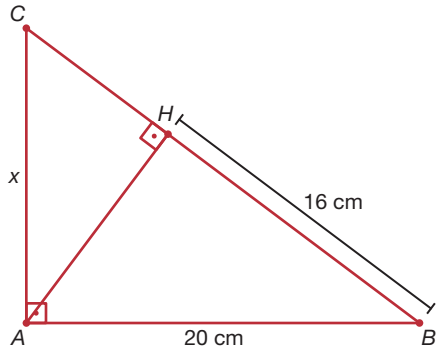
Exercícios e problemas

Anote as respostas no caderno.

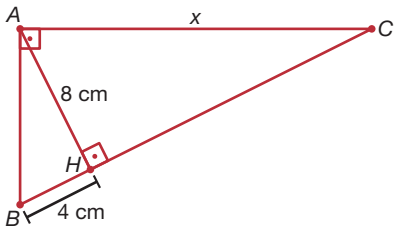
Professor, professora: No item **a** da tarefa **22**, explique aos estudantes que um polígono é dito inscrito em uma circunferência quando todos os seus vértices são pontos da circunferência.

19. Determine o valor de x.

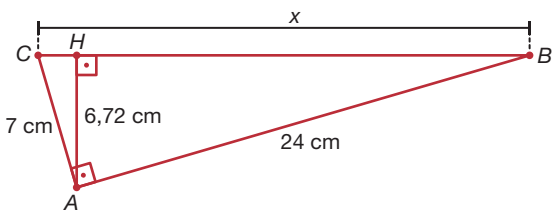
A. Resposta: $x = 15$ cm



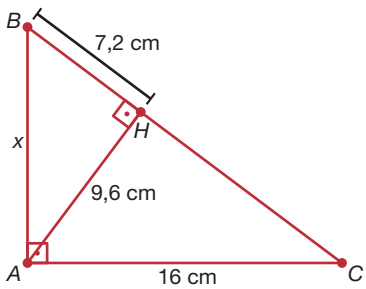
B. Resposta: $x = 8\sqrt{5}$ cm



C. Resposta: $x = 25$ cm



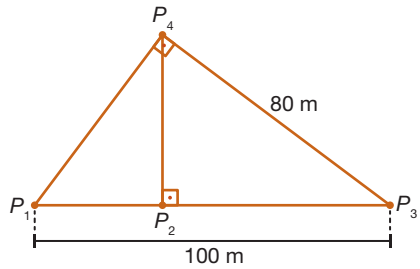
D. Resposta: $x = 12$ cm



20. Considere o triângulo ABC, retângulo em A. Determine o comprimento das projeções dos catetos desse triângulo sobre a hipotenusa, sabendo que $AB = 9$ cm, $AC = 12$ cm e que o comprimento da altura relativa à hipotenusa é 7,2 cm.

Resposta: Projeção do cateto $\overline{AB}$: 5,4 cm; projeção do cateto $\overline{AC}$: 9,6 cm.

21. No parque de certa cidade, serão instalados quatro novos postes de iluminação: P_1, P_2, P_3 e P_4. O esquema apresentado a seguir indica a posição em que eles serão instalados e a distância entre alguns deles. Resposta: 60 m; 64 m



HELOÍSA PINTARELLI/ARQUIVO DA EDITORA

Qual é a distância entre os postes P_1 e P_4? E entre os postes P_2 e P_3?

22. Tobias é um influenciador digital. Ele tem um perfil em uma rede social que aborda temas relacionados ao **mangá**.

A foto desse perfil foi elaborada por ele e é composta de uma circunferência, um triângulo retângulo e uma semicircunferência, além da frase BATE-PAPO SOBRE MANGÁ.

Mangá: história em quadrinhos de origem japonesa, cujos personagens têm características específicas, como olhos grandes e feições muito expressivas.



HELOÍSA PINTARELLI/ARQUIVO DA EDITORA

a) Na figura elaborada por Tobias, o triângulo AMN está inscrito na circunferência de centro G e $\overline{AS}$ é a altura relativa à hipotenusa de AMN. Supondo que $AN = 12$ cm, que o raio da circunferência tenha 6,5 cm de comprimento e que A' é o ponto médio de $\overline{GS}$, determine o comprimento aproximado do segmento $\overline{MA'}$.

Resposta: Aproximadamente 4,21 cm.

b) Junte-se a um colega e criem um mangá ou uma história em quadrinhos. Depois, apresentem o trabalho para a turma.

Resposta pessoal. Orientações sobre este item no **Suplemento para o professor**.

ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

EDUCAÇÃO MIDIÁTICA

Os influenciadores digitais influenciam?

OBJETO DIGITAL ***Podcast*:** Algoritmos das redes sociais

Início de conversa

Converse com os colegas sobre a questão a seguir.

1. Você costuma seguir ou acompanhar algum influenciador digital?

1. Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes mencionem seus hábitos com relação às redes sociais e os influenciadores digitais que acompanham. Convide-os a comentar quem são esses influenciadores e que conteúdo eles produzem.

Em nosso dia a dia, utilizamos a internet e os dispositivos digitais para diversas atividades, como assistir a um filme ou uma série, jogar jogos eletrônicos, trocar mensagens com os amigos e realizar compras em lojas virtuais. Além disso, muitas pessoas costumam navegar pelas redes sociais para assistir a vídeos curtos, ler publicações sobre dicas de beleza, ficar por dentro das novidades do mundo dos *games*, se informar sobre o lançamento de livros e conhecer restaurantes e lanchonetes do município onde moram. Em geral, vários desses conteúdos são produzidos por influenciadores digitais.

Há cerca de vinte anos, ainda não existia a denominação **influenciador digital**. No entanto, algumas pessoas, os blogueiros, praticavam algo semelhante, como produzir conteúdo ao escrever sobre determinados temas em páginas da internet conhecidas como *blogs*. As blogueiras de moda, por exemplo, ficaram conhecidas escrevendo dicas de vestimentas, calçados e produtos de beleza. Com o surgimento das primeiras plataformas de vídeos, muitos blogueiros passaram a também produzir seu conteúdo em formato de vídeo, sendo denominados vlogueiros (junção da palavra **vídeo** com o conceito de blogueiro). A partir da década de 2010, com a popularização das redes sociais, esses profissionais passaram a ser conhecidos como influenciadores digitais, pois produziam conteúdos sobre temas específicos e expressavam suas opiniões e ideias em várias plataformas, muitas vezes, alcançando um número significativo de seguidores.



LEONARDO GIBRAN/ARQUIVO DA EDITORA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Em razão do alcance dos influenciadores digitais, grandes marcas e empresas passaram a contratá-los para publicar seus produtos e suas mercadorias na internet. Por meio de técnicas do ***marketing* de conteúdo**, empresas e influenciadores digitais, principalmente de maneira colaborativa, elaboram textos, vídeos e postagens com informações sobre determinados produtos ou dicas de como utilizá-los. Vídeos de *unboxing* (abertura da caixa de produtos), postagens com a descrição e as primeiras impressões sobre os produtos e fotos visitando restaurantes e/ou degustando alguns alimentos são alguns exemplos desse tipo de conteúdo.

***Marketing* de conteúdo:** elaboração de conteúdo informativo sobre determinados produtos, buscando aproximar a empresa de seus consumidores.

Em geral, essas publicações buscam engajar os seguidores, ou seja, incentivá-los a curtir, comentar e compartilhar a peça publicitária, impulsionando novos clientes e consumidores para as empresas contratantes. Um dos motivos do sucesso desse tipo de publicidade nas redes sociais está associado à maneira como o influenciador digital constrói a relação com seu público. Diferentemente dos comerciais de televisão, em que celebridades fazem a publicidade da mercadoria e são vistas por possíveis consumidores, os influenciadores digitais costumam se relacionar de forma mais direta com seu público. Eles podem interagir, por exemplo, respondendo a perguntas e comentários de seguidores em seus conteúdos publicados, transmitindo a ideia de confiabilidade.

As relações de inspiração e influência entre esses profissionais e seu público podem gerar problemas quando seguidores se encantam com rotinas, hábitos e padrões físicos que passam uma ideia enganosa de perfeição. Assim, ao comparar suas vidas comuns com o que é mostrado na internet, muitas pessoas tendem a se frustrar consigo mesmas e até a ter sua saúde mental prejudicada.

Ao seguir influenciadores digitais, devemos estar cientes de alguns cuidados importantes.

Não existe vida perfeita

Mais seguidores, muitos influenciadores precisam vender a imagem de uma vida perfeita, mas isso não existe. Tudo o que vemos na internet são recortes de momentos escolhidos para serem mostrados.

Cuidado com o consumismo

Lembre-se de que muitos produtos que os influenciadores recomendam são publicidades, tais como as propagandas de TV ou os anúncios da internet. As marcas pagam a eles para que influenciem pessoas a comprar.

2. Resposta: De acordo com o texto, essas relações podem gerar problemas quando os seguidores se encantam com rotinas, hábitos e padrões físicos que transmitem uma ideia enganosa de perfeição e passam a comparar suas vidas com a dos influenciadores.

Fuja dos jogos de azar

Muitos influenciadores passaram a fazer publicidade de jogos de azar. Esses jogos parecem atrativos e uma forma de ganhar dinheiro fácil, mas viciam e costumam levar as pessoas ao endividamento.

1. Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes comentem a prática de consumo pela internet. Caso algum deles mencione que já consultou, pergunte-lhe se as dicas e as informações foram relevantes para a escolha do produto. Por outro lado, caso os estudantes digam que nunca consultaram redes sociais ou influenciadores digitais, pergunte a eles se pesquisam a respeito do produto a ser comprado, por exemplo.

Atividades

Anote as respostas no caderno.

1. Antes de comprar algum produto ou mercadoria pela internet, você já consultou as redes sociais ou um influenciador digital?

2. De acordo com o texto, quando as relações de influência digital podem gerar problemas ao público?

3. Junte-se a um colega e pesquisem hábitos e práticas de consumo consciente. Em seguida, produzam um vídeo ou um texto e o publiquem nas redes sociais, conscientizando as pessoas acerca da importância de refletir sobre o tema. Resposta pessoal. O objetivo desta atividade é a produção de conteúdo nas redes sociais acerca da importância do consumo consciente. Oriente os estudantes a pesquisar entre três e cinco dicas relevantes. Comente que eles podem abordar as consequências do consumismo na sociedade atual, como o acúmulo de resíduos, ou refletir sobre a obsolescência programada. Caso julgue pertinente, promova uma aula interdisciplinar com o componente de **Arte**, possibilitando à turma que identifique e utilize diversas linguagens visuais.

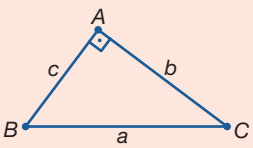
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Teorema de Pitágoras

Um dos teoremas matemáticos mais conhecidos é o Teorema de Pitágoras. Esse teorema é um dos que têm maior quantidade de demonstrações. A imagem apresentada é um fragmento de um texto grego de cerca de 800 d.C., no qual está apresentada a demonstração do Teorema de Pitágoras dada por Euclides de Alexandria.

O Teorema de Pitágoras apresenta a seguinte relação entre os três lados de um triângulo retângulo:

Em qualquer triângulo retângulo, o quadrado do comprimento da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos comprimentos dos catetos.



$$a^2 = b^2 + c^2$$



BIBLIOTECA NACIONAL DA FRANÇA, PARIS

Fragmento de texto que contém a demonstração grega do Teorema de Pitágoras, por volta do ano 800 d.C.

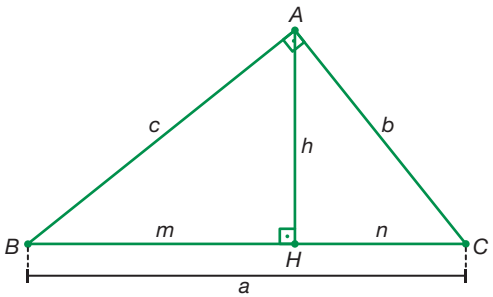
Para demonstrar esse teorema, consideramos inicialmente o triângulo retângulo ABC, em que $\overline{AH}$ é a altura relativa à hipotenusa.

Sabemos que $b^2 = a \cdot n$ e $c^2 = a \cdot m$. Adicionando membro a membro dessas relações, temos:

$$b^2 + c^2 = a \cdot n + a \cdot m$$

$$b^2 + c^2 = a \cdot (\underbrace{n + m}_{a})$$

$$b^2 + c^2 = a^2$$



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Portanto, como queríamos demonstrar, $a^2 = b^2 + c^2$.

É possível demonstrar que a recíproca do Teorema de Pitágoras é verdadeira, ou seja, em um triângulo qualquer, se o quadrado do comprimento do lado maior for igual à soma dos quadrados dos comprimentos dos outros lados, então o triângulo é retângulo. Porém, não apresentaremos essa demonstração nesta coleção.

Exercícios e problemas resolvidos

R5. Qual é o comprimento da hipotenusa de um triângulo retângulo cujas medidas dos comprimentos dos catetos são 5 cm e 12 cm?

Resolução

Indicando por a o comprimento da hipotenusa do triângulo, temos:

$$a^2 = 5^2 + 12^2 \Rightarrow a^2 = 25 + 144 \Rightarrow a^2 = 169 \Rightarrow a = \pm 13$$

Como a é maior do que zero, segue que $a = 13$. Portanto, a medida do comprimento da hipotenusa desse triângulo é 13 cm.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

R6. Escreva um algoritmo que possibilite determinar o comprimento de um dos catetos de um triângulo retângulo, dados os comprimentos do outro cateto e da hipotenusa. Em seguida, organize-o em um fluxograma.

Resolução

Antes de apresentarmos os passos para a construção de um algoritmo, vamos relembrar sua definição.

> Um **algoritmo** é uma sequência de instruções ordenadas de forma lógica para resolução de determinada tarefa ou problema.

Para construir um algoritmo, inicialmente, devemos ler o enunciado do problema, compreendendo-o e destacando os pontos mais importantes.

Depois, devemos responder às seguintes questões.

1. Quais são os **dados de entrada**, ou seja, quais são os dados fornecidos no problema?

Dados de entrada: comprimento de um dos catetos e da hipotenusa do triângulo.

2. Quais são os **dados de saída**, ou seja, quais são os dados gerados após a execução de todas as etapas do algoritmo?

Dados de saída: comprimento do outro cateto.

3. Conhecendo os dados de entrada e saída, quais **procedimentos** devem ser realizados?

Para responder à questão **3**, utilizaremos o Teorema de Pitágoras. Para isso, inicialmente, indicamos por a, b e c o comprimento dos lados desse triângulo, em que a expressa o comprimento da hipotenusa. Desse modo, temos:

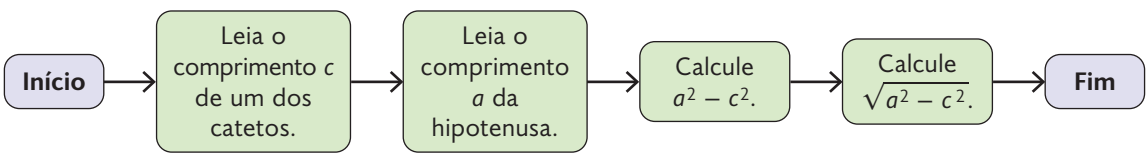
$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow b^2 = a^2 - c^2$$

Consequentemente, para determinar o comprimento de um dos catetos de um triângulo retângulo, devemos calcular a diferença entre os quadrados dos comprimentos da hipotenusa e do outro cateto e, por fim, determinar a raiz quadrada positiva desse resultado.

Agora, escrevemos o algoritmo.

Início
1. Leia o comprimento c de um dos catetos.
2. Leia o comprimento a da hipotenusa.
3. Calcule $a^2 - c^2$.
4. Calcule a raiz quadrada positiva de $a^2 - c^2$.
Fim

Finalmente, organizamos o algoritmo em um fluxograma.



LAÍS GARBELINI/ARQUIVO DA EDITORA

Observação

Em um fluxograma, cada tipo de figura tem um significado. No fluxograma apresentado, por exemplo, foram usadas as seguintes figuras.

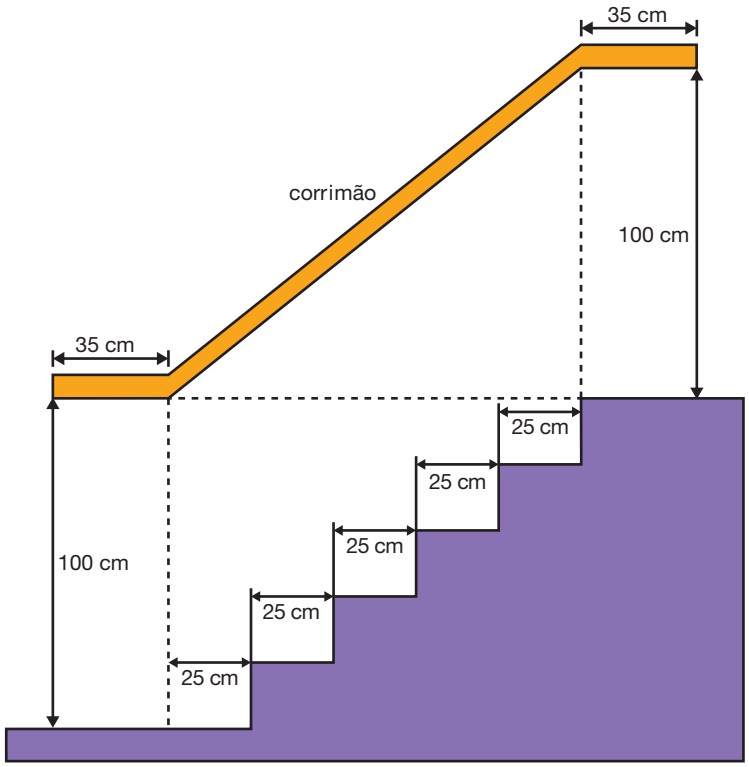
- Indica o início e o fim do fluxograma.
- Indica uma ação a ser tomada.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

R7. Marcelo representou o projeto de uma escada com cinco degraus de mesma altura e um corrimão para a sala de estar de sua casa, que tem dois ambientes. De acordo com as medidas indicadas, qual é a medida aproximada do comprimento total do corrimão?

a) 2,1 m **c)** 2,3 m **e)** 2,4 m

b) 1,9 m **d)** 2,0 m



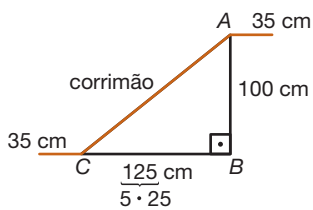
ILUSTRAÇÕES: OHANNA SCHMITT/ARQUIVO DA EDITORA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Resolução

Vamos representar parte do corrimão da escada pela hipotenusa do $\triangle ABC$, indicado no esquema.

Pelo Teorema de Pitágoras, temos:



$$(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2 \Rightarrow (AC)^2 = 100^2 + 125^2 \Rightarrow (AC)^2 = 25\,625 \Rightarrow AC = \sqrt{25\,625} \simeq 160$$

Observação

Nesse esquema, verificamos que $AC \simeq 160$ cm, pois $AC > 0$.

Logo, o comprimento total do corrimão é dado por:

$$35 \text{ cm} + AC + 35 \text{ cm} = 35 \text{ cm} + 160 \text{ cm} + 35 \text{ cm} = 230 \text{ cm}$$

Convertendo 230 cm em metros, temos:

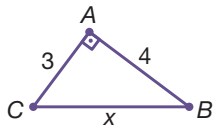
$$230 \text{ cm} = 230 \cdot \frac{1}{100} \text{ m} = 2{,}3 \text{ m}$$

Portanto, a alternativa correta é **c**.

Anote as respostas no caderno.

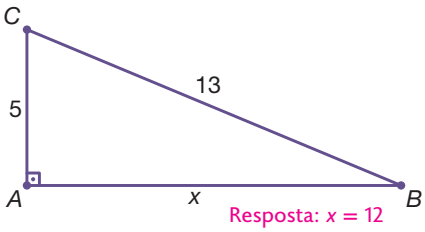
23. Determine o valor de x em cada triângulo.

A.



Resposta: $x = 5$

B.



Resposta: $x = 12$

ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

24. Escreva uma fórmula que expresse o comprimento da altura h de um triângulo equilátero em função do comprimento c de seu lado. Com base nessa fórmula, calcule o comprimento da altura de um triângulo equilátero cujo comprimento do lado seja 8 cm. Resposta: $h = \frac{c\sqrt{3}}{2}$; $4\sqrt{3}$ cm

25. Determine o comprimento da diagonal de um retângulo de perímetro igual a 98 cm, sabendo que a razão entre os comprimentos do menor e do maior lado é $\frac{3}{4}$. Resposta: 35 cm

26. (Enem, 2014) Diariamente, uma residência consome 20 160 Wh. Essa residência possui 100 células solares retangulares (dispositivos capazes de converter a luz solar em energia elétrica) de dimensões 6 cm × 8 cm. Cada uma das tais células produz, ao longo do dia, 24 Wh por centímetro de diagonal. O proprietário dessa residência quer produzir, por dia, exatamente a mesma quantidade de energia que sua casa consome.

Qual deve ser a ação desse proprietário para que ele atinja o seu objetivo? Resposta: Alternativa **a**.

a) Retirar 16 células.
b) Retirar 40 células.
c) Acrescentar 5 células.
d) Acrescentar 20 células.
e) Acrescentar 40 células.

PARA EXPANDIR

Você sabia que a troca de sistemas de energia de combustíveis fósseis para renováveis, como a solar, pode contribuir para a redução das emissões de gases de efeito estufa, que estão associados às mudanças climáticas? Para saber mais sobre esse assunto, acesse o artigo *O que são as mudanças climáticas?*. Disponível em: https://brasil.un.org/pt-br/175180-o-que-são-mudanças-climáticas. Acesso em: 9 out. 2024.

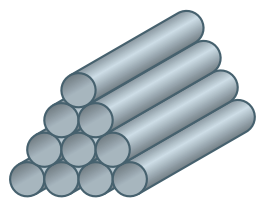
27. Além dos gregos, outros povos conheciam casos particulares da relação atualmente conhecida como Teorema de Pitágoras, como é o caso dos egípcios.

Alguns problemas relacionados a triângulos retângulos foram encontrados no Papiro Matemático Cairo, que data de cerca de 300 a.C. Nele, estão propostos 40 problemas matemáticos, 9 deles tratando exclusivamente do Teorema de Pitágoras. Resolva os problemas a seguir encontrados no Papiro Matemático Cairo. 29. a) Resposta: 29": dimensões 25,3" por 14,2"; 32": dimensões 27,9" por 15,7"; 42": dimensões 36,6" por 20,6".

> [...]
> **a)** Uma escada de 10 **cúbitos** está com seus pés a 6 cúbitos da parede. Que distância a escada alcança? Resposta: 8 cúbitos.
> **b)** Um retângulo de área 60 cúbitos quadrados tem diagonal de 13 cúbitos. Determine os lados do retângulo. Resposta: 5 e 12 cúbitos.
> [...]
>
> EVES, Howard. *Introdução à história da matemática*. Tradução: Hygino H. Domingues. Campinas: Editora da Unicamp, 2004. p. 87.

Cúbito: unidade de medida que equivale ao comprimento do antebraço de uma pessoa.

28. Em um depósito, há vários tubos cujo diâmetro tem 30 cm de comprimento. Esses tubos deverão ser organizados em uma única pilha, e cada camada deverá ter um tubo a menos do que a imediatamente abaixo, como indicado na figura.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Quantos tubos, no mínimo, terá a pilha assim que ela alcançar a altura aproximada de 1,86 m? Resposta: 28 tubos.

29. Os televisores e monitores em formato *widescreen* ganharam muita popularidade entre os consumidores. Nesse formato a proporção da tela é 16 **:** 9.

Por exemplo, em um televisor *widescreen* de 20" (20 polegadas), que é o tamanho da diagonal da tela, as dimensões da região de imagem são, aproximadamente, 17,4" por 9,8".

a) De acordo com as informações apresentadas, calcule as dimensões aproximadas um televisor *widescreen* de:

- 29"
- 32"
- 42"

b) Teobaldo mediu o comprimento e a largura de um televisor *widescreen* e obteve como resultado 110,69 cm e 62,26 cm, respectivamente. Considerando 1" = 2,54 cm, determine quantas polegadas tem a tela desse televisor. Resposta: 50"

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

30. a) Resposta: Porque $1^2 = 0,6^2 + 0,8^2$, e se em um triângulo qualquer o quadrado do comprimento do lado maior for igual à soma dos quadrados dos comprimentos dos outros lados, então o triângulo é retângulo.

30. A construção de um edifício requer um trabalho minucioso, desde a fase da elaboração de seu projeto até a execução. Uma das etapas do processo de construção consiste na locação de obra do edifício, ou seja, na demarcação dos eixos de suas paredes e demais elementos estruturais no terreno, conforme consta no projeto.

ODS 9

Durante a locação, é fundamental que as ações sejam realizadas da maneira mais precisa possível, para evitar erros que possam comprometer a construção como um todo, já que, por exemplo, o posicionamento dos elementos de fundação utilizados – como estacas cravadas no chão – servirá como base para a execução de toda a sua estrutura.

Diante disso, é de extrema importância que haja, por exemplo, a conferência dos eixos ortogonais demarcados ao final de cada etapa de locação. Para essa conferência, podem ser utilizados equipamentos de topografia ou, mesmo de maneira simples, o método do triângulo retângulo, por meio dos quais é possível verificar se esses eixos formam ângulo reto.



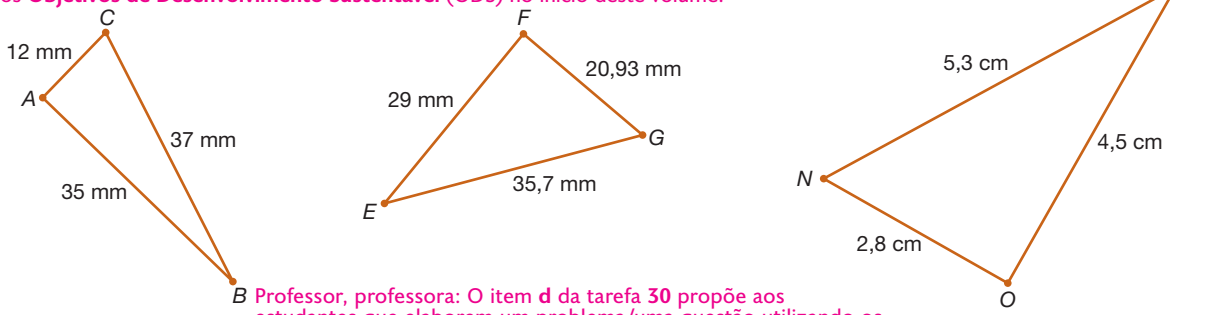
JOY FERA/SHUTTERSTOCK

Trabalhadores na etapa de locação de obra do edifício.

a) Na construção civil, o princípio do triângulo retângulo mencionado consiste na ideia de formar triângulos com lados de 3 m, 4 m e 5 m de comprimento, por exemplo. Por que um triângulo com o comprimento de lados igual a 0,6 m, 0,8 m e 1 m também pode ser utilizado para a verificação de ângulos retos?

b) Dentre as figuras apresentadas, quais são triângulos retângulos? Resposta: Os triângulos *ABC* e *MNO*.

Professor, professora: Oriente os estudantes a consultar mais informações sobre os **Objetivos de Desenvolvimento Sustentável** (ODS) no início deste volume.



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

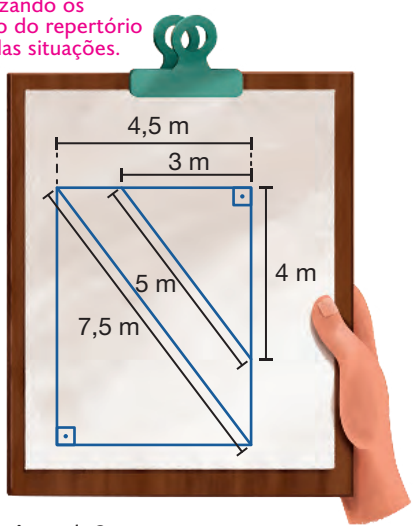
c) Analise as ilustrações.

Professor, professora: O item **d** da tarefa **30** propõe aos estudantes que elaborem um problema/uma questão utilizando os conceitos estudados, contribuindo assim para a ampliação do repertório de reflexões e questionamentos a respeito de determinadas situações.

Antes de os estudantes elaborarem o problema, peça a eles que analisem os contextos propostos na seção **Exercícios e problemas** deste capítulo e, se julgar conveniente, oriente-os a investigar outros problemas disponíveis em provas de vestibular e Enem.



Parte de um terreno demarcado para a construção de um dos cômodos de uma casa.



Modelo matemático da vista superior do cômodo.

ILUSTRAÇÕES: LEONARDO GIBRAN/ARQUIVO DA EDITORA

Qual é o perímetro da região que será destinada à construção deste cômodo? Resposta: 21 m

d) Junte-se a um colega e realizem uma pesquisa a respeito de outras aplicações do Teorema de Pitágoras na construção civil. Em seguida, com as informações obtidas, elaborem um problema e troquem com outros colegas para que eles o resolvam. Depois, verifiquem se as respostas estão corretas.

Resposta pessoal. A resposta depende do resultado da pesquisa dos estudantes.

PARA EXPANDIR

Que tal obter mais informações sobre a construção civil e sua relação com a Matemática e os cálculos que envolvem triângulos? Para isso, acesse na internet e assista ao vídeo "Matemática na construção", do canal *Matemática em toda parte*.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Scratch

Em diversas situações, é possível programar um computador para que ele resolva determinado problema. Para isso, é necessário fornecer uma sequência de instruções que devem ser seguidas, ou seja, precisamos escrever um programa, que será interpretado e executado pelo computador.

Observação

Em informática, **instrução** é a informação que indica a um computador uma ação elementar a ser executada.

Como é formada por conjuntos específicos de "zeros e uns", a linguagem do computador é complexa. Assim, foram desenvolvidas as linguagens de programação.

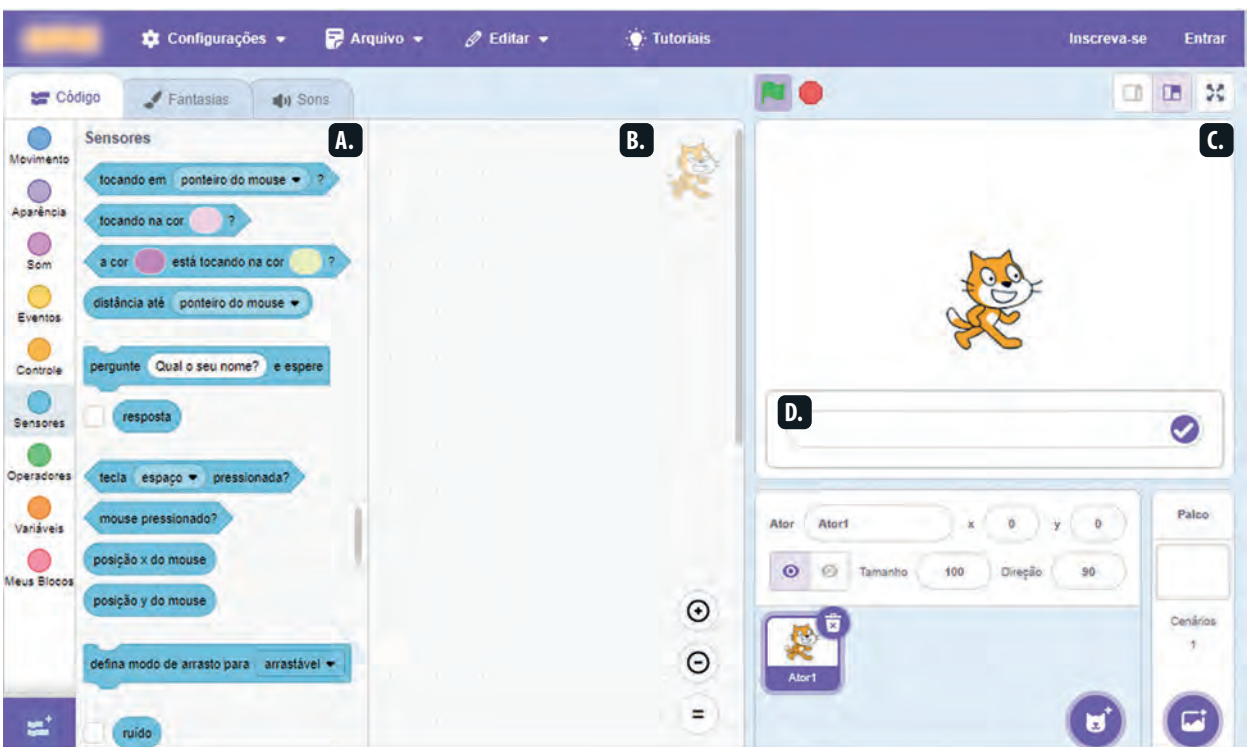
Linguagem de programação é um método padronizado para expressar instruções para um computador.

Existem diversas linguagens de programação, cada uma com características específicas e níveis de complexidade e objetivos diferentes. Nesta coleção, utilizaremos o Scratch, que é uma linguagem de programação composta por blocos que se encaixam, formando algoritmos.

Observação

Com o Scratch, é possível criar histórias, jogos e animações digitais. Basta acessar o *site* para usar essa linguagem de programação. Disponível em: https://scratch.mit.edu/projects/editor/?tutorial=getStarted. Acesso em: 10 ago. 2024.

A seguir, são apresentadas algumas características dessa linguagem de programação.



REPRODUÇÃO/SCRATCH

A. **Área de comandos**: nessa região, estão presentes os comandos e blocos que podem ser usados nos algoritmos.

B. **Área de edição**: região destinada aos blocos que compõem os algoritmos. O usuário deve clicar em um bloco na **Área de comando** e "arrastá-lo" para a **Área de edição**.

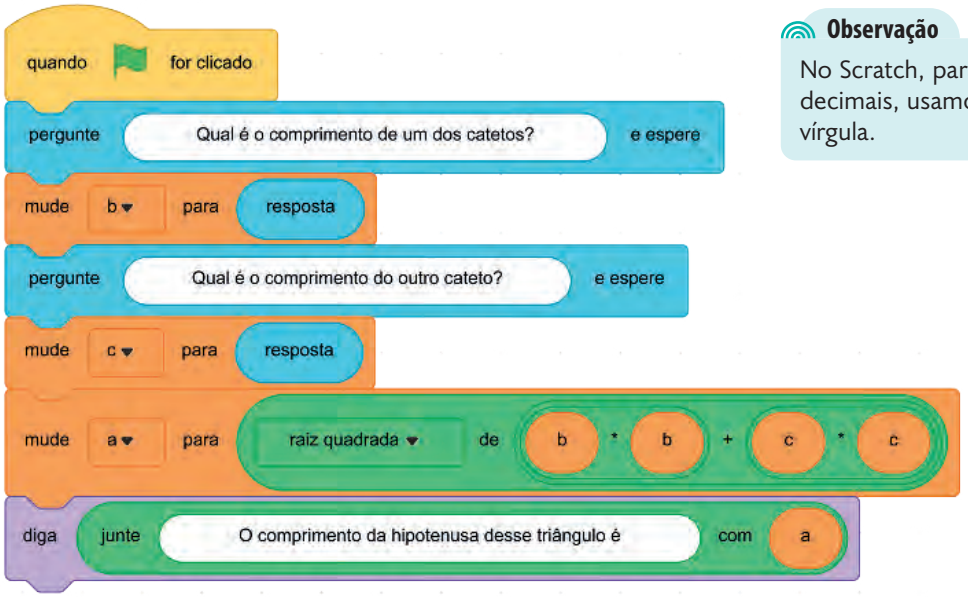
C. **Palco**: região em que os usuários podem visualizar a execução dos procedimentos e dos comandos inseridos.

D. Local destinado à inserção de respostas pelos usuários.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

O Teorema de Pitágoras no Scratch

O algoritmo apresentado a seguir, construído no Scratch, possibilita calcular o comprimento da hipotenusa de um triângulo retângulo, dados os comprimentos de seus catetos.



Observação

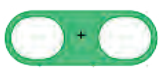
No Scratch, para escrevermos números decimais, usamos ponto em vez de vírgula.

A seguir, apresentamos algumas informações sobre os blocos usados na construção desse algoritmo.

- 

indica o início do algoritmo. Quando o indicador verde é acionado, as instruções conectadas a ele são realizadas.
- 

é usado para atribuir ou mudar o valor de uma variável. As variáveis são criadas antecipadamente no campo **Área de comandos**, clicando em **Criar uma variável**.
- 

é usado para apresentar mensagens com balões de fala.
- 
e 
indicam, respectivamente, adição e multiplicação.
- 

e 

atuam juntos. O primeiro é usado para indicar a pergunta que será exibida no palco. A resposta dada pelo usuário é armazenada no bloco 

.
- 

é usado para calcular a raiz quadrada de um número ou de uma expressão.
- 

é usado para juntar informações.

Dica

Para iniciar a execução desse algoritmo, clique sobre o indicador  , localizado próximo ao **Palco** do programa.

Agora é sua vez!

1. Qual mensagem será exibida no **Palco** quando o programa executar a última instrução, supondo que as respostas dadas pelo usuário tenham sido "3" e "4", respectivamente?
   Resposta: O comprimento da hipotenusa desse triângulo é 5.
2. Construa um programa em Scratch que determine o comprimento de um dos catetos de um triângulo retângulo, dados os comprimentos da hipotenusa e do outro cateto.
   Resposta no final do **Livro do Estudante**.

IMAGENS: REPRODUÇÃO/SCRATCH

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Trigonometria no triângulo retângulo

Conforme estudamos anteriormente, as relações métricas (incluindo o Teorema de Pitágoras) envolvem os comprimentos dos lados de um triângulo retângulo. Contudo, existem outras que envolvem tanto os comprimentos dos lados quanto as medidas dos ângulos internos de um triângulo. O estudo dos métodos para calcular os comprimentos dos lados ou a medida dos ângulos de um triângulo faz parte do ramo da Geometria denominado Trigonometria (trigon = triângulo e metria = medida).

Não se sabe ao certo a origem da Trigonometria, porém, há registros relacionados a ela no Papiro de Rhind, que data de cerca de 1650 a.C. É provável que seu estudo inicial esteja diretamente ligado à Astronomia. Atualmente, a Trigonometria é utilizada por profissionais de diversas áreas, como engenheiros, astrônomos e geógrafos.

Fonte de pesquisa: BOYER, Carl B; MERZBACH, Uta C. *História da matemática*. 3. ed. Tradução: Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher, 2012. p. 116-117.



COLEÇÃO PARTICULAR

Hiparco de Niceia, notável astrônomo grego.

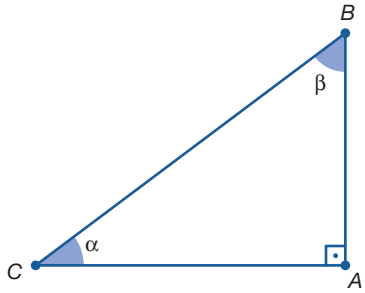
Um dos mais importantes astrônomos da Antiguidade foi o grego Hiparco, que viveu por volta de 146 a.C. Além de feitos notáveis na Astronomia, Hiparco realizou diversas contribuições para o desenvolvimento da Trigonometria.

Professor, professora: O estudo da Trigonometria no Ensino Médio possibilita uma aprendizagem contextualizada considerando seu desenvolvimento histórico e suas aplicações. Se julgar conveniente, organize momentos de conversa com o intuito de explorar com os estudantes situações em que se faz necessário conhecer a respeito dessa temática evidenciando sua aplicabilidade em diversas áreas do conhecimento, como na Astronomia, Física, Engenharia, entre outras, tendo em vista que elas estão direta ou indiretamente relacionadas com o dia a dia dos jovens.

OBJETO DIGITAL
***Carrossel de imagens*:** Contribuições para a Trigonometria

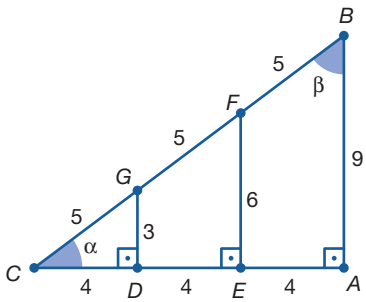
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Para iniciarmos o estudo da Trigonometria, considere o triângulo retângulo *ABC*.



Nesse triângulo, em relação ao ângulo α, $\overline{AB}$ é o **cateto oposto** e $\overline{AC}$ é o **cateto adjacente**. Já em relação ao ângulo β, $\overline{AC}$ é o cateto oposto e $\overline{AB}$ é o cateto adjacente.

Agora, considere a figura a seguir. Nela podemos identificar os triângulos retângulos semelhantes *ABC*, *EFC* e *DGC*.



Questão C. Qual caso garante a semelhança dos triângulos *ABC*, *EFC* e *DGC*?
Resposta: Caso de semelhança **AA**.

Em relação ao ângulo α, por semelhança de triângulos, verificamos algumas características importantes.

1. As razões entre o comprimento do cateto oposto a α e o da hipotenusa em cada triângulo são iguais.

$$\frac{AB}{BC} = \frac{EF}{FC} = \frac{DG}{GC} = \frac{9}{15} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5} = 0{,}6$$

A razão entre o comprimento do cateto oposto a α e o comprimento da hipotenusa é denominada **seno** do ângulo cuja medida é α e é indicada por senα. Nesse caso, senα = 0,6.

2. As razões entre o comprimento do cateto adjacente a α e o comprimento da hipotenusa em cada triângulo são iguais.

$$\frac{AC}{BC} = \frac{EC}{FC} = \frac{DC}{GC} = \frac{12}{15} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5} = 0{,}8$$

A razão entre o comprimento do cateto adjacente a α e o comprimento da hipotenusa é denominada **cosseno** do ângulo cuja medida é α e é indicada por cosα. Nesse caso, cosα = 0,8.

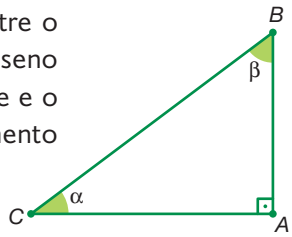
3. As razões entre o comprimento do cateto oposto e o comprimento do cateto adjacente a α em cada triângulo são iguais.

$$\frac{AB}{AC} = \frac{EF}{EC} = \frac{DG}{DC} = \frac{9}{12} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} = 0{,}75$$

A razão entre o comprimento do cateto oposto e o comprimento do cateto adjacente a α é denominada **tangente** do ângulo cuja medida é α e é indicada por tgα. Nesse caso, tgα = 0,75.

ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

As razões seno, cosseno e tangente são denominadas **razões trigonométricas**. Em um triângulo retângulo, o seno de um ângulo agudo é dado pela razão entre o comprimento do cateto oposto a ele e o comprimento da hipotenusa; o cosseno desse ângulo é dado pela razão entre o comprimento do cateto adjacente a ele e o comprimento da hipotenusa; e a tangente é dada pela razão entre o comprimento do cateto oposto e o comprimento do cateto adjacente a esse ângulo.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Considere, por exemplo, o triângulo retângulo *ABC* apresentado.

Com base nesse triângulo, temos as seguintes razões em relação ao ângulo α.

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\overbrace{AB}^{\text{comprimento do cateto oposto a } \alpha}}{\underbrace{BC}_{\text{comprimento da hipotenusa}}} \qquad \cos\alpha = \frac{\overbrace{AC}^{\text{comprimento do cateto adjacente a } \alpha}}{\underbrace{BC}_{\text{comprimento da hipotenusa}}} \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{\overbrace{AB}^{\text{comprimento do cateto oposto a } \alpha}}{\underbrace{AC}_{\text{comprimento do cateto adjacente a } \alpha}}$$

Com base nesse triângulo, temos também as seguintes razões em relação ao ângulo β.

$$\operatorname{sen}\beta = \frac{\overbrace{AC}^{\text{comprimento do cateto oposto a } \beta}}{\underbrace{BC}_{\text{comprimento da hipotenusa}}} \qquad \cos\beta = \frac{\overbrace{AB}^{\text{comprimento do cateto adjacente a } \beta}}{\underbrace{BC}_{\text{comprimento da hipotenusa}}} \qquad \operatorname{tg}\beta = \frac{\overbrace{AC}^{\text{comprimento do cateto oposto a } \beta}}{\underbrace{AB}_{\text{comprimento do cateto adjacente a } \beta}}$$

Relações envolvendo seno, cosseno e tangente

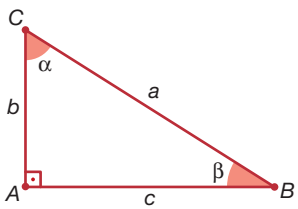
Analise algumas relações envolvendo o seno, o cosseno e a tangente de um ângulo agudo, considerando o triângulo retângulo *ABC*.

1. A relação fundamental $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

Para demonstrar essa relação, aplicamos o Teorema de Pitágoras no triângulo *ABC*:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Dividindo ambos os membros por a^2, temos:



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

$$\frac{a^2}{a^2} = \frac{b^2 + c^2}{a^2} \Rightarrow 1 = \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a}\right)^2$$

Como $\operatorname{sen}\alpha = \frac{c}{a}$ e $\cos\alpha = \frac{b}{a}$, segue que:

$$1 = (\cos\alpha)^2 + (\operatorname{sen}\alpha)^2 \Rightarrow \operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

2. A relação $\operatorname{sen}\alpha = \cos\beta$.

Essa relação estabelece que o seno de um ângulo agudo é igual ao cosseno do complementar desse ângulo, e vice-versa.

A demonstração dessa relação é imediata. Do triângulo retângulo *ABC*, temos:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{c}{a} = \cos\beta \Rightarrow \operatorname{sen}\alpha = \cos\beta \qquad \cos\alpha = \frac{b}{a} = \operatorname{sen}\beta \Rightarrow \cos\alpha = \operatorname{sen}\beta$$

Observação

Dois ângulos são complementares quando a soma de suas medidas é 90°.

Logo, podemos interpretar a relação $\operatorname{sen}\alpha = \cos\beta$ como $\operatorname{sen}\alpha = \cos(90° - \alpha)$ e $\cos\alpha = \operatorname{sen}(90° - \alpha)$, para $0° < \alpha < 90°$.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Exercícios e problemas resolvidos

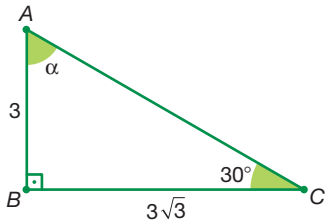
R8. Considere o triângulo retângulo apresentado.

Em relação a esse triângulo, determine:

a) sen30°, cos30° e tg30°.

b) a medida do ângulo α.

c) senα, cosα e tgα.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Resolução

Inicialmente, determinamos AC utilizando o Teorema de Pitágoras.

$$(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2 \Rightarrow (AC)^2 = 3^2 + \left(3\sqrt{3}\right)^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (AC)^2 = 36 \Rightarrow AC = \sqrt{36} = 6$$

Observação

Note que $AC = 6$, pois $AC > 0$.

a) $\text{sen}30° = \dfrac{AB}{AC} \Rightarrow \text{sen}30° = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$

$\text{cos}30° = \dfrac{BC}{AC} \Rightarrow \text{cos}30° = \dfrac{3\sqrt{3}}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\text{tg}30° = \dfrac{AB}{BC} \Rightarrow \text{tg}30° = \dfrac{3}{3\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

b) A soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°, logo:

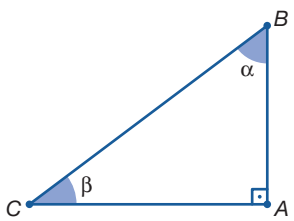
$$\alpha + 30° + 90° = 180° \Rightarrow \alpha = 180° - 120° = 60°$$

c) $\text{sen}\alpha = \dfrac{BC}{AC} \Rightarrow \text{sen}60° = \dfrac{3\sqrt{3}}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\text{cos}\alpha = \dfrac{AB}{AC} \Rightarrow \text{cos}60° = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$

$\text{tg}\alpha = \dfrac{BC}{AB} \Rightarrow \text{tg}60° = \dfrac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$

R9. Calcule tgβ no triângulo retângulo a seguir, sabendo que $\text{sen}\alpha = 0{,}8$.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Observação

As razões trigonométricas senα, cosα e tgα são sempre positivas no triângulo retângulo, pois são calculadas a partir dos comprimentos de seus lados.

Resolução

Da relação $\text{sen}^2\alpha + \text{cos}^2\alpha = 1$, temos:

$$\text{sen}^2\alpha + \text{cos}^2\alpha = 1 \Rightarrow 0{,}8^2 + \text{cos}^2\alpha = 1 \Rightarrow \text{cos}^2\alpha = 1 - 0{,}64 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \text{cos}^2\alpha = 0{,}36 \Rightarrow \underbrace{\text{cos}\alpha}_{\text{cos}\alpha > 0} = \sqrt{0{,}36} = 0{,}6$$

Como α e β são complementares, temos $\text{sen}\beta = \text{cos}\alpha$ e $\text{cos}\beta = \text{sen}\alpha$.

Para calcular tgβ, podemos utilizar a relação $\text{tg}\beta = \dfrac{\text{sen}\beta}{\text{cos}\beta}$.

$$\text{tg}\beta = \frac{\text{sen}\beta}{\text{cos}\beta} = \frac{\overbrace{\text{cos}\alpha}^{\text{sen}\beta = \text{cos}\alpha}}{\underbrace{\text{sen}\alpha}_{\text{cos}\beta = \text{sen}\alpha}} \Rightarrow \text{tg}\beta = \frac{0{,}6}{0{,}8} = 0{,}75$$

Observação

Note que, de maneira geral, $\text{sen}^2\alpha \neq \text{sen}\alpha^2$, pois:

- $\text{sen}^2\alpha = (\text{sen}\alpha)^2 = \text{sen}\alpha \cdot \text{sen}\alpha$
- $\text{sen}\alpha^2 = \text{sen}(\alpha^2) = \text{sen}(\alpha \cdot \alpha)$

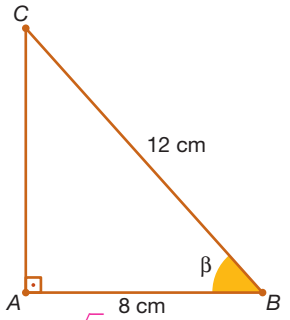
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Exercícios e problemas

Anote as respostas no caderno.

34. Resposta: $\text{tg}\alpha = \frac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\cos\beta}{\text{sen}\beta} = \frac{1}{\text{sen}\beta} \cdot \frac{1}{\frac{1}{\cos\beta}} = \frac{1}{\frac{\text{sen}\beta}{\cos\beta}} = \frac{1}{\text{tg}\beta}$

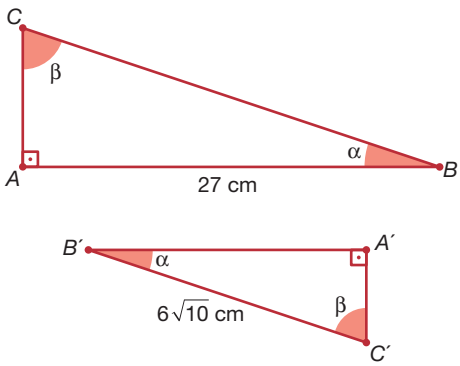
31. Calcule o seno, o cosseno e a tangente de β.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Resposta: $\text{sen}\beta = \frac{\sqrt{5}}{3}$, $\cos\beta = \frac{2}{3}$ e $\text{tg}\beta = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

32. Os triângulos a seguir são semelhantes, com razão de proporcionalidade $\frac{3}{2}$.



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

De acordo com as medidas indicadas, determine:

a) senα. Resposta: $\frac{\sqrt{10}}{10}$

b) cosα. Resposta: $\frac{3\sqrt{10}}{10}$

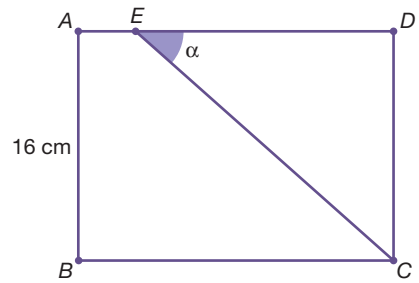
c) tgα. Resposta: $\frac{1}{3}$

d) senβ. Resposta: $\frac{3\sqrt{10}}{10}$

e) cosβ. Resposta: $\frac{\sqrt{10}}{10}$

f) tgβ. Resposta: 3

33. Calcule a tangente de α, sabendo que o retângulo *ABCD* tem 76 cm de perímetro, e o trapézio *ABCE*, 4 cm de base menor. Resposta: $\text{tg}\alpha = \frac{8}{9}$



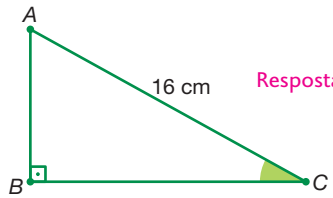
RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

34. Se α e β são ângulos agudos e complementares, mostre que $\text{tg}\alpha = \frac{1}{\text{tg}\beta}$.

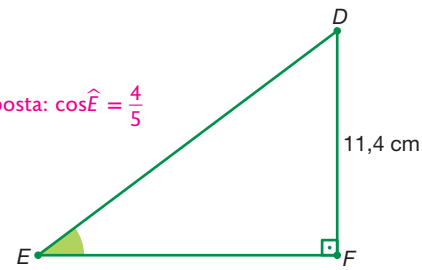
Dica

Note que $\cos\beta = \frac{1}{\frac{1}{\cos\beta}}$.

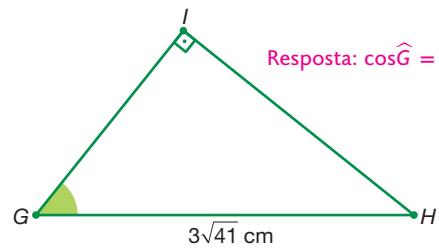
35. Calcule o cosseno dos ângulos $\hat{C}$, $\hat{E}$ e $\hat{G}$, sabendo que seus senos são respectivamente $\frac{\sqrt{15}}{8}$, $\frac{3}{5}$ e $\frac{5\sqrt{41}}{41}$.



Resposta: $\cos\hat{C} = \frac{7}{8}$



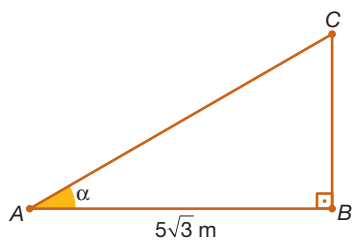
Resposta: $\cos\hat{E} = \frac{4}{5}$



Resposta: $\cos\hat{G} = \frac{4\sqrt{41}}{41}$

ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

36. Considere o triângulo retângulo *ABC*.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Sabendo que $\text{sen}\alpha = \frac{1}{2}$, calcule:

a) cosα. Resposta: $\frac{\sqrt{3}}{2}$

b) tgα. Resposta: $\frac{\sqrt{3}}{3}$

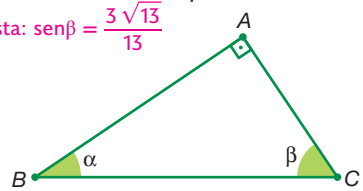
c) o comprimento da hipotenusa. Resposta: 10 m

d) o comprimento do cateto oposto a α. Resposta: 5 m

37. Em um triângulo retângulo de ângulos agudos α e β, a tangente de α é igual a $\frac{2}{3}$.

Determine o seno de β.

Resposta: $\text{sen}\beta = \frac{3\sqrt{13}}{13}$

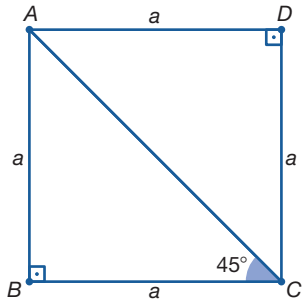


RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Ângulos notáveis

Com a finalidade de auxiliar no estudo da Trigonometria, veremos neste tópico como obter o seno, o cosseno e a tangente dos ângulos de 30°, 45° e 60°. Esses ângulos são denominados ângulos notáveis, pois costumam aparecer com frequência no estudo da Trigonometria.



Para determinar o seno, o cosseno e a tangente de 45°, considere o quadrado *ABCD*. Pelo Teorema de Pitágoras, temos:

$$(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (AC)^2 = a^2 + a^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (AC)^2 = 2a^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow AC = a\sqrt{2}$$

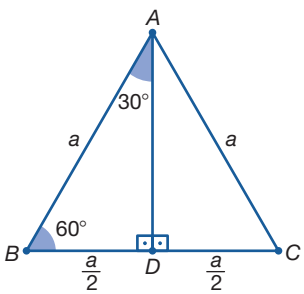
Observação

Note que $AC = a\sqrt{2}$, pois $a > 0$ e $AC > 0$.

Considerando o triângulo retângulo *ABC*, temos:

- $\text{sen}45° = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{\cancel{a}}{\cancel{a}\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \Rightarrow \text{sen}45° = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$
- $\cos 45° = \dfrac{BC}{AC} = \dfrac{\cancel{a}}{\cancel{a}\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \Rightarrow \cos 45° = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$
- $\text{tg}45° = \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{\cancel{a}}{\cancel{a}} \Rightarrow \text{tg}45° = 1$

Agora, considere o triângulo equilátero *ABC*. Pelo Teorema de Pitágoras, temos:



$$(AB)^2 = (AD)^2 + (BD)^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow a^2 = (AD)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (AD)^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (AD)^2 = \frac{3a^2}{4} \Rightarrow AD = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Dica

Lembre-se de que os ângulos internos de um triângulo equilátero medem 60°.

Considerando o triângulo retângulo *ABD*, temos:

- $\text{sen}30° = \dfrac{BD}{AB} = \dfrac{\frac{a}{2}}{a} = \dfrac{\cancel{a}}{2} \cdot \dfrac{1}{\cancel{a}} \Rightarrow \text{sen}30° = \dfrac{1}{2}$
- $\cos 30° = \dfrac{AD}{AB} = \dfrac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a} = \dfrac{\cancel{a}\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{1}{\cancel{a}} \Rightarrow \cos 30° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$
- $\text{tg}30° = \dfrac{BD}{AD} = \dfrac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{\cancel{a}}{\cancel{2}} \cdot \dfrac{\cancel{2}}{\cancel{a}\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \Rightarrow \text{tg}30° = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

Com base nas relações estudadas, temos:

- $\text{sen}60° = \cos(90° - 60°) = \cos 30° \Rightarrow \text{sen}60° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$
- $\cos 60° = \text{sen}(90° - 60°) = \text{sen}30° \Rightarrow \cos 60° = \dfrac{1}{2}$
- $\text{tg}60° = \dfrac{\text{sen}60°}{\cos 60°} = \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2 \Rightarrow \text{tg}60° = \sqrt{3}$

Professor, professora: Sugira aos estudantes que, no caderno, organizem os resultados obtidos em um quadro conforme apresentado.

Seno, cosseno e tangente dos ângulos notáveis

Ângulo	Seno	Cosseno	Tangente
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$

ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Tabela trigonométrica

A tabela trigonométrica apresenta valores aproximados do seno, do cosseno e da tangente de ângulos cujas medidas são inteiras e variam de 1° a 89°. Esses valores são úteis para a resolução de alguns problemas que envolvem triângulos retângulos.

Observação

Os valores para as razões trigonométricas estão aproximados aos milésimos. Contudo, é possível obter uma aproximação com um número maior de casas decimais, utilizando, por exemplo, uma calculadora científica ou uma planilha eletrônica.

Tabela trigonométrica para ângulos de 1° até 45°

Ângulo	Seno	Cosseno	Tangente
1°	0,017	1,000	0,017
2°	0,035	0,999	0,035
3°	0,052	0,999	0,052
4°	0,070	0,998	0,070
5°	0,087	0,996	0,087
6°	0,105	0,995	0,105
7°	0,122	0,993	0,123
8°	0,139	0,990	0,141
9°	0,156	0,988	0,158
10°	0,174	0,985	0,176
11°	0,191	0,982	0,194
12°	0,208	0,978	0,213
13°	0,225	0,974	0,231
14°	0,242	0,970	0,249
15°	0,259	0,966	0,268
16°	0,276	0,961	0,287
17°	0,292	0,956	0,306
18°	0,309	0,951	0,325
19°	0,326	0,946	0,344
20°	0,342	0,940	0,364
21°	0,358	0,934	0,384
22°	0,375	0,927	0,404
23°	0,391	0,921	0,424
24°	0,407	0,914	0,445
25°	0,423	0,906	0,466
26°	0,438	0,899	0,488
27°	0,454	0,891	0,510
28°	0,469	0,883	0,532
29°	0,485	0,875	0,554
30°	0,500	0,866	0,577
31°	0,515	0,857	0,601
32°	0,530	0,848	0,625
33°	0,545	0,839	0,649
34°	0,559	0,829	0,675
35°	0,574	0,819	0,700
36°	0,588	0,809	0,727
37°	0,602	0,799	0,754
38°	0,616	0,788	0,781
39°	0,629	0,777	0,810
40°	0,643	0,766	0,839
41°	0,656	0,755	0,869
42°	0,669	0,743	0,900
43°	0,682	0,731	0,933
44°	0,695	0,719	0,966
45°	0,707	0,707	1,000

Tabela trigonométrica para ângulos de 46° até 89°

Ângulo	Seno	Cosseno	Tangente
46°	0,719	0,695	1,036
47°	0,731	0,682	1,072
48°	0,743	0,669	1,111
49°	0,755	0,656	1,150
50°	0,766	0,643	1,192
51°	0,777	0,629	1,235
52°	0,788	0,616	1,280
53°	0,799	0,602	1,327
54°	0,809	0,588	1,376
55°	0,819	0,574	1,428
56°	0,829	0,559	1,483
57°	0,839	0,545	1,540
58°	0,848	0,530	1,600
59°	0,857	0,515	1,664
60°	0,866	0,500	1,732
61°	0,875	0,485	1,804
62°	0,883	0,469	1,881
63°	0,891	0,454	1,963
64°	0,899	0,438	2,050
65°	0,906	0,423	2,145
66°	0,914	0,407	2,246
67°	0,921	0,391	2,356
68°	0,927	0,375	2,475
69°	0,934	0,358	2,605
70°	0,940	0,342	2,747
71°	0,946	0,326	2,904
72°	0,951	0,309	3,078
73°	0,956	0,292	3,271
74°	0,961	0,276	3,487
75°	0,966	0,259	3,732
76°	0,970	0,242	4,011
77°	0,974	0,225	4,331
78°	0,978	0,208	4,705
79°	0,982	0,191	5,145
80°	0,985	0,174	5,671
81°	0,988	0,156	6,314
82°	0,990	0,139	7,115
83°	0,993	0,122	8,144
84°	0,995	0,105	9,514
85°	0,996	0,087	11,430
86°	0,998	0,070	14,301
87°	0,999	0,052	19,081
88°	0,999	0,035	28,636
89°	1,000	0,017	57,290

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

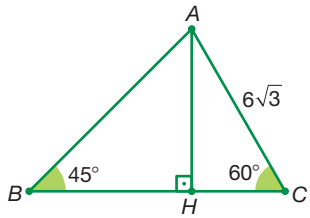
Professor, professora: Explique aos estudantes que a maior parte dos valores apresentados na tabela trigonométrica corresponde a aproximações de números irracionais. Peça-lhes, por exemplo, que comparem o seno, o cosseno e a tangente dos ângulos notáveis obtidos anteriormente e os apresentados na tabela trigonométrica.

Exercícios e problemas resolvidos

R10. Considere o triângulo *ABC*. Determine *AH*, *HC* e *BC*.

Resolução

Inicialmente, obtemos *AH* e *HC* calculando, respectivamente, o seno e o cosseno de 60° no triângulo retângulo *AHC*.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

- $\text{sen}60° = \frac{AH}{AC} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{AH}{6\sqrt{3}} \Rightarrow AH = \frac{6\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{2} = 9$
- $\cos 60° = \frac{HC}{AC} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{HC}{6\sqrt{3}} \Rightarrow HC = \frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$

Em seguida, obtemos *BH*, calculando a tangente de 45° no triângulo retângulo *ABH*.

- $\text{tg}45° = \frac{AH}{BH} \Rightarrow 1 = \frac{9}{BH} \Rightarrow BH = 9$

Calculando *BC*, temos:

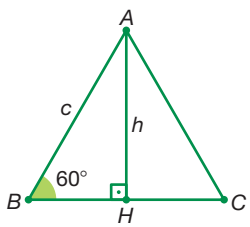
$$BC = BH + HC \Rightarrow BC = 9 + 3\sqrt{3}$$

Portanto, $AH = 9$, $HC = 3\sqrt{3}$ e $BC = 9 + 3\sqrt{3}$.

R11. Mostre que o comprimento da altura *h* de um triângulo equilátero, com comprimento do lado igual a *c*, é dado por $h = \frac{c\sqrt{3}}{2}$.

Resolução

Mostramos anteriormente essa relação utilizando o Teorema de Pitágoras e, agora, vamos usar a razão seno. Para isso, considere o triângulo equilátero *ABC*, de lado *c* e altura *h*.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Observação

A fim de simplificar a escrita, vamos dizer, em alguns contextos, "segmento *m*" quando, na realidade, queremos nos referir à medida do comprimento desse segmento, que nesse caso é *m*. Por exemplo, em vez de dizer "raio cuja medida do comprimento é *r*", diremos "raio *r*".

Calculando o seno do ângulo $A\hat{B}C$, temos:

$$\text{sen}60° = \frac{AH}{AB} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{h}{c} \Rightarrow 2h = c\sqrt{3} \Rightarrow h = \frac{c\sqrt{3}}{2}$$

Portanto, o comprimento da altura de um triângulo equilátero de lado *c* é dado por $h = \frac{c\sqrt{3}}{2}$.

R12. Mostre que, em um triângulo retângulo que tem um ângulo interno de 30°, o comprimento do cateto oposto a esse ângulo é igual à metade do comprimento da hipotenusa.

Resolução

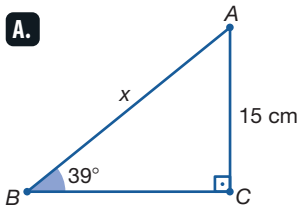
Sejam $\overline{AB}$ o cateto oposto ao ângulo de 30° e $\overline{BC}$ a hipotenusa. Calculando sen30° verificamos que o comprimento do cateto oposto ao ângulo de 30° é igual à metade da hipotenusa.

$$\text{sen}30° = \frac{AB}{BC} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{AB}{BC} \Rightarrow AB = \frac{BC}{2}$$

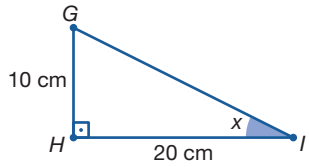
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

R13. Consulte a tabela trigonométrica apresentada anteriormente e determine o valor aproximado de x em cada triângulo.

A.



B.



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Resolução

A. Obtemos x calculando o seno de 39°.

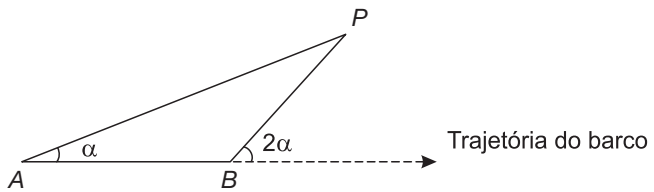
$$\text{sen}39° = \frac{AC}{AB} \Rightarrow 0{,}629 = \frac{15}{x} \Rightarrow 0{,}629x = 15 \Rightarrow x = 23{,}847$$

B. Calculando a tangente de x, temos:

$$\text{tg}x = \frac{GH}{HI} \Rightarrow \text{tg}x = \frac{10}{20} = 0{,}5$$

Consultando a tabela trigonométrica, verificamos que $x \simeq 27°$.

R14. (Enem, 2011) Para determinar a distância de um barco até a praia, um navegante utilizou o seguinte procedimento: a partir de um ponto A, mediu o ângulo visual fazendo mira em um ponto fixo P da praia. Mantendo o barco no mesmo sentido, ele seguiu até um ponto B de modo que fosse possível ver o mesmo ponto P da praia, no entanto sob um ângulo visual 2α. A figura ilustra essa situação.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA/ENEM 2011

Suponha que o navegante tenha medido o ângulo $\alpha = 30°$ e, ao chegar ao ponto B, verificou que o barco havia percorrido a distância $AB = 2\,000$ m. Com base nesses dados e mantendo a mesma trajetória, a menor distância do barco até o ponto fixo P será:

a) 1000 m

b) $1000\sqrt{3}$ m

c) $2\,000\frac{\sqrt{3}}{3}$ m

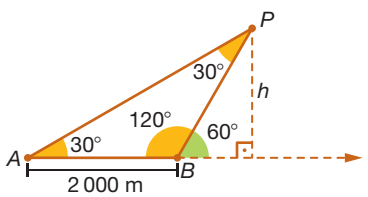
d) 2 000 m

e) $2\,000\sqrt{3}$ m

Resolução

A menor distância do barco até o ponto P corresponde à altura h do triângulo ABP relativa ao lado $\overline{AB}$, como indicado na figura.

Note que $A\hat{B}P = 120°$, pois $A\hat{B}P$ é suplementar ao ângulo $2\alpha = 60°$, e $A\hat{P}B = 30°$, pois a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°. Como $B\hat{A}P = A\hat{P}B$, o triângulo ABP é isósceles. Então $BP = AB = 2\,000$ m. Segue que:



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

$$\text{sen}60° = \frac{h}{2\,000} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{h}{2\,000} \Rightarrow h = 1000\sqrt{3} \text{ m}$$

Logo, a menor distância do barco até o ponto fixo P é $1000\sqrt{3}$ m.

Portanto, a alternativa correta é **b**.

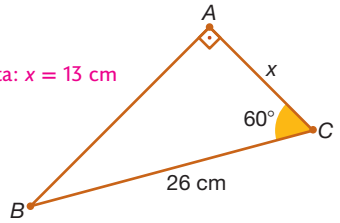
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Anote as respostas no caderno.

38. Em cada item, determine a medida x indicada.

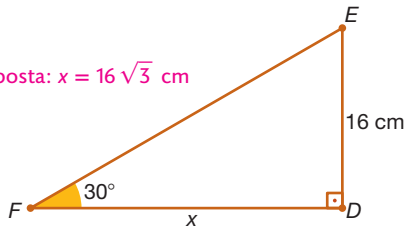
A.

Resposta: $x = 13$ cm

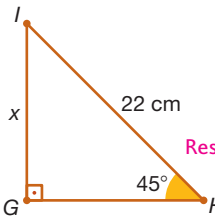


B.

Resposta: $x = 16\sqrt{3}$ cm

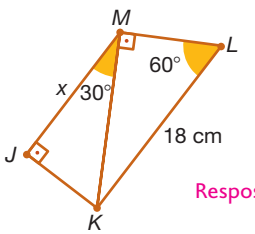


C.



Resposta: $x = 11\sqrt{2}$ cm

D.



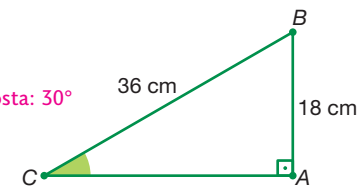
Resposta: $x = \frac{27}{2}$ cm

ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

39. De acordo com os comprimentos dos lados de cada triângulo, determine as medidas dos ângulos destacados em verde.

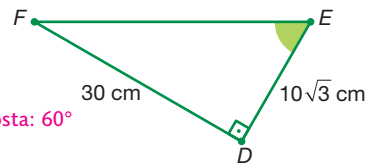
A.

Resposta: 30°



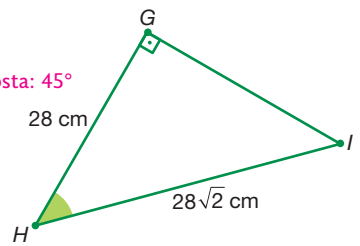
B.

Resposta: 60°



C.

Resposta: 45°

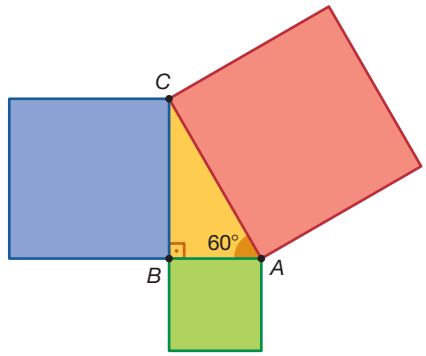


ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

40. Antônio desenhou em seu caderno um triângulo ABC, retângulo em A. Sabendo que esse triângulo tem dois ângulos congruentes e que $AB = 5\sqrt{2}$ cm, determine a medida do comprimento de $\overline{BC}$.

Resposta: 10 cm

41. A imagem apresentada a seguir é formada por um triângulo retângulo e três quadrados.

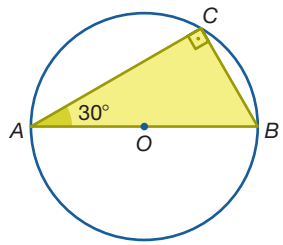


SERGIO L. FILHO/ARQUIVO DA EDITORA

Se $AB = 4{,}5$ cm, então a soma das áreas dos três quadrados é: Resposta: Alternativa **a**.

a) 162 cm²
b) 53,9 cm²
c) 90 cm²
d) 21,3 cm²
e) 202,5 cm²

42. Em uma aula de Educação Física, o professor desenhou uma circunferência de centro O e raio 5 m. Sobre essa circunferência, ele posicionou três cones que, no esquema a seguir, estão indicados pelos pontos A, B e C.

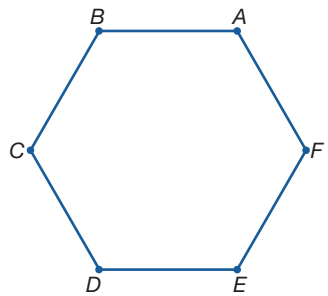


SERGIO L. FILHO/ARQUIVO DA EDITORA

a) Qual é a distância entre os cones A e B?
Resposta: 10 m

b) Determine a distância entre os cones A e C.
Resposta: $5\sqrt{3}$ m

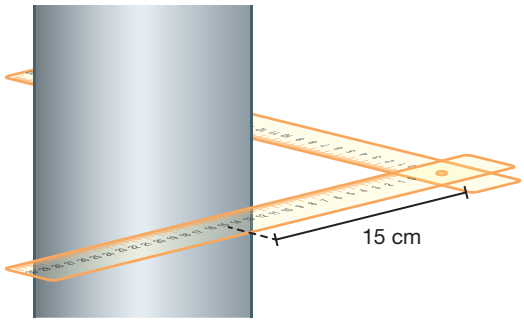
43. Determine o comprimento das diagonais $\overline{CE}$ e $\overline{AD}$ do hexágono regular, sabendo que ele tem 6 cm de perímetro. Resposta: $CE = \sqrt{3}$ cm e $AD = 2$ cm



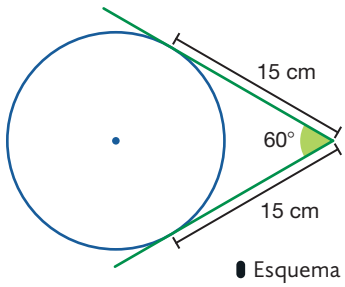
RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

44. Na medição do diâmetro de um tubo de aço cujas extremidades estão inacessíveis, um operário utilizou um instrumento em forma de "V", com hastes graduadas, como ilustrado a seguir.



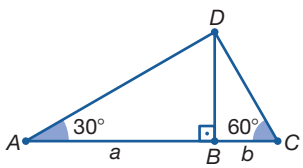
RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA



Esquema do tubo visto de cima.

De acordo com as informações, calcule aproximadamente o diâmetro do tubo. Resposta: 17,3 cm

45. Com base na figura a seguir, determine:



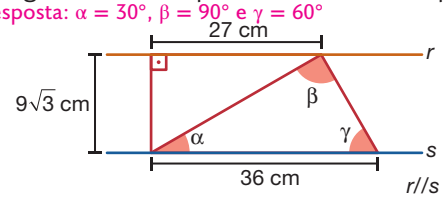
RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

a) o valor de $\frac{a}{b}$. Resposta: 3

b) o seno de $B\widehat{D}C$. Resposta: $\frac{1}{2}$

c) a tangente de $A\widehat{D}B$. Resposta: $\sqrt{3}$

46. Determine a medida dos ângulos α, β e γ na figura a seguir, sabendo que as retas *r* e *s* são paralelas. Resposta: α = 30°, β = 90° e γ = 60°



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

47. Utilizando a tabela trigonométrica apresentada anteriormente, determine o seno, o cosseno e a tangente de: Respostas no final do **Livro do Estudante**.

a) 78°. b) 5°. c) 52°.

48. Determine a medida aproximada do ângulo agudo:

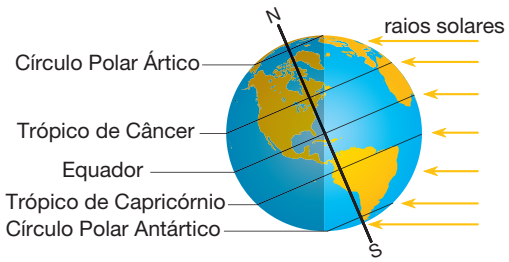
a) cujo seno é 0,21. Resposta: 12°

b) cujo cosseno é 0,239. Resposta: 76°

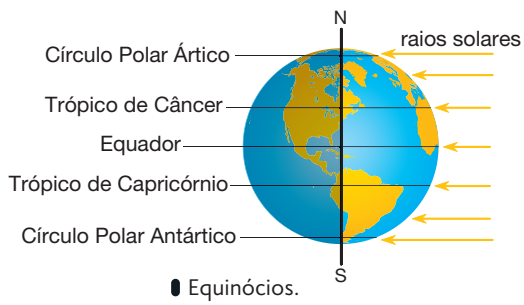
c) cuja tangente é 0,858. Resposta: 41°

49. Em virtude da inclinação do eixo de rotação da Terra em relação ao plano da órbita, ora um hemisfério está voltado para o Sol, ora o outro hemisfério. Em consequência disso, ocorrem os solstícios, que são os dois instantes do ano em que o Sol mais se afasta do equador terrestre, marcando o início do verão em um hemisfério e do inverno no outro. Entre os solstícios, ocorrem os equinócios, que são os dois momentos do ano em que os hemisférios estão simetricamente dispostos em relação ao Sol, e os raios solares são paralelos ao equador, marcando o início da primavera em um dos hemisférios e do outono no outro. Nos equinócios, o dia e a noite têm a mesma duração.

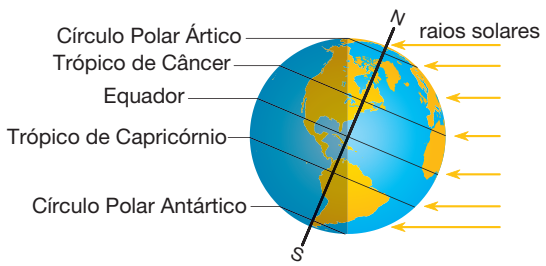
Imagens sem proporção entre si e em cores fantasia.



Solstício de verão no Hemisfério Sul e de inverno no Hemisfério Norte.



Equinócios.



Solstício de verão no Hemisfério Norte e de inverno no Hemisfério Sul.

ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Durante um equinócio, estão localizadas sobre o mesmo meridiano uma torre, a 30° de **latitude**, projetando uma sombra de 33 m, e uma pessoa, a 60° de latitude, projetando uma sombra de 3 m. Sabendo que nesse mesmo instante, no encontro desse meridiano com a linha do equador, os raios solares incidem na Terra perpendicularmente, determine a altura aproximada da torre e da pessoa. Resposta: Torre: 57 m; pessoa: 1,73 m.

Latitude: distância angular (em relação ao centro da Terra) entre um ponto localizado na superfície terrestre e a linha do equador.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

50. c) Professor, professora: Caso os estudantes tenham dificuldade em resolver o item **c** da tarefa **50**, sugira que realizem o desenho de um esquema para representar a rampa, indicando o ângulo de inclinação sugerido. Depois, consultem a tabela trigonométrica.

50. A acessibilidade busca garantir a todas as pessoas o uso seguro dos espaços e serviços que a cidade oferece, fomentando autonomia ao indivíduo independentemente da deficiência ou dificuldade de mobilidade permanente ou temporária de cada um.

ODS 10

Para garantir a melhoria da qualidade de vida das pessoas com algum tipo de deficiência, atitudes podem ser adotadas, como:

- legendas ou intérpretes de libras em programas de televisão, para surdos;
- livros escritos em braile e *softwares* especiais para navegação na internet, para pessoas com deficiência visual;
- espaços físicos planejados, em locais públicos e privados, para o deslocamento de pessoas com deficiência motora ou mobilidade reduzida.

LAÍS GARBELINI/ARQUIVO DA EDITORA

Algumas dessas melhorias são regulamentadas por leis e normas, como o Decreto nº 5.296/2004, que regimenta a Lei nº 10.098/2000 e estabelece normas gerais e critérios básicos para a promoção da acessibilidade das pessoas com deficiência ou mobilidade reduzida e a NBR 9050, norma que estabelece a inclinação máxima que uma rampa de acesso deve ter, informando que a razão entre a altura a que se deseja acessar e o comprimento horizontal c da rampa deve ser no máximo 0,0833.

$$\frac{a}{c} \leq 0{,}0833$$

Assim, por exemplo, para acessar uma altura de 1 m, é necessário que o comprimento horizontal da rampa não seja inferior a 12 m, pois $\frac{1}{12} \simeq 0{,}0833$.

a) Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes respondam que é para evitar rampas muito íngremes, o que dificultaria o deslocamento de seus usuários.

a) Em sua opinião, por que foi estabelecida essa razão máxima?

b) Para acessar uma altura de 50 cm, qual deve ser, aproximadamente, o comprimento horizontal mínimo da rampa? Resposta: 600 cm ou 6 m.

c) Entre quais medidas inteiras de ângulo, em graus, deve ser a inclinação máxima de uma rampa em relação à horizontal? Resposta: Entre 4° e 5°.

d) Realize uma pesquisa para determinar algumas atitudes, além das apresentadas no texto, que podem auxiliar pessoas com alguma deficiência.

51. Elabore um problema envolvendo as relações métricas em um triângulo retângulo. Em seguida, troque com um colega para que ele o resolva. Depois, verifiquem se as respostas estão corretas.

50. d) Sugestão de resposta: Banheiros adaptados para pessoas em cadeira de rodas e piso tátil para pessoas com deficiência visual.

52. Para o cálculo do seno ou do cosseno de um ângulo agudo, além da tabela trigonométrica, podemos utilizar uma calculadora científica. Acompanhe o procedimento utilizado para o cálculo do seno e do cosseno de 55°.

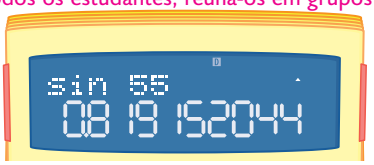
Professor, professora: Oriente os estudantes sobre como verificar se a calculadora está operando com a unidade de medida de ângulos em graus.

Inicialmente, pressionamos a seguinte sequência de teclas.

sin 5 5

Em seguida, pressionamos = para obter o valor de sen55°.

Professor, professora: Caso não haja calculadoras para todos os estudantes, reúna-os em grupos para que possam realizar a tarefa ou, então, analise a possibilidade de levar algumas calculadoras para a sala de aula.



Para calcular cos55°, procedemos de maneira semelhante, utilizando dessa vez a tecla cos.

cos 5 5 =

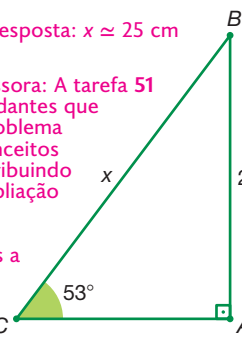


Observação

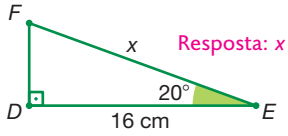
Sin e *cos* são abreviações das palavras inglesas *sine* e *cosine*, que correspondem a seno e cosseno, respectivamente.

Utilize uma calculadora científica para determinar o valor aproximado de x em cada figura.

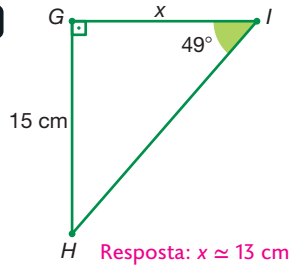
A. Resposta: $x \simeq 25$ cm



B. Resposta: $x \simeq 17$ cm



C. Resposta: $x \simeq 13$ cm



Professor, professora: A tarefa **51** propõe aos estudantes que elaborem um problema utilizando os conceitos estudados, contribuindo assim para a ampliação do repertório de reflexões e questionamentos a respeito de determinadas situações.

Professor, professora: Peça aos estudantes que comparem os resultados obtidos na calculadora científica com aqueles da tabela trigonométrica apresentada no início desta seção.

51. Resposta pessoal. Antes de os estudantes elaborarem o problema, peça a eles que analisem os contextos propostos na seção **Exercícios e problemas** deste capítulo e, se julgar conveniente, oriente-os a investigar outros problemas disponíveis em provas de vestibular e Enem.

ILUSTRAÇÕES: SERGIO L. FILHO/ARQUIVO DA EDITORA

ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

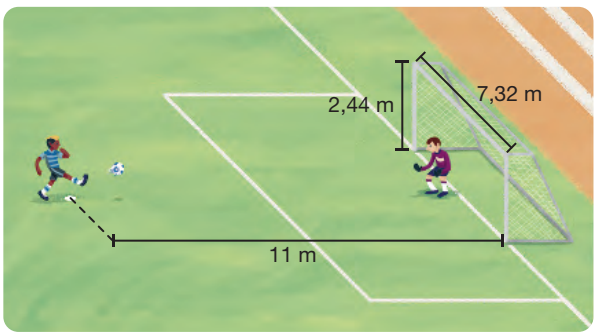
53. Elabore um problema envolvendo as relações trigonométricas no triângulo retângulo. Por fim, troque com um colega para que ele o resolva. Depois, verifiquem se as respostas estão corretas.

54. Um dos esportes mais populares do mundo é o futebol. Como em muitos outros esportes, há várias regras que regem sua prática, entre elas algumas referentes às medidas e às marcações do campo de jogo.

O esquema a seguir apresenta algumas das medidas de um campo de futebol, considerando as dimensões internas do gol.

53. Resposta pessoal. Antes de os estudantes elaborarem o problema, peça a eles que analisem os contextos propostos na seção **Exercícios e problemas** deste capítulo e, se julgar conveniente, oriente-os a investigar outros problemas disponíveis em provas de vestibular e Enem.

Professor, professora: Na tarefa **53**, se achar necessário, peça aos estudantes que construam um triângulo retângulo, indique algumas de suas medidas e elaborem o problema com base nessa construção.



54. d) Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes reconheçam que a prática esportiva está relacionada ao bem-estar físico e mental, além de ser uma atividade de lazer para muitas pessoas. Ao reconhecer o esporte como um direito, o ECA torna obrigatória a elaboração de políticas públicas que incentivem e promovam o acesso ao esporte a crianças e adolescentes.

LEONARDO GIBRAN/ARQUIVO DA EDITORA

De acordo com as medidas indicadas no esquema e supondo que a bola siga uma trajetória retilínea após um chute da marca do pênalti, responda às questões.

a) Em relação ao centro do gol, qual é o ângulo em que um jogador deve chutar a bola para que ela atinja o canto inferior esquerdo? Resposta: Aproximadamente 18°.

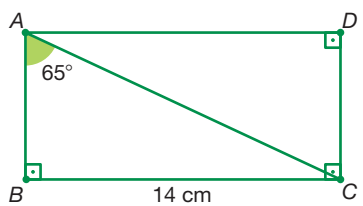
b) Em relação ao plano do chão, qual é o ângulo em que deve ser chutada a bola para que ela atinja o centro do gol, na parte superior? Resposta: Aproximadamente 13°.

c) Se um jogador chutar a bola num ângulo maior do que 30° em relação ao centro do gol, ela atingirá a área interna às traves? Por quê? Resposta: Não, pois o maior ângulo possível para acertar o gol é aproximadamente 22°, atingido quando a bola é chutada em direção ao canto superior esquerdo ou direito.

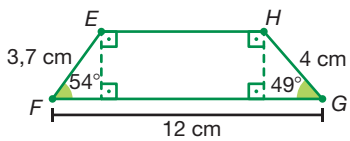
d) Você pratica futebol ou algum outro esporte? Sabia que o direito ao esporte é assegurado às crianças e adolescentes pelo Estatuto da Criança e do Adolescente (ECA)? Em sua opinião, qual é a importância dessa prática ser reconhecida como um direito?

55. Com o auxílio de uma calculadora, determine o perímetro aproximado de cada figura.

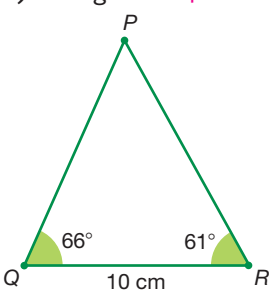
a) Retângulo. Resposta: 41 cm



b) Trapézio. Resposta: 26,9 cm



c) Triângulo. Resposta: 32,3 cm



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

56. A tirolesa é uma técnica utilizada para o transporte de carga de um ponto a outro. Nessa técnica, a carga é presa a uma roldana que desliza por um cabo, cujas extremidades geralmente estão em alturas diferentes. A tirolesa também é utilizada como prática esportiva, sendo considerada um esporte radical. Em geral, ela é praticada em meio a paisagens naturais com outros esportes, como o rapel.

Em certo parque, a estrutura para a prática da tirolesa foi montada de maneira que a diferença entre as alturas das extremidades do cabo por onde os participantes deslizam é cerca de 60 m, e o ângulo de descida formado com a vertical mede 80°.

Nessas condições, e considerando o cabo esticado, é correto afirmar que: Resposta: Alternativa **b**.

a) a distância horizontal percorrida ao fim do percurso é 10% menor do que o comprimento do cabo.

b) um praticante que desliza ao longo do cabo com uma velocidade constante de 12 m/s completa o percurso em aproximadamente 29 s.

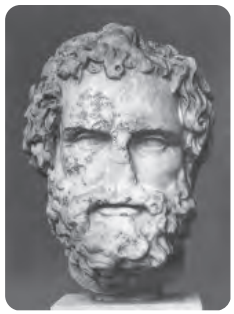
c) um praticante que se deslocou ao longo do cabo a uma velocidade média vertical de 5 m/s completou o percurso em 20 s.

d) a distância do percurso é de 500 m.

Professor, professora: Explique aos estudantes que m/s é a indicação de medida de velocidade em metros por segundo.

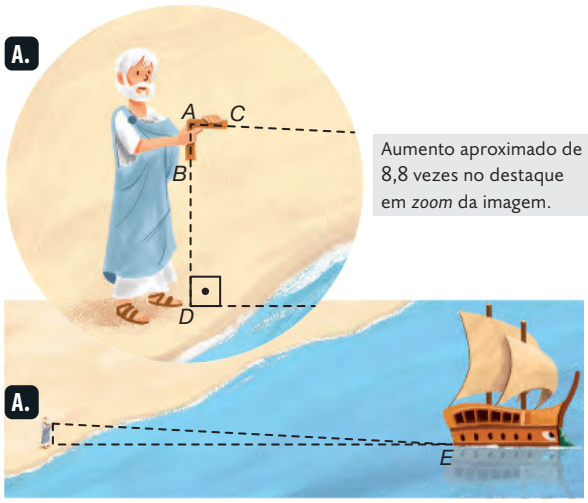
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

57. Há relatos de que Tales de Mileto (c. 600 a.C.), em certa ocasião, usou a congruência de triângulos para calcular a distância de um navio à praia. Segundo dizem, de posse de um instrumento formado por duas hastes articuladas, ele manteve uma delas $(\overline{AB})$ apontada verticalmente para o chão, no ponto D, e a outra $(\overline{AC})$ apontada para o navio, no ponto E, de acordo com o esquema.



GRANGER/IMAGEPLUS – MUSEU NACIONAL ROMANO, ROMA

Antiga escultura grega de Tales de Mileto.



Aumento aproximado de 8,8 vezes no destaque em *zoom* da imagem.

ILUSTRAÇÕES: LEONARDO GIBRAN/ARQUIVO DA EDITORA

Em seguida, sem mudar a abertura das hastes, girou o instrumento projetando um ponto P na praia.



Pelo fato de o triângulo ADP ter um lado e dois ângulos adjacentes a esse lado iguais aos lados do triângulo ADE, eles são congruentes. Em consequência, $DE = DP$, sendo assim suficiente medir DP.

Fonte de pesquisa: EVES, Howard. *Introdução à história da matemática*. Tradução: Hygino H. Domingues. 2. ed. Campinas: Editora da Unicamp, 2004.

Outra maneira de obter o resultado desejado é medir o ângulo formado entre as hastes e a distância entre o vértice do instrumento e o chão. Dessa maneira, se supusermos que $B\hat{A}C = 87°$ e que $AD = 1{,}7$ m, qual seria a distância do navio à praia?

Resposta: Aproximadamente 32 m.

58. A seguir, é apresentada uma das maneiras que podemos utilizar atualmente para determinar o raio aproximado da Terra.

A bordo de uma aeronave, a uma altura h do solo, mede-se o ângulo α, formado entre as retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{AO}$, em que:

- A representa a posição da aeronave;
- B é um ponto avistado no horizonte, a partir de A;
- O é o centro da Terra.

Imagem em cores fantasia.

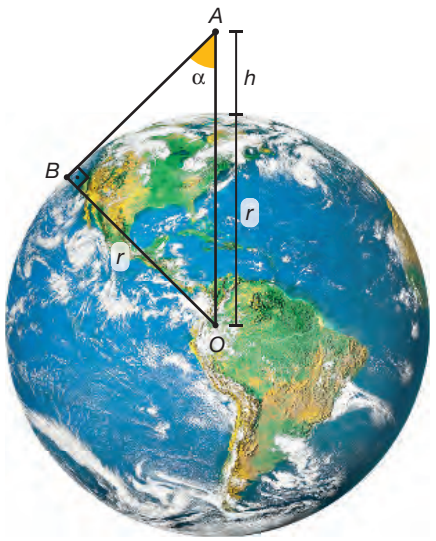


ILUSTRAÇÃO DE RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA. FOTO: ROBERT_S/SHUTTERSTOCK

Considerando o planeta como uma esfera, o triângulo ABO é retângulo em B, pois é o ponto de tangência da reta $\overleftrightarrow{AB}$ com a Terra.

Se r for o raio da Terra, de acordo com a figura anterior, teremos:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{r}{r+h} \Rightarrow (r+h)\cdot\operatorname{sen}\alpha = r \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r\cdot\operatorname{sen}\alpha + h\cdot\operatorname{sen}\alpha = r \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h\cdot\operatorname{sen}\alpha = r - r\cdot\operatorname{sen}\alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h\cdot\operatorname{sen}\alpha = r(1-\operatorname{sen}\alpha)$$

Dessa maneira, podemos concluir que:

$$r = \frac{h\cdot\operatorname{sen}\alpha}{1-\operatorname{sen}\alpha}$$

Como h e α são conhecidos, podemos determinar o raio r da Terra.

a) Supondo que uma aeronave que esteja a 11 000 m de altitude encontre $\alpha = 86{,}53°$, determine, com o auxílio de uma calculadora, o comprimento aproximado do raio da Terra.
Resposta: 5 989 km

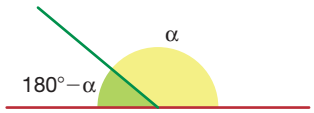
b) O raio da Terra é, aproximadamente, 6 380 km. Qual é a diferença, em quilômetros, entre o resultado obtido no item **a** e o comprimento do raio apresentado neste item?
Resposta: Aproximadamente 391 km.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Seno e cosseno de ângulos suplementares

Estudamos anteriormente as razões trigonométricas em um triângulo retângulo. Contudo, o seno e o cosseno podem ser utilizados para determinar medidas em triângulos quaisquer. Para tanto, inicialmente estudaremos os valores dessas razões trigonométricas para ângulos suplementares.

Dado um ângulo obtuso α, com $90° < \alpha < 180°$, temos, por definição:



Observação

Dois ângulos $\hat{A}$ e $\hat{B}$ são suplementares se $\hat{A} + \hat{B} = 180°$.

- $\text{sen}\alpha = \text{sen}(180° - \alpha)$.
  O seno de um ângulo obtuso é igual ao seno de seu suplementar.
- $\cos\alpha = -\cos(180° - \alpha)$.
  O cosseno de um ângulo obtuso é igual ao oposto do cosseno de seu suplementar.

No caso particular de um ângulo de 90°, temos $\text{sen}90° = 1$ e $\cos 90° = 0$.

Posteriormente, essas igualdades serão estudadas com mais detalhes.

Professor, professora: As igualdades apresentadas são trabalhadas com mais detalhes posteriormente, quando as razões seno e cosseno forem tratadas na circunferência trigonométrica.

Exemplos

- $\text{sen}150° = \text{sen}(180° - 150°) = \text{sen}30° = \frac{1}{2}$
- $\cos 150° = -\cos(180° - 150°) = -\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$
- $\text{sen}106° = \text{sen}(180° - 106°) = \text{sen}74° = 0{,}961$
- $\cos 106° = -\cos(180° - 106°) = -\cos 74° = -0{,}276$

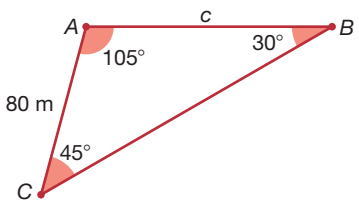
Dica

Os valores de sen74° e cos74° podem ser consultados na tabela trigonométrica.

Lei dos senos

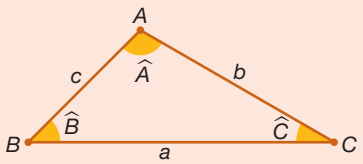
Professor, professora: Ao iniciar o trabalho com este tópico, explique aos estudantes que esse resultado é muito importante, pois nos possibilita determinar as medidas de comprimento dos lados e a medida dos ângulos internos de um triângulo qualquer, relacionando dois lados e seus respectivos ângulos opostos.

Para determinar o comprimento de uma ponte que será construída sobre certo vale, um topógrafo marcou os pontos *A* e *B*, que serão as extremidades da ponte, e um ponto *C* na mesma margem de *A*. Em seguida, mediu *AC* e os ângulos $B\hat{A}C$ e $A\hat{C}B$, conforme o esquema.



Para determinar o comprimento da ponte, podemos utilizar a lei dos senos, em que:

Dado um triângulo *ABC* qualquer, o comprimento dos lados é proporcional ao seno dos ângulos opostos correspondentes.



$$\frac{a}{\text{sen}\hat{A}} = \frac{b}{\text{sen}\hat{B}} = \frac{c}{\text{sen}\hat{C}}$$

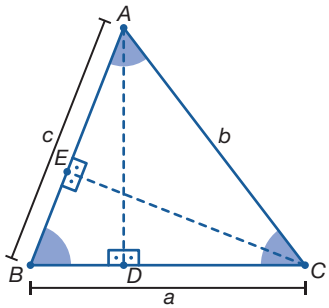
RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

LEONARDO GIBRAN/ARQUIVO DA EDITORA

RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Para demonstrar a lei dos senos para triângulos acutângulos, consideramos o triângulo *ABC*.



Observação

Triângulo acutângulo é aquele no qual cada ângulo interno é agudo, ou seja, tem menos de 90°.

RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Nos triângulos retângulos obtidos ao traçarmos as alturas relativas aos lados $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$, temos: Professor, professora: Se necessário, explique aos estudantes o uso do símbolo △ para indicar um triângulo.

- $\triangle BCE$: $\operatorname{sen}\hat{B} = \frac{CE}{a} \Rightarrow CE = a \cdot \operatorname{sen}\hat{B}$
- $\triangle ACD$: $\operatorname{sen}\hat{C} = \frac{AD}{b} \Rightarrow AD = b \cdot \operatorname{sen}\hat{C}$
- $\triangle ACE$: $\operatorname{sen}\hat{A} = \frac{CE}{b} \Rightarrow CE = b \cdot \operatorname{sen}\hat{A}$
- $\triangle ABD$: $\operatorname{sen}\hat{B} = \frac{AD}{c} \Rightarrow AD = c \cdot \operatorname{sen}\hat{B}$

Com base nessas informações, obtemos:

$$\underbrace{a \cdot \operatorname{sen}\hat{B}}_{CE} = \underbrace{b \cdot \operatorname{sen}\hat{A}}_{CE} \Rightarrow \frac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}} \text{ (I)} \qquad \underbrace{b \cdot \operatorname{sen}\hat{C}}_{AD} = \underbrace{c \cdot \operatorname{sen}\hat{B}}_{AD} \Rightarrow \frac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen}\hat{C}} \text{ (II)}$$

Portanto, de I e II segue que:

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen}\hat{C}}$$

A demonstração da lei dos senos para triângulos obtusângulos e triângulos retângulos é realizada de maneira análoga à apresentada.

Para resolvermos o problema apresentado no início do tópico, em que é necessário medir o comprimento que terá a ponte, aplicamos a lei dos senos.

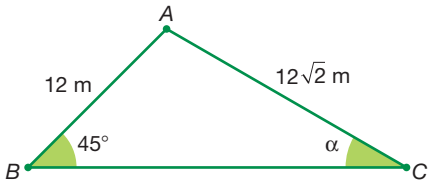
$$\frac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen}\hat{C}} \Rightarrow \frac{80}{\operatorname{sen}30°} = \frac{c}{\operatorname{sen}45°} \Rightarrow \frac{80}{\frac{1}{2}} = \frac{c}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \Rightarrow c = 80\sqrt{2} \simeq 113{,}14$$

Portanto, a ponte terá, aproximadamente, 113,14 m de comprimento.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Exercícios e problemas resolvidos

R15. Determine a medida α no triângulo *ABC*.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

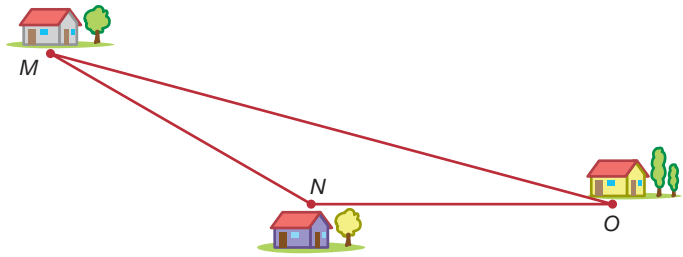
Resolução

Utilizando a lei dos senos, temos:

$$\frac{AC}{\operatorname{sen}45°} = \frac{AB}{\operatorname{sen}\alpha} \Rightarrow \frac{12\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{12}{\operatorname{sen}\alpha} \Rightarrow 12\sqrt{2} \cdot \operatorname{sen}\alpha = 12 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \operatorname{sen}\alpha = \frac{6\sqrt{2}}{12\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 30°$$

R16. Na figura a seguir, os pontos *M*, *N* e *O* representam a casa de Marcos, Natália e Osvaldo, respectivamente.

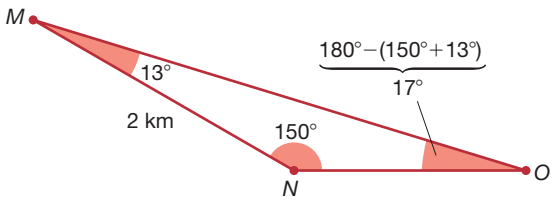
Imagem com elementos sem proporção entre si.



Sabendo que a distância em linha reta entre a casa de Marcos e a de Natália é 2 km e que $N\hat{M}O = 13°$ e $M\hat{N}O = 150°$, determine a distância entre a casa de Marcos e a de Osvaldo.

Resolução

Podemos representar essa situação por meio do triângulo *MNO*.



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Aplicando a lei dos senos:

$$\frac{MN}{\underbrace{\text{sen}17°}_{0,292}} = \frac{MO}{\underbrace{\text{sen}150°}_{\text{sen}30°}} \Rightarrow \frac{2}{0,292} = \frac{MO}{\frac{1}{2}} \Rightarrow 0,292 \cdot MO = 1 \Rightarrow MO \simeq 3,42$$

Portanto, a distância entre a casa de Marcos e a de Osvaldo é, aproximadamente, 3,42 km.

Exercícios e problemas

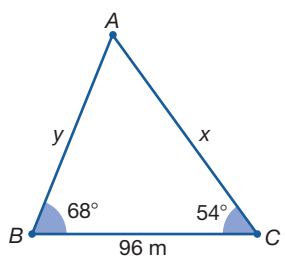
Anote as respostas no caderno.

59. Determine o valor do seno e do cosseno de cada ângulo. Respostas no final do **Livro do Estudante**.

a) 95° **b)** 110° **c)** 125° **d)** 168° **e)** 174°

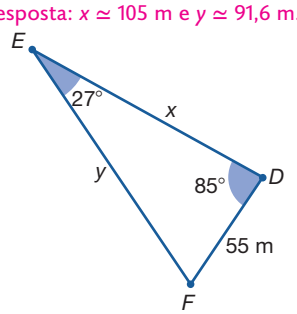
60. Determine os valores de *x* e *y* em cada triângulo.

A.



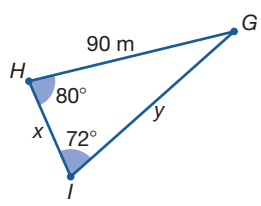
Resposta: $x \simeq 105$ m e $y \simeq 91,6$ m.

B.



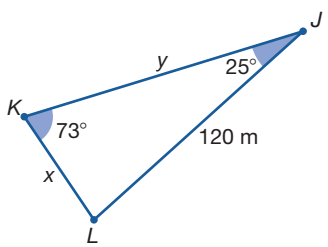
Resposta: $x \simeq 112,3$ m e $y \simeq 120,7$ m.

C.



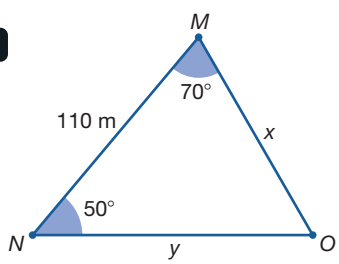
Resposta: $x \simeq 44,4$ m e $y \simeq 93,2$ m.

D.



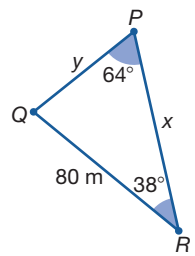
Resposta: $x \simeq 53$ m e $y \simeq 124,3$ m.

E.



Resposta: $x \simeq 97,3$ m e $y \simeq 119,4$ m.

F.

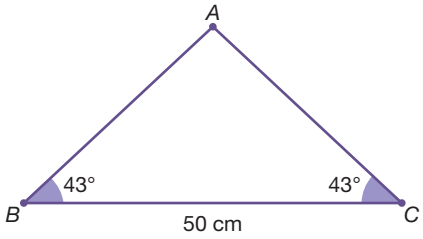


Resposta: $x \simeq 87$ m e $y \simeq 54,8$ m.

ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

61. Considere o seguinte triângulo isósceles.



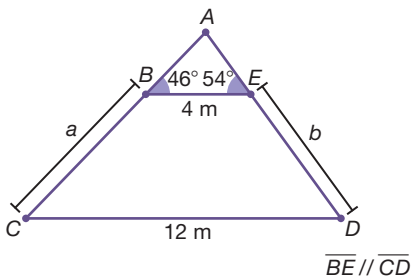
OHANNA SCHMITT/ARQUIVO DA EDITORA

Calcule o comprimento aproximado de cada um de seus lados e o seno do ângulo oposto à base.
Resposta: 50 cm, 34,2 cm e 34,2 cm; sen94° ≃ 0,998.

62. Considere um triângulo isósceles cujo comprimento da base mede 75 cm e o ângulo oposto a ela tem 104°. Calcule o comprimento aproximado de cada um de seus lados e o seno dos ângulos adjacentes à base. Resposta: 75 cm, 47,6 cm e 47,6 cm; sen38° ≃ 0,616.

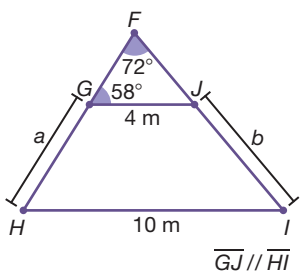
63. Em cada item, determine os valores aproximados de a e b.

A.



Resposta: $a \simeq 6{,}6$ m e $b \simeq 5{,}8$ m.

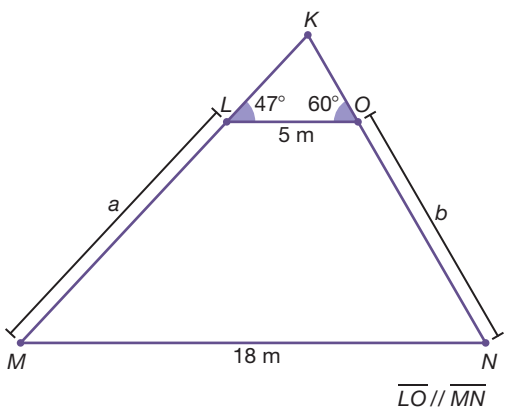
B.



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

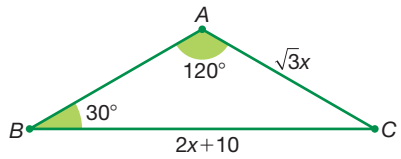
Resposta: $a \simeq 4{,}83$ m e $b \simeq 5{,}4$ m.

C.



Resposta: $a \simeq 11{,}8$ m e $b \simeq 9{,}9$ m.

64. Calcule o valor de x. Resposta: $x = 10$



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

65. Em geral os dublês são contratados para substituir atores em cenas perigosas ou que requerem habilidades especiais. Isso é feito para evitar que os atores se machuquem. A profissão de dublê é perigosa e requer que o profissional seja altamente treinado para evitar acidentes.



SAMANTHA ZUCCHI/INSIDEFOTO/ZUMA PRESS/IMAGEPLUS

Momento de gravação de cena de ação no *set* do filme *Missão Impossível 7*, na Itália, em 2020. No banco traseiro, há um dublê escondido.

Na gravação da cena de um filme, dois dublês pilotam os carros A e B. De acordo com o roteiro, o carro A deve se locomover a 18 m/s, e o B, a uma velocidade suficiente para que haja a colisão com o carro A no ponto C.

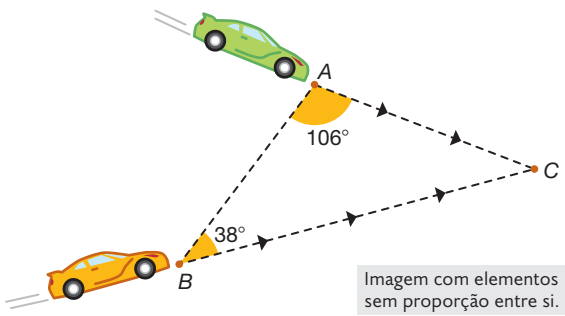


Imagem com elementos sem proporção entre si.

RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Considerando os ângulos indicados no esquema e sabendo que a distância inicial entre os carros é 400 m, calcule, aproximadamente:

a) a distância entre cada carro e o ponto C.
Resposta: A: 419 m; B: 654 m

b) o tempo de percurso entre a posição inicial e o momento da colisão em segundos.
Resposta: 23 s

c) a velocidade do carro B para chocar-se com A em C. Resposta: 28 m/s

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

66. Um dos instrumentos utilizados pelos meteorologistas para obter informações são os balões meteorológicos. Com base em informações, como umidade, temperatura e pressão atmosférica, os meteorologistas realizam previsões, com certa confiabilidade, das condições climáticas em determinada região, por certo período.



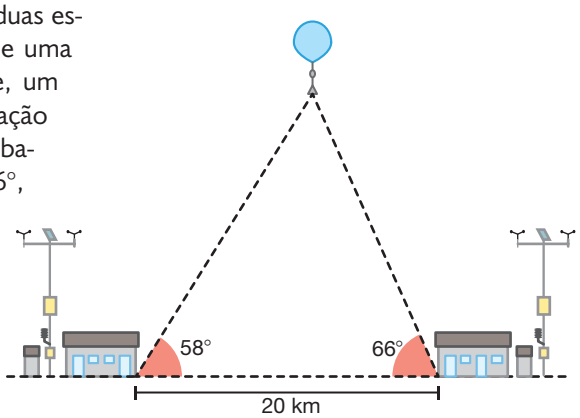
METTE FAIRGRIEVE/SHUTTERSTOCK

Balão meteorológico em uso.

Suponha que em certa região estejam localizadas duas estações meteorológicas, a 20 km uma da outra. De uma delas é possível avistar, em determinado instante, um balão meteorológico sob um ângulo de 58° em relação ao plano horizontal, e da outra pode-se avistar o balão, nesse mesmo instante, sob um ângulo de 66°, conforme a figura.

Qual é a altura do balão em relação ao plano horizontal no instante dessas observações?

Resposta: Aproximadamente 18,7 km.



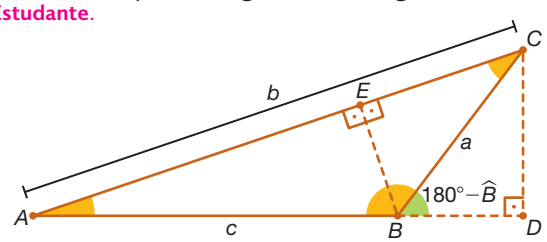
RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Imagem com elementos sem proporção entre si.

67. Demonstre a validade da lei dos senos para triângulos obtusângulos com o auxílio da figura a seguir.

Resposta no final do **Livro do Estudante**.

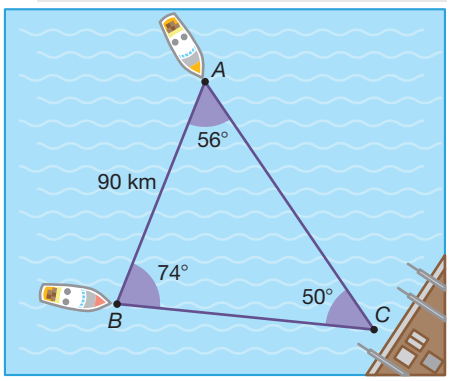
Professor, professora: Lembre os estudantes de que triângulo obtusângulo é aquele que tem um ângulo obtuso, ou seja, maior do que 90°.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Imagem com elementos sem proporção entre si.

68. Dois navios, *A* e *B*, localizados em pontos distintos, navegam em linha reta em direção ao porto *C*. Seus respectivos comandantes, usando instrumentos de localização e comunicando-se por rádio, verificam que $B\hat{A}C = 56°$, $A\hat{B}C = 74°$ e a distância entre as embarcações é 90 km. O navio *A* dirige-se ao porto a uma velocidade constante de 37 km/h e o *B*, a 32 km/h.



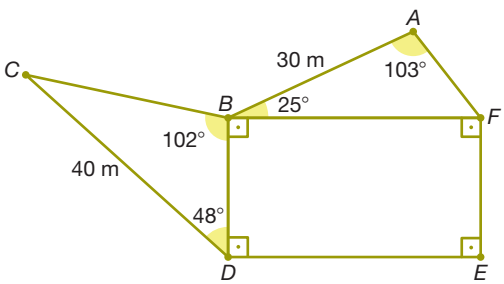
RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

a) Qual navio está mais próximo do porto?
Resposta: Navio *B*.

b) Se os navios mantiverem a velocidade constante, em aproximadamente quanto tempo cada um vai chegar ao porto?
Resposta: Navio *A*: 3 h; navio *B*: 3 h.

c) Instantes depois que os comandantes conferiram suas posições, receberam uma mensagem por rádio dizendo que o navio *B* deveria atracar primeiro e que o *A* deveria reduzir sua velocidade e mantê-la, para chegar ao porto meia hora após o *B*. A que velocidade constante, aproximadamente, o navio *A* deverá navegar para cumprir o planejado?
Resposta: 32 km/h

69. De acordo com a figura a seguir, elabore um problema e troque-o com um colega. Em seguida, resolva o que lhe foi entregue e confiram as resoluções obtidas.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Resposta pessoal. A resposta depende de cada problema elaborado pelos estudantes.

Professor, professora: A tarefa **69** propõe aos estudantes que elaborem um problema utilizando os conceitos estudados, contribuindo assim para a ampliação do repertório de reflexões e questionamentos a respeito de determinadas situações. Antes de os estudantes elaborarem o problema, peça a eles que analisem os contextos propostos na seção **Exercícios e problemas** deste tópico e, se julgar conveniente, oriente-os a investigar outros problemas disponíveis em provas de vestibular e Enem.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Lei dos cossenos

Uma companhia aérea realiza voos diretos entre as cidades *A* e *B* e entre *A* e *C*. Porém, essa companhia pretende criar uma nova linha para realizar voos partindo de *A* com destino a *C*, fazendo conexão em *B*.

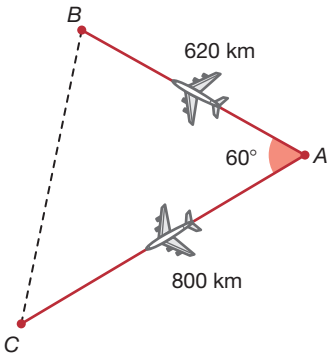
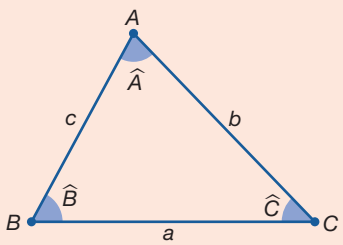


Imagem com elementos sem proporção entre si.

Professor, professora: Ao iniciar o trabalho com este tópico, explique aos estudantes que, assim como a lei dos senos, esse resultado é muito importante, pois possibilita a determinação da medida de comprimento de lados e da medida dos ângulos de um triângulo qualquer, relacionando os três lados e um ângulo do triângulo.

Para calcularmos a distância em linha reta entre *B* e *C*, podemos utilizar a lei dos cossenos, que é enunciada da seguinte maneira:

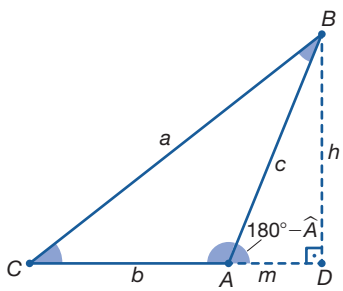
Para todo triângulo *ABC*, o quadrado do comprimento de um lado qualquer é igual à soma dos quadrados dos comprimentos dos outros dois lados, subtraída do dobro do produto do comprimento desses dois lados pelo cosseno do ângulo formado por eles.



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\hat{A}$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\hat{B}$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\hat{C}$$

Para demonstrar a lei dos cossenos para triângulos obtusângulos, consideramos o triângulo *ABC*.

No triângulo retângulo obtido ao traçarmos a altura relativa ao lado $\overline{AC}$, temos:



- $\triangle BCD$: $a^2 = (b + m)^2 + h^2 \Rightarrow a^2 = b^2 + m^2 + 2 \cdot b \cdot m + h^2$ (I)
- $\triangle ABD$:
  $c^2 = m^2 + h^2 \Rightarrow h^2 = c^2 - m^2$ (II)
  $\underbrace{\cos(180° - \hat{A})}_{-\cos\hat{A}} = \frac{m}{c} \Rightarrow m = -c \cdot \cos\hat{A}$ (III)

Substituindo **II** em **I**, temos:

$$a^2 = b^2 + m^2 + 2 \cdot b \cdot m + \underbrace{c^2 - m^2}_{h^2} \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 + 2 \cdot b \cdot m \text{ (IV)}$$

Substituindo **III** em **IV**, segue que:

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2 \cdot b \cdot \underbrace{(-c \cdot \cos\hat{A})}_{m} \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\hat{A}$$

ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Para triângulos acutângulos e triângulos retângulos, também podemos demonstrar a lei dos cossenos. Porém, não apresentaremos essas demonstrações.

Aplicando a lei dos cossenos no problema apresentado no início do tópico, podemos determinar a distância entre as cidades B e C.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\hat{A} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2 = 800^2 + 620^2 - 2 \cdot 800 \cdot 620 \cdot \cos 60° = 640\,000 + 384\,400 - 992\,000 \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2 = 1\,024\,400 - 496\,000 = 528\,400 \Rightarrow a = \sqrt{528\,400} \simeq 726{,}9$$

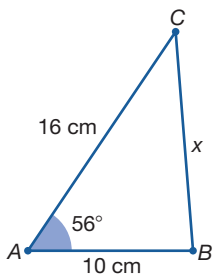
Portanto, a distância entre as cidades B e C mede, aproximadamente, 726,9 km.

Questão D. Mostre que $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\hat{B}$ e $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\hat{C}$.
Resposta no final do **Livro do Estudante**.

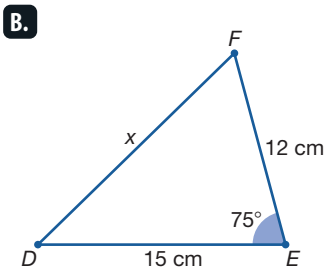
Exercícios e problemas resolvidos

R17. Em cada item, determine o valor de x.

A.



B.



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Resolução

A. Utilizando a lei dos cossenos, temos:

$$x^2 = 16^2 + 10^2 - 2 \cdot 16 \cdot 10 \cdot \cos 56° \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2 = 256 + 100 - 2 \cdot 16 \cdot 10 \cdot 0{,}559 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2 = 356 - 178{,}88 = 177{,}12 \Rightarrow x \simeq 13{,}31$$

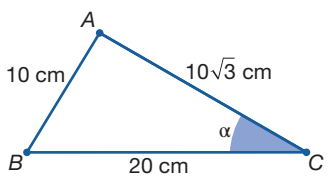
Portanto, $x \simeq 13{,}31$ cm.

B. Utilizando a lei dos cossenos, temos:

$$x^2 = 15^2 + 12^2 - 2 \cdot 15 \cdot 12 \cdot \cos 75° \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2 = 225 + 144 - 2 \cdot 15 \cdot 12 \cdot 0{,}259 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2 = 369 - 93{,}24 = 275{,}76 \Rightarrow x \simeq 16{,}6$$

Portanto, $x \simeq 16{,}6$ cm.

R18. Determine a medida α no triângulo apresentado.



OHANNA SCHMITT/ARQUIVO DA EDITORA

Resolução

Utilizando a lei dos cossenos, temos:

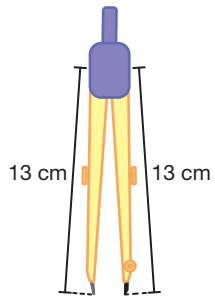
$$10^2 = 20^2 + \left(10\sqrt{3}\right)^2 - 2 \cdot 20 \cdot 10\sqrt{3} \cdot \cos\alpha \Rightarrow 100 = 400 + 300 - 400\sqrt{3} \cdot \cos\alpha \Rightarrow$$

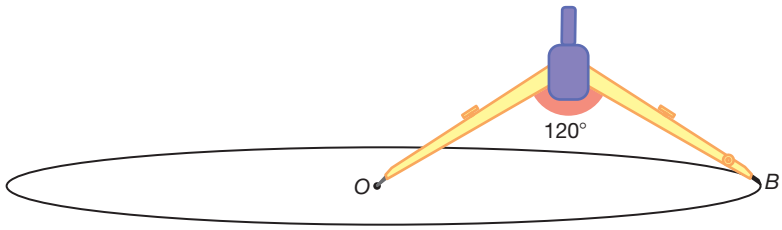
$$\Rightarrow 400\sqrt{3} \cdot \cos\alpha = 700 - 100 \Rightarrow \cos\alpha = \frac{600}{400\sqrt{3}} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \alpha = 30°$$

Portanto, $\alpha = 30°$.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

R19. Determine o comprimento do raio da circunferência construída pelo compasso indicado a seguir, com abertura de 120°.



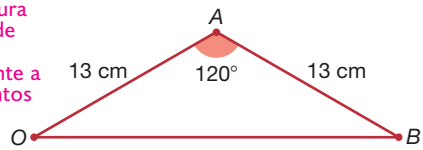


ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Resolução

O comprimento do raio da circunferência é igual a OB no triângulo AOB.

Professor, professora: Acompanhe e solicite cuidado no uso de instrumentos como o compasso, tesoura ou outros materiais que podem oferecer riscos de acidentes aos estudantes em casos de falta de atenção no manuseio. Se julgar necessário, durante a execução de tarefas que fazem uso de instrumentos desse tipo, oriente a turma a auxiliar os colegas que apresentam algum comprometimento motor e têm maior dificuldade de manipulação.



Utilizando a lei dos cossenos, temos:

$$(OB)^2 = 13^2 + 13^2 - 2 \cdot 13 \cdot 13 \cdot \cos 120° \Rightarrow (OB)^2 = 169 + 169 - 2 \cdot 169 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (OB)^2 = 338 + 169 \Rightarrow (OB)^2 = 507 \Rightarrow OB = 13\sqrt{3}$$

Observação

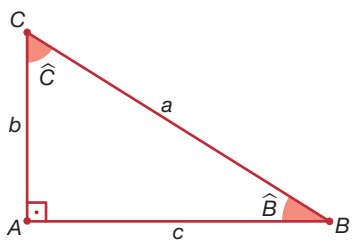
Podemos resolver esse problema utilizando a lei dos senos.

Como o triângulo AOB é isósceles, $A\hat{O}B = A\hat{B}O = 30°$, logo:

$$\frac{13}{\text{sen}30°} = \frac{OB}{\underbrace{\text{sen}120°}_{\text{sen}60°}} \Rightarrow OB \cdot \frac{1}{2} = 13 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow OB = 13\sqrt{3}$$

Portanto, o comprimento do raio da circunferência mede $13\sqrt{3}$ cm.

R20. Com o auxílio do triângulo ABC, mostre que o Teorema de Pitágoras é um caso particular da lei dos cossenos no triângulo retângulo.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Resolução

De acordo com o Teorema de Pitágoras, temos $a^2 = b^2 + c^2$. Substituindo 0 no 2º membro da equação ela continua verdadeira. Assim:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 0$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \underbrace{\cos 90°}_{0}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \underbrace{\cos \hat{A}}_{0}$$

Observação

Note que $\cos A = 90° = 0$. Assim, $2bc \cdot \cos A = 0$.

Portanto, o Teorema de Pitágoras é um caso particular da lei dos cossenos, ou seja, quando o ângulo em questão é 90°.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

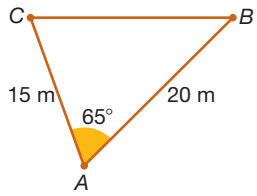
Exercícios e problemas

Professor, professora: Para a tarefa **70**, foram utilizados os valores aproximados de cosseno indicados na tabela trigonométrica deste capítulo. Se julgar conveniente, oriente os estudantes a usar calculadora ao efetuar os cálculos dos itens desta tarefa.

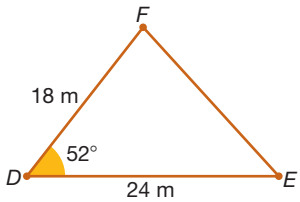
Anote as respostas no caderno.

70. Calcule o perímetro aproximado de cada triângulo.

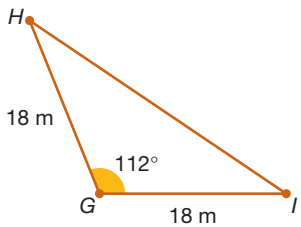
A. Resposta: Aproximadamente 54,3 m.



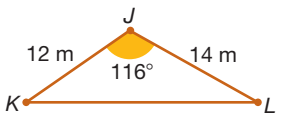
B. Resposta: Aproximadamente 61,2 m.



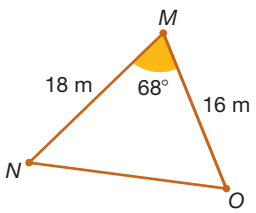
C. Resposta: Aproximadamente 65,9 m.



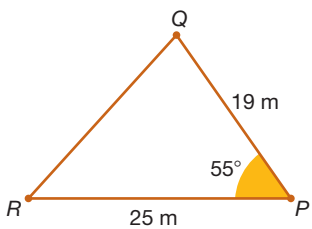
D. Resposta: Aproximadamente 48,1 m.



E. Resposta: Aproximadamente 53,1 m.



F. Resposta: Aproximadamente 65 m.

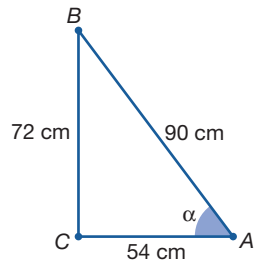


71. Calcule o comprimento das diagonais do paralelogramo $ABCD$ sabendo que $AB = 80$ cm, $BC = 120$ cm e $\widehat{C} = 132°$.
Resposta: Aproximadamente 183,4 cm e 89,2 cm.

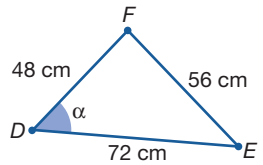
72. Se, em um relógio, 25 cm e 40 cm são, respectivamente, os comprimentos dos ponteiros das horas e dos minutos, calcule a distância aproximada entre as extremidades desses ponteiros quando o relógio marcar 4 h. Resposta: 56,8 cm

73. Determine a medida do ângulo α em cada triângulo.

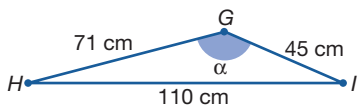
A. Resposta: $\alpha \simeq 53°$



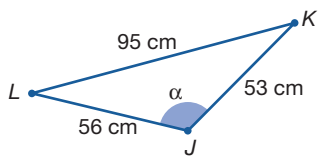
B. Resposta: $\alpha \simeq 51°$



C. Resposta: $\alpha \simeq 142°$



D. Resposta: $\alpha \simeq 121°$



74. Em um triângulo ABC, $AB = 10$ cm, $BC = \sqrt{76}$ cm e $\widehat{A} = 60°$. Todos os triângulos que podem ser construídos a partir dessas medidas são congruentes? Em caso positivo, escreva o comprimento dos lados desse triângulo. Em caso negativo, escreva o comprimento dos lados de dois triângulos não congruentes que têm essas características. Resposta: Não; 10 cm, $\sqrt{76}$ cm e 6 cm; 10 cm, $\sqrt{76}$ cm e 4 cm.

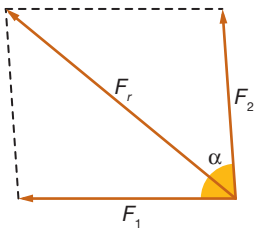
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA
RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA
VINÍCIUS SOARES COSTA/ARQUIVO DA EDITORA
RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA
RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA
RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

75. Força é um agente físico capaz de alterar o estado de repouso ou de movimento de um corpo. Uma maneira de representá-la graficamente é por meio de um vetor cujo comprimento seja proporcional à intensidade da força aplicada. Além da intensidade, o vetor indica a direção e o sentido de atuação da força.

Se tivermos duas forças, F_1 e F_2, formando um ângulo α entre si, podemos representá-las por uma única, que denominamos força resultante (F_r). Graficamente, essa força corresponderá à diagonal do paralelogramo cujos lados são F_1 e F_2, como indicado no esquema.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Supondo que $F_1 = 16$ N, $F_2 = 14$ N e $\alpha = 86°$, determine a intensidade da força resultante.

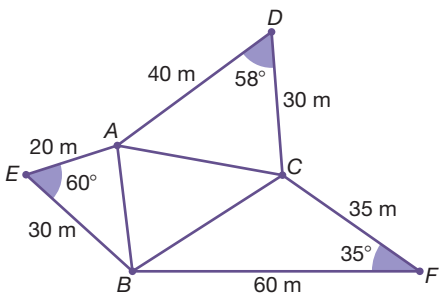
Resposta: $F_r \simeq 22$ N

Observação

Newton (N) é uma unidade de medida de força que provoca uma aceleração de 1 m/s^2 em um corpo com 1 kg de massa.

76. De acordo com as medidas indicadas na figura, calcule o perímetro do triângulo *ABC*.

Resposta: Aproximadamente 98,7 m.



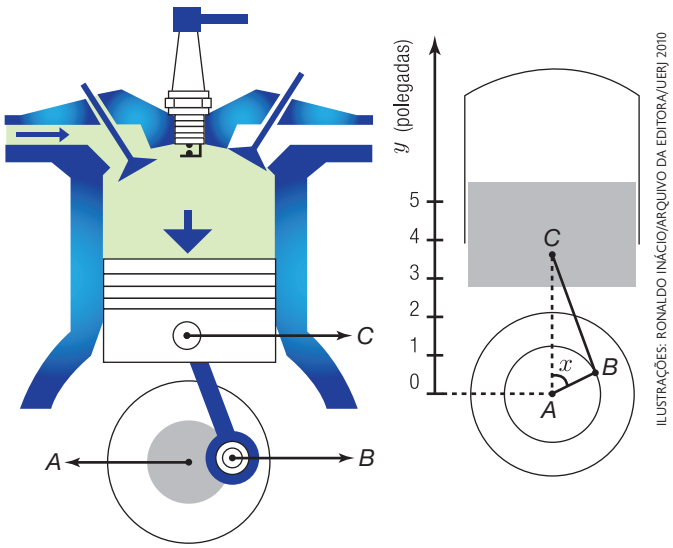
RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

77. Resposta: Aproximadamente 504,5 m.

77. Um *drone*, veículo aéreo não tripulado, é utilizado por uma empresa para realizar algumas pequenas entregas de mercadorias. Em uma delas, a aeronave deveria partir do ponto *A* e pousar com a mercadoria em um ponto *B*, fazendo um desvio na rota a fim de evitar alguns edifícios. Inicialmente, o *drone* percorreu 500 m em trajetória retilínea na direção norte. Em seguida, virou 75° para oeste e percorreu, em linha reta, mais 1000 m, até atingir o ponto *B* e pousar.

Quantos metros o *drone* teria percorrido a menos nessa entrega caso pudesse ter se deslocado em linha reta entre os pontos *A* e *B*?

78. (Uerj, 2010) Observe a seguir a ilustração de um pistão e seu esquema no plano.



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA/UERJ 2010

O pistão é ligado, por meio da haste *BC*, a um disco que gira em torno do centro *A*.

Considere que:

- o raio *AB* e a haste *BC* medem, respectivamente, 1 polegada e 4 polegadas;
- à medida que o disco gira, o pistão move-se verticalmente para cima ou para baixo, variando a distância *AC* e o ângulo $B\hat{A}C$.

Se a medida do ângulo $B\hat{A}C$ é dada por x radianos, a distância entre *A* e *C*, em polegadas, pode ser obtida pela seguinte equação:

a) $y = 4 + \operatorname{sen}(x)$

b) $y = 4 + \cos(x)$

c) $y = \operatorname{sen}(x) + \sqrt{16 - \cos^2(x)}$

d) $y = \cos(x) + \sqrt{16 - \operatorname{sen}^2(x)}$

Resposta: Alternativa **d**.

Professor, professora: Na tarefa **78**, por se tratar de uma questão de vestibular, embora estejamos usando "comprimento do raio", por exemplo, aparece a palavra "medem" para se referir aos comprimentos do raio e da haste.

PARA EXPANDIR

Que tal conhecer um pouco mais sobre o processo de transição energética que vem substituindo combustíveis fósseis nos motores automobilísticos, em busca de sustentabilidade, por outras fontes, como baterias elétricas e biocombustíveis? Para isso, acesse e ouça o *podcast* "Elétricos ou etanol? qual o melhor caminho para descarbonizar os carros no Brasil?" no canal *Spotify*.

79. Resposta pessoal.
A resposta depende da pesquisa feita pelos estudantes.

79. Junte-se a um colega e façam uma pesquisa a respeito de situações em que é possível aplicar a lei dos cossenos. Em seguida, com as informações obtidas, elaborem um problema e troquem com outros colegas para que eles o resolvam. Depois, verifiquem se a resposta está correta.

Professor, professora: A tarefa **79** propõe aos estudantes que elaborem um problema/uma questão utilizando os conceitos estudados, contribuindo assim para a ampliação do repertório de reflexões e questionamentos a respeito de determinadas situações.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Trigonometria na circunferência

Estudamos anteriormente as razões trigonométricas seno, cosseno e tangente associadas a ângulos internos de triângulos. Nesse contexto, essas razões têm por objetivo determinar medidas de ângulos e comprimentos de lados de triângulos.

Neste tópico, vamos ampliar o estudo da Trigonometria, tratando as razões seno, cosseno e tangente em uma circunferência.

Antes, porém, vamos retomar os elementos da circunferência:

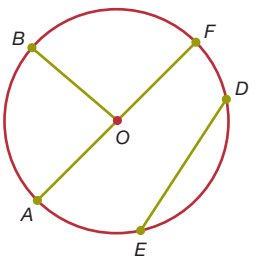
O: centro

$\overline{OB}$: raio (r)

$\overline{AF}$: diâmetro ($d = 2r$)

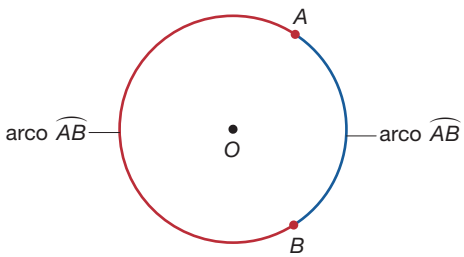
$\overline{DE}$: corda

Comprimento de uma circunferência de raio r: $C = 2\pi r$

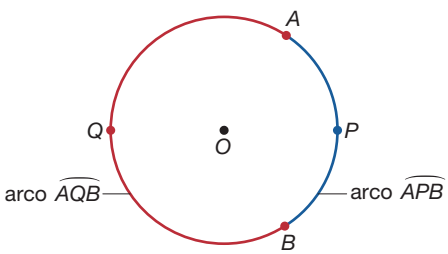


Arcos da circunferência

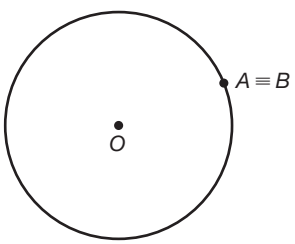
Considere a circunferência de centro O. Nela, destacamos os pontos A e B, que a dividem em duas partes, denominadas arcos de circunferência.



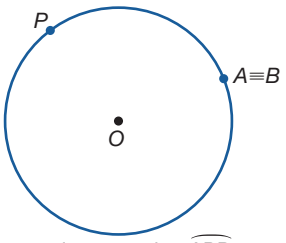
Note que A e B determinam dois arcos, que indicaremos por $\overset{\frown}{AB}$. Nos casos em que não esteja evidente a qual arco estamos nos referindo, podemos marcar um ponto entre as extremidades do arco e utilizar a seguinte notação:



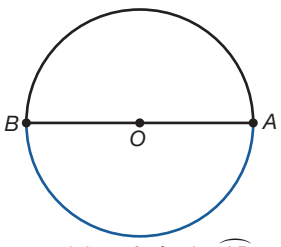
Quando as extremidades de um arco são coincidentes, esse arco é **nulo** ou corresponde a **uma volta completa**. Já quando as extremidades de um arco correspondem às extremidades de um diâmetro, dizemos que esse arco é uma **semicircunferência**.



arco nulo $\overset{\frown}{AB}$



arco de uma volta $\overset{\frown}{APB}$



semicircunferência $\overset{\frown}{AB}$

OBJETO DIGITAL
***Infográfico clicável*:**
Regras de circulação na rotatória de pista dupla

Observação

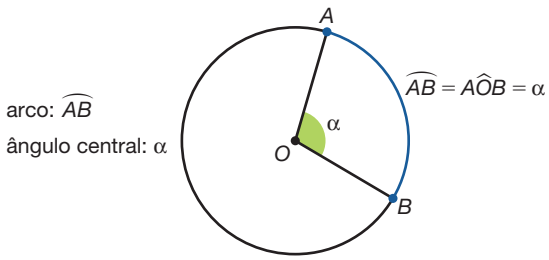
Usaremos $\overset{\frown}{AB}$ ora para indicar **o arco** de extremidades em A e B, ora para indicar a **medida** desse arco.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Medida de um arco de circunferência

Por definição, a **medida** (ou medida angular) de um arco é igual à medida do ângulo central correspondente a esse arco.



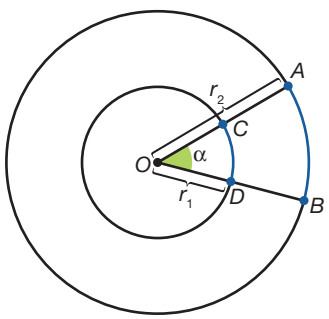
Observação

Circunferências concêntricas são circunferências que têm o mesmo centro.

Em geral, utilizamos o **grau** e o **radiano** como unidades de medida de arco.

É importante compreender que a medida de um arco não é o mesmo que o comprimento de um arco. Enquanto a medida depende exclusivamente do ângulo central correspondente, o comprimento de um arco equivale à sua medida linear, dependendo do comprimento do raio da circunferência.

As circunferências a seguir são concêntricas. Nelas, os arcos $\overset{\frown}{AB}$ e $\overset{\frown}{CD}$ têm a mesma medida, pois correspondem ao mesmo ângulo central α. Porém, esses arcos têm comprimentos diferentes, pois os comprimentos dos raios são diferentes $(r_1 \neq r_2)$.

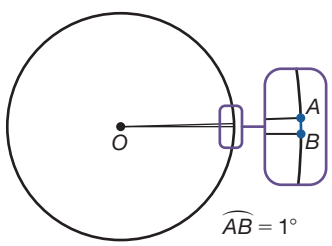


ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Grau (°)

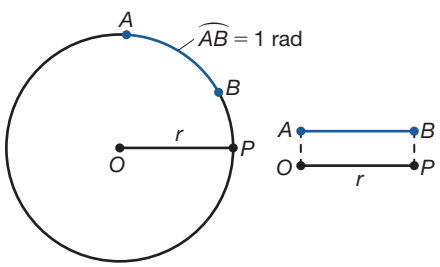
Considere uma circunferência dividida em 360 arcos congruentes. Define-se um grau (1°) como a medida de cada um desses arcos. Uma volta completa equivale, portanto, a um arco de 360°.



Aumento aproximado de 5 vezes no destaque em *zoom* da imagem.

Radiano (rad)

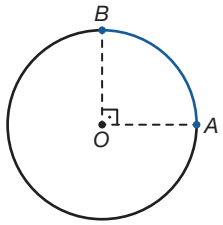
Um arco que mede um radiano (1 rad) tem o mesmo comprimento que o raio da circunferência que o contém, ou seja, ao considerarmos, em uma circunferência de raio r, um arco de comprimento r, esse arco também mede 1 rad.



Como o comprimento C de uma circunferência de raio r é $C = 2\pi r$, um arco de uma volta completa equivale a 2π rad.

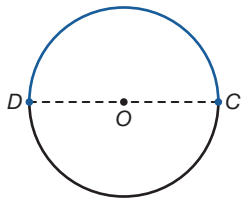
Analise alguns arcos com medidas em graus e em radianos.

a) $\frac{1}{4}$ de volta.



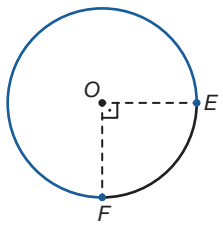
$\overset{\frown}{AB} = 90°$ ou $\overset{\frown}{AB} = \frac{\pi}{2}$ rad

c) $\frac{1}{2}$ de volta.



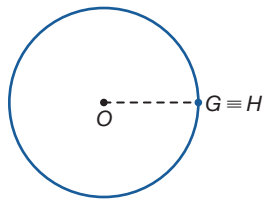
$\overset{\frown}{CD} = 180°$ ou $\overset{\frown}{CD} = \pi$ rad

b) $\frac{3}{4}$ de volta.



$\overset{\frown}{EF} = 270°$ ou $\overset{\frown}{EF} = \frac{3\pi}{2}$ rad

d) Uma volta.



$\overset{\frown}{GH} = 360°$ ou $\overset{\frown}{GH} = 2\pi$ rad

ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Para converter a medida de um arco, dada em graus, em radianos, ou vice-versa, podemos estabelecer uma relação entre essas unidades e utilizar a **regra de três**.

Exercícios e problemas resolvidos

R21. Escreva 36,75° em radianos.

Resolução

Para realizar essa conversão, utilizaremos a regra de três simples.

Medida em graus		Medida em radianos
180	———	π
36,75	———	x

$$\frac{180}{36,75} = \frac{\pi}{x} \Rightarrow 180x = 36,75 \cdot \pi \Rightarrow x = \frac{36,75\pi}{180} \Rightarrow x = \frac{49\pi}{240}$$

Portanto, 36,75° equivale a $\frac{49\pi}{240}$ rad.

R22. Expresse $\frac{151\pi}{360}$ rad em graus.

Resolução

Para realizar essa conversão, utilizaremos a regra de três simples.

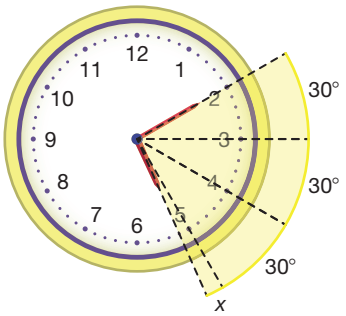
Medida em graus		Medida em radianos
180	———	π
x	———	$\frac{151\pi}{360}$

$$\frac{180}{x} = \frac{\pi}{\frac{151\pi}{360}} \Rightarrow \frac{180}{x} = \frac{360}{151} \Rightarrow 360x = 27\,180 \Rightarrow x = \frac{27\,180}{360} = 75,5$$

Portanto, $\frac{151\pi}{360}$ rad equivale a 75,5°.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

R23. Qual é a medida do menor ângulo formado entre os ponteiros de um relógio que marca 5 h 10 min?



SERGIO L. FILHO/ARQUIVO DA EDITORA

Resolução

A medida do ângulo entre horas consecutivas é $\frac{360°}{12} = 30°$.

Às 5 h 10 min, o ponteiro dos minutos está indicando o número 2, e o ponteiro das horas está entre os números 5 e 6, conforme a figura.

Como a cada 60 min o ponteiro das horas desloca-se 30°, calculamos a medida indicada na figura utilizando a regra de três simples.

Tempo (min)		Ângulo (graus)
60	———	30
10	———	x

$$60x = 30 \cdot 10 \Rightarrow x = 5$$

Portanto, a medida do menor ângulo formado é $30° + 30° + 30° + 5° = 95°$.

Exercícios e problemas

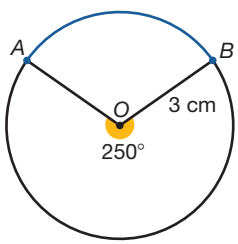
Anote as respostas no caderno.

Dica

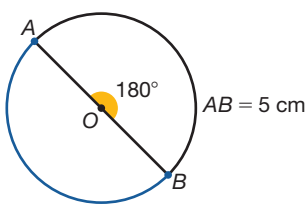
Quando necessário, na resolução dos exercícios e problemas deste tópico, considere $\pi = 3{,}14$.

80. Em cada circunferência, determine o comprimento e a medida, em graus, do arco em azul.
Respostas no final do **Livro do Estudante**.

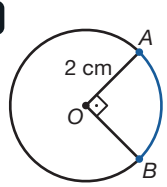
A.



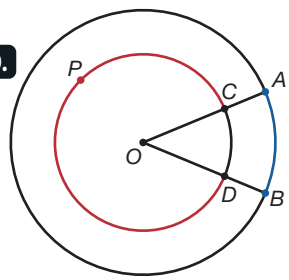
C.



B.



D.



$\overset{\frown}{CPD} = 315°$ $BO = 3{,}5$ cm

ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

81. Expresse em radianos a medida de cada arco $\overset{\frown}{AB}$ em azul da tarefa anterior.
Respostas no final do **Livro do Estudante**.

82. Escreva um algoritmo que possibilite transformar a medida de um arco em graus em radianos. Em seguida, organize-o em um fluxograma.
Respostas no final do **Livro do Estudante**.

83. Expresse, em graus, a medida de cada arco a seguir.
Respostas no final do **Livro do Estudante**.

a) $\overset{\frown}{AB} = \frac{5\pi}{18}$ rad

b) $\overset{\frown}{CD} = \frac{7\pi}{9}$ rad

c) $\overset{\frown}{EF} = \frac{13\pi}{9}$ rad

d) $\overset{\frown}{GH} = \frac{16\pi}{9}$ rad

84. Em uma competição de ciclismo, cada atleta deve percorrer, em no máximo 2 h 30 min, 78,5 km em uma pista circular cujo raio mede 500 m.

a) Quantas voltas na pista serão necessárias, no mínimo, para que um ciclista percorra os 78,5 km? Resposta: 25 voltas.

b) Qual é o tempo médio máximo em que um atleta deve realizar cada volta para cumprir a prova? Resposta: 6 min.

85. Localizada em Singapura, a Singapore Flyer, com 150 m de diâmetro, é uma das maiores rodas-gigantes do mundo. Cada uma das suas 28 cabines comporta até 28 pessoas; assim, em apenas uma volta, ela pode levar até 784 pessoas.

Qual é a distância aproximada percorrida por uma das cabines após realizar uma volta completa?
Resposta: 471 m

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

86. Considere as circunferências concêntricas de raios r_1 e r_2, com $r_1 > r_2$, e centro O. Dados os pontos C e D pertencentes à circunferência de raio r_1, traçaram-se os segmentos $\overline{OC}$ e $\overline{OD}$, de maneira que o ângulo formado entre eles fosse igual a $\frac{2\pi}{3}$ rad. Sobre $\overline{OC}$ e $\overline{OD}$ foram marcados os pontos A e B, respectivamente, de modo que A e B pertencessem à circunferência r_2. Sabendo que a distância entre A e C é igual a 3 cm, resolva o que se pede. 86. b) Resposta: Aproximadamente 31,4 cm.

a) Dado que o comprimento do menor arco de $\overset{\frown}{AB}$ é igual a 25,12 cm, determine a medida de r_1 e de r_2. Resposta: $r_1 \simeq 15$ cm; $r_2 \simeq 12$ cm

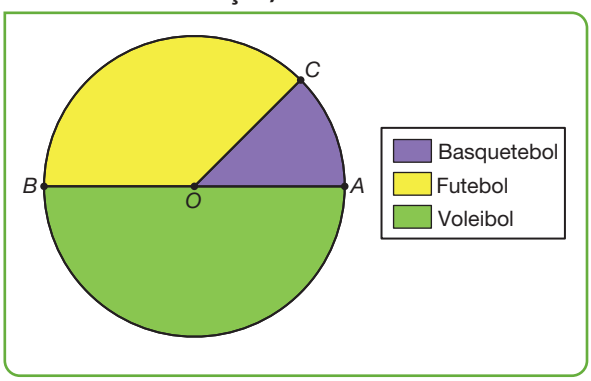
b) Qual é o comprimento do menor arco $\overset{\frown}{CD}$?

c) Podemos afirmar que $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$? Justifique sua resposta.

87. Passadas 2 h 45 min, quantos graus o ponteiro das horas de um relógio girou?
Resposta: 82,5°

88. O gráfico a seguir representa a votação dos estudantes de uma turma na escolha do esporte que gostariam de praticar. Professor, professora: As informações apresentadas no gráfico são fictícias.

Resultado da votação, em 2024



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Fonte de pesquisa: Secretaria da escola.

O segmento $\overline{AB}$, que representa o diâmetro do gráfico de setores, mede 12 cm, e o comprimento do menor arco $\overset{\frown}{AC}$ é $\frac{3\pi}{2}$ cm.

Sabendo que o esporte basquetebol recebeu 4 votos, responda às questões.

a) Qual foi o esporte mais votado? Quantos estudantes optaram por esse esporte?
Resposta: Voleibol. 16 estudantes.

b) Quantos estudantes participaram da votação?
Resposta: 32 estudantes.

c) Quantos estudantes votaram em futebol?
Resposta: 12 estudantes.

89. O retângulo áureo recebe este nome porque a proporção de seus lados é uma aproximação do "número de ouro".

Os retângulos áureos circunscrevem uma espiral chamada de "espiral de ouro".

Muitos acreditam que essa espiral está presente na natureza aparecendo, por exemplo, em conchas, chifres, girassóis e até mesmo em galáxias espirais.

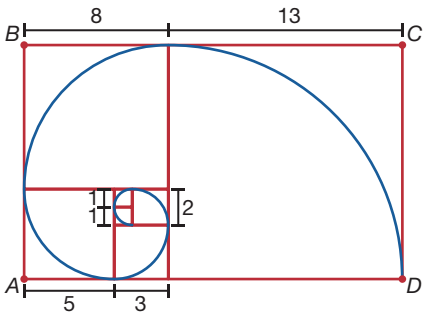


STEVE CUKROV/SHUTTERSTOCK

Molusco cuja concha é frequentemente associada à espiral de ouro.

O retângulo áureo pode ser formado considerando a união de quadrados cujo comprimento dos lados seguem a sequência de Fibonacci: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...

A figura a seguir apresenta retângulos áureos circunscritos por uma espiral formada por uma sequência de arcos de circunferência. Essa espiral se assemelha a uma espiral de ouro.

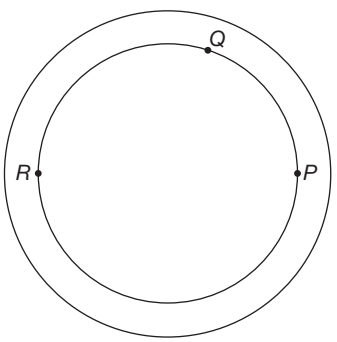


RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Calcule o comprimento da espiral destacada na figura em azul. Resposta: Aproximadamente 51,81 unidades de comprimento.

90. (Enem, 2019) Uma pista circular delimitada por duas circunferências concêntricas foi construída. Na circunferência interna dessa pista, de raio 0,3 km, serão colocados aparelhos de ginástica localizados nos pontos P, Q e R, conforme a figura.

Professor, professora: Se julgar necessário, lembre os estudantes de que a medida de um ângulo inscrito em uma circunferência é igual à metade da medida do ângulo central correspondente.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

O segmento $\overline{RP}$ é um diâmetro dessa circunferência interna, e o ângulo $P\hat{R}Q$ tem medida igual a $\frac{\pi}{5}$ radianos. Para uma pessoa ir do ponto P ao ponto Q andando pela circunferência interna no sentido anti-horário, ela percorrerá uma distância, em quilômetro, igual a: Resposta: Alternativa **d**.

a) 0,009 π.
b) 0,03 π.
c) 0,06 π.
d) 0,12 π.
e) 0,18 π.

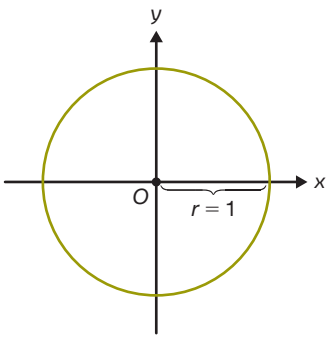
86. c) Resposta: Sim, pois esses arcos são determinados pelo mesmo ângulo; no caso dos arcos menores, pelo ângulo $\frac{2\pi}{3}$ rad.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Circunferência trigonométrica

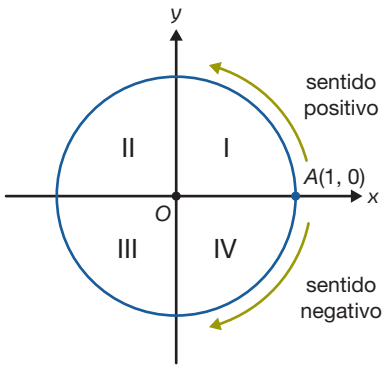
Neste tópico, vamos ampliar o conceito de arcos de circunferência com o objetivo de estudar a **circunferência trigonométrica**, em que podemos considerar, por exemplo, arcos com medidas maiores do que 360° ou arcos com medidas negativas.

Para definir uma circunferência trigonométrica (ou ciclo trigonométrico), consideramos uma circunferência de centro O e raio unitário, fixando nessa circunferência um sistema de eixos cartesianos, de maneira que O coincida com a origem desse sistema.

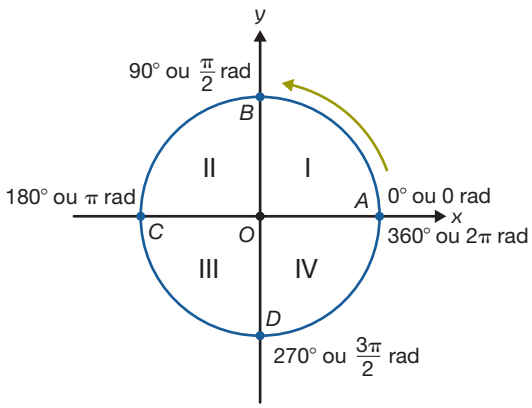


Circunferência trigonométrica.

Nela, os arcos têm origem no ponto $A(1, 0)$, tendo como sentido positivo o anti-horário e negativo, o horário. O sistema de eixos cartesianos divide a circunferência trigonométrica em quatro partes, denominadas **quadrantes**. Além disso, podemos associar a cada ponto P um arco correspondente $\overset{\frown}{AP}$, denominado **arco trigonométrico**.



I, **II**, **III** e **IV** indicam os quadrantes da circunferência trigonométrica.



A, B, C e D indicam as extremidades dos quadrantes.

Observação

Raio unitário: raio cujo comprimento é 1.

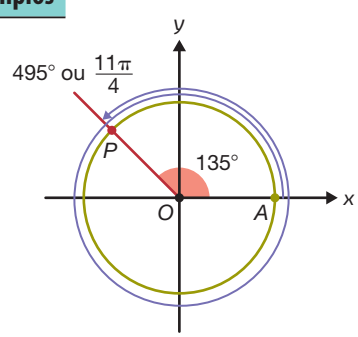
Professor, professora: Explique aos estudantes que, na circunferência trigonométrica, a adoção do raio unitário tem efeito simplificador ao estudarmos nela as razões trigonométricas, o que será realizado posteriormente neste capítulo.

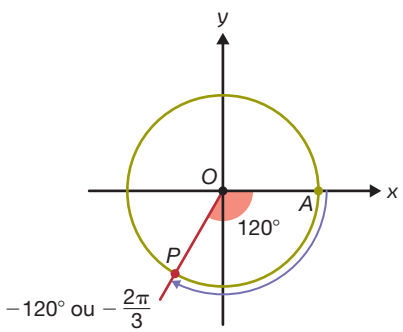
Observação

Como a circunferência trigonométrica tem raio unitário, o comprimento e a medida de um arco, dada em radianos, são numericamente iguais. Para simplificar a notação, denotaremos a partir daqui a medida do arco em radianos sem a indicação "rad". Um arco de medida $\frac{5\pi}{4}$ rad, por exemplo, será denotado por $\frac{5\pi}{4}$.

Em uma circunferência trigonométrica, temos também arcos maiores do que uma volta ou arcos com medidas negativas.

Exemplos



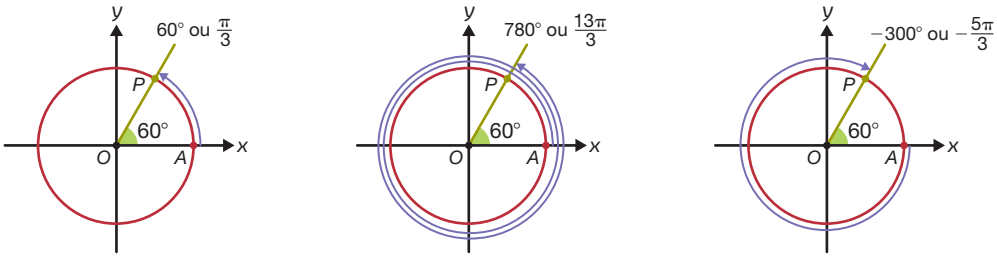


$495° = 135° + 360°$ ou $\frac{3\pi}{4} + 2\pi = \frac{11\pi}{4}$

ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Arcos côngruos

Em uma circunferência trigonométrica, um mesmo ponto P está associado a infinitos arcos.



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Note que, nas circunferências trigonométricas anteriores, os arcos de 60° ou $\frac{\pi}{3}$, 780° ou $\frac{13\pi}{3}$ e $-300°$ ou $-\frac{5\pi}{3}$ têm a mesma extremidade P. Nesse caso, dizemos que esses são **arcos côngruos**.

Em uma circunferência trigonométrica, quando dois ou mais arcos têm a mesma origem e a mesma extremidade, dizemos que eles são côngruos entre si.

Seja um arco $\overset{\frown}{AP}$ de medida α, com $0° \leq \alpha < 360°$ ou $0 \leq \alpha < 2\pi$, as medidas dos arcos côngruos a $\overset{\frown}{AP}$ podem ser escritas como $\alpha + k \cdot 360°$ ou $\alpha + k \cdot 2\pi$, sendo k um número inteiro.

O arco $\overset{\frown}{AP}$ de medida α é a **1ª determinação positiva** dos arcos côngruos a ele.

Nas circunferências trigonométricas apresentadas anteriormente, a 1ª determinação positiva $\left(\overset{\frown}{AP}\right)$ é 60° ou $\frac{\pi}{3}$. Os dois arcos côngruos a ele que foram apresentados podem ser escritos da seguinte maneira:

- $780° = 60° + 2 \cdot 360°$ ou $\frac{13\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + 2 \cdot 2\pi$
- $-300° = 60° - 360°$ ou $-\frac{5\pi}{3} = \frac{\pi}{3} - 2\pi$

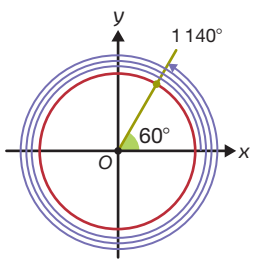
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Exercícios e problemas resolvidos

R24. Obtenha a 1ª determinação positiva e o número de voltas completas na circunferência trigonométrica do arco que mede:

a) 1140°.

b) $-\frac{11\pi}{4}$.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Resolução

a) O resto da divisão de 1140° por 360° é a 1ª determinação positiva (α) do arco, e o quociente é o número de voltas completas (k) na circunferência.

$$\begin{array}{r|l} 1\,1\,4\,0 & 3\,6\,0 \\ \underbrace{6\,0}_{\alpha} & \underbrace{3}_{k} \end{array}$$

Ou seja, $1140° = 60° + 3 \cdot 360°$.

Portanto, a 1ª determinação é 60°, e o número de voltas completas é 3, no sentido anti-horário (sentido positivo).

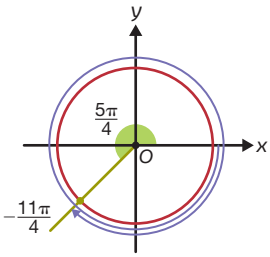
b) Nesse caso, temos:

$$-\frac{11\pi}{4} = -\frac{3\pi}{4} - \frac{8\pi}{4} = -\frac{3\pi}{4} - 2\pi = -\frac{3\pi}{4} - \underbrace{1}_{k} \cdot 2\pi$$

Segue que a 1ª determinação positiva é:

$$-\frac{3\pi}{4} + 2\pi = \underbrace{\frac{5\pi}{4}}_{\alpha}$$

Portanto, a 1ª determinação positiva é $\frac{5\pi}{4}$, e o número de voltas completas é 1, no sentido horário (sentido negativo).



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

R25. Escreva a expressão geral que determina os arcos côngruos ao arco de:

a) 120°. **b)** 860°. **c)** $\frac{31\pi}{7}$.

Resolução

a) Nesse caso, como $\alpha = 120°$, a expressão geral é dada por $120° + k \cdot 360°$, com $k \in \mathbb{Z}$.

b) Inicialmente, calculamos a 1ª determinação positiva (α) do arco de 860°.

$$\begin{array}{r|l} 860 & 360 \\ \underbrace{140}_{\alpha} & \underbrace{2}_{k} \end{array}$$

Ou seja, $860° = 140° + 2 \cdot 360°$.

Portanto, a expressão geral é dada por $140° + k \cdot 360°$, com $k \in \mathbb{Z}$.

c) Vamos obter a 1ª determinação positiva (α) do arco de $\frac{31\pi}{7}$.

$$\frac{31\pi}{7} = \frac{3\pi}{7} + \frac{28\pi}{7} = \frac{3\pi}{7} + 4\pi = \underbrace{\frac{3\pi}{7}}_{\alpha} + \underbrace{2}_{k} \cdot 2\pi$$

Portanto, a expressão geral é dada por $\frac{3\pi}{7} + k \cdot 2\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$.

Exercícios e problemas

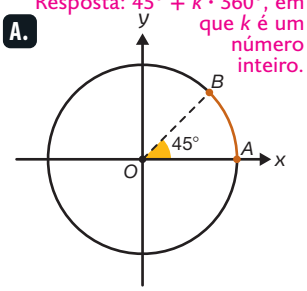
Anote as respostas no caderno.

91. Escreva a 1ª determinação positiva de um arco de:

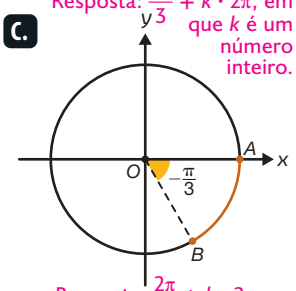
a) 1460°. Resposta: 20°
b) −900°. Resposta: 180°
c) $\frac{27\pi}{4}$. Resposta: $\frac{3\pi}{4}$

92. Para cada item, escreva uma expressão que determine os arcos côngruos a $\overset{\frown}{AB}$.

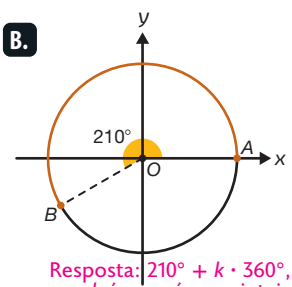
A. Resposta: $45° + k \cdot 360°$, em que k é um número inteiro.



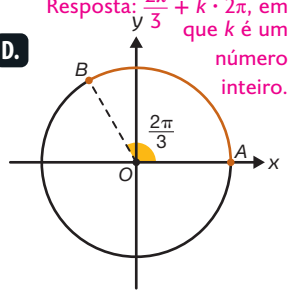
C. Resposta: $\frac{5\pi}{3} + k \cdot 2\pi$, em que k é um número inteiro.



B. Resposta: $210° + k \cdot 360°$, em que k é um número inteiro.



D. Resposta: $\frac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi$, em que k é um número inteiro.



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

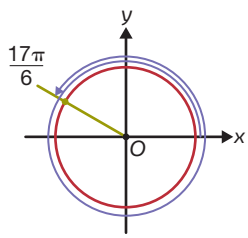
93. Em uma circunferência unitária, represente as extremidades dos arcos dados pela expressão: $20° + k \cdot 90°$, em que k é um número inteiro.
Resposta no final do **Livro do Estudante**.

94. O eneágono regular (polígono de nove lados congruentes) *ABCDEFGHI* está inscrito em uma circunferência trigonométrica, de modo que o vértice *A* está na origem dos arcos, e os outros vértices estão dispostos no sentido anti-horário.

a) Qual é a medida do arco de origem em *A* e extremidade no vértice *C*? Resposta: 80° ou $\frac{4\pi}{9}$.

b) Escreva a expressão geral dos arcos de origem em *A* e extremidades em cada vértice do eneágono. Resposta: $k \cdot 40°$ ou $\frac{k \cdot 2\pi}{9}$, em que k é um número inteiro.

95. Em uma aula de Matemática, a professora de Rafael pediu a ele que desenhasse uma circunferência trigonométrica e nela representasse um arco côngruo ao arco de $\frac{3\pi}{4}$. Rafael apresentou como solução a figura a seguir.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

a) A solução apresentada por Rafael está correta? Justifique sua resposta.
95. a) Resposta no final do **Livro do Estudante**.

b) Represente em uma circunferência trigonométrica um arco côngruo ao arco de $\frac{3\pi}{4}$.
Resposta no final do **Livro do Estudante**.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

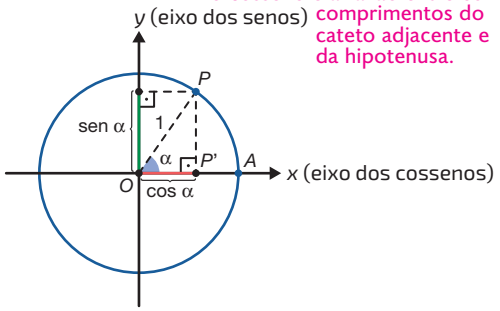
Seno, cosseno e tangente de um arco

Professor, professora: Neste momento, se achar conveniente, lembre os estudantes de que, em um triângulo retângulo, o seno de um ângulo agudo é a razão entre os comprimentos do cateto oposto e da hipotenusa. Além disso, lembre-os de que o cosseno é a razão entre os comprimentos do cateto adjacente e da hipotenusa.

Estudamos anteriormente as razões seno, cosseno e tangente em triângulos. Agora, vamos estender esses conceitos para a circunferência trigonométrica.

Seno e cosseno de um arco

Dado um arco de medida α e extremidade P na circunferência trigonométrica, observamos que o seno de α $(\text{sen}\alpha)$ é a ordenada de P e o cosseno de α $(\cos\alpha)$, a abscissa de P. Dizemos que o eixo y é o **eixo dos senos**, e o eixo x é o **eixo dos cossenos**.



Em particular, com base no estudo das razões seno e cosseno no triângulo retângulo POP', temos:

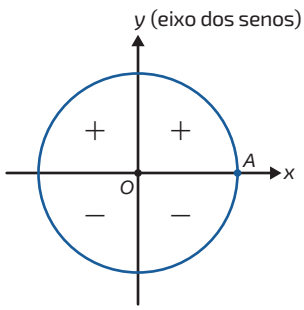
$$\text{sen}\alpha = \frac{PP'}{PO} = \frac{PP'}{1} = PP' \qquad \cos\alpha = \frac{OP'}{PO} = \frac{OP'}{1} = OP'$$

Professor, professora: Lembre aos estudantes que o comprimento do raio da circunferência trigonométrica é igual a 1, o que simplifica o estudo das razões trigonométricas na circunferência trigonométrica.

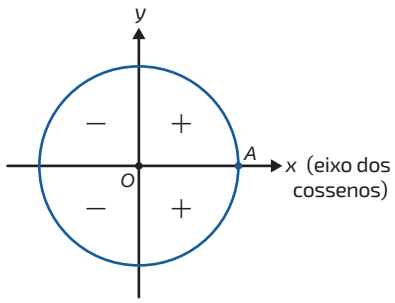
Analise os sinais do seno e do cosseno para um arco de medida α com extremidade em cada quadrante.

- 1º quadrante: $\cos\alpha > 0$ e $\text{sen}\alpha > 0$
- 2º quadrante: $\cos\alpha < 0$ e $\text{sen}\alpha > 0$
- 3º quadrante: $\cos\alpha < 0$ e $\text{sen}\alpha < 0$
- 4º quadrante: $\cos\alpha > 0$ e $\text{sen}\alpha < 0$

Sinais do seno



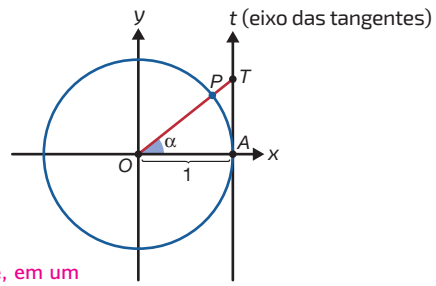
Sinais do cosseno



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Tangente de um arco

Considere uma circunferência trigonométrica, uma reta t tangente a ela no ponto A com a mesma orientação do eixo y e um arco $\overset{\frown}{AP}$ de medida α, com $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, em que k é um número inteiro.

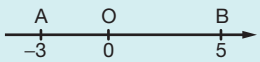


A tangente de α $(\text{tg}\alpha)$ é a medida algébrica de $\overline{AT}$, sendo T o ponto obtido na interseção da reta tangente t e $\overleftrightarrow{OP}$. Nesse caso, dizemos que a reta t é o **eixo das tangentes**.

Professor, professora: Neste momento, se achar conveniente, lembre os estudantes de que, em um triângulo retângulo, a tangente de um ângulo agudo é a razão entre os comprimentos do cateto oposto e do cateto adjacente.

Observação

A medida algébrica de um segmento de reta orientado pode ser positiva, negativa ou nula.



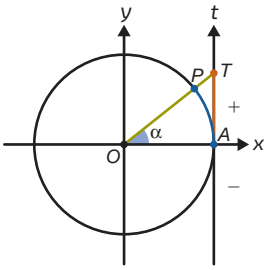
Na reta orientada anterior, a medida algébrica de $\overline{OA}$ é -3, e a medida algébrica de $\overline{OB}$ é 5.

Em particular, no triângulo retângulo TOA, temos: $\text{tg}\alpha = \frac{AT}{OA} = \frac{AT}{1} = AT$.

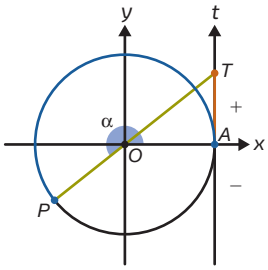
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Vamos representar os arcos de extremidade *P* em cada um dos quadrantes.

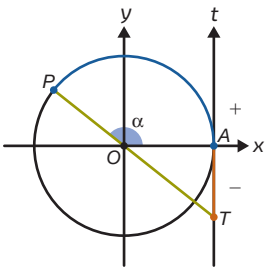
1º quadrante



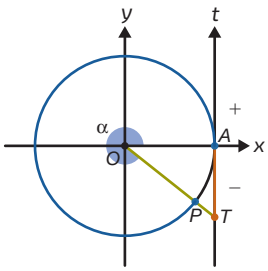
3º quadrante



2º quadrante



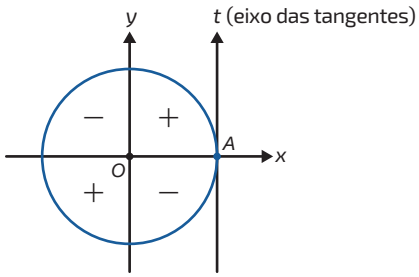
4º quadrante



Analise os sinais da tangente para um arco de medida α com extremidade em cada quadrante.

Sinais da tangente

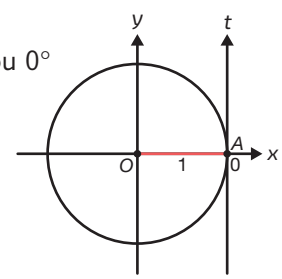
- 1º quadrante: $\text{tg}\alpha > 0$
- 2º quadrante: $\text{tg}\alpha < 0$
- 3º quadrante: $\text{tg}\alpha > 0$
- 4º quadrante: $\text{tg}\alpha < 0$



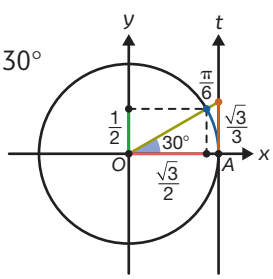
É importante verificar que, quando um arco $\overset{\frown}{AP}$ de medida α tem extremidade sobre o eixo *y*, $\overleftrightarrow{OP}$ é paralela ao eixo das tangentes. Assim, para $\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi$ em que *k* é um número inteiro, tgα não está definida.

Analise alguns valores notáveis do seno, do cosseno e da tangente.

0 ou 0°



$\frac{\pi}{6}$ ou 30°

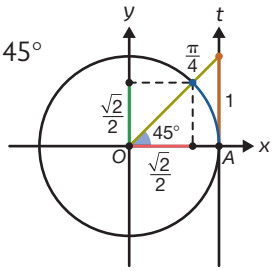


$\text{sen}0 = 0$ $\quad \cos 0 = 1$ $\quad \text{tg}0 = 0$

$\text{sen}\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ $\quad \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad \text{tg}\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

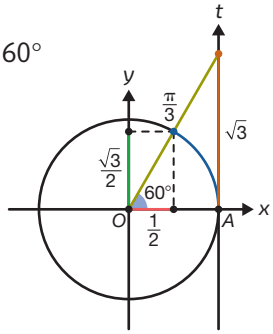
$\frac{\pi}{4}$ ou 45°



$\text{sen}\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\text{tg}\frac{\pi}{4} = 1$

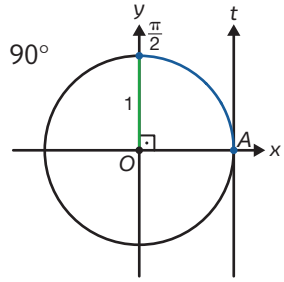
$\frac{\pi}{3}$ ou 60°



$\text{sen}\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$

$\text{tg}\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$

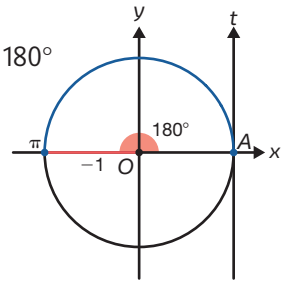
$\frac{\pi}{2}$ ou 90°



$\text{sen}\frac{\pi}{2} = 1$ $\quad \cos\frac{\pi}{2} = 0$

$\text{tg}\frac{\pi}{2}$ não está definida

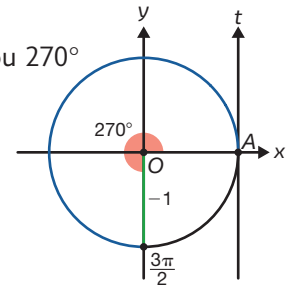
π ou 180°



$\text{sen}\pi = 0$ $\quad \cos\pi = -1$

$\text{tg}\pi = 0$

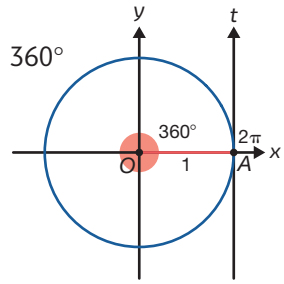
$\frac{3\pi}{2}$ ou 270°



$\text{sen}\frac{3\pi}{2} = -1$ $\quad \cos\frac{3\pi}{2} = 0$

$\text{tg}\frac{3\pi}{2}$ não está definida

2π ou 360°



$\text{sen}2\pi = 0$ $\quad \cos 2\pi = 1$

$\text{tg}2\pi = 0$

ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Organizando esses valores, temos:

Alguns valores notáveis do seno, do cosseno e da tangente

α	0 ou 0°	$\frac{\pi}{6}$ ou 30°	$\frac{\pi}{4}$ ou 45°	$\frac{\pi}{3}$ ou 60°	$\frac{\pi}{2}$ ou 90°	π ou 180°	$\frac{3\pi}{2}$ ou 270°	2π ou 360°
senα	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	−1	0
cosα	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	−1	0	1
tgα	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∄	0	∄	0

Observação

É possível demonstrar que $\text{tg}\alpha = \frac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha}$ para todo $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$, em que k é um número inteiro. Porém, não apresentaremos tal demonstração nesta coleção.

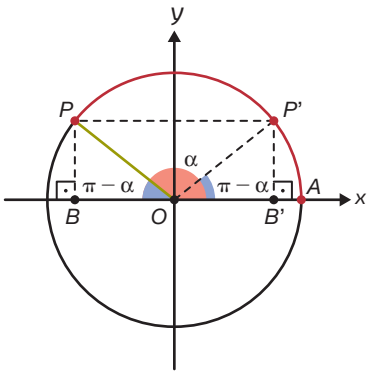
Redução ao 1º quadrante

Neste tópico, vamos calcular o seno, o cosseno e a tangente em qualquer quadrante, relacionando-os a seus respectivos valores no 1º quadrante.

Redução do 2º para o 1º quadrante

Seja um arco $\overset{\frown}{AP}$ de medida α, com $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Escolhendo o ponto P' no 1º quadrante simétrico a P em relação ao eixo y, temos $P(\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$ e $P'(-\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$.

Professor, professora: Se julgar necessário, lembre os estudantes de que, em um sistema cartesiano, dado um ponto $P(a, b)$ com $a > 0$ e $b > 0$, o ponto $P'(-a, b)$ é simétrico a P em relação ao eixo y; o ponto $P''(-a, -b)$ é simétrico a P em relação à origem; e o ponto $P'''(a, -b)$ é simétrico a P em relação ao eixo x.



Considere agora os segmentos $\overline{PB}$ e $\overline{P'B'}$ perpendiculares ao eixo x. Como os pontos P e P' são simétricos em relação ao eixo y, os pontos B e B' também o são. Assim, pelo caso de congruência **LLL**, os triângulos OPB e $OP'B'$ são congruentes.

Desse modo, $P'(\cos(\pi - \alpha), \operatorname{sen}(\pi - \alpha))$ e, consequentemente:

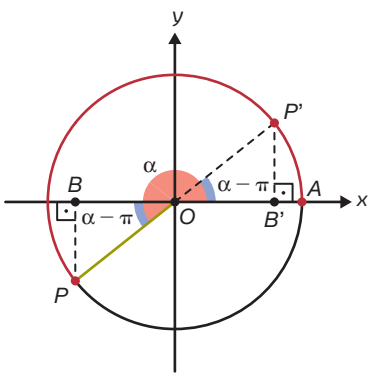
$$\cos\alpha = -\cos(\pi - \alpha) \quad \text{e} \quad \operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}(\pi - \alpha)$$

Diante dessas igualdades, temos:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}(\pi - \alpha)}{-\cos(\pi - \alpha)} \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = -\operatorname{tg}(\pi - \alpha)$$

Redução do 3º para o 1º quadrante

Seja um arco $\overset{\frown}{AP}$ de medida α, com $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$. Escolhendo o ponto P' no 1º quadrante simétrico a P em relação à origem, temos $P(\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$ e $P'(-\cos\alpha, -\operatorname{sen}\alpha)$.



Como os ângulos $P\widehat{O}B$ e $P'\widehat{O}B'$ são opostos pelo vértice, então $P\widehat{O}B = P'\widehat{O}B' = \alpha - \pi$. Desse modo, $P'(\cos(\alpha - \pi), \operatorname{sen}(\alpha - \pi))$ e, consequentemente:

$$\operatorname{sen}\alpha = -\operatorname{sen}(\alpha - \pi) \quad \text{e} \quad \cos\alpha = -\cos(\alpha - \pi)$$

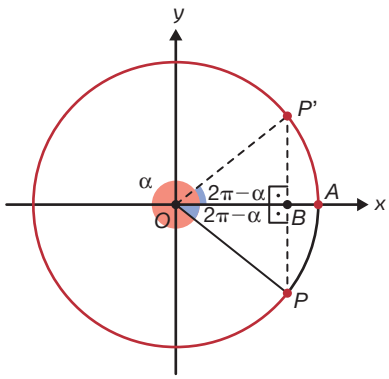
ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Diante dessas igualdades, temos:

$$\text{tg}\alpha = \frac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha} \Rightarrow \text{tg}\alpha = \frac{-\text{sen}(\alpha - \pi)}{-\cos(\alpha - \pi)} \Rightarrow \boxed{\text{tg}\alpha = \text{tg}(\alpha - \pi)}$$

Redução do 4º para o 1º quadrante

Seja um arco $\overset{\frown}{AP}$ de medida α, com $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$. Escolhendo o ponto P' no 1º quadrante simétrico a P em relação ao eixo x, temos $P(\cos\alpha, \text{sen}\alpha)$ e $P'(\cos\alpha, -\text{sen}\alpha)$.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Pelo caso de congruência **LLL**, os triângulos OPB e $OP'B$ são congruentes. Desse modo, $P'(\cos(2\pi - \alpha), \text{sen}(2\pi - \alpha))$ e, consequentemente:

$$\boxed{\text{sen}\alpha = -\text{sen}(2\pi - \alpha)} \quad \text{e} \quad \boxed{\cos\alpha = \cos(2\pi - \alpha)}$$

Diante dessas igualdades, temos:

$$\text{tg}\alpha = \frac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha} \Rightarrow \text{tg}\alpha = \frac{-\text{sen}(2\pi - \alpha)}{\cos(2\pi - \alpha)} \Rightarrow \boxed{\text{tg}\alpha = -\text{tg}(2\pi - \alpha)}$$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Exercícios e problemas resolvidos

R26. Efetue os cálculos a seguir.

a) sen840°

b) $\text{tg}\frac{13\pi}{4}$

Resolução

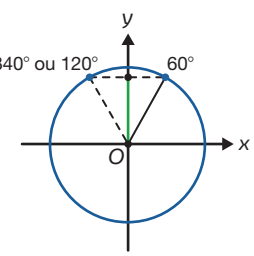
a) Nesse caso, devemos obter a 1ª determinação positiva do arco de 840°.

$$\begin{array}{r|l} 840 & 360 \\ \underbrace{120}_{\text{1ª determinação positiva}} & \underbrace{2}_{\text{número de voltas}} \end{array}$$

Como a extremidade do arco de 120° é no 2º quadrante $(90° < 120° < 180°)$, temos:

$$\text{sen}840° = \text{sen}120° = \text{sen}(180° - 120°) = \text{sen}60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Portanto, $\text{sen}840° = \frac{\sqrt{3}}{2}$.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

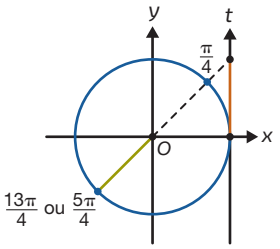
b) Obtendo a 1ª determinação positiva do arco de $\frac{13\pi}{4}$, temos:

$$\frac{13\pi}{4} = \frac{5\pi}{4} + \frac{8\pi}{4} = \frac{5\pi}{4} + 2\pi$$

Como a extremidade do arco de $\frac{5\pi}{4}$ é no 3º quadrante, segue que:

$$\text{tg}\frac{13\pi}{4} = \text{tg}\frac{5\pi}{4} = \text{tg}\left(\frac{5\pi}{4} - \pi\right) = \text{tg}\frac{\pi}{4} = 1$$

Portanto, $\text{tg}\frac{13\pi}{4} = 1$.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

R27. Calcule o valor da expressão $\dfrac{\text{sen}\frac{7\pi}{6} + \text{tg}\frac{5\pi}{4}}{\cos\frac{5\pi}{3}}$.

Resolução

Inicialmente, reduzimos cada arco da expressão ao 1º quadrante e calculamos o valor da razão trigonométrica correspondente.

Como $\frac{7\pi}{6}$ está no 3º quadrante, então:

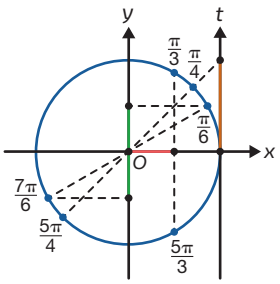
$$\text{sen}\frac{7\pi}{6} = -\text{sen}\left(\frac{7\pi}{6} - \pi\right) = -\text{sen}\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$$

Como $\frac{5\pi}{4}$ está no 3º quadrante, então:

$$\text{tg}\frac{5\pi}{4} = \text{tg}\left(\frac{5\pi}{4} - \pi\right) = \text{tg}\frac{\pi}{4} = 1$$

Como $\frac{5\pi}{3}$ está no 4º quadrante, então:

$$\cos\frac{5\pi}{3} = \cos\left(2\pi - \frac{5\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Com isso, substituímos os valores na expressão dada.

$$\frac{\text{sen}\frac{7\pi}{6} + \text{tg}\frac{5\pi}{4}}{\cos\frac{5\pi}{3}} = \frac{-\frac{1}{2} + 1}{\frac{1}{2}} = 1$$

Portanto, o valor da expressão é 1.

R28. Sabendo que $\text{sen}\alpha = \frac{3}{5}$ e $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, determine $\cos\alpha$ e $\text{tg}\alpha$.

Resolução

Da relação fundamental $\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, temos:

$$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{16}{25} \Rightarrow \cos\alpha = \pm\sqrt{\frac{16}{25}} = \pm\frac{4}{5}$$

Como α pertence ao 2º quadrante, então $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$.

Utilizando a relação $\text{tg}\alpha = \frac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha}$, segue que:

$$\text{tg}\alpha = \frac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha} \Rightarrow \text{tg}\alpha = \frac{\frac{3}{\not 5}}{-\frac{4}{\not 5}} = -\frac{3}{4}$$

Portanto, $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$ e $\text{tg}\alpha = -\frac{3}{4}$.

Observação

É possível demonstrar que a relação $\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ é válida para qualquer medida de arco α. Porém, não apresentaremos essa demonstração nesta coleção.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

A profissão de astrônomo

Professor, professora: Explique aos estudantes que, desde a Antiguidade, a Astronomia exerce importante papel no desenvolvimento de conhecimentos sobre o Universo. Cite para eles o exemplo dos gregos, que realizavam observações para descrever o aparente movimento de corpos celestes.

De acordo com o que estudamos, a Trigonometria pode ser usada para medir distâncias de lugares inacessíveis, com base na medida de ângulos. Sua aplicação ocorre, por exemplo, para obter a medida da distância entre planetas do Sistema Solar ou no cálculo do raio da sombra de eclipses. Por esse motivo, esse estudo é muito importante para um astrônomo. Mas, afinal, você sabe o que faz esse profissional?

O astrônomo é um cientista que estuda corpos celestes e fenômenos que ocorrem no Universo, além de desenvolver teorias sobre o surgimento de estrelas e galáxias. Seu trabalho influencia diretamente o desenvolvimento da ciência e da tecnologia de um país.

Além de conhecimentos específicos, ser um astrônomo requer habilidades práticas, como o uso de programas de computadores e o manuseio de telescópios e outros equipamentos de observação espacial.

No Brasil, o principal campo de trabalho dos astrônomos são as universidades, onde desenvolvem pesquisas e atuam como professores. No entanto, por se tratar de uma área vasta, que envolve conhecimentos da astrofísica, da astroquímica e da astrobiologia, por exemplo, esses profissionais também podem trabalhar em centros de pesquisas espaciais, observatórios, museus de ciência, planetários ou em empresas de tecnologia.

Professor, professora: Se julgar conveniente, informe aos estudantes que no Brasil, até o ano de 2024, apenas três universidades públicas ofereciam o curso de graduação em Astronomia, sendo elas: a Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ), primeira a ofertar o curso no país; a Universidade de São Paulo (USP); e a Universidade Federal de Sergipe (UFS).



SEBNEM COSKUN/ANADOLU/GETTY IMAGES

Físico e astrônomo turco Erdem Aytekin, em Aydin, Turquia, observando chuva de meteoros Perseidas pelo telescópico, em 2024.

Observação

Para exercer a profissão de astrônomo, é necessário concluir graduação em Astronomia. Porém, como o curso é ofertado em poucas instituições de ensino do país, uma alternativa é cursar bacharelado em Física e, posteriormente, fazer pós-graduação em Astronomia.

OBJETO DIGITAL ***Mapa clicável*:** O eclipse solar de 14/10/2023 no Brasil

Atividades

Anote as respostas no caderno.

1. Você já conhecia a profissão de astrônomo? Por quais aspectos dessa profissão você teve mais interesse? Conte para os colegas.

Resposta pessoal. Incentive a participação de todos os estudantes, comentando sobre o que mais lhes interessou em relação aos astrônomos. Eles podem mencionar, por exemplo, o estudo de corpos celestes ou de fenômenos que ocorrem no Universo, bem como o uso de equipamentos, como os telescópios.

2. Em sua opinião, qual é a importância do trabalho dos astrônomos para a humanidade? Converse com os colegas e o professor sobre o assunto.

Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes compreendam que o trabalho dos astrônomos é de fundamental importância em diversos aspectos, entre eles para o desenvolvimento da ciência e da tecnologia dos países.

3. Pesquise na internet três mulheres astrônomas brasileiras ou estrangeiras. Faça um resumo da atuação profissional de cada uma delas, informando as empresas em que trabalham, o tempo de carreira, as principais atividades exercidas e outras informações que considerar relevantes.

Resposta pessoal. Oriente os estudantes a anotar as informações mais relevantes da pesquisa. Explique-os que existem diversas entrevistas disponíveis em vídeos na internet e que elas podem ser usadas para a realização desta atividade. Se considerar necessário, faça uma seleção de astrônomas do Brasil e do mundo e indique-as aos estudantes, evitando, assim, possíveis repetições nas pesquisas.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Anote as respostas no caderno.

96. Em cada item, determine a quais quadrantes a extremidade de α pode pertencer. Resposta: 3º ou 4º.

a) $\cos\alpha = -\frac{2}{3}$ Resposta: 2º ou 3º.

b) $\text{sen}\alpha = \frac{1}{5}$ Resposta: 1º ou 2º.

c) $\text{tg}\alpha = 2$ Resposta: 1º ou 3º.

d) $\text{sen}\alpha = -\frac{3}{7}$

e) $\text{tg}\alpha = -5$ Resposta: 2º ou 4º.

f) $\cos\alpha = \frac{1}{4}$ Resposta: 1º ou 4º.

97. Determine se é positivo ou negativo o seno do arco da medida:

a) $2\,120°$ Resposta: Negativo.

b) $-\frac{39\pi}{5}$ Resposta: Positivo.

c) $-1605°$ Resposta: Negativo.

d) $\frac{43\pi}{9}$ Resposta: Positivo.

98. Em qual quadrante os valores de α satisfazem simultaneamente:

a) $\text{tg}\alpha < 0$ e $\cos\alpha < 0$? Resposta: 2º

b) $\text{sen}\alpha > 0$ e $\cos\alpha < 0$? Resposta: 2º

c) $\text{tg}\alpha > 0$ e $\text{sen}\alpha > 0$? Resposta: 1º

d) $\cos\alpha > 0$ e $\text{sen}\alpha < 0$? Resposta: 4º

e) $\text{tg}\alpha > 0$ e $\cos\alpha < 0$? Resposta: 3º

99. Escreva as igualdades utilizando apenas arcos do 1º quadrante e determine o sinal de A em cada uma delas.

a) $A = \text{sen}500° \cdot \cos 3\,200°$ Resposta: $A = \text{sen}40° \cdot \cos 40°$; $A > 0$

b) $A = \cos\frac{22\pi}{3} \cdot \text{tg}\left(-\frac{\pi}{6}\right)$ Resposta: $A = -\cos\frac{\pi}{3} \cdot \left(-\text{tg}\frac{\pi}{6}\right)$; $A > 0$

c) $A = \text{tg}1\,345° \cdot \text{sen}(-1975°)$ Resposta: $A = \text{tg}85° \cdot (-\text{sen}5°)$; $A < 0$

d) $A = \cos\frac{27\pi}{5} \cdot \text{sen}(-2\,780°)$ Resposta: $A = -\cos\frac{2\pi}{5} \cdot \text{sen}80°$; $A < 0$

100. Para abrir certo cofre, além das chaves de segurança, é necessário saber um segredo, que consiste em uma combinação de movimentos do botão.

O segredo para abrir o cofre é a seguinte sequência de giros, partindo da posição A.

Aumento aproximado de 3,8 vezes no destaque em *zoom* da imagem.



LEONARDO GIBRAN/ ARQUIVO DA EDITORA

1º. Giro no sentido horário até F;

2º. Giro no sentido anti-horário até D;

3º. Giro no sentido anti-horário até H;

4º. Giro no sentido horário até C.

a) Qual é o ângulo correspondente a cada um desses giros? Resposta: 1º: $-225°$; 2º: 90°; 3º: 180°; 4º: $-135°$.

b) Qual é a diferença em graus medida no sentido anti-horário entre a posição inicial e a posição final do botão de combinação, nessa ordem? Resposta: 270°

c) Calcule o seno e o cosseno do ângulo obtido no item **b**. Resposta: $\text{sen}270° = -1$; $\cos 270° = 0$.

101. Em 40 minutos, um ciclista percorreu $\frac{25}{8}$ de volta em uma pista circular de raio r e, em seguida, parou para descansar.

a) Qual é o ângulo do arco que representa todo o trajeto percorrido pelo ciclista? Resposta: 1125°

b) Qual é o ângulo menor do arco de extremidades no ponto de partida e no ponto em que o ciclista parou? Resposta: 45°

c) Calcule o seno e o cosseno do ângulo obtido no item **b**. Resposta: $\text{sen}45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e $\cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

d) Quantas voltas a mais ele deve percorrer nessa pista para que o arco descrito em todo o percurso seja igual a 2 565°? Resposta: Quatro voltas.

102. Para rosquear totalmente certo parafuso, é necessário girá-lo em 5 550°.

a) Qual é, em graus, a medida do menor ângulo correspondente à diferença entre a posição inicial da chave e a sua posição ao terminar de rosquear o parafuso? Resposta: 150°

b) Calcule o seno e o cosseno do ângulo obtido no item **a**. Resposta: $\text{sen}150° = \frac{1}{2}$ e $\cos 150° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

103. Efetue os cálculos a seguir.

a) $\text{sen}1\,110°$ Resposta: $\frac{1}{2}$

b) $\text{tg}765°$ Resposta: 1

c) $\cos\frac{25\pi}{3}$ Resposta: $\frac{1}{2}$

d) $\text{sen}\frac{29\pi}{3}$ Resposta: $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

e) $\cos(-2\,310°)$ Resposta: $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

f) $\cos 1\,170°$ Resposta: $\frac{\sqrt{3}}{2}$

104. Determine os valores de $\text{sen}\alpha$ e $\text{tg}\alpha$, dado que:

a) $\cos\alpha = \frac{5}{13}$, com $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$. Resposta: $\text{sen}\alpha = -\frac{12}{13}$; $\text{tg}\alpha = -\frac{12}{5}$.

b) $\cos\alpha = -\frac{15}{17}$, com $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$. Resposta: $\text{sen}\alpha = -\frac{8}{17}$; $\text{tg}\alpha = \frac{8}{15}$.

105. Escreva um valor para α de maneira que $\text{sen}\alpha > 0$, $\cos\alpha < 0$ e $\text{tg}\alpha < 0$. Compare sua resposta com a dos colegas. Sugestão de resposta: 150°; $\frac{5\pi}{6}$; $\frac{20\pi}{3}$.

106. O professor de Lucas propôs o seguinte desafio à turma. Resposta no final do **Livro do Estudante**.

Para quais valores de k, em que k é um número inteiro, a igualdade a seguir é verdadeira?

$$\frac{\text{sen}(150° + 2k\pi) + \cos(300° + 2k\pi)}{\text{tg}(225° + 2k\pi)} = 1$$

Após alguns cálculos e discussões em grupo, a turma apresentou a conclusão de que para todo valor de k a igualdade é verdadeira.

A conclusão apresentada pelos estudantes está correta? Justifique sua resposta.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

SÍNTESE DO CAPÍTULO

Neste capítulo, estudamos Trigonometria no triângulo e na circunferência. Agora, chegou a hora de refletir sobre seus conhecimentos! Como estratégia de estudos, sugerimos a você que faça uma autoavaliação, revise conceitos e sintetize o que foi estudado. Para isso, resolva as questões propostas.

1. Você conhecia algum dos conteúdos estudados neste capítulo? Cite-os.
Resposta pessoal. Orientações sobre esta questão no **Suplemento para o professor**.

2. A seguir, estão apresentados os principais conteúdos estudados neste capítulo.

Teorema de Tales | Semelhança de triângulos | Relações métricas no triângulo retângulo | Teorema de Pitágoras

Trigonometria no triângulo retângulo | Seno e cosseno de ângulos suplementares | Lei dos senos e lei dos cossenos | Trigonometria na circunferência

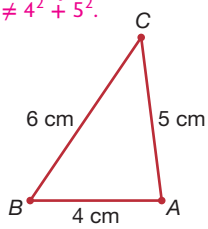
Você teve dificuldades em algum deles? Não recorda algum desses conceitos? Ficou com dúvidas? Reflita sobre esses questionamentos e, se necessário, retome o que foi estudado.
Resposta pessoal. Orientações sobre esta questão no **Suplemento para o professor**.

3. Escreva, no caderno, os casos de semelhança de triângulos que você estudou neste capítulo.
Resposta: **AA**, **LAL** e **LLL**.

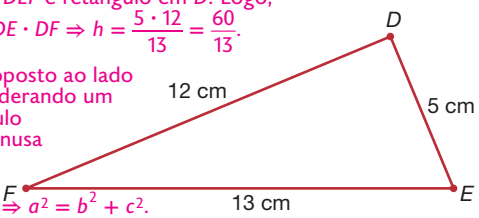
4. Dois triângulos equiláteros quaisquer são sempre semelhantes? Justifique sua resposta.
Resposta: Sim, pelos casos de semelhança **AA** ou **LLL**.

5. Julgue cada item a seguir em verdadeiro (V) ou falso (F). Justifique sua resposta.

a) O triângulo *ABC* é retângulo.
Resposta: F. Afirmação falsa, pois $6^2 \neq 4^2 + 5^2$.



b) A altura do triângulo *DEF* relativa ao lado *EF* mede $\frac{60}{13}$ cm.
Resposta: V. Afirmação verdadeira, pois o triângulo *DEF* é retângulo em *D*. Logo, $h \cdot EF = DE \cdot DF \Rightarrow h = \frac{5 \cdot 12}{13} = \frac{60}{13}$.



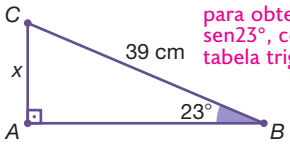
7. Resposta: Quando o ângulo oposto ao lado desconhecido medir 90°. Considerando um triângulo retângulo *ABC* retângulo em *A* e comprimento da hipotenusa e dos catetos iguais a *a*, *b* e *c*, respectivamente, temos: $a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \underbrace{\cos 90°}_{0} \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2$.

6. Escreva, no caderno, duas relações métricas no triângulo retângulo que você estudou.
Sugestão de resposta: $h^2 = m \cdot n$ e $a \cdot h = b \cdot c$.

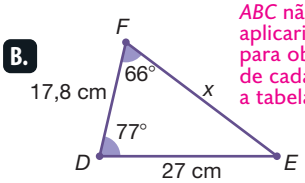
7. Em que caso a lei dos cossenos se reduz ao Teorema de Pitágoras? Justifique algebricamente sua resposta.

8. Que estratégia você utilizaria para calcular o valor de *x* em cada item a seguir?
Sugestão de resposta: Sabendo que o triângulo *ABC* é retângulo, utilizaria a razão trigonométrica $\text{sen}23° = \frac{x}{39}$ e, para obter o valor do sen23°, consultaria a tabela trigonométrica.

A.



B.



Sugestão de resposta: Sabendo que o triângulo *ABC* não é retângulo, aplicaria a lei dos senos, e para obter o valor do seno de cada ângulo, consultaria a tabela trigonométrica.

9. Por que $\text{tg}\frac{\pi}{2}$ não está definida? Justifique algebricamente sua resposta.
Sugestão de resposta: Suponha, por absurdo, que exista $\text{tg}\frac{\pi}{2}$. Então, $\text{tg}\frac{\pi}{2} = \frac{\text{sen}\frac{\pi}{2}}{\cos\frac{\pi}{2}}$. Sabendo que $\text{sen}\frac{\pi}{2} = 1$ e $\cos\frac{\pi}{2} = 0$, então $\text{tg}\frac{\pi}{2} = \frac{1}{0}$, que é uma indefinição. Por consequência, $\text{tg}\frac{\pi}{2}$ não está definida.

10. Sabendo que $\text{sen}\alpha < 0$ e $\cos\alpha > 0$, a que quadrante α pertence?
Resposta: Alternativa **d**.
a) 1º quadrante.
b) 2º quadrante.
c) 3º quadrante.
d) 4º quadrante.

11. Qual estratégia você utilizaria para calcular $\cos\alpha$, sabendo que $\text{sen}\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$?
Sugestão de resposta: Utilizaria a relação trigonométrica fundamental $\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

12. Escolha um dos conteúdos estudados neste capítulo e elabore um problema envolvendo-o. Depois, troque com um colega para que ele o resolva. Por fim, verifique se a resposta obtida por ele está correta.

13. Faça uma síntese do que foi estudado neste capítulo. Nela, use desenhos e dê exemplos.
Resposta pessoal. Orientações sobre esta questão no **Suplemento para o professor**.

12. Resposta pessoal. Antes de os estudantes elaborarem o problema, peça a eles que analisem os contextos propostos nas seções **Exercícios e problemas** deste capítulo e, se julgar conveniente, oriente-os a investigar outros problemas disponíveis em provas de vestibular e Enem.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

CAPÍTULO

2

FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS



TALES AZZI/PULSAR IMAGENS

Vista, registrada por *drone*, de piscinas naturais na Área de Proteção Ambiental Costa dos Corais, na praia de Porto de Galinhas, PE, durante a maré baixa, em maio de 2023.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Professor, professora: Se julgar conveniente, complemente as informações expostas nesta página dizendo aos estudantes que as marés baixas revelam recifes de corais que criam essas piscinas, proporcionando um ambiente ideal para o mergulho e a observação da vida marinha. Além de Porto de Galinhas, há outros locais no mundo onde as marés baixas revelam piscinas naturais espetaculares como Maragogi, em Alagoas, conhecido como Caribe brasileiro, Fernando de Noronha, com a Piscina do Atalaia e as ilhas Maldivas, país conhecido por belas praias e extensos recifes. Enfatize a importância de preservar ambientes naturais como esses, pois muitos seres vivos marinhos habitam e se protegem neles. A conscientização da sociedade, o turismo responsável e as boas práticas de sustentabilidade ajudam a manter esse ecossistema saudável para as gerações futuras.

As marés são variações cíclicas do nível do mar, causadas pela atração gravitacional do Sol e da Lua, e pela inclinação do eixo de rotação da Terra. A altura das marés varia em diferentes pontos da superfície terrestre, dependendo do alinhamento desses astros.

Uma maneira de identificar o comportamento das marés é por meio das fases da Lua. Nas luas nova e cheia, acontecem os níveis mais altos da maré (preamar), pois a Lua e o Sol estão alinhados, adicionando seus efeitos gravitacionais. Essas marés são chamadas de marés vivas. Já nas luas crescente e minguante ocorrem os níveis mais baixos da maré (baixa-mar), pois as forças gravitacionais da Lua e do Sol são mínimas. Essas marés são conhecidas como marés mortas.

Fenômenos periódicos como esse podem ser modelados por meio de funções trigonométricas. É possível criar tabelas que mostram os horários do dia em que o nível do mar atinge picos mais altos (maré alta) e mais baixos (maré baixa) em local específico e por período determinado. Essas tabelas, ou tábuas de marés, estão disponíveis no *site* da Marinha do Brasil e são essenciais para planejar atividades marítimas com segurança, como pesca, navegação e esportes aquáticos, e para turistas interessados em piscinas naturais que surgem com a maré baixa.

O conhecimento sobre o comportamento das marés também é importante para pescadores e moradores ribeirinhos em suas atividades de subsistência. Essa interação começa desde cedo com os adultos incentivando as crianças a lidar com a enchente e a vazante das marés, constituindo uma dinâmica que marca a identidade nativa presente nessas comunidades.

Neste capítulo, você vai estudar:

- funções trigonométricas;
- função seno;
- função cosseno;
- funções do tipo trigonométricas.

PARA EXPANDIR

Leia o artigo "Conheça mais sobre a influência das marés na biodiversidade marinha" publicado no *site* da Secretaria de Meio Ambiente, Sustentabilidade e de Fernando de Noronha (Semas-PE). Nele, é possível obter mais informações a respeito da vida marinha de acordo com as marés. Disponível em: https://semas.pe.gov.br/saiba-mais-sobre-a-influencia-das-mares-na-biodiversidade-marinha/. Acesso em: 10 jul. 2024.

3. Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes digam, por exemplo, que os pescadores usam as marés para saber quando os peixes estão mais ativos, enquanto a navegação precisa ajustar horários para evitar maré baixa em portos rasos. Além disso, eles podem dizer que surfistas e praticantes de esportes aquáticos também usam a tabela de marés para encontrar as melhores condições para a prática.

Professor, professora: Oriente os estudantes a escrever as respostas no caderno.

1. O que são as marés? Sugestão de resposta: As marés são variações periódicas do nível do mar, causadas pela atração gravitacional do Sol e da Lua, e pela inclinação do eixo de rotação da Terra.

2. A variação cíclica da altura das marés pode ser modelada por qual tipo de função? Resposta: Função trigonométrica.

3. Faça uma pesquisa sobre como a oscilação periódica das marés afeta atividades como pesca, navegação e esportes aquáticos. Em seguida, converse sobre essas atividades com os colegas e o professor.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Estudando funções trigonométricas

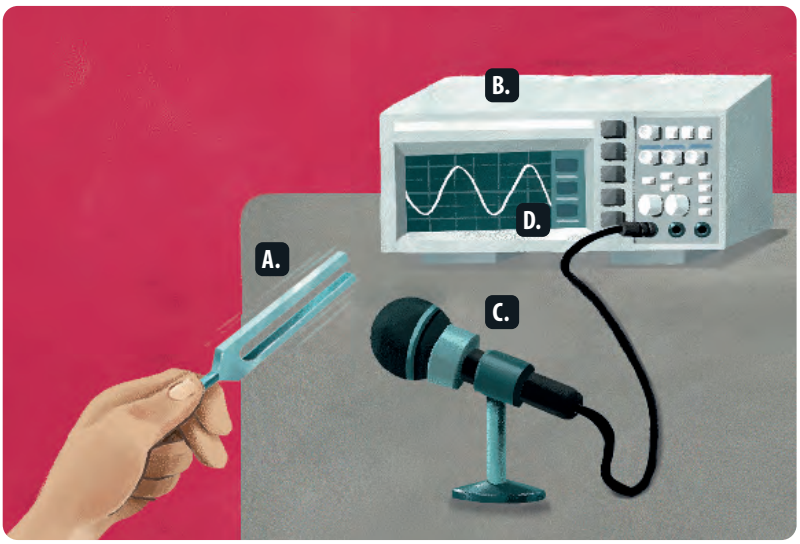
São diversas as aplicações da Trigonometria em diferentes campos do conhecimento, como na realização de cálculos de distâncias inacessíveis (Trigonometria nos triângulos) e o estudo de fenômenos periódicos. Esses fenômenos têm oscilações que se repetem sistematicamente e podem ser observados na música, por exemplo.

A. O diapasão é um instrumento metálico em forma de "U", utilizado, por exemplo, para afinar instrumentos musicais, porque emite um som puro (sem mistura de ondas), produzido por vibração após ser golpeado por um metal.

B. O osciloscópio é um aparelho que permite visualizar ondas sonoras.

C. O microfone é responsável por captar o som.

D. Representação das ondas sonoras produzidas pelo diapasão.



LEONARDO GIBRAN/ARQUIVO DA EDITORA

Neste capítulo, estudaremos as funções trigonométricas, as funções do tipo trigonométricas, exemplos de funções periódicas e algumas de suas aplicações.

Uma função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dita **periódica** quando existe um número $b \neq 0$, tal que $f(x + b) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Se isso ocorre, então $f(x + kb) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ e $k \in \mathbb{Z}$. O menor número $b > 0$ tal que $f(x + kb) = f(x)$ é chamado **período** da função.

Antes de iniciarmos esse estudo, apresentaremos a definição de valor absoluto (ou módulo) de um número real.

O **valor absoluto** ou módulo de um número real a, indicado por $|a|$, é definido como o próprio número a, se $a \geq 0$, ou como $-a$, se $a < 0$. Em resumo:

$$|a| = \begin{cases} a, \text{ se } a \geq 0 \\ -a, \text{ se } a < 0 \end{cases}$$

Exemplos

- $|8| = 8$
- $|143| = 143$
- $|-5| = -(-5) = 5$
- $|-12{,}5| = -(-12{,}5) = 12{,}5$
- $|x - 2| = x - 2$, se $x \geq 2$, e $|x - 2| = 2 - x$, se $x < 2$.

Questão A. Efetue os cálculos.

a) $|-5| + |2|$ Resposta: 7

b) $|-3 \cdot 2|$ Resposta: 6

c) $|-2| \cdot |7|$ Resposta: 14

d) $|-5 + 3| + |2 - 8|$ Resposta: 8

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Função seno

Podemos associar a um número real x qualquer seno do arco que mede x radianos, ou seja, associar x a $\operatorname{sen} x$. Para $x = \frac{\pi}{2}$, por exemplo, associamos o número 1, pois $\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = 1$.

Definimos como **função seno** a função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, que a cada número real x associa o seno de um arco de x radianos, ou seja, $f(x) = \operatorname{sen} x$.

Dica

Lembre-se: o gráfico de uma função f é o conjunto de todos os pontos (x, y), com $x \in D(f)$ e $y = f(x)$.

Vamos esboçar, por exemplo, o gráfico da função seno.

Para construir esse esboço, atribuímos valores a x e calculamos valores correspondentes de $f(x) = y$.

$f(x) = \operatorname{sen} x$

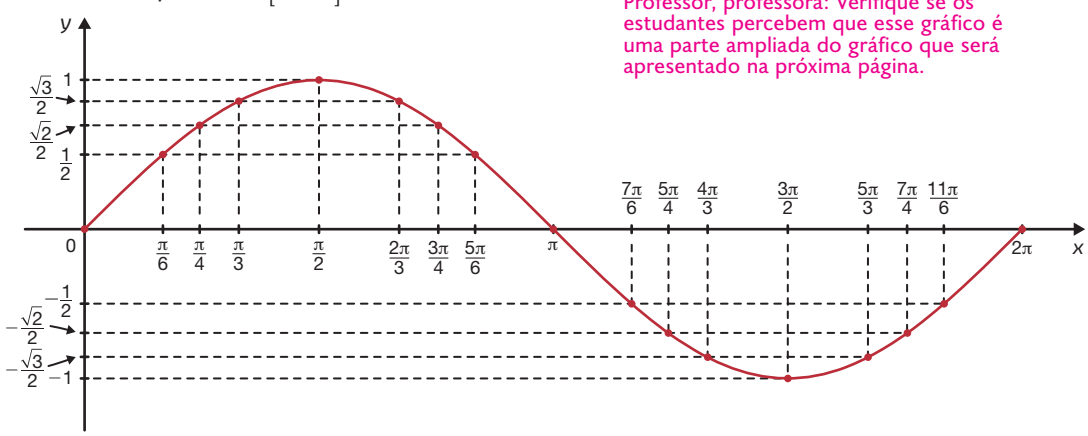
x	$y = f(x)$	(x, y)
0	0	$(0, 0)$
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\left(\frac{\pi}{6}, \frac{1}{2}\right)$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
$\frac{\pi}{2}$	1	$\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$
$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\left(\frac{3\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\left(\frac{5\pi}{6}, \frac{1}{2}\right)$
π	0	$(\pi, 0)$

$f(x) = \operatorname{sen} x$

x	$y = f(x)$	(x, y)
$\frac{7\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$\left(\frac{7\pi}{6}, -\frac{1}{2}\right)$
$\frac{5\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\left(\frac{5\pi}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
$\frac{4\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\left(\frac{4\pi}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
$\frac{3\pi}{2}$	-1	$\left(\frac{3\pi}{2}, -1\right)$
$\frac{5\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\left(\frac{5\pi}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
$\frac{7\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\left(\frac{7\pi}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
$\frac{11\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$\left(\frac{11\pi}{6}, -\frac{1}{2}\right)$
2π	0	$(2\pi, 0)$

Como há infinitos valores para x entre aqueles indicados, há infinitos pontos no gráfico de f entre aqueles cujas coordenadas foram obtidas. Esboçando o gráfico de f inicialmente para $x \in [0, 2\pi]$, temos:

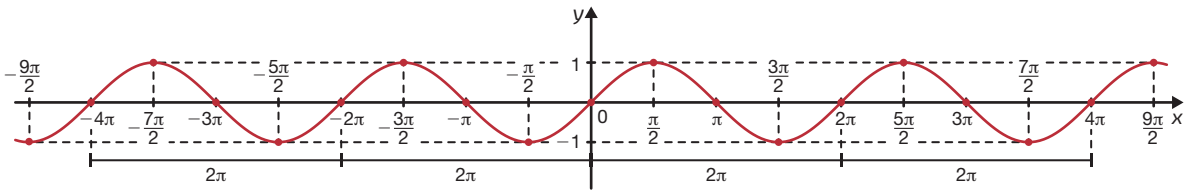
Professor, professora: Verifique se os estudantes percebem que esse gráfico é uma parte ampliada do gráfico que será apresentado na próxima página.



SERGIO L. FILHO/ARQUIVO DA EDITORA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Como $D(f) = \mathbb{R}$, há valores de x menores do que zero e maiores do que 2π. Assim, o gráfico da função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \operatorname{sen} x$, é dado por:



SERGIO L. FILHO/ARQUIVO DA EDITORA

O gráfico da função seno é uma curva denominada **senoide**.

De acordo com essa imagem, verificamos que os valores assumidos pela função seno se repetem periodicamente a cada intervalo de comprimento 2π. Nesse caso, dizemos que a função seno é **periódica** de **período** 2π e, consequentemente, para todo $x \in \mathbb{R}$, temos:

$$\operatorname{sen}(x + k \cdot 2\pi) = \operatorname{sen} x, \text{ com } k \in \mathbb{Z}$$

Além disso, a função seno tem outras características.

- Pela definição, o domínio da função seno é o conjunto dos números reais.
- A imagem da função seno é o intervalo $[-1, 1]$.
- A função seno é **ímpar**, isto é, $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Função cosseno

Definimos como **função cosseno** a função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, que a cada número real x associa o cosseno de um arco de x radianos, ou seja, $f(x) = \cos x$.

Inicialmente, vamos esboçar o gráfico da função cosseno para $x \in [0, 2\pi]$.

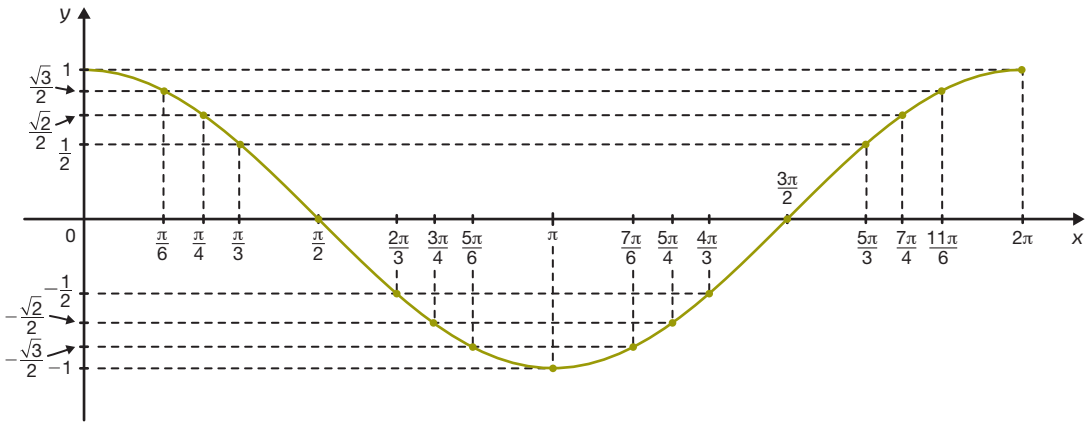
$f(x) = \cos x$

x	$y = f(x)$	(x, y)
0	1	$(0, 1)$
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\left(\frac{\pi}{3}, \frac{1}{2}\right)$
$\frac{\pi}{2}$	0	$\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$
$\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{1}{2}$	$\left(\frac{2\pi}{3}, -\frac{1}{2}\right)$
$\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\left(\frac{3\pi}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
$\frac{5\pi}{6}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\left(\frac{5\pi}{6}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
π	-1	$(\pi, -1)$

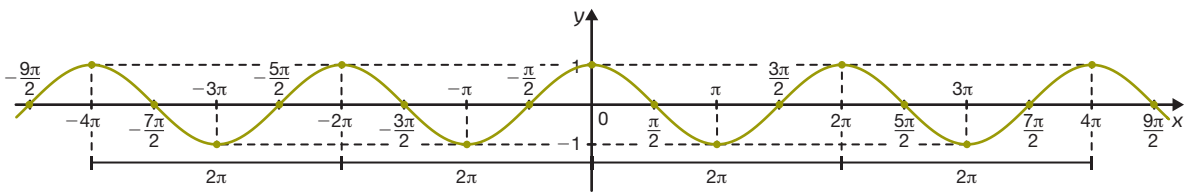
$f(x) = \cos x$

x	$y = f(x)$	(x, y)
$\frac{7\pi}{6}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\left(\frac{7\pi}{6}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
$\frac{5\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\left(\frac{5\pi}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
$\frac{4\pi}{3}$	$-\frac{1}{2}$	$\left(\frac{4\pi}{3}, -\frac{1}{2}\right)$
$\frac{3\pi}{2}$	0	$\left(\frac{3\pi}{2}, 0\right)$
$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\left(\frac{5\pi}{3}, \frac{1}{2}\right)$
$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\left(\frac{7\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
$\frac{11\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\left(\frac{11\pi}{6}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
2π	1	$(2\pi, 1)$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.



Esboçando o gráfico da função f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \cos x$, temos:

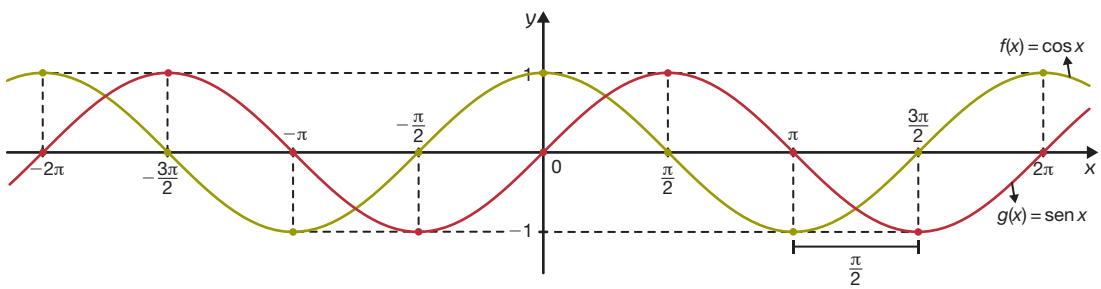


Analisando a imagem, verificamos que os valores assumidos pela função cosseno se repetem periodicamente a cada intervalo de comprimento 2π. Nesse caso, dizemos que a função cosseno é **periódica** de **período** 2π e, consequentemente, para todo $x \in \mathbb{R}$, temos:

$$\cos(x + k \cdot 2\pi) = \cos x, \text{ com } k \in \mathbb{Z}$$

Além disso, a função cosseno tem outras características.

- Pela definição, o domínio da função cosseno é o conjunto dos números reais.
- A imagem da função cosseno é o intervalo $[-1, 1]$.
- A função cosseno é par, isto é, $\cos x = \cos(-x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$.
- O gráfico da função cosseno é congruente ao da função seno transladado $\frac{\pi}{2}$ unidades para a esquerda.



Exercícios e problemas resolvidos

R1. Para quais valores reais de m a equação $\operatorname{sen} x = 2m + 5$ tem solução?

Resolução

Considere a função f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = \operatorname{sen} x$. Então, $Im(f) = [-1, 1]$, ou seja, $-1 \leq \operatorname{sen} x \leq 1$. Assim:

$$-1 \leq \operatorname{sen} x \leq 1 \Rightarrow -1 \leq 2m + 5 \leq 1 \Rightarrow -6 \leq 2m \leq -4 \Rightarrow -3 \leq m \leq -2$$

Portanto, a equação tem solução para $m \in \mathbb{R}$ tal que $-3 \leq m \leq -2$.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

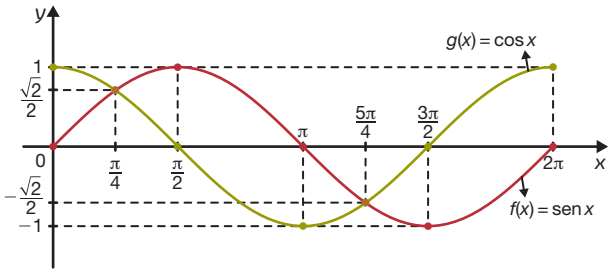
ILUSTRAÇÕES: SERGIO L. FILHO/ARQUIVO DA EDITORA

R2. Resolva graficamente a inequação $\text{sen}x - \cos x \geq 0$, para $0 \leq x \leq 2\pi$.

Resolução

$$\text{sen}x - \cos x \geq 0 \Rightarrow \text{sen}x \geq \cos x$$

Vamos esboçar num mesmo plano cartesiano os gráficos das funções seno e cosseno no intervalo $0 \leq x \leq 2\pi$ e verificar no eixo das abscissas os valores de x que satisfazem a inequação $\text{sen}x \geq \cos x$.



SERGIO L. FILHO/ARQUIVO DA EDITORA

Na imagem, verificamos que a curva da função seno está acima da curva da função cosseno ou a intersecta no intervalo $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]$.

Portanto, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, \frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{5\pi}{4}\right\}$.

Exercícios e problemas

Anote as respostas no caderno.

1. Em cada item, determine os valores de x, sabendo que:

a) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, com $\frac{\pi}{2} < x < \frac{5\pi}{2}$. Resposta: $x = \frac{7\pi}{4}$ ou $x = \frac{9\pi}{4}$.

b) $\text{sen}x = -\frac{1}{2}$, com $2\pi < x < \frac{7\pi}{2}$. Resposta: $x = \frac{19\pi}{6}$

c) $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, com $90° < x < 540°$. Resposta: $x = 150°$ ou $x = 210°$ ou $x = 510°$.

d) $\text{sen}x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, com $\frac{11\pi}{4} < x < \frac{9\pi}{2}$. Resposta: $x = \frac{17\pi}{4}$

e) $\text{sen}x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, com $360° < x < 720°$. Resposta: $x = 600°$ ou $x = 660°$.

f) $\cos x = \frac{1}{2}$, com $390° < x < 630°$. Resposta: $x = 420°$

2. Para cada item, calcule os valores de m para os quais a igualdade seja possível.

a) $\cos x = 3 - m$, com $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Resposta: $2 < m < 3$

b) $\text{sen}x = 2m + 1$, com $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$. Resposta: $-1 < m < -\frac{1}{2}$

c) $\text{sen}x = \frac{3m - 2}{4}$, com $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$. Resposta: $-\frac{2}{3} < m < \frac{2}{3}$

d) $\cos x = -2m + 7$, com $180° < x < 360°$. Resposta: $3 < m < 4$

3. Sejam f e g funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, definidas por $f(x) = \text{sen}x$ e $g(x) = \cos x$. Considerando a função h, definida por $h(x) = \left[g(x)\right]^2 + f(x) - 1$, responda às questões.

a) Para quais valores de x a função h atinge seu valor máximo? Resposta: $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$, ambos com $k \in \mathbb{Z}$.

b) Qual é o valor máximo da função h? Resposta: $\frac{1}{4}$

4. O gráfico da função seno é congruente ao gráfico da função cosseno transladado em a unidades para a esquerda.

a) Qual é o valor de a? Resposta: $\frac{\pi}{2}$

b) Quais são as coordenadas dos pontos em que o gráfico da função seno cruza o da função cosseno no intervalo $\left[-\pi, \frac{9\pi}{4}\right[$? Resposta: $\left(-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ e $\left(\frac{5\pi}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

c) Esboce os gráficos das funções seno e cosseno no intervalo $\left[-\pi, \frac{9\pi}{4}\right[$.
Resposta no final do **Livro do Estudante**.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Funções do tipo trigonométricas: $f(x) = a + b \cdot \text{sen}(cx + d)$ e $g(x) = a + b \cdot \cos(cx + d)$

As funções definidas por $f(x) = a + b \cdot \text{sen}(cx + d)$ e $g(x) = a + b \cdot \cos(cx + d)$, sendo a, b, c e d números reais com $b \neq 0$ e $c \neq 0$, são denominadas **funções do tipo trigonométricas**, e muitas delas estão relacionadas a fenômenos periódicos, como a variação das marés, que tem um comportamento periódico, em que o nível do mar muda com o passar do tempo.

Observação

As funções seno e cosseno são casos particulares das funções do tipo trigonométricas, ou seja, quando $a = 0$, $b = 1$, $c = 1$ e $d = 0$.



FREDERICO MANCHADO/SHUTTERSTOCK

Turistas na praia de Porto de Galinhas, em Ipojuca, PE, durante maré baixa, em abril de 2023.

A seguir, são apresentados alguns exemplos de funções do tipo trigonométricas.

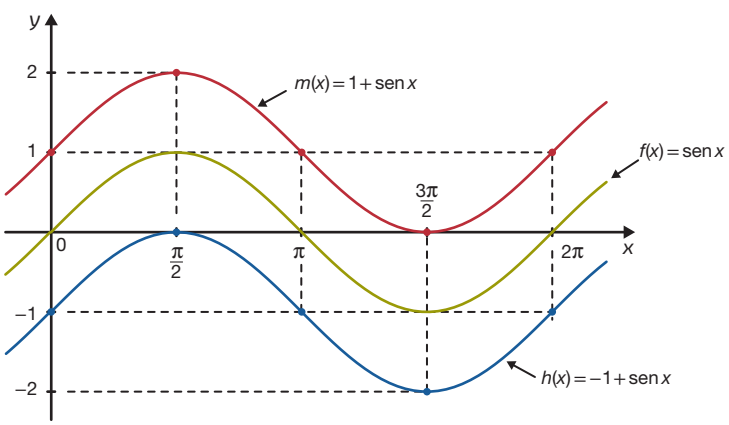
- f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 5 - 3 \cdot \text{sen}(2x + 1)$. Nesse caso, $a = 5$, $b = -3$, $c = 2$ e $d = 1$.
- g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = -1 + \cos 3x$. Nesse caso, $a = -1$, $b = 1$, $c = 3$ e $d = 0$.

Os gráficos das funções do tipo trigonométricas definidas por $f(x) = a + b \cdot \text{sen}(cx + d)$ e $g(x) = a + b \cdot \cos(cx + d)$ podem ser obtidos por meio de translações ou alterações na amplitude (ampliar ou comprimir), vertical ou horizontalmente, dos gráficos das funções seno e cosseno, respectivamente.

A constante a **translada** o gráfico da função em $|a|$ unidades para cima, se $a > 0$, ou para baixo, se $a < 0$.

Exemplo

OBJETO DIGITAL ***Vídeo:*** A roda-gigante e a função do tipo trigonométrica



SERGIO L. FILHO/ARQUIVO DA EDITORA

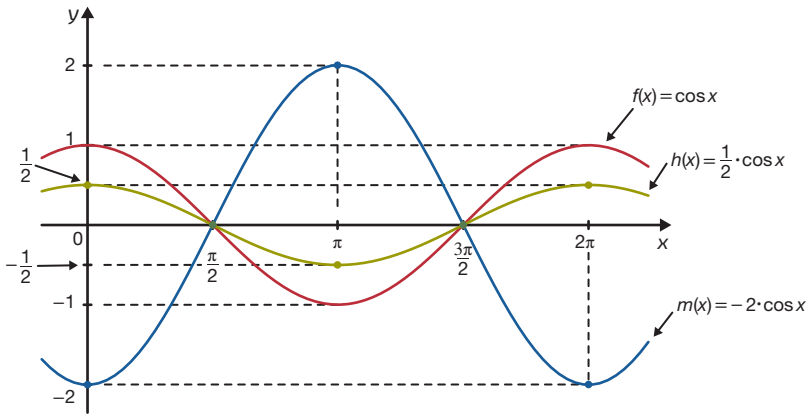
Observação

A constante a altera a imagem da função.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

A constante b **amplia verticalmente** o gráfico da função se $|b| > 1$ e **comprime verticalmente** se $|b| < 1$.

Exemplo

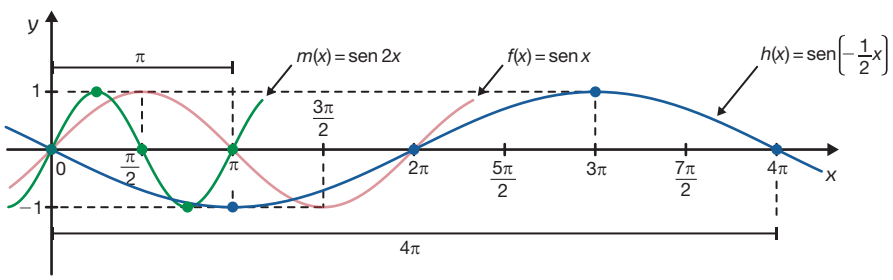


Observação

A constante b altera a imagem da função.

A constante c **amplia** o período da função se $|c| < 1$ e **comprime** se $|c| > 1$, com o novo período $p = \frac{p_t}{|c|}$, sendo p_t o período da função trigonométrica correspondente.

Exemplo

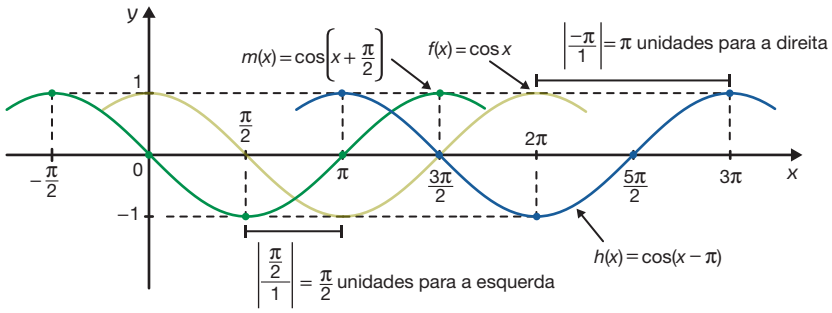


Observação

O período de uma função do tipo trigonométrica é $p = \frac{2\pi}{|c|}$.

A constante d **translada** o gráfico da função em $\left|\frac{d}{c}\right|$ unidades para a esquerda, se $\frac{d}{c} > 0$, ou para a direita, se $\frac{d}{c} < 0$.

Exemplo



ILUSTRAÇÕES: SERGIO L. FILHO/ARQUIVO DA EDITORA
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Exercícios e problemas resolvidos

R3. Esboce o gráfico e determine o domínio, a imagem e o período da função:

a) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = 3 \cdot \operatorname{sen}(2x)$.

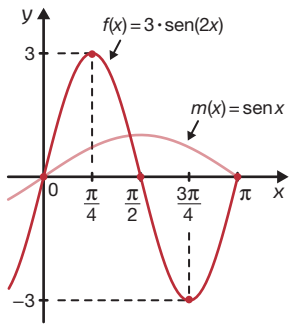
b) $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $g(x) = 1 + \operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

Professor, professora: Antes de propor o problema resolvido **R3**, caso julgue conveniente, peça aos estudantes que o resolvam utilizando um *software* de Geometria dinâmica. No *site* do GeoGebra, por exemplo, é possível encontrar um *applet* que permite avaliar a influência dos parâmetros *a*, *b*, *c* e *d* no gráfico das funções trigonométricas estudadas. Disponível em: https://www.geogebra.org/m/z9gJwjss. Acesso em: 7 ago. 2024.

Resolução

a) Para esboçar o gráfico de f, é conveniente atribuirmos ao argumento $(2x)$ os arcos $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ e 2π. Para isso, atribuímos a x metade dos valores desses arcos.

- Se $x = 0$, então $y = f(x) = 3 \cdot \operatorname{sen}(2 \cdot 0) = 3 \cdot 0 = 0$.
- Se $x = \frac{\pi}{4}$, então $y = f(x) = 3 \cdot \operatorname{sen}\left(2 \cdot \frac{\pi}{4}\right) = 3 \cdot 1 = 3$.
- Se $x = \frac{\pi}{2}$, então $y = f(x) = 3 \cdot \operatorname{sen}\left(2 \cdot \frac{\pi}{2}\right) = 3 \cdot 0 = 0$.
- Se $x = \frac{3\pi}{4}$, então $y = f(x) = 3 \cdot \operatorname{sen}\left(2 \cdot \frac{3\pi}{4}\right) = 3 \cdot (-1) = -3$.
- Se $x = \pi$, então $y = f(x) = 3 \cdot \operatorname{sen}(2 \cdot \pi) = 3 \cdot 0 = 0$.



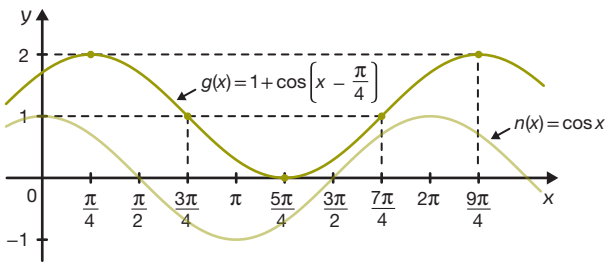
Observação

Comparando o gráfico da função f com o gráfico da função seno, observamos que ele foi ampliado verticalmente e que o período foi comprimido pela metade.

$D(f) = \mathbb{R}$, $Im(f) = [-3, 3]$ e $p = \pi$.

b) Para esboçar o gráfico de g, atribuímos para x a soma de $\frac{\pi}{4}$ aos valores dos arcos $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ e 2π.

- Se $x = \frac{\pi}{4}$, então $y = g(x) = 1 + \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) = 1 + 1 = 2$.
- Se $x = \frac{3\pi}{4}$, então $y = g(x) = 1 + \cos\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) = 1 + 0 = 1$.
- Se $x = \frac{5\pi}{4}$, então $y = g(x) = 1 + \cos\left(\frac{5\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) = 1 - 1 = 0$.
- Se $x = \frac{7\pi}{4}$, então $y = g(x) = 1 + \cos\left(\frac{7\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) = 1 + 0 = 1$.
- Se $x = \frac{9\pi}{4}$, então $y = g(x) = 1 + \cos\left(\frac{9\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) = 1 + 1 = 2$.



Observação

Comparando o gráfico da função g com o gráfico da função cosseno, observamos que o primeiro foi transladado em 1 unidade para cima e $\frac{\pi}{4}$ unidades para a direita.

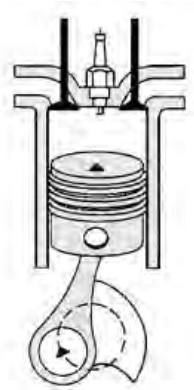
$D(g) = \mathbb{R}$, $Im(g) = [0, 2]$ e $p = 2\pi$.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: SERGIO L. FILHO/ARQUIVO DA EDITORA

R4. (UFPR, 2013) O pistão de um motor se movimenta para cima e para baixo dentro de um cilindro, como ilustra a figura. Suponha que em um instante t, em segundos, a altura $h(t)$ do pistão, em centímetros, possa ser descrita pela expressão:

$$h(t) = 4 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi t}{0{,}05}\right) + 4$$



UFPR 2013

a) Determine as alturas máxima e mínima que o pistão atinge.

b) Quantos ciclos completos esse pistão realiza, funcionando durante um minuto?

Resolução

a) Como $-1 \leq \operatorname{sen} x \leq 1$ e a constante que multiplica $\operatorname{sen} x$ é positiva, a altura máxima H_M ocorrerá quando $\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi t}{0{,}05}\right) = 1$ e a altura mínima h_M, quando $\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi t}{0{,}05}\right) = -1$. Assim:

$$H_M = 4 \cdot 1 + 4 = 8 \qquad h_M = 4 \cdot (-1) + 4 = 0$$

Portanto, a altura máxima atingida pelo pistão é 8 cm, e a mínima, 0 cm.

b) O período da função $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $h(t) = 4 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi t}{0{,}05}\right) + 4$ é:

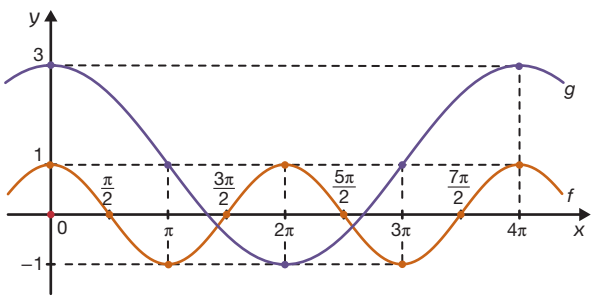
$$\frac{2\pi}{|c|} = \frac{2\pi}{\left|\frac{2\pi}{0{,}05}\right|} = \frac{2\pi}{\frac{2\pi}{0{,}05}} = 0{,}05$$

Desse modo, a cada 0,05 s o pistão completa um ciclo. Consequentemente, para determinarmos quantos ciclos completos esse pistão realiza em 1 min, efetuamos:

$$\frac{1 \text{ min}}{0{,}05 \text{ s}} = \frac{60 \text{ s}}{0{,}05 \text{ s}} = 1200$$

Portanto, funcionando durante 1 min, esse pistão realiza 1200 ciclos completos.

R5. No plano cartesiano estão representados os gráficos das funções f e g definidas por $f(x) = \cos x$ e $g(x) = a + b \cdot \cos(cx + d)$. Determine o valor das constantes a, b, c, e d e escreva a lei de formação da função g.



SERGIO L. FILHO/ARQUIVO DA EDITORA

Resolução

De acordo com os gráficos apresentados:

a) o período da função g é igual a 4π. Assim:

$$4\pi = \frac{2\pi}{|c|} \Rightarrow |c| = \frac{1}{2} \Rightarrow c = \pm\frac{1}{2}$$

Dica

Para $c = -\frac{1}{2}$, temos $\cos\left(-\frac{x}{2}\right) = \cos\frac{x}{2}$, pois a função cosseno é par.

b) $Im(g) = [-1, 3]$. Como $-1 \leq \cos(cx + d) \leq 1$, segue que:

$$\begin{cases} a - b = -1 \\ a + b = 3 \end{cases}$$

Resolvendo esse sistema, obtemos $a = 1$ e $b = 2$.

c) em relação ao gráfico de f, o gráfico de g não foi transladado horizontalmente. Logo, $d = 0$.

Portanto, $g(x) = 1 + 2 \cdot \cos\frac{x}{2}$.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

O que faz um engenheiro de som?

O engenheiro de som ou engenheiro de áudio é o profissional responsável pelo processamento e criação de áudios. No universo da música, cinema, *games*, rádio, televisão e outras áreas que envolvem a produção de multimídias, eles trabalham para garantir a qualidade do som com o objetivo de proporcionar uma boa experiência ao ouvinte.



GORODENKOFF/SHUTTERSTOCK

Engenheira de som manuseando placas de mixagens e *softwares* na mesa de mixagem, durante a produção de uma nova música, em estúdio de gravação.

Por meio do manuseio de diferentes equipamentos de gravação e manipulação, de transmissão ou de emissão do áudio, eles são peritos em capturar, mixar e **masterizar** o som em diferentes contextos. Em estúdios de gravação, por exemplo, eles trabalham para que vozes e instrumentos soem integrados, cuidando para que nenhum cause a impressão de não se encaixar em uma música. São encarregados também de mixar as faixas gravadas, balancear o volume, aplicar efeitos e criar uma reprodução musical agradável e envolvente. Em *shows* ao vivo, eles participam da escolha dos equipamentos de som necessários para realizar o evento. Além disso, podem operar a mesa de mixagem visando à qualidade do som de modo a criar um equilíbrio sonoro, contribuindo para que a música alcance o público de maneira satisfatória. Nas produções de filmes e *games*, os engenheiros de som empregam uma variedade de técnicas para produzir efeitos especiais, dar vozes aos personagens, remover barulhos desnecessários, entre outros.

Masterizar: realizar a etapa final do processo de produção de um áudio.

Entre as competências necessárias para o exercício da profissão, os engenheiros de som precisam dominar conhecimentos relacionados aos fenômenos periódicos, sobretudo os que envolvem movimentos oscilatórios, para compreender o padrão das ondas sonoras, conforme vimos no início do capítulo. Além disso, precisam desenvolver habilidades de escuta crítica, compreender os princípios da acústica, ter experiência para operar equipamentos e tecnologias de áudio e conhecer técnicas de mixagem e masterização.

PARA EXPANDIR

Que tal conhecer o local de trabalho de um engenheiro de som? Nessa visita, aproveite para saber mais sobre o dia a dia desse profissional.

1. Resposta: O engenheiro de som pode trabalhar com processamento e criação de áudios. Ele utiliza diferentes equipamentos de gravação e manipulação, de transmissão ou de emissão de áudio para capturar, mixar e masterizar o som. Ele pode trabalhar na indústria do cinema, da televisão, do rádio, da música e dos *games*.

Observação

No Brasil, ainda não existe uma graduação específica para se tornar um engenheiro de som, porém é possível ingressar na carreira obtendo um certificado de estudos em Engenharia de som. Esse documento pode ser adquirido com o cumprimento de créditos de disciplinas específicas de determinados cursos, inclusive de áreas não relacionadas à Engenharia, e emitidos em complemento aos diplomas de uma graduação que seja reconhecida pelo Ministério da Educação (MEC).

Oriente os estudantes a escrever as respostas no caderno.

Atividades

2. Resposta pessoal. Incentive a participação de todos os estudantes, pedindo-lhes que compartilhem o texto produzido. Após a leitura dos textos, faça com os estudantes um levantamento para verificarem qual foi a área da profissão que teve maior quantidade de interessados.

Anote as respostas no caderno.

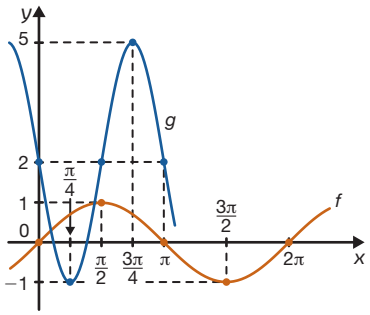
1. De acordo com as informações apresentadas no texto, explique os tipos de trabalho que um profissional da Engenharia de som pode desenvolver e cite onde ele pode atuar.

2. Se você fosse um engenheiro de som, em que área atuaria: cinema, televisão, música, *games* ou rádio? Faça uma pesquisa na internet e busque mais informações sobre o trabalho desse profissional na área pela qual você optaria. Depois, em uma folha de papel, escreva uma síntese da sua pesquisa, justificando os motivos que levaram você a querer atuar na área selecionada. Em sala de aula, leia o texto para os colegas expondo o resultado de sua pesquisa e conheça a escolha deles também.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Anote as respostas no caderno.

5. Analise os gráficos que representam as funções f e g de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, definidas por $f(x) = \text{sen}x$ e $g(x) = a + b \cdot \text{sen}(cx + d)$.



SERGIO L. FILHO/ARQUIVO DA EDITORA

a) Determine a imagem de cada uma das funções. Quais são as constantes que determinam a variação na imagem da função g em relação à função f? Resposta no final do **Livro do Estudante**.

b) Determine o valor das constantes a, b, c e d. Em seguida, escreva a lei de formação da função g. Sugestão de resposta: $a = 2$, $b = 3$, $c = 2$, $d = \pi$; $g(x) = 2 + 3\text{sen}(2x + \pi)$.

6. Calcule a diferença entre os valores máximo e mínimo da função:

a) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 3 - 2 \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right)$. Resposta: 4

b) $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = -1 + \frac{1}{4} \cdot \cos(3x)$. Resposta: $\frac{1}{2}$

c) $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $h(x) = 3 - \text{sen}(2x + \pi)$. Resposta: 2

d) $n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $n(x) = 1 + 4 \cdot \cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$. Resposta: 8

7. Para vencer certo torneio de golfe, um jogador precisa acertar em uma tacada um buraco que se encontra a 43 m da bola. Ao realizar a tacada, ele impulsiona a bola com uma velocidade de 20 m/s. De acordo com as leis da mecânica, a distância R percorrida pela bola após ser lançada pelo jogador é dada por $R = \frac{V_0^2}{g} \cdot \text{sen}2\phi_0$, em que V_0 é a velocidade, ϕ_0 é o ângulo em que a bola é impulsionada e g é a aceleração da gravidade.

Sabendo que nessa tacada a bola percorreu 40 m, responda às questões.

Dica

Considere a aceleração da gravidade igual a 10 m/s².

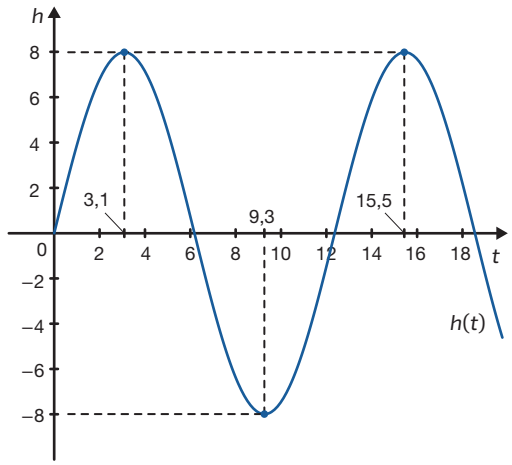
a) Qual foi o ângulo da tacada realizada pelo jogador? Resposta: 45°

b) Para a velocidade com que o jogador impulsionou a bola, seria possível variar o ângulo de modo a atingir uma distância maior com a tacada? Justifique sua resposta. Resposta no final do **Livro do Estudante**.

8. As marés são fenômenos periódicos em que o nível do mar muda com o passar do tempo. Esse comportamento pode ser modelado por uma função $h\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, definida por:

$$h(t) = b \cdot \text{sen}(ct)$$

O gráfico a seguir representa a altura $h = h(t)$, em metros, da maré na Baía de Fundy, em relação ao nível médio do mar em um instante t (em horas), no caso de extrema variação.

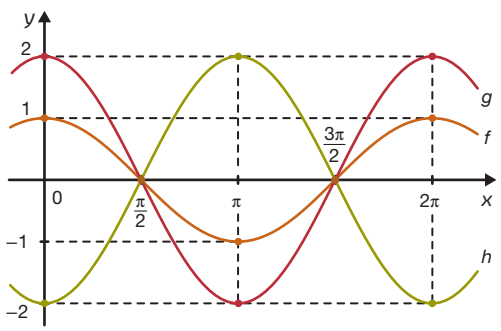


RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

a) Considerando que a altura da maré se repete a cada 12,4 horas, determine a lei de formação da função que modela o comportamento da maré nessa baía. Sugestão de resposta: $h(t) = 8 \cdot \text{sen}\left(\frac{5\pi}{31}t\right)$

b) Quais são as alturas máxima e mínima da maré nessa baía? Resposta: 8 m; −8 m

9. Analise os gráficos das funções f, g e h de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, definidas por $f(x) = \cos x$, $g(x) = 2 \cdot \cos x$ e $h(x) = -2 \cdot \cos x$.



SERGIO L. FILHO/ARQUIVO DA EDITORA

a) Quais dessas funções têm os gráficos simétricos em relação ao eixo x? Por que isso ocorre? Resposta no final do **Livro do Estudante**.

b) Qual é a imagem de cada uma dessas funções?

c) Determine para quais valores de x temos:

$$f(x) = g(x) = h(x)$$ Resposta: $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$.

9. b) Resposta: $Im(f) = [-1, 1]$, $Im(g) = [-2, 2]$ e $Im(h) = [-2, 2]$.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

10. Em uma farmácia que fica aberta 24 horas, a quantidade média de clientes varia de acordo com a função C: $]0, 24] \to \mathbb{R}$ definida por $C(h) = 20 - 15 \cos\left(\frac{h\pi}{12}\right)$, em que h é o horário do dia e C é a quantidade aproximada de clientes na farmácia no horário h.

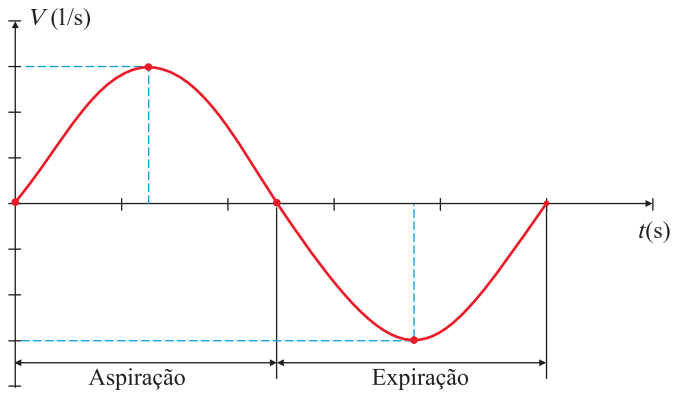
a) Qual é a quantidade de clientes nessa farmácia às 18 horas? Resposta: 20 clientes.

b) Em qual horário do dia a quantidade média de clientes na farmácia é maior? Qual é a quantidade de clientes nesse horário? Resposta: 12 horas; 35 clientes.

c) Em qual horário do dia a quantidade média de clientes é menor? Qual é essa quantidade? Resposta: 24 horas; 5 clientes.

11. (Unesp, 2010) Em situação normal, observa-se que os sucessivos períodos de aspiração e expiração de ar dos pulmões em um indivíduo são iguais em tempo, bem como na quantidade de ar inalada e expelida. A velocidade de aspiração e expiração de ar dos pulmões de um indivíduo está representada pela curva do gráfico, considerando apenas um ciclo do processo.

RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA/UNESP 2010



Sabendo que, em uma pessoa em estado de repouso, um ciclo de aspiração e expiração completo ocorre a cada 5 segundos e que a taxa máxima de inalação e exalação, em módulo, é 0,6 l/s, a expressão da função cujo gráfico mais se aproxima da curva representada na figura é: Resposta: Alternativa **d**.

a) $V(t) = \frac{2\pi}{5} \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{3}{5}t\right)$.

b) $V(t) = \frac{3}{5} \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{5}{2\pi}t\right)$.

c) $V(t) = 0{,}6 \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{5}t\right)$.

d) $V(t) = 0{,}6 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{5}t\right)$.

e) $V(t) = \frac{5}{2\pi} \cdot \cos(0{,}6t)$.

Observação
No enunciado, usou-se a notação l para indicar litro.

12. O pêndulo cônico consiste em um corpo de massa m que gira em um círculo horizontal com velocidade v constante na ponta de uma corda de comprimento C, em metros. À medida que o corpo gira, o movimento da corda descreve a superfície de um cone imaginário, daí o nome "pêndulo cônico". O tempo T que o corpo demora para dar uma volta completa, chamado de período, é dado por $T = 2\pi\sqrt{\frac{C \cdot \cos\theta}{g}}$, em que θ é o ângulo que a corda faz com a vertical e g é a aceleração da gravidade. Suponha o movimento de um pêndulo cônico de 2,5 m de comprimento e considere a aceleração da gravidade igual a 10 m/s^2.

a) Escreva a lei de formação da função que expressa o período T do movimento em função do ângulo θ em que o movimento é realizado. Resposta: $T(\theta) = \pi\sqrt{\cos\theta}$

b) Qual é o domínio da função cuja lei de formação você escreveu no item **a**? Resposta: $D(T) = \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$

13. Movimento Harmônico Simples (MHS) é o movimento periódico oscilatório em que um sistema vibra com certa amplitude em torno de um ponto de equilíbrio. Um determinado MHS é representado pela função m: $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, dado por $m(t) = 3 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}t - \frac{\pi}{4}\right)$, em que t é o tempo, em segundos, e m é o deslocamento medido em centímetros, em relação à posição de equilíbrio no tempo t. Respostas no final do **Livro do Estudante**.

a) Qual é o deslocamento máximo desse MHS? Para quais tempos isso acontece?

b) Para quais valores de t esse MHS está em posição de equilíbrio, ou seja, o deslocamento é nulo?

c) Esboce o gráfico da função m.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

14. Junte-se a um colega e façam uma pesquisa sobre fenômenos periódicos. Em seguida, elaborem um problema envolvendo um desses fenômenos e as funções seno e cosseno. Por fim, troquem com outros colegas para que eles resolvam o problema elaborado. Depois, verifiquem se as respostas estão corretas.

Resposta pessoal. A resposta depende da pesquisa realizada pelos estudantes.

15. O movimento de rotação da Terra é responsável pela sucessão de períodos de luz solar (dia) e de ausência de luz solar direta (noite), sendo esta alternância uma das primeiras formas de medição temporal utilizadas pelos seres humanos. A duração do dia sofre variações ao longo das diferentes estações do ano, decorrentes da inclinação do eixo de rotação terrestre e do movimento de translação. Tal fenômeno gerava desafios para civilizações antigas que se valiam de dispositivos como o relógio de Sol, como os babilônios e egípcios, devido ao fato de que as horas se estendiam durante o verão e se encurtavam durante o inverno.

A variação da duração dos dias está relacionada à inclinação do eixo de rotação da Terra em relação à sua órbita, cujo ângulo, chamado obliquidade da eclíptica, mede 23,45°. Essa inclinação interfere na quantidade de radiação solar incidente sobre os hemisférios terrestres, sendo este o motivo de as estações do ano serem opostas entre os hemisférios: se é verão no Hemisfério Sul, é inverno no Hemisfério Norte, que varia conforme a Terra orbita o Sol. No período em que um hemisfério recebe mais radiação do que o outro, os dias do primeiro serão mais longos e aquecidos, enquanto o outro terá dias mais curtos. Em duas ocasiões do ano, o dia e a noite têm a mesma duração.

Essas ocasiões ocorrem na transição do inverno para a primavera e na transição do verão para o outono e denominam-se, respectivamente, equinócio de primavera e equinócio de verão, e no início do inverno ocorre a noite mais longa do ano, o solstício de inverno.

Apesar de já ser utilizado na Grécia antiga em cálculos teóricos, foi apenas com o desenvolvimento de relógios mecânicos que o conceito de dia com 24 horas iguais se tornou um elemento comum da sociedade. Até então, a maioria das pessoas ainda media a passagem do tempo com a mudança do dia para a noite e com o passar das estações.

A duração do dia no município de São Paulo (SP), por exemplo, pode ser descrita por uma função h, definida por $h(x) = A + B \cdot \cos\left(\frac{2\pi \cdot x}{365}\right)$, em que h expressa a duração aproximada do dia, medida em horas, em função do número x de dias passados desde 22 de dezembro de 2023. As constantes A e B dependem da duração do dia nos solstícios de verão e de inverno, que naquela localidade correspondem a 13,58 horas e 10,68 horas, respectivamente.

Professor, professora: A tarefa **14** propõe aos estudantes que elaborem um problema utilizando os conceitos estudados e os resultados obtidos em uma pesquisa, contribuindo assim para a ampliação do repertório de reflexões e questionamentos a respeito de determinadas situações. Antes de os estudantes elaborarem o problema, peça a eles que analisem os contextos propostos na seção **Exercícios e problemas** deste capítulo e, se julgar conveniente, oriente-os a investigar outros problemas e contextos disponíveis em provas de vestibular e Enem.



CARLOS BORIN/ARQUIVO DA EDITORA

Observação

No imagem, o símbolo ≠ indica que parte do eixo foi omitida na representação da imagem.

OBJETO DIGITAL ***Infográfico clicável:*** Duração do dia: um fenômeno periódico natural

a) Em quais dias do ano uma hora do relógio de Sol é igual a uma hora de um relógio moderno? Justifique sua resposta. Resposta: No equinócio de outono e no equinócio de primavera. Isso ocorre porque, nesses episódios, o dia e a noite têm a mesma duração: 12 horas cada.

b) De acordo com o gráfico, em qual data ocorreu a menor duração do dia no município de São Paulo, em 2023? Resposta: 21/6/2023

c) Qual é o período da função h? No contexto apresentado, o que significa o valor do período dessa função? Resposta no final do **Livro do Estudante**.

d) Determine o valor das constantes A e B e, em seguida, escreva a lei de formação da função h que descreve a quantidade de horas de duração do dia no município de São Paulo. Resposta no final do **Livro do Estudante**.

e) Vimos que o conceito de dia com 24 horas iguais se tornou um elemento comum da sociedade apenas com o desenvolvimento do relógio mecânico. Em sua opinião, o desenvolvimento desse aparelho trouxe benefícios para a sociedade? Converse com os colegas e o professor.

Resposta pessoal. Orientações sobre esta questão no **Suplemento para o professor.**

VINÍCIUS COSTA/ARQUIVO DA EDITORA
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

SÍNTESE DO CAPÍTULO

Neste capítulo, estudamos o conceito de funções trigonométricas e de funções do tipo trigonométricas. Além disso, relacionamos fenômenos periódicos aos conceitos dessas funções. Agora, chegou a hora de refletir sobre seus conhecimentos! Como estratégia de estudos, sugerimos a você que faça uma autoavaliação, revise os conceitos e sintetize o que foi estudado. Para isso, resolva as questões propostas nesta seção.

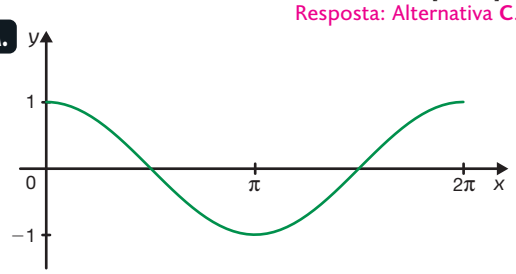
1. Você conhecia algum dos conteúdos estudados neste capítulo? Cite-os. Resposta pessoal. Orientações sobre esta questão no **Suplemento para o professor**.

2. Faça uma lista com os principais conceitos estudados neste capítulo. Você teve dificuldades em entender algum deles? Não recorda de algum desses conceitos? Ficou com dúvidas? Reflita sobre esses questionamentos e, se necessário, retome o que foi estudado. Resposta pessoal. Orientações sobre esta questão no **Suplemento para o professor**.

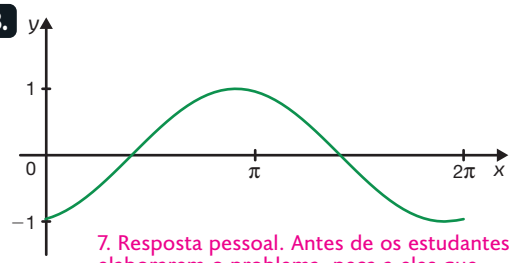
3. Qual das alternativas apresenta o gráfico da função definida por $f(x) = \text{sen}(x)$, para $x \in [0, 2\pi]$?

Resposta: Alternativa **C**.

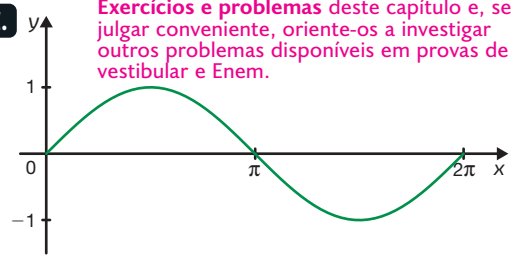
A.



B.



C.



ILUSTRAÇÕES: CARLOS BORIN/ARQUIVO DA EDITORA

4. Quais das afirmações apresentadas são verdadeiras?

Resposta: Alternativas **b** e **c**.

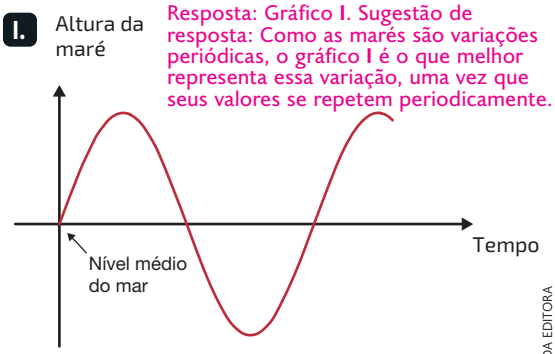
a) A função seno é ímpar, isto é, $\text{sen}x = \text{sen}(-x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

b) A função cosseno é par, isto é, $\cos x = \cos(-x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

c) O gráfico da função cosseno é congruente ao gráfico da função seno transladado $\frac{\pi}{2}$ unidades para a esquerda.

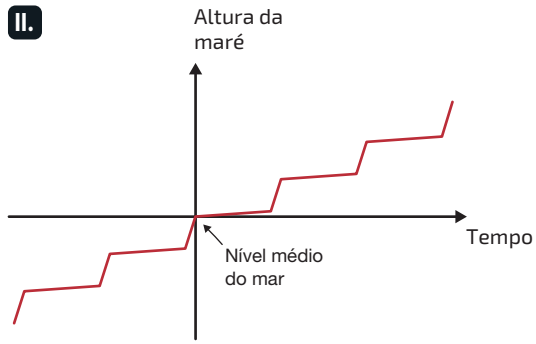
5. Qual dos gráficos a seguir melhor representa a variação das marés? Por quê?

I.



Resposta: Gráfico **I**. Sugestão de resposta: Como as marés são variações periódicas, o gráfico **I** é o que melhor representa essa variação, uma vez que seus valores se repetem periodicamente.

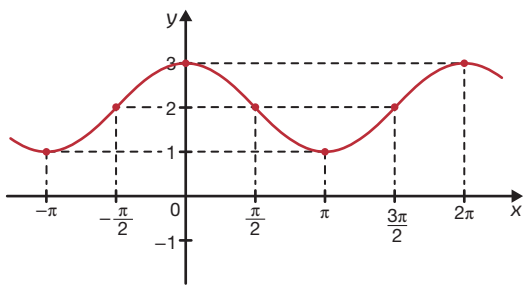
II.



ILUSTRAÇÕES: CARLOS BORIN/ARQUIVO DA EDITORA

6. O gráfico corresponde a uma função do tipo trigonométrica definida por:

$$f(x) = a + b \cdot \cos(cx + d)$$



CARLOS BORIN/ARQUIVO DA EDITORA

Nessa função, a é maior ou menor do que zero? Justifique sua resposta.

7. Escolha um dos conteúdos estudados neste capítulo e elabore um problema envolvendo-o. Depois, troque com um colega para que ele o resolva. Por fim, verifique se a resposta obtida por ele está correta.

8. Faça uma síntese do que foi estudado neste capítulo. Nela, use desenhos e dê exemplos.

7. Resposta pessoal. Antes de os estudantes elaborarem o problema, peça a eles que analisem os contextos propostos nas seções **Exercícios e problemas** deste capítulo e, se julgar conveniente, oriente-os a investigar outros problemas disponíveis em provas de vestibular e Enem.

8. Resposta pessoal. Orientações sobre esta questão no **Suplemento para o professor**.

6. Resposta: Maior do que zero, pois, quando comparado com o gráfico da função cosseno, o gráfico da função f foi transladado $|a|$ unidades para cima.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

CAPÍTULO

3

FÓRMULAS DE TRANSFORMAÇÃO, RELAÇÕES E EQUAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

ADAM EVANS

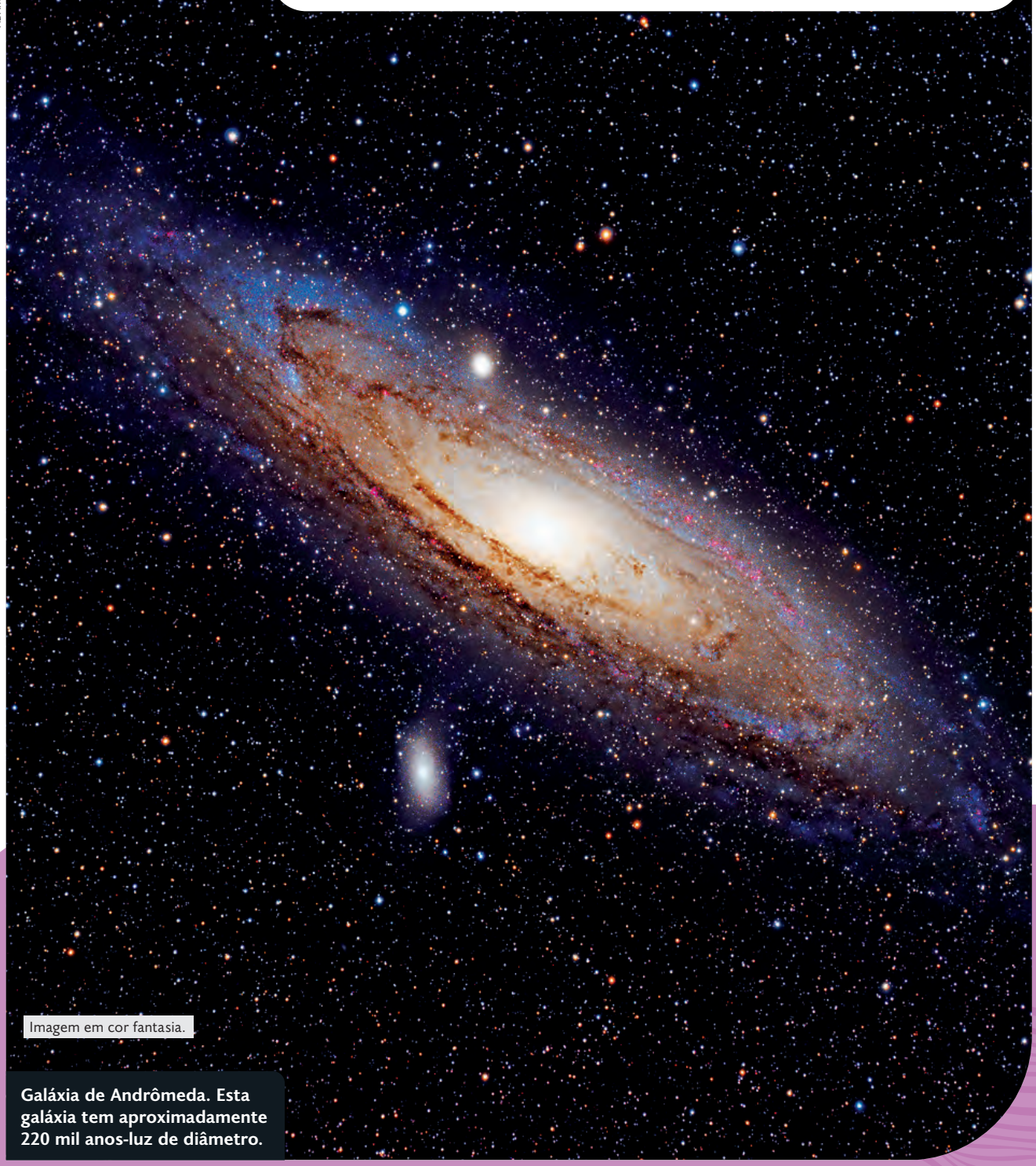


Imagem em cor fantasia.

Galáxia de Andrômeda. Esta galáxia tem aproximadamente 220 mil anos-luz de diâmetro.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Você sabia que os astrônomos usam triângulos imaginários no céu para medir a distância entre uma estrela e a Terra? O método é relativamente simples: primeiro, eles observam a estrela com um telescópio e traçam um segmento de reta imaginário entre ela e a Terra. Seis meses depois, quando a Terra está no lado oposto de sua órbita ao redor do Sol, repetem a observação, resultando em um novo segmento. Juntando os dois segmentos e o segmento entre as duas posições da Terra, é possível desenhar um triângulo imaginário cujas medidas dos ângulos internos são conhecidas.

Como conhecemos a medida do diâmetro da órbita terrestre, é possível aplicar a lei dos senos no triângulo descrito no texto para formular e resolver uma equação trigonométrica e obter a medida da distância entre a estrela observada e o planeta Terra. Esse tipo de cálculo permitiu verificar, por exemplo, que a galáxia de Andrômeda está localizada a 2,5 milhões de anos-luz de medida de distância da Via Láctea e que elas estão se aproximando a uma velocidade de 400 000 km/h, em rota de colisão prevista para ocorrer daqui a 4 bilhões de anos, aproximadamente.

Neste capítulo, você vai estudar:

- fórmulas de transformação;
- relações trigonométricas;
- equações trigonométricas.

Observação

Para medirmos distâncias fora do Sistema Solar, a unidade de medida mais adequada é o ano-luz (al), que é equivalente à medida da distância que a luz, propagando-se no vácuo, percorre no período de um ano.

$$1 \text{ al} \simeq 9{,}46 \cdot 10^{15} \text{ m}$$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

1. Resposta: Porque, após esse período, a Terra estará do outro lado em relação à sua órbita em torno do Sol.
3. Resposta: Dado um triângulo *ABC* qualquer, a medida do comprimento dos lados é proporcional ao seno dos ângulos opostos correspondentes.

Professor, professora: Oriente os estudantes a escrever as respostas no caderno.

1. Por que os astrônomos esperam seis meses para repetir a observação do astro?

2. Um ano-luz equivale à medida de quantos quilômetros?

Resposta: $9{,}46 \cdot 10^{12}$ km

3. O que diz a lei dos senos, que foi citada no texto?

Fórmulas de transformação

Podemos obter os valores de $\text{sen}(a + b)$ e $\text{sen}(a - b)$ tomando como base os valores de $\text{sen}a$, $\text{sen}b$, $\cos a$ e $\cos b$, sendo a e b arcos da circunferência trigonométrica.

Conhecendo, por exemplo, os valores de $\text{sen}30°$, $\cos 30°$, $\text{sen}45°$ e $\cos 45°$, podemos obter, em função deles, os valores de $\text{sen}75°$ e $\text{sen}15°$, isto é:

- $\text{sen}\underbrace{75°}_{45° + 30°} = \text{sen}(45° + 30°)$ Questão A. Resposta: Não, pois $\text{sen}45° + \text{sen}30° = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \simeq 1{,}21$.
- $\text{sen}\underbrace{15°}_{45° - 30°} = \text{sen}(45° - 30°)$ Questão B. Resposta: Não, pois $\text{sen}45° - \text{sen}\,30° = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \simeq 0{,}21$.

Para determinar esses valores, podemos utilizar as fórmulas de adição de arcos. Tais fórmulas podem ser demonstradas e estão indicadas a seguir.

Questão A. Sabendo que $\text{sen}75° \simeq 0{,}97$, pode-se concluir que a igualdade $\text{sen}75° = \text{sen}45° + \text{sen}30°$ é verdadeira? Justifique sua resposta.

Questão B. Sabendo que $\text{sen}15° \simeq 0{,}26$, pode-se concluir que a igualdade $\text{sen}15° = \text{sen}45° - \text{sen}30°$ é verdadeira? Justifique sua resposta.

Seno da soma e da diferença

$$\text{sen}(a + b) = \text{sen}a \cdot \cos b + \text{sen}b \cdot \cos a$$

$$\text{sen}(a - b) = \text{sen}a \cdot \cos b - \text{sen}b \cdot \cos a$$

Cosseno da soma e da diferença

$$\cos(a + b) = \cos a \cdot \cos b - \text{sen}a \cdot \text{sen}b$$

$$\cos(a - b) = \cos a \cdot \cos b + \text{sen}a \cdot \text{sen}b$$

Tangente da soma e da diferença

$$\text{tg}(a + b) = \frac{\text{tg}a + \text{tg}b}{1 - \text{tg}a \cdot \text{tg}b}$$

Válida para todo $a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ e $(a + b) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$.

$$\text{tg}(a - b) = \frac{\text{tg}a - \text{tg}b}{1 + \text{tg}a \cdot \text{tg}b}$$

Válida para todo $a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ e $(a - b) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$.

Professor, professora: As demonstrações dessas fórmulas são expostas no **Suplemento para o professor**. Se julgar conveniente, apresente-as para os estudantes.

Ao compararmos as relações $\cos(60° + 30°)$ e $\cos 60° + \cos 30°$, percebemos que:

- $\cos(60° + 30°) = \cos 90° = 0$
- $\cos 60° + \cos 30° = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$

Note que $\cos(60° + 30°) \neq \cos 60° + \cos 30°$. Na maioria dos casos, temos:

- $\cos(a + b) \neq \cos a + \cos b$
- $\text{sen}(a + b) \neq \text{sen}a + \text{sen}b$
- $\text{tg}(a + b) \neq \text{tg}a + \text{tg}b$
- $\cos(a - b) \neq \cos a - \cos b$
- $\text{sen}(a - b) \neq \text{sen}a - \text{sen}b$
- $\text{tg}(a - b) \neq \text{tg}a - \text{tg}b$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Exercícios e problemas resolvidos

R1. Efetue os cálculos.

a) $\operatorname{sen}75°$ b) $\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}$ c) $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$ d) $\operatorname{tg}15°$ e) $\operatorname{tg}\frac{7\pi}{12}$

Resolução

a) $\operatorname{sen}75° = \operatorname{sen}(45° + 30°) = \operatorname{sen}45° \cdot \cos30° + \operatorname{sen}30° \cdot \cos45° =$

$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$

b) $\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{sen}\frac{\pi}{4} \cdot \cos\frac{\pi}{4} + \operatorname{sen}\frac{\pi}{4} \cdot \cos\frac{\pi}{4} =$

$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2}{4} + \frac{2}{4} = 1$

c) $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = \cos\frac{3\pi}{2} \cdot \cos x + \operatorname{sen}\frac{3\pi}{2} \cdot \operatorname{sen}x =$

$= 0 \cdot \cos x + (-1) \cdot \operatorname{sen}x = -\operatorname{sen}x$

d) $\operatorname{tg}15° = \operatorname{tg}(45° - 30°) = \frac{\operatorname{tg}45° - \operatorname{tg}30°}{1 + \operatorname{tg}45° \cdot \operatorname{tg}30°} = \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 + 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 + \frac{\sqrt{3}}{3}} \cdot \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}} =$

$= \frac{1 - \frac{2\sqrt{3}}{3} + \frac{3}{9}}{1 - \frac{3}{9}} = \frac{\frac{9 - 6\sqrt{3} + 3}{9}}{\frac{6}{9}} = \frac{81 - 54\sqrt{3} + 27}{54} = \frac{108 - 54\sqrt{3}}{54} = 2 - \sqrt{3}$

e) $\operatorname{tg}\frac{7\pi}{12} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} + \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}{1 - \operatorname{tg}\frac{\pi}{3} \cdot \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{3} + 1}{1 - \sqrt{3} \cdot 1} = \frac{\sqrt{3} + 1}{1 - \sqrt{3}} \cdot \frac{1 + \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}} =$

$= \frac{\sqrt{3} + 3 + 1 + \sqrt{3}}{1 - 3} = \frac{2\sqrt{3} + 4}{-2} = -\sqrt{3} - 2$

R2. Mostre que:

a) $\operatorname{sen}2\alpha = 2 \cdot \operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\alpha$.

b) $\cos2\alpha = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha$.

c) $\operatorname{tg}2\alpha = \frac{2 \cdot \operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}$, com $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ e $\alpha \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$, em que $k \in \mathbb{Z}$.

Resolução

a) $\operatorname{sen}2\alpha = \operatorname{sen}(\alpha + \alpha) = \operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\alpha = 2 \cdot \operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\alpha$

Portanto, $\operatorname{sen}2\alpha = 2 \cdot \operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\alpha$.

b) $\cos2\alpha = \cos(\alpha + \alpha) = \cos\alpha \cdot \cos\alpha - \operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{sen}\alpha = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha$

Portanto, $\cos2\alpha = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha$.

c) $\operatorname{tg}2\alpha = \operatorname{tg}(\alpha + \alpha) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\alpha} = \frac{2 \cdot \operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}$

Portanto, $\operatorname{tg}2\alpha = \frac{2 \cdot \operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}$, com $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ e $\alpha \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$, em que $k \in \mathbb{Z}$.

Observação

Essas igualdades são conhecidas como **fórmulas do arco duplo** e podem ser utilizadas para calcular senos, cossenos e tangentes do arco metade. Se 2α é o arco duplo de α, então α é o arco metade de 2α.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Exercícios e problemas

Anote as respostas no caderno.

1. A partir dos ângulos notáveis, calcule:

a) sen15°. Resposta: $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

b) cos15°. Resposta: $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

c) sen255°. Resposta: $\frac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

d) tg75°. Resposta: $2+\sqrt{3}$

e) sen105°. Resposta: $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

f) cos105°. Resposta: $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

2. Para instalar os vidros em uma janela, um vidraceiro apoiou na parede uma escada com 8 m de comprimento formando um ângulo de 50° entre as duas. Sabendo que o topo dessa escada deveria alcançar 7 m de altura, determine se o vidraceiro a posicionou corretamente. Justifique sua resposta.

Resposta: Não, pois da maneira como a escada foi posicionada, o topo atingiu uma altura de aproximadamente 5,14 m.

Dica

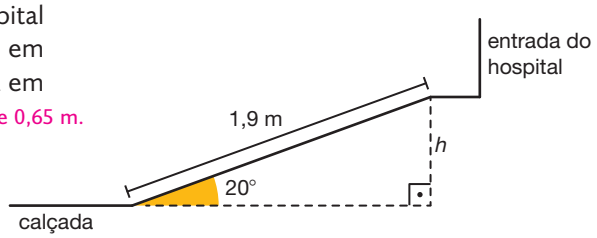
Considere sen20° = 0,342 e cos15° = 0,9397.

3. A expressão $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$ é equivalente a:

a) sen$x$. **b)** cos$x$. **c)** tg$x$. **d)** sen2x. **e)** cos2x.

Resposta: Alternativa **b**.

4. Uma rampa que dá acesso à entrada de um hospital tem 1,9 m de comprimento e uma inclinação de 20° em relação à sua horizontal. Qual é a altura da entrada em relação ao nível da calçada? Resposta: Aproximadamente 0,65 m.



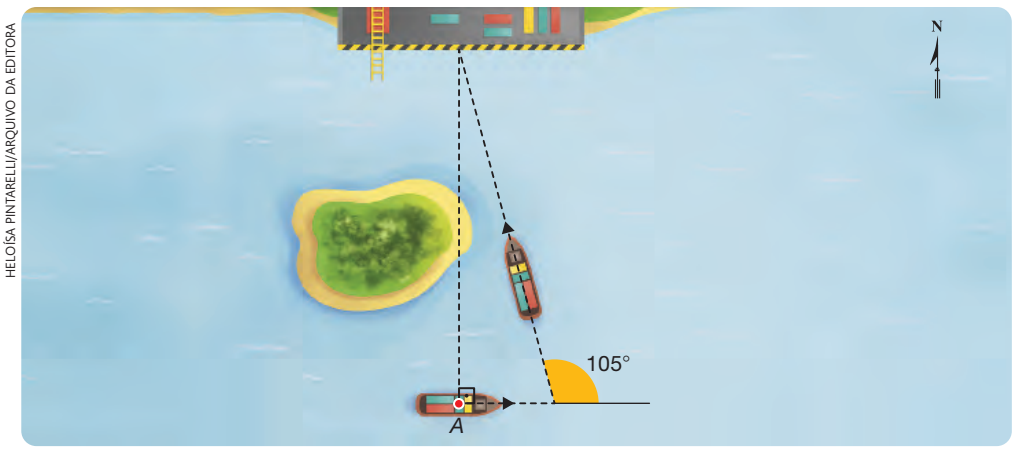
RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Dica

Considere sen10° · cos10° = 0,171.

5. Calcule o valor da expressão $\cos\frac{5\pi}{12}+\operatorname{sen}\frac{7\pi}{12}$. Resposta: $\frac{\sqrt{6}}{2}$

6. Para desviar de uma ilha, certo navio localizado no ponto A mudou sua rota, deslocando-se 12,2 km para leste e, após um giro de 105°, seguiu na direção noroeste até um porto. Quantos quilômetros o navio percorreu do ponto A até o porto? Resposta: Aproximadamente 62 km.



HELOÍSA PINTARELLI/ARQUIVO DA EDITORA

Imagem com elementos sem proporção entre si.

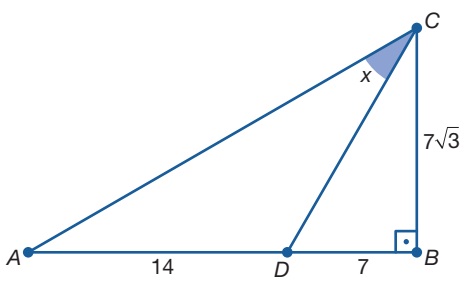
Dica

Use $\sqrt{2}=1{,}4$ e $\sqrt{3}=1{,}7$.

7. Dados $\operatorname{sen}y=\frac{\sqrt{3}}{4}$ e $\cos y=\frac{\sqrt{13}}{4}$, calcule sen2$y$. Resposta: $\frac{\sqrt{39}}{8}$

8. Qual é o valor de x no triângulo retângulo a seguir?

Resposta: $x = 30°$



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Relações trigonométricas

Até o momento, vimos duas relações trigonométricas fundamentais envolvendo o seno, o cosseno e a tangente.

- $\text{sen}^2a + \cos^2a = 1$, para todo $a \in \mathbb{R}$.
- $\text{tg}a = \frac{\text{sen}a}{\cos a}$, para todo $a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Além dessas, existem outras relações que são obtidas a partir de três outras funções trigonométricas, chamadas **cossecante** (cossec), **secante** (sec) e **cotangente** (cotg). Essas relações fundamentais são:

- $\text{cotg}a = \frac{\cos a}{\text{sen}a}$, para todo $a \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
- $\sec a = \frac{1}{\cos a}$, para todo $a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
- $\text{cossec}a = \frac{1}{\text{sen}a}$, para todo $a \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Além dessas relações, podemos obter outras.

Ao dividir os dois membros da igualdade $\text{sen}^2a + \cos^2a = 1$ por $\cos^2a$, obtemos:

$$\frac{\text{sen}^2a}{\cos^2a} + \frac{\cos^2a}{\cos^2a} = \frac{1}{\cos^2a} \Rightarrow \text{tg}^2a + 1 = \sec^2a, \text{ com } a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \text{ em que } k \in \mathbb{Z}.$$

Ao dividir os dois membros da igualdade $\text{sen}^2a + \cos^2a = 1$ por sen^2a, obtemos:

$$\frac{\text{sen}^2a}{\text{sen}^2a} + \frac{\cos^2a}{\text{sen}^2a} = \frac{1}{\text{sen}^2a} \Rightarrow 1 + \text{cotg}^2a = \text{cossec}^2a, \text{ com } a \neq k\pi, \text{ em que } k \in \mathbb{Z}.$$

Observação

Da relação $\text{cotg}a = \frac{\cos a}{\text{sen}a}$, obtemos $\text{cotg}a = \frac{1}{\text{tg}a}$, para todo $a \neq k\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Professor, professora: Diga aos estudantes que as cinco relações trigonométricas apresentadas são denominadas fundamentais por serem independentes umas das outras e que, a partir delas, outras relações podem ser obtidas.

Exercícios e problemas resolvidos

R3. Sendo $\cos\alpha = \frac{1}{4}$, com $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, determine $\sec\alpha$ e $\text{tg}\alpha$.

Resolução

Temos:

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{1}{\frac{1}{4}} = 4$$

Da relação $\text{tg}^2\alpha + 1 = \sec^2\alpha$, segue:

$$\text{tg}^2\alpha + 1 = \sec^2\alpha \Rightarrow \text{tg}^2\alpha + 1 = 4^2 \Rightarrow \text{tg}^2\alpha = 15 \Rightarrow \text{tg}\alpha = \pm\sqrt{15}$$

Como α está no 1º quadrante, $\text{tg}\alpha = \sqrt{15}$.

Portanto, $\sec\alpha = 4$ e $\text{tg}\alpha = \sqrt{15}$.

R4. Sabendo que $\frac{\text{cossec}^2\alpha \cdot \sec\alpha}{\text{cotg}\alpha + \text{tg}\alpha} = 2$, determine o valor de α, com $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

Resolução

$$\frac{\text{cossec}^2\alpha \cdot \sec\alpha}{\text{cotg}\alpha + \text{tg}\alpha} = 2 \Rightarrow \frac{\frac{1}{\text{sen}^2\alpha} \cdot \frac{1}{\cos\alpha}}{\frac{\cos\alpha}{\text{sen}\alpha} + \frac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha}} = 2 \Rightarrow \frac{\frac{1}{\text{sen}^2\alpha \cdot \cos\alpha}}{\frac{\cos^2\alpha + \text{sen}^2\alpha}{\text{sen}\alpha \cdot \cos\alpha}} = 2 \Rightarrow \frac{\frac{1}{\text{sen}^2\alpha \cdot \cancel{\cos\alpha}}}{\frac{1}{\cancel{\text{sen}\alpha} \cdot \cancel{\cos\alpha}}} = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\text{sen}\alpha} = 2 \Rightarrow \text{sen}\alpha = \frac{1}{2}$$

Como α pertence ao 2º quadrante, então $\alpha = 150°$ ou $\alpha = \frac{5\pi}{6}$.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

R5. Para a instalação de certo poste, é necessário fixar um único cabo de aço que conecte o topo do poste ao chão, de modo que o cabo fique totalmente esticado. Sabendo que o ponto em que o cabo de aço toca o chão deve ficar a uma distância de 2,2 m da base do poste e que o ângulo formado entre o chão e o cabo deve ser igual a 70°, determine a altura aproximada do poste. (Utilize sen70° = 0,9397.)

Resolução

Indicando por x a altura, em metros, do poste, temos:

$$\operatorname{tg}70° = \frac{x}{2,2} \Rightarrow \frac{\operatorname{sen}70°}{\cos 70°} = \frac{x}{2,2} \Rightarrow \frac{\operatorname{sen}70°}{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 70°}} = \frac{x}{2,2}$$

Agora, considerando sen70° = 0,9397, segue que:

$$\frac{\operatorname{sen}70°}{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 70°}} = \frac{x}{2,2} \Rightarrow \frac{0,9397}{\sqrt{1 - 0,9397^2}} = \frac{x}{2,2} \Rightarrow x \simeq 6,0$$

Portanto, a altura do poste é, aproximadamente, 6 m.

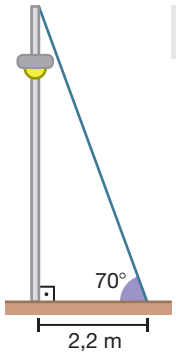


Imagem com elementos sem proporção entre si.

RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Exercícios e problemas

Anote as respostas no caderno.

9. Sendo $3\pi < \alpha < \frac{7\pi}{2}$ e $|\cos\alpha| = \frac{3}{5}$, qual é o valor de $\operatorname{sen}\alpha$? Resposta: $\operatorname{sen}\alpha = -\frac{4}{5}$

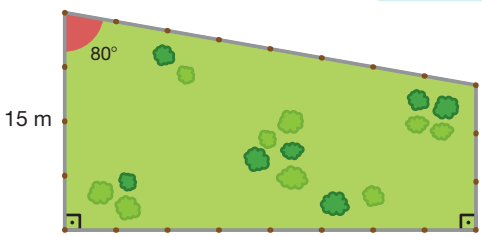
10. Sabendo que $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ e $\operatorname{sen}\theta = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, calcule:

a) $\cos\theta$. Resposta: $-\frac{1}{3}$ b) $\operatorname{cossec}\theta$. Resposta: $\frac{3\sqrt{2}}{4}$ c) $\operatorname{cotg}\theta$. Resposta: $-\frac{\sqrt{2}}{4}$

11. Determine o perímetro aproximado do terreno representado a seguir. Resposta: 82,5 m

Dica

Utilize sen80° = 0,985.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

12. Determine o valor da expressão $(\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha)^2$ para $\alpha = \frac{13\pi}{12}$. Resposta: $\frac{3}{2}$

13. Calcule:

a) $\operatorname{cossec}\frac{3\pi}{4}$. Resposta: $\sqrt{2}$ b) $\sec 195°$. Resposta: $\sqrt{2} - \sqrt{6}$ c) $\operatorname{cotg}\frac{5\pi}{3}$. Resposta: $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

14. A expressão $(\operatorname{cotg}^2 x + 1)(1 - \cos^2 x)$ é igual a: Resposta: Alternativa **a**.

a) 1. c) 0. e) − 1.

b) $\frac{1}{2}$. d) $-\frac{1}{2}$.

15. Mostre que $\cos^4\beta - \operatorname{sen}^4\beta = \cos 2\beta$. Resposta no final do **Livro do Estudante**.

16. Dado um arco x, tal que $\sec x = -2$, o valor de $\operatorname{cotg}^2 x$ é: Resposta: Alternativa **b**.

a) 3. c) $\frac{\sqrt{3}}{3}$. e) $\sqrt{3}$.

b) $\frac{1}{3}$. d) $-\frac{1}{3}$.

17. Um observador de 1,8 m de altura, localizado a 10 m de um prédio, olha o topo desse prédio sob um ângulo de 42° em relação à horizontal. Use sen42° = 0,67 e determine a altura aproximada desse prédio. Resposta: 10,8 m

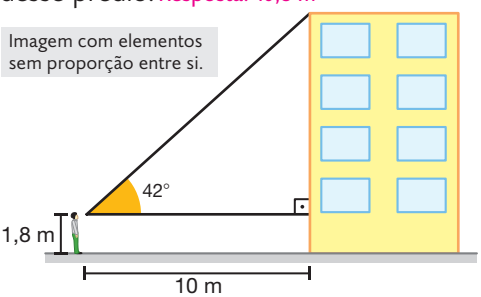


Imagem com elementos sem proporção entre si.

RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

18. Após atingir a altura de 3 500 pés, certo avião sobe com uma inclinação de 18° em relação à horizontal, conforme mostra o esquema.

Dica

Um pé equivale a aproximadamente 30,5 cm.

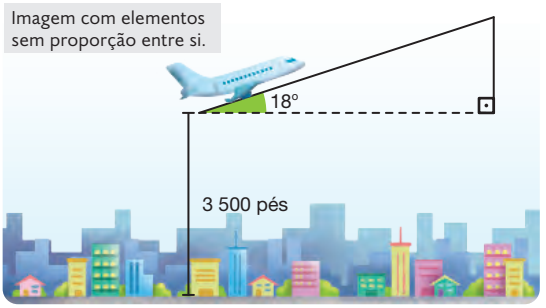


Imagem com elementos sem proporção entre si.

HELOÍSA PINTARELLI/ARQUIVO DA EDITORA

a) Qual é a altura aproximada do avião, em pés, depois de percorrer 8 200 m nessa direção? (Use $\operatorname{cossec}18° = 3,236$.) Resposta: 11 808 pés.

b) Quantos metros o avião deve percorrer nessa direção até atingir a altura de 13 100 pés? Resposta: Aproximadamente 9 476 m.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Equações trigonométricas

Ao estudarmos as funções trigonométricas, resolvemos algumas equações do tipo $\text{sen}x = a$, $\cos x = a$ e $\text{tg}x = a$.

$\text{sen}x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad$ $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad$ $\text{tg}x = -\sqrt{3}$

Agora, vamos estudar outros tipos de equações trigonométricas por meio de exercícios e problemas resolvidos.

Resolvendo por etapas

A Lua, à medida que viaja ao redor da Terra, passa por um ciclo de fases cuja duração aproximada é 29,5 dias. Apenas quatro fases desse ciclo da Lua recebem nomes – **nova**, **crescente**, **cheia** e **minguante** –, porém a fase da Lua varia diariamente.

Imagens em cor fantasia.



Lua nova.



Lua cheia.



Lua crescente.



Lua minguante.

FOTOS: SCIENTIFIC VISUALIZATION STUDIO/NASA

Podemos estudar a ocorrência de cada uma dessas fases por meio das funções trigonométricas, associando-as à porcentagem visível da Lua em cada dia. Por exemplo, a ocorrência da lua nova pode ser associada ao dia em que a porcentagem visível da Lua é 0%, e a lua cheia, ao dia em que a Lua está 100% visível.

Suponha que em dado mês com 30 dias, contados a partir do 1º dia, a porcentagem de visualização da Lua (em representação decimal) descrita em função do tempo t, medido em dias, pode ser aproximada pela função v, definida por:

$$v(t) = 0{,}5 - 0{,}5 \cdot \text{sen}(0{,}21 \cdot t - 0{,}32)$$

Em qual dia desse mês ocorreu a lua nova? (Considere $\pi = 3{,}14$.)

A. Compreendendo o problema

1. O que se pede no problema?

O dia em que ocorreu a lua nova no mês considerado.

2. Quais são os dados apresentados no problema?

A porcentagem de visualização da Lua quando ocorre lua nova e lua cheia e a lei de formação da função que descreve a porcentagem de visualização da Lua nos dias de certo mês.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

B. **Organizando as ideias e elaborando um plano**

1. Registrando um possível plano.
Para resolver esse problema, calculamos para quais valores de $t \in [1, 30]$ tem-se $v(t) = 0$.

2. Escolhendo as notações.
t_N: dia em que ocorreu a lua nova.

C. **Executando o plano**

Passo 1

Sabemos que a lua nova ocorre no dia em que a porcentagem visível da Lua é 0%, ou, na forma decimal, 0. Assim:

$$v(t_N) = 0$$
$$0{,}5 - 0{,}5 \cdot \operatorname{sen}(0{,}21t_N - 0{,}32) = 0$$
$$-0{,}5 \cdot \operatorname{sen}(0{,}21t_N - 0{,}32) = -0{,}5$$
$$\operatorname{sen}(0{,}21t_N - 0{,}32) = 1$$

Passo 2

Na primeira volta positiva, temos $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

Assim, para $k \in \mathbb{Z}$, a solução da equação é:

$$0{,}21t_N - 0{,}32 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Rightarrow t_N = 9 + \frac{2}{0{,}21}k \cdot 3{,}14$$

Como $t_N \in [1, 30]$, então $t_N = 9$.

Portanto, a lua nova ocorreu no 9º dia desse mês.

D. **Verificando a solução obtida**

Vamos verificar se de fato a lua nova ocorreu no 9º dia do mês. Para isso, substituímos $t = 9$ em $v(t)$. Dessa maneira, obtemos:

$$v(9) = 0{,}5 - 0{,}5 \cdot \operatorname{sen}(0{,}21 \cdot 9 - 0{,}32)$$
$$v(9) = 0{,}5 - 0{,}5 \cdot \operatorname{sen}(1{,}89 - 0{,}32)$$
$$v(9) = 0{,}5 - 0{,}5 \cdot \operatorname{sen}(1{,}57)$$

Como $1{,}57 = \frac{3{,}14}{2} = \frac{\pi}{2}$ e $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, segue que:

$$v(9) = 0{,}5 - 0{,}5 \cdot 1 = 0{,}5 - 0{,}5 = 0$$

Portanto, como a porcentagem de visualização da Lua é 0, ou seja 0%, então, a lua nova ocorreu no 9º dia desse mês.

Observação

Verifique se é possível utilizar, com algumas adequações, o plano apresentado na seção **Resolvendo por etapas** para obter a solução de alguns problemas semelhantes propostos na seção **Exercícios e problemas**.

Agora é você quem resolve!

1. Leia o problema.
A quantidade de turistas que frequenta uma cidade litorânea ao longo dos meses de um ano pode ser representada pela função q, definida por $q(t) = 2{,}1 + 1{,}5 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi t}{2}\right)$, tal que q representa a quantidade de turistas, em milhares de pessoas, e t, os meses ($t = 1$ representa janeiro, $t = 2$ representa fevereiro, e assim sucessivamente). No período de janeiro a julho, em quais meses essa cidade recebeu 3,6 milhares de turistas?

2. É possível resolver o problema utilizando o plano apresentado nesta seção com algumas adequações? Qual é a resposta desse problema? Resposta no final do **Livro do Estudante**.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Exercícios e problemas resolvidos

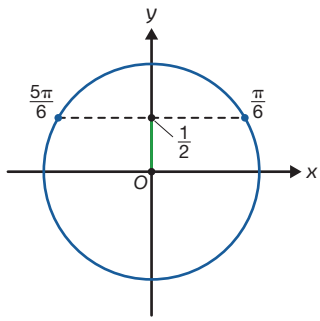
R6. Resolva as equações em $\mathbb{R}$.

a) $\operatorname{sen} 2x = \frac{1}{2}$ b) $\cos\left(x + \frac{\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ c) $\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2}$ d) $2 \cdot \cos^2 x - 3 \cdot \cos x - 2 = 0$

Resolução

a) $\operatorname{sen} 2x = \frac{1}{2}$

Na 1ª volta positiva, temos $\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ e $\operatorname{sen}\frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}$.



Assim, para $k \in \mathbb{Z}$, a solução da equação é:

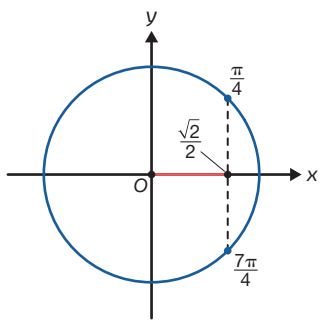
- $2x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{\frac{\pi}{6} + 2k\pi}{2} = \frac{\pi}{12} + k\pi$.
- $2x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{\frac{5\pi}{6} + 2k\pi}{2} = \frac{5\pi}{12} + k\pi$.

Portanto, o conjunto solução dessa equação é:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| x = \frac{\pi}{12} + k\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{12} + k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$$

b) $\cos\left(x + \frac{\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Na 1ª volta positiva, temos $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e $\cos\frac{7\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.



Assim, para $k \in \mathbb{Z}$, a solução da equação é:

- $x + \frac{\pi}{5} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$

  $x = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{5} + 2k\pi = \frac{\pi}{20} + 2k\pi$

- $x + \frac{\pi}{5} = \frac{7\pi}{4} + 2k\pi$

  $x = \frac{7\pi}{4} - \frac{\pi}{5} + 2k\pi = \frac{31\pi}{20} + 2k\pi$

Portanto, o conjunto solução dessa equação é:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| x = \frac{\pi}{20} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{31\pi}{20} + 2k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$$

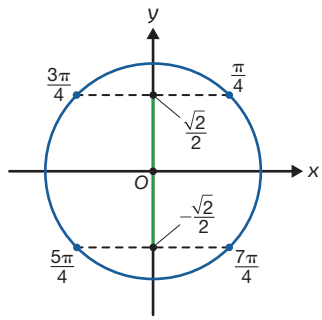
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

c) $\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2}$

$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2} \Rightarrow \operatorname{sen} x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$

Na 1ª volta positiva, $\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\operatorname{sen}\frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\operatorname{sen}\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ e $\operatorname{sen}\frac{7\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.



Note que:

- $\frac{3\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}$.
- $\frac{5\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 2 \cdot \frac{\pi}{2}$.
- $\frac{7\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 3 \cdot \frac{\pi}{2}$.

Assim, para todo $k \in \mathbb{Z}$, a solução da equação é:

$$x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$$

Portanto, o conjunto solução dessa equação é:

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \middle| x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, \text{ com } k \in \mathbb{Z} \right\}$$

d) $2 \cdot \cos^2 x - 3 \cdot \cos x - 2 = 0$

Fazendo $y = \cos x$, temos:

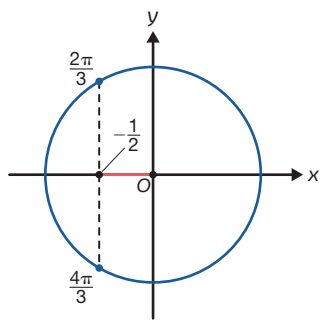
$$2 \cdot \cos^2 x - 3 \cdot \cos x - 2 = 2 \cdot y^2 - 3y - 2 = 0$$

Agora, resolvemos essa equação quadrática.

$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-2) = 25$ $\qquad$ $y = \frac{-(-3) \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 2} = \frac{3 \pm 5}{4}$

Nesse caso, $y = -\frac{1}{2}$ ou $y = 2$. Como $y = \cos x$ e $-1 \leq \cos x \leq 1$, então $y = -\frac{1}{2}$, isto é, $\cos x = -\frac{1}{2}$.

Na 1ª volta positiva, temos $\cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$ e $\cos\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2}$.



Assim, para $k \in \mathbb{Z}$ a solução da equação é:

- $x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$.
- $x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$.

Portanto, o conjunto solução dessa equação é:

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \middle| x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z} \right\}$$

ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Anote as respostas no caderno.

19. Resolva as equações em $\mathbb{R}$. 19. b) Resposta: $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{11\pi}{12} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{17\pi}{12} + 2k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$.

a) $\cos\left(x - \frac{7\pi}{6}\right) = 0$ Resposta: $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{5\pi}{3} + k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$.

b) $\operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

c) $\operatorname{sen}^2 2x = \frac{1}{4}$ Resposta: $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{4}, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$.

d) $\cos x - \operatorname{sen}^2 x = 1$ Resposta: $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = 2k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\}$.

e) $\operatorname{sen} 2x = \operatorname{sen}\frac{3\pi}{4}$ Resposta: $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{8} + k\pi \text{ ou } x = \frac{3\pi}{8} + k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$.

f) $\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}$

20. A distância horizontal percorrida por uma bola de futebol depende, entre outros fatores, da velocidade inicial e do ângulo formado pela trajetória da bola com relação à horizontal. Representando a velocidade inicial por v e o ângulo por α, podemos determinar essa distância d pela equação:

$$d = \frac{v^2}{10} \cdot \operatorname{sen} 2\alpha$$

Sabendo que em certo chute uma bola percorreu 16,2 m com velocidade inicial de 18 m/s, determine a medida do ângulo α formado com relação à horizontal. Resposta: $\alpha = 15°$

19. f) Resposta: $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{12} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{19\pi}{12} + 2k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Professor, professora: O item **c** da tarefa **22** propõe aos estudantes que elaborem uma questão utilizando os conceitos estudados, contribuindo assim para a ampliação do repertório de reflexões e questionamentos a respeito de determinadas situações. Antes de os estudantes elaborarem a questão, peça a eles que analisem os contextos propostos na seção **Exercícios e problemas** deste capítulo e, se julgar conveniente, oriente-os a investigar outros problemas disponíveis em provas de vestibular e Enem.



LEONARDO GIBRAN/ARQUIVO DA EDITORA

21. Se $0 < \alpha < \pi$, determine para quais valores de α a igualdade $\frac{2}{\operatorname{cossec}\left(\alpha + \frac{\pi}{5}\right)} = \sqrt{3}$ é verdadeira.
Resposta: $\alpha = \frac{2\pi}{15}$ ou $\alpha = \frac{7\pi}{15}$.

22. A altura $h(t)$, em metros, da maré de certa laguna em função do tempo t, em horas, pode ser aproximada por meio da função h: $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, dada por $h(t) = 3 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{31}t\right)$.

a) Qual é a altura da maré às 2 h? E às 16 h? Resposta: Aproximadamente 2,55 m; aproximadamente 2,90 m.

b) Qual é o menor valor de t, em horas e minutos, em que a maré está com 1,5 m de altura?
Resposta: Aproximadamente 1 h 2 min.

c) Elabore uma questão que envolva equações trigonométricas e a função h que representa a altura aproximada da maré em determinada laguna. Em seguida, peça a um colega que resolva o problema elaborado por você. Resposta pessoal. A resposta depende de cada questão elaborada pelos estudantes.

23. Represente na 1ª volta positiva do ciclo trigonométrico as soluções da equação $\cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$.
Resposta no final do **Livro do Estudante**.

24. Sendo $f(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$, determine para quais valores de x o gráfico de f intersecta o eixo das abscissas.
Resposta: $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

DESENVOLVIMENTO SUSTENTÁVEL

Cuidando da pressão arterial

Professor, professora: Oriente os estudantes a consultar mais informações sobre os **Objetivos de Desenvolvimento Sustentável** (ODS) no início do volume.

Você sabe o que é o ciclo cardíaco e como ele funciona?

O ciclo cardíaco é um conjunto de eventos que ocorrem durante o batimento do coração. Durante esse ciclo, o sangue exerce uma pressão contra as paredes das artérias, sendo chamada de pressão arterial.

A pressão arterial tem dois níveis no ciclo cardíaco, a sistólica e a diastólica. Conheça a seguir o que são esses níveis de pressão.

- A pressão sistólica se refere ao movimento de contração do coração para impulsionar o sangue para as artérias. Nesse momento, o sangue é empurrado contra as paredes arteriais, e a força com que é ejetado exerce uma pressão nas artérias.
- Já a pressão diastólica corresponde ao movimento de relaxamento do coração. Nesse momento, ocorre a menor pressão sanguínea nas artérias, acontecendo, desse modo, o relaxamento do ventrículo, ou seja, na diástole.

Quando aferimos nossa pressão arterial, obtemos informações dos níveis da pressão sistólica e da pressão diastólica. Os níveis obtidos são representados por dois números. Quando a pressão arterial está, por exemplo, 12 por 8, significa que a pressão sistólica aproximada é 120 mmHg (**milímetros de mercúrio**) e a diastólica, cerca de 80 mmHg. Essas medidas apresentam informações importantes a respeito da saúde do paciente. Dependendo da situação de saúde e dos hábitos de vida que a pessoa pratica, a pressão arterial pode ser considerada alta ou baixa.

Conheça a seguir a diferença entre pressão alta e pressão baixa.

Milímetros de mercúrio: unidade de medida de pressão.

Pressão alta: hipertensão arterial

Uma pessoa que apresenta níveis de pressão iguais ou superiores a 140 mmHg por 90 mmHg mostra tendência a desenvolver uma doença do coração e dos vasos sanguíneos chamada hipertensão arterial, ou pressão alta, que pode contribuir para a ocorrência de insuficiência cardíaca, doenças renais e infarto.

Pressão baixa: hipotensão arterial

Uma pessoa tem hipotensão arterial, ou pressão baixa, quando os níveis de pressão sanguínea são menores do que 90 mmHg por 60 mmHg (pessoas saudáveis também podem ter esses níveis). A pressão baixa não é considerada uma doença, mas pode estar relacionada a problemas graves, como infarto do miocárdio, embolia pulmonar e diabetes.



AFRICA STUDIO/SHUTTERSTOCK

Pessoa aferindo a pressão arterial.

Hipertensão: fique atento!

A hipertensão arterial é uma doença silenciosa considerada grave por fazer com o que o coração tenha de exercer um esforço maior do que o normal, o que compromete o funcionamento de outros órgãos.

Segundos dados da Organização Mundial da Saúde (OMS), em 2019, a hipertensão atingia mais de 1,3 bilhão de pessoas adultas e idosas no mundo, sendo 50 milhões de brasileiros.

A maneira mais comum de aferir a pressão arterial é por meio de um equipamento chamado esfigmomanômetro, como mostrado na foto. O equipamento está disponível nos modelos manual e digital, sendo este último o mais utilizado atualmente por causa de sua praticidade de aferir os níveis de pressão.

A doença é considerada silenciosa pelo fato de muitas vezes demorar anos para apresentar sintomas, fazendo milhões de pessoas conviverem com ela sem saber que são hipertensas. Apesar de muito comum em pessoas adultas e idosas, a doença tem apresentado aumento entre as mais jovens. Segundo a Sociedade Brasileira de Hipertensão, em 2021, ela atingia cerca de 3,5 milhões de crianças e adolescentes no país.

Apesar de a hipertensão arterial não ter cura, precisa ser tratada e controlada para evitar futuras complicações. Conheça a seguir algumas maneiras de prevenir, perceber e agir contra a hipertensão, de acordo com o Departamento de Prevenção e Promoção à Saúde (Deppros).

Como prevenir

Praticar atividades físicas regularmente, evitar o consumo de bebidas alcoólicas e abolir o tabaco são algumas das várias atitudes que auxiliam na prevenção da hipertensão.



IMAGENS STOCK BR/SHUTTERSTOCK

Pessoas fazendo caminhada.

Outro fator de grande importância na prevenção da hipertensão é alimentar-se de maneira saudável, dando preferência a frutas, legumes, verduras, carnes magras e alimentos com pouca concentração de sal.



NEW AFRICA/SHUTTERSTOCK

Prato com alimento saudável.

Como perceber

Os principais sintomas que podem ser relacionados à hipertensão são dores de cabeça, dores no peito, vômito, falta de ar, tontura, sangramento nasal, entre outros. Na idade adulta, é importante medir a pressão arterial de maneira regular, no mínimo uma vez ao ano. Caso haja ocorrência de pessoas com pressão alta na família, deve-se realizar essa medição no mínimo duas vezes ao ano.



PEOPLEIMAGES - YURI A/SHUTTERSTOCK

Pessoa com dor de cabeça.

Como agir

Em caso de suspeita de hipertensão, é necessário procurar ajuda de um médico especialista. Assim, será possível tomar as devidas providências, bem como iniciar o tratamento adequado o mais rápido possível.



PROSTOCK-STUDIO/SHUTTERSTOCK

Médica aferindo a pressão arterial de um paciente.

KEITHY MOSTACHI/ARQUIVO DA EDITORA

Atividades

1. Resposta pessoal. Incentive os estudantes a falar sobre seus hábitos de vida que estejam relacionados a atitudes consideradas positivas na prevenção da hipertensão arterial. Peça-lhes que opinem sobre a importância de realizar regularmente consultas médicas, praticar atividades físicas, adotar uma alimentação saudável etc.

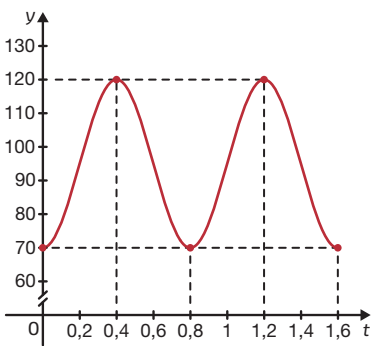
Anote as respostas no caderno.

1. Uma das maneiras de controlar os níveis de pressão sanguínea é mantendo uma alimentação equilibrada associada à prática de atividades físicas. Você pratica alguma atitude que auxilia na prevenção da hipertensão? Converse com os colegas sobre a importância dessas atitudes.

2. A pressão sanguínea de um indivíduo adulto, a partir de certo instante inicial $t = 0$, está representada no gráfico. Resposta: 70 mmHg

- Qual é a pressão sanguínea desse indivíduo no instante inicial $t = 0$?
- Após quantos segundos, a partir do instante social, a pressão sanguínea desse indivíduo será igual a 120 mmHg?

Resposta: 0,4 s



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

2. Resposta pessoal. O objetivo desta atividade é proporcionar aos estudantes o contato com o trabalho realizado pelos sismólogos brasileiros e que reconheçam a importância da pesquisa desenvolvida por esses profissionais no monitoramento de eventos sísmicos, tanto no Brasil quanto em outras regiões do mundo. A pesquisa também tem a finalidade de levá-los a perceber que o país conta com uma rede eficiente de sismógrafos, espalhados pelo território nacional.

O que faz um sismólogo?

Sismólogo do Observatório Nacional explica terremoto registrado pela Rede Sismográfica Brasileira no Norte do Brasil

[...]

"Essa região próxima à fronteira com o Peru costuma ter terremotos de grandes magnitudes. Esse tipo de terremoto ocorre devido ao movimento de subducção entre a placa tectônica de Nazca e a placa Sul-Americana. No caso, a placa de Nazca, por ser mais densa, entra por baixo da placa Sul-Americana, causando o abalo sísmico. Por isso, são terremotos que ocorrem a grandes profundidades", destacou o sismólogo.

[...]

MINISTÉRIO DA CIÊNCIA, TECNOLOGIA E INOVAÇÃO. Observatório Nacional. Sismólogo do Observatório Nacional explica terremoto registrado pela Rede Sismográfica Brasileira no Norte do Brasil. **gov.br**, 22 jan. 2024. Disponível em: https://www.gov.br/observatorio/pt-br/assuntos/noticias/sismologo-do-observatorio-nacional-explica-terremoto-registrado-pela-rede-sismografica-brasileira-no-norte-do-brasil. Acesso em: 23 abr. 2024.



VLADIMIR TRETYAKOV/SHUTTERSTOCK

Sismóloga analisando dados de um terremoto em Almaty, no Cazaquistão, em 2023.

O texto apresenta explicações concedidas por um sismólogo brasileiro sobre o registro de um terremoto na superfície terrestre. A profissão de um sismólogo consiste, sobretudo, em investigar e monitorar a ocorrência de terremotos e outros fenômenos sísmicos relacionados à dinâmica interna da Terra, bem como analisar seus desdobramentos na superfície do planeta. A energia liberada por um terremoto emite ondas sísmicas que se propagam em várias direções pelo interior da Terra e podem ser captadas por **sismógrafos** instalados em diferentes pontos da superfície. Com base na interpretação dos dados registrados simultaneamente por vários sismógrafos, esses pesquisadores conseguem detectar características do terremoto, localizar o foco do tremor e a profundidade em que ele ocorreu, além de buscar compreender os fatores que geraram o abalo. Com isso, é possível alertar populações que vivem em áreas de risco, ou seja, locais com possibilidade de ocorrência de um terremoto, e propor medidas preventivas que visam à segurança pública.

Sismógrafos: aparelho que registra a ocorrência e a intensidade dos sismos.

Conhecimentos de Computação, Física e Matemática, sobretudo os que envolvem funções trigonométricas para avaliar o comportamento de ondas, são imprescindíveis para exercer essa profissão.

Professor, professora: Informe aos estudantes que os sismólogos também podem atuar em mineradoras, empresas de extração de gás e petróleo, da construção civil, de gestão de riscos naturais e em planejamento urbano, por exemplo. A profissão inclusive permite a eles que se dediquem ao trabalho acadêmico, lecionando em instituições de ensino e desenvolvendo pesquisas científicas.

Observação

Para se tornar um sismólogo, é necessário graduar-se em Geofísica ou em Geologia e posteriormente cursar uma pós-graduação em Sismologia, ou seja, ciência que estuda os terremotos. Os cursos de graduação precisam ser realizados em uma instituição que seja reconhecida pelo Ministério da Educação (MEC).

PARA FIXAR

Que tal conhecer o local de trabalho de um sismólogo? Avalie a possibilidade de fazer uma visita virtual para conhecer mais sobre o dia a dia desse profissional.

Oriente os estudantes a escrever as respostas no caderno.

Atividades

1. Resposta pessoal. Além de realizar e divulgar pesquisas relacionadas às atividades sísmicas da Terra, os sismólogos, ao monitorar a ocorrência de terremotos, podem identificar áreas de maior atividade sísmica e propor medidas preventivas em favor da segurança pública.

Anote as respostas no caderno.

1. Na sua opinião, qual é a importância do trabalho dos sismólogos para a sociedade?
2. Junte-se a dois colegas para pesquisar na internet sobre o trabalho e a rotina de sismólogos brasileiros, no que se refere ao monitoramento de eventos sísmicos no planeta. Em sala de aula, apresente o resultado da pesquisa aos colegas e conversem sobre as informações que vocês obtiveram.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

SÍNTESE DO CAPÍTULO

Neste capítulo, estudamos algumas fórmulas de transformação, relações e equações trigonométricas. Agora, chegou a hora de refletir sobre o que você aprendeu! Como estratégia de estudos, sugerimos a você que faça uma autoavaliação, revise conceitos e sintetize o que foi estudado. Para isso, resolva as questões propostas.

1. Você conhecia algum dos conteúdos estudados neste capítulo? Cite-os.
Resposta pessoal. Orientações sobre esta questão no **Suplemento para o professor**.

2. A seguir, estão apresentados os principais assuntos estudados neste capítulo.

Fórmulas de transformação | Relações trigonométricas | Equações trigonométricas

Você teve dificuldades em algum deles ou não se lembra do que estudou? Ficou com dúvidas? Reflita sobre esses questionamentos e, se necessário, retome o que foi estudado.
Resposta pessoal. Orientações sobre esta questão no **Suplemento para o professor**.

3. Cite duas situações que podem se relacionar com os assuntos estudados neste capítulo.
Sugestões de resposta: Variações das marés, balanço de pêndulos, vibrações sonoras na música e trajetória de corpos celestes.

4. Nas igualdades a seguir, a e b são arcos da circunferência trigonométrica. Quais delas são verdadeiras?
Resposta: Alternativas **d** e **f**.

a) $\text{sen}(a + b) = \text{sen}a \cdot \text{sen}b + \cos b \cdot \cos a$, para todo a e b.

b) $\text{sen}(a + b) = \text{sen}a + \text{sen}b$, para todo a e b.

c) $\text{tg}(a + b) = \text{tg}a + \text{tg}b$, para todo a e b.

d) $\text{sen}(a + b) = \text{sen}a \cdot \cos b + \text{sen}b \cdot \cos a$, para todo a e b.

e) $\text{tg}(a + b) = \dfrac{\text{tg}a - \text{tg}b}{1 - \text{tg}a \cdot \text{tg}b}$, para todo $a \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $b \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ e $(a + b) \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$.

f) $\text{tg}(a - b) = \dfrac{\text{tg}a - \text{tg}b}{1 + \text{tg}a \cdot \text{tg}b}$, para todo $a \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $b \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ e $(a - b) \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$.

5. Mostre que:

a) $\text{sen}2\alpha = 2 \cdot \text{sen}\alpha \cdot \cos\alpha$. Resposta no final do **Livro do Estudante**.

b) $\text{tg}2\alpha = \dfrac{2 \cdot \text{tg}\alpha}{1 - \text{tg}^2\alpha}$, com $\alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ e $\alpha \neq \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2}$, em que $k \in \mathbb{Z}$. Resposta no final do **Livro do Estudante**.

6. Imagine que você não tem acesso a uma calculadora ou a um computador. Qual estratégia você usaria para calcular $\text{sen}15°$? Resposta pessoal. Sugestão de resposta: Poderia utilizar a fórmula $\text{sen}(a - b) = \text{sen}a \cdot \cos b - \text{sen}b \cdot \cos a$, uma vez que $\text{sen}15° = \text{sen}(45° - 30°)$ e $\text{sen}45°$ e $\text{sen}30°$ são valores que comumente conhecemos.

7. Como você faria para determinar o valor de $\text{sen}165°$, sabendo que $\text{sen}180° = 0$ e $\text{sen}15° = \dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$?

8. Conhecendo o valor de $\cos 60°$ e de $\text{sen}60°$, como você calcularia o valor de $\cos 120°$? Resposta pessoal. Sugestão de resposta: Poderia utilizar a fórmula do arco duplo $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha$, uma vez que $\cos 120° = \cos(2 \cdot 60°)$.

9. Dê três exemplos de equações trigonométricas.

10. Qual é o conjunto solução da equação $\cos\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{2}$?
Resposta: Alternativa **c**.

a) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } x = \dfrac{5\pi}{3} + 2k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = k\pi \text{ ou } x = \dfrac{4\pi}{3} + k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

c) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = 2k\pi \text{ ou } x = \dfrac{4\pi}{3} + 2k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

d) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } x = \dfrac{4\pi}{3} + 2k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

11. Escolha um dos conteúdos estudados neste capítulo e elabore um problema com base nele. Depois, troque com um colega para que ele o resolva. Por fim, verifique se a resposta obtida está correta.

12. Faça uma síntese do que foi estudado neste capítulo. Nela, use desenhos e dê exemplos.
Resposta pessoal. Orientações sobre esta questão no **Suplemento para o professor**.

7. Resposta pessoal. Sugestão de resposta: Poderia utilizar a fórmula $\text{sen}(a - b) = \text{sen}a \cdot \cos b - \text{sen}b \cdot \cos a$, uma vez que $\text{sen}165° = \text{sen}(180° - 15°)$.

9. Sugestão de resposta: $\cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\text{sen}\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{2}$ e $2 \cdot \cos^2 x - 5 \cdot \cos x$.

11. Resposta pessoal. Antes de os estudantes elaborarem o problema, peça a eles que analisem os contextos propostos nas seções **Exercícios e problemas** deste capítulo e, se julgar conveniente, oriente-os a investigar outros problemas disponíveis em provas de vestibular e Enem.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

CAPÍTULO

4

LADRILHAMENTO E ÁREA DE FIGURAS PLANAS



KIDSADA MANCHINDA/SHUTTERSTOCK

Toca-discos com disco de vinil. As marcas que lembram coroas circulares indicam o início e o fim das faixas de música.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Professor, professora: Converse com os estudantes sobre as diferenças entre os discos de vinil e outras mídias atuais. Verifique se eles estabelecem relações entre a área da faixa e o tempo de execução da música. Verifique se eles percebem que, quando duas músicas com o mesmo tempo de duração são gravadas no mesmo disco, uma delas próxima à borda e a outra mais ao centro, a faixa próxima à borda será mais estreita que a outra, pois a área das coroas circulares deve ser igual.

Na era da tecnologia, mesmo sendo possível armazenar milhares de músicas em um pequeno dispositivo, há quem ainda aprecie os antigos discos de vinil, conhecidos como "bolachões". E se você acha que isso é coisa de colecionador, está enganado. Os discos de vinil vêm ocupando espaço nos mercados nacional e internacional. Apenas nos Estados Unidos, que oferecem quase todos os lançamentos nesse formato, cerca de 43,2 milhões de unidades foram vendidas em 2023.

Muitas pessoas ainda se encantam com o chiado do som, a estética dos encartes e a necessidade de dedicar um tempo especial para ouvir um bom disco, já que os toca-discos não são portáteis, como os dispositivos de mídia digital.

Para reproduzir o som de um disco de vinil, a agulha do toca-discos desliza entre sulcos muito pequenos, desenhados em forma de espiral. O vinil gira e a agulha se desloca da borda para o centro, cuja vibração é transformada em som perceptível aos nossos ouvidos.

Os discos de vinil, geralmente, são compostos de dois lados com algumas faixas. Se, por exemplo, o ouvinte não quiser esperar uma música gravada no meio do disco, ele precisa levantar a agulha do aparelho e movê-la até a faixa desejada, que lembra uma coroa circular. As marcas que lembram coroas circulares indicam o início e o fim das faixas de música. É possível ter uma ideia do tempo de duração de uma música observando essas faixas: quanto maior o tempo da música, maior será a área da faixa da gravação.

Neste capítulo, você vai estudar:

- ladrilhamento do plano;
- área do quadrado;
- área do retângulo;
- área do paralelogramo;
- área do losango;
- área do triângulo;
- área do trapézio;
- área de polígonos regulares;
- área do círculo;
- área do setor circular;
- área da coroa circular.

1. Resposta: Pelo chiado do som, pela estética dos encartes e pela necessidade de dedicar um tempo especial para ouvir um bom disco.
2. Resposta pessoal. Orientações sobre esta questão no **Suplemento para o professor**.
3. Sugestão de resposta: Observando as áreas das faixas de gravação (que lembram coroas circulares), pois, quanto maior for o tempo de duração da música, maior será sua área.

Professor, professora: Oriente os estudantes a escrever as respostas no caderno.

1. De acordo com o texto, por que algumas pessoas ainda se encantam com discos de vinil?

2. Em quais aparelhos você ouve músicas e em quais momentos você faz isso?

3. No disco de vinil, como é possível saber se a gravação de uma música tem mais ou menos tempo do que outra?

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Alguns conceitos necessários

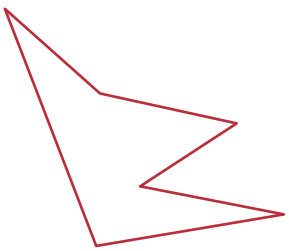
Antes de estudar os ladrilhamentos do plano, vamos relembrar o conceito de **polígono** e definir os conjuntos **interior** e **exterior** dessa figura.

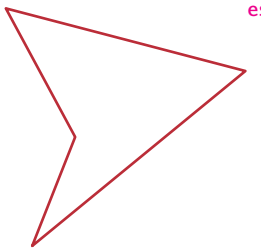
Polígonos

Uma **poligonal** é uma figura formada por uma sequência de pontos A_1, A_2, ..., A_n e pelos segmentos $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_2A_3}$, ... , $\overline{A_{n-1}A_n}$. Os pontos $A_1, A_2, ..., A_n$ são os vértices da poligonal, e os segmentos $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_2A_3}$, ... , $\overline{A_{n-1}A_n}$ são os lados.

Um **polígono** é uma poligonal que satisfaz as seguintes condições: $A_n = A_1$. Os lados da poligonal se intersectam somente em suas extremidades; cada vértice é extremidade de dois lados; e dois lados com mesma extremidade não pertencem a uma mesma reta.

Exemplos





Professor, professora: Se julgar conveniente, apresente aos estudantes algumas poligonais que não são polígonos.



Um polígono separa o plano em três conjuntos de pontos dele: uma região interior, uma região exterior e o próprio polígono.

Um conjunto do plano é dito **interior** se, e somente se, para qualquer ponto da região, toda semirreta de origem no ponto que não passa em vértices do polígono tiver uma quantidade ímpar de pontos em comum com o polígono. Já o conjunto de pontos que não pertencem ao interior ou ao polígono é dito **exterior**.

Observação

Ao reunir um polígono e seu conjunto interior, obtemos uma figura denominada **região poligonal**, a qual, a fim de simplificar a escrita, chamaremos simplesmente de polígono.

Ladrilhamento do plano

As formas das peças dos ladrilhamentos podem ser infinitamente variadas. Porém, vamos explorar os ladrilhamentos formados por regiões poligonais.

Um ladrilhamento do plano (ou simplesmente ladrilhamento) é a união das regiões poligonais (peças) de um conjunto $\{P_1, P_2, ...\}$, de modo que os conjuntos interiores dessas regiões não tenham pontos em comum e não existam lacunas entre elas.

Observação

Os ladrilhamentos devem preencher todo um plano, ilimitado em todas as direções.

ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Além disso, três condições serão impostas aos ladrilhamentos estudados nesta coleção.

I. As peças devem ser polígonos regulares, de um ou vários tipos.

II. A interseção de duas peças, se existir, é sempre um lado ou um vértice.

III. A distribuição de peças ao redor de cada vértice do ladrilhamento é sempre a mesma.

Os ladrilhamentos que obedecem às condições apresentadas são chamados **bem-comportados**.

Com essas condições, eliminamos de nossos estudos os ladrilhamentos como os apresentados na figura **1** e na figura **2**.

Dica

Lembre-se de que **polígonos regulares** são aqueles com todos os seus lados congruentes e também todos os seus ângulos internos congruentes.

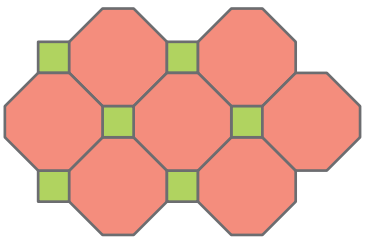


Figura **1**.
Na figura **1**, a condição I não é satisfeita.

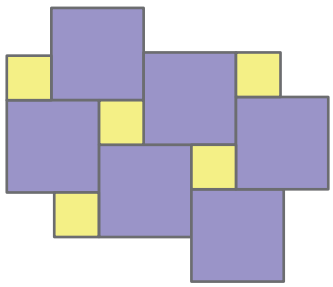
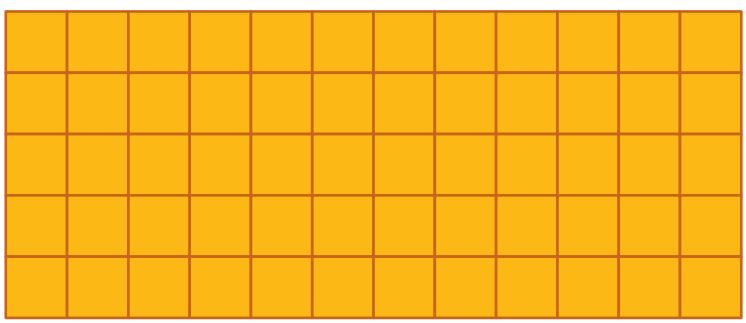


Figura **2**.
Na figura **2**, as condições II e III não são satisfeitas.

Ladrilhamento regular

Um ladrilhamento é dito **regular** quando for bem-comportado e formado por cópias congruentes de um único tipo de polígono regular.

Ao posicionar quadrados congruentes lado a lado (justaposição), em torno de um vértice comum, obtemos um ladrilhamento regular do plano.



Ladrilhamento regular formado por quadrados.

Professor, professora: Ao resolver a questão **A**, se possível, entregue moldes aos estudantes para construírem as peças. É de suma importância que todos os tipos de polígono construídos tenham os lados congruentes, pois eles serão utilizados em investigações propostas no tópico **Ladrilhamento semirregular**. Encarregue cada grupo de produzir determinado tipo de peça. São necessários, para cada grupo, no mínimo 12 triângulos equiláteros, 4 pentágonos regulares e 6 hexágonos regulares.

Questão A. Junte-se a três colegas e construam peças com formato de polígonos regulares congruentes dos seguintes tipos: triângulos, pentágonos e hexágonos. Em seguida, tentem obter um ladrilhamento regular utilizando:

Professor, professora: Se julgar necessário, ao desenvolver esta questão, oriente os estudantes a posicionar os polígonos lado a lado em torno de um vértice comum.

- triângulos equiláteros. Resposta: Espera-se que os estudantes consigam ladrilhar o plano utilizando triângulos equiláteros congruentes.
- pentágonos regulares. Resposta: Espera-se que os estudantes não consigam ladrilhar o plano utilizando pentágonos regulares congruentes.
- hexágonos regulares. Resposta: Espera-se que os estudantes consigam ladrilhar o plano utilizando hexágonos regulares congruentes.

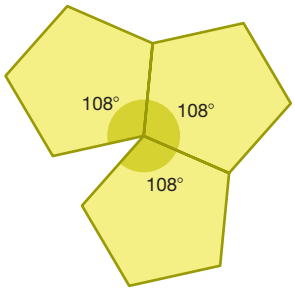
Questão B. O que há em comum entre os ladrilhamentos que você conseguiu construir e o ladrilhamento regular formado por quadrados?

Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes respondam que a soma das medidas dos ângulos internos dos polígonos em torno de um vértice é igual a 360°.

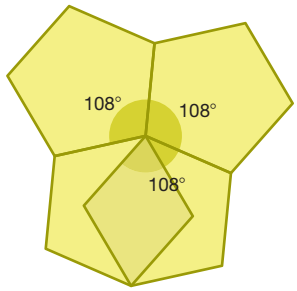
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Vamos analisar o que acontece quando posicionamos lado a lado, por exemplo, em torno de um vértice comum, pentágonos regulares congruentes.



Três pentágonos.



Quatro pentágonos.

ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Se posicionarmos três pentágonos, teremos uma lacuna (soma das medidas dos ângulos internos menor do que 360°). Porém, se acrescentarmos mais um, haverá superposição, ou seja, os conjuntos interiores dessas regiões terão pontos em comum (soma das medidas dos ângulos internos maior do que 360°).

Portanto, não é possível ladrilhar o plano utilizando exclusivamente pentágonos regulares congruentes.

PARA EXPANDIR

Você já reparou nas colmeias das abelhas? Já imaginou quais devem ser os motivos para os alvéolos terem esse formato? Que tal saber mais sobre esse assunto? Para isso, ouça o episódio *As abelhas sabem geometria?*, do *podcast* Teorema na tela.

Professor, professora: Ao resolver a questão **C**, se possível, entregue moldes aos estudantes para construírem as peças. É de suma importância que todos os tipos de polígono construídos tenham os lados congruentes, pois eles serão utilizados em investigações propostas no tópico **Ladrilhamento semirregular**. Encarregue cada grupo de produzir determinado tipo de peça. São necessárias, para cada grupo, no mínimo 3 peças de cada tipo.

Questão C. Junte-se a três colegas para construírem peças com formato de polígonos regulares congruentes dos seguintes tipos: heptágonos, octógonos, eneágonos, decágonos, undecágonos (11 lados) e dodecágonos (12 lados). Na sequência, verifique se é possível obter um ladrilhamento regular do plano com algum desses polígonos.

Resposta: Não é possível obter ladrilhamentos regulares com esses polígonos.

Resolvendo por etapas

Ao posicionar polígonos **regulares congruentes** de um único tipo ao redor de um vértice comum, temos duas possibilidades: (a) eles rodeiam completamente o vértice; (b) eles não rodeiam completamente o vértice e, se outro polígono for acrescentado, os conjuntos interiores dessas figuras apresentarão pontos em comum.

Com quais tipos de polígonos é possível obter um ladrilhamento regular do plano?

A. Compreendendo o problema

1. O que se pede no problema?

Identificar com quais tipos de polígonos é possível obter ladrilhamentos regulares do plano.

2. Quais são os dados apresentados no problema?

Que, ao posicionarmos polígonos regulares congruentes de um único tipo ao redor de um vértice comum, temos duas possibilidades: (a) eles rodeiam completamente o vértice; (b) eles não rodeiam completamente o vértice e, se outro polígono for acrescentado, os conjuntos interiores dessas figuras apresentarão pontos em comum.

B. Organizando as ideias e elaborando um plano

1. Registrando um possível plano.

Inicialmente, determinamos a medida do ângulo interno de um n-ágono regular (polígono de n lados). Em seguida, determinamos para quais polígonos o número que expressa a medida do ângulo interno é um divisor de 360°.

2. Escolhendo as notações.

- n: quantidade de lados do polígono regular.
- m: quantidade de polígonos posicionados ao redor de um vértice.
- α: medida do ângulo interno de um n-ágono regular.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

C. Executando o plano

Passo 1

Se posicionarmos polígonos regulares congruentes de um único tipo ao redor de um vértice e eles rodearem completamente o vértice, então α é divisor de 360°. Caso contrário, α não é um divisor de 360°. Desse modo, precisamos inicialmente determinar α. Sabemos que a soma dos ângulos internos de um n-ágono regular é $(n-2)\cdot 180°$. Assim:

$$\alpha = \frac{(n-2)\cdot 180°}{n}$$

Passo 2

Como queremos que α seja divisor de 360°, temos $m \cdot \alpha = 360°$. Consequentemente:

$$m \cdot \frac{(n-2)\cdot 180°}{n} = 360° \Rightarrow m = \frac{2n}{n-2}$$

Passo 3

Ao redor de um vértice, são posicionados ao menos três polígonos, então $m \geq 3$ e, consequentemente, $\frac{2n}{n-2} \geq 3$. Simplificando essa expressão, obtemos:

$$\frac{2n}{n-2} \geq 3 \Rightarrow 2n \geq 3(n-2) \Rightarrow 2n \geq 3n - 6 \Rightarrow n \leq 6$$

Como $n \geq 3$, as únicas soluções inteiras e positivas são $n = 3$, $n = 4$, $n = 5$ e $n = 6$.

Para $n = 3$, temos:

$$m = \frac{2 \cdot 3}{3-2} = 6$$

Assim, podemos posicionar ao redor de um vértice 6 triângulos equiláteros.

Para $n = 4$, temos:

$$m = \frac{2 \cdot 4}{4-2} = 4$$

Desse modo, podemos posicionar ao redor de um vértice 4 quadrados.

Para $n = 5$, temos:

$$m = \frac{2 \cdot 5}{5-2} = 3{,}333\ldots$$

Como m deve ser um número inteiro, o pentágono regular não pavimenta o plano (como já havíamos verificado anteriormente).

Para $n = 6$, temos:

$$m = \frac{2 \cdot 6}{6-2} = 3$$

Assim, podemos posicionar ao redor de um vértice 3 hexágonos regulares.

Portanto, é possível obter ladrilhamentos regulares utilizando exclusivamente triângulos equiláteros, quadrados e hexágonos regulares. Esses ladrilhamentos do plano são indicados por: $(3, 3, 3, 3, 3, 3)$, $(4, 4, 4, 4)$ e $(6, 6, 6)$.

Observação

Verifique se é possível utilizar, com algumas adequações, o plano apresentado na seção **Resolvendo por etapas** para obter a solução de alguns exercícios ou problemas semelhantes propostos nas seções **Exercícios e problemas** deste capítulo.

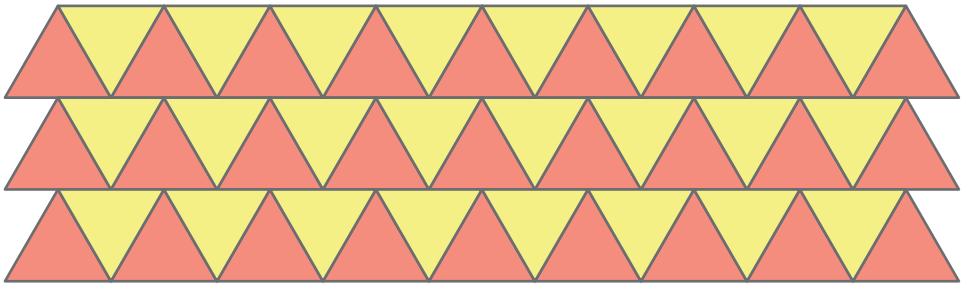
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Anote as respostas no caderno.

1. Quais ladrilhamentos são bem-comportados?

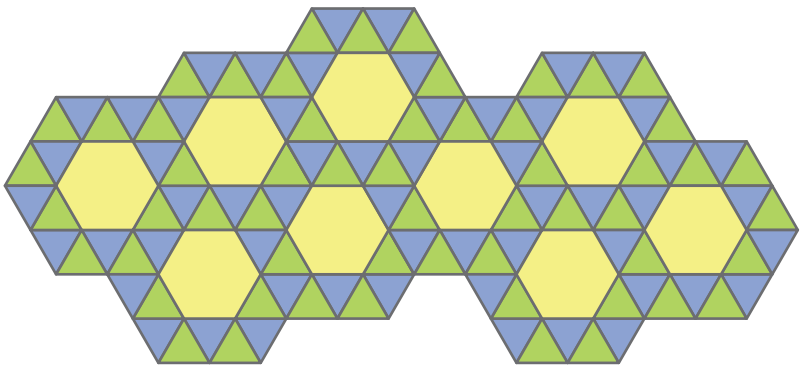
Resposta: **B** e **D**.

A.



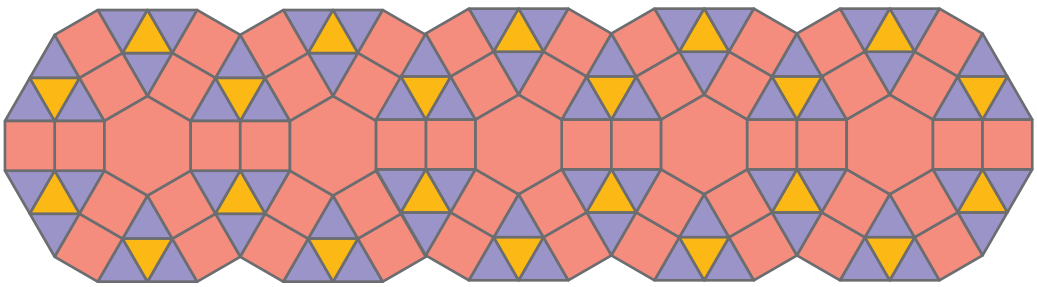
RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

B.



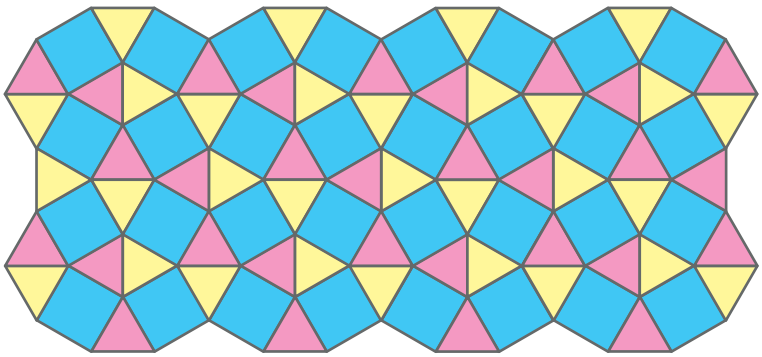
RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

C.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

D.



TATIANE GALHEIRO/ARQUIVO DA EDITORA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

2. Com o auxílio de régua e compasso, construa um ladrilhamento regular formado por:

a) triângulos equiláteros.
Resposta no final do **Livro do Estudante**.

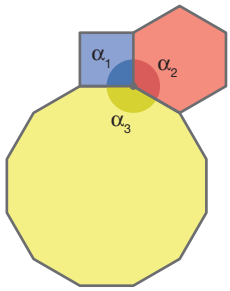
b) hexágonos regulares.
Resposta no final do **Livro do Estudante**.

Ladrilhamento semirregular

Um ladrilhamento é dito **semirregular** quando for bem-comportado e formado por cópias congruentes de dois ou mais tipos de polígonos regulares.

Vamos analisar algumas combinações de polígonos regulares posicionados ao redor de um vértice comum.

Por exemplo, é possível posicionar um quadrado, um hexágono regular e um dodecágono regular de lados congruentes ao redor de um vértice comum de maneira que eles rodeiem completamente o vértice.



Nesse caso:

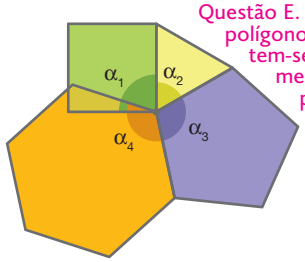
$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 360°$$

Questão D. Mostre que $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 360°$.
Resposta no final do **Livro do Estudante**.

Observação

Não é necessário que os polígonos regulares tenham a mesma quantidade de lados. Porém, como esses ladrilhamentos são bem-comportados, as condições impostas exigem que os lados de todos os polígonos que compõem o ladrilhamento tenham o mesmo comprimento.

Contudo, não é possível posicionar um triângulo equilátero, um quadrado, um pentágono regular e um hexágono regular de lados congruentes ao redor de um vértice comum sem que os conjuntos interiores dessas figuras tenham pontos em comum.



Questão E. Resposta: Seja m a quantidade de polígonos ao redor de um vértice comum, tem-se, evidentemente, $m \geq 3$. Como a menor medida do ângulo interno de um polígono regular é 60°, segue que $3 \leq m \leq 6$, pois $\frac{360°}{60°} = 6$.

Nesse caso:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 90° + 60° + 108° + 120° = 378° > 360°.$$

Questão E. Junte-se a um colega e determinem se, em um ladrilhamento semirregular, há uma quantidade máxima e mínima de polígonos que podem ser posicionados ao redor de um vértice comum.

Questão F. Junte-se a três colegas e posicionem três polígonos regulares de dois ou mais tipos de lados congruentes ao redor de um vértice comum, de maneira que eles rodeiem completamente o vértice. São nove as possíveis soluções. Determinem-nas e apresentem-nas para seus colegas e o professor. Resposta: (3, 7, 42), (3, 8, 24), (3, 9, 18), (3, 10, 15), (3, 12, 12), (4, 5, 20), (4, 6, 12), (4, 8, 8) e (5, 5, 10).

Dica

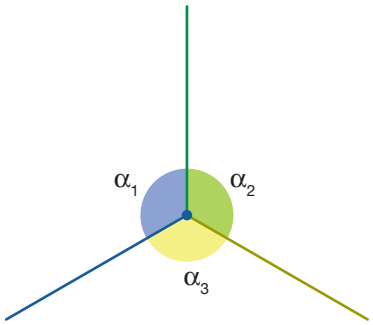
Para resolver a questão **F**, construa quadrados congruentes utilizando as peças construídas anteriormente.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Vamos determinar quais são as possíveis combinações de três polígonos regulares com lados congruentes que ladrilham o plano.

Considere três polígonos regulares de, respectivamente, n_1, n_2 e n_3 lados. Suponha que seja possível ladrilhar o plano com esses polígonos. Assim:



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 360°$

Consequentemente:

$$\frac{(n_1 - 2) \cdot 180°}{n_1} + \frac{(n_2 - 2) \cdot 180°}{n_2} + \frac{(n_3 - 2) \cdot 180°}{n_3} = 360°$$

Professor, professora: No **Suplemento para o professor** são apresentados os cálculos efetuados nessa simplificação.

Simplificando essa equação, obtemos:

$$\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} = \frac{1}{2}$$

Suponha que $n_1 \leq n_2 \leq n_3$, assim:

$$\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_1} \geq \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{3}{n_1} \geq \frac{1}{2} \Rightarrow n_1 \leq 6$$

Como $3 \leq n_1 \leq 6$, devemos analisar os seguintes casos:

a) $n_1 = 3$ (um dos polígonos é um triângulo equilátero).

Nesse caso, temos:

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} = \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{1}{n_3} = \frac{n_2 - 6}{6n_2}$$

Assim, $n_2 \geq 7$. Além disso:

$$\frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} = \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_2} \geq \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{2}{n_2} \geq \frac{1}{6} \Rightarrow n_2 \leq 12$$

Desse modo, $7 \leq n_2 \leq 12$. Substituindo os possíveis valores de n_2 em $\frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} = \frac{1}{6}$, obtemos os possíveis valores de n_3, que, nesse caso, são:

- $n_3 = 42$ (para $n_2 = 7$);
- $n_3 = 24$ (para $n_2 = 8$);
- $n_3 = 18$ (para $n_2 = 9$);
- $n_3 = 15$ (para $n_2 = 10$);
- $n_3 = 12$ (para $n_2 = 12$).

Portanto, as ternas (3, 7, 42) , (3, 8, 24) , (3, 9, 18) , (3, 10, 15) e (3, 12, 12) são soluções.

b) $n_1 = 4$ (um dos polígonos é um quadrado).

Temos $5 \leq n_2 \leq 8$ e, consequentemente, as ternas $(4, 5, 20)$, $(4, 6, 12)$ e $(4, 8, 8)$ são soluções.

Observação

De maneira semelhante à apresentada para o caso em que $n_1 = 3$, verificamos que as soluções obtidas para os casos em que $n_1 = 4$, $n_1 = 5$ e $n_1 = 6$ estão corretas.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

c) $n_1 = 5$ (um dos polígonos é um pentágono regular).

Temos $5 \leq n_2 \leq 6$ e, consequentemente, a terna $(5, 5, 10)$ é a única solução.

d) $n_1 = 6$ (um dos polígonos é um hexágono regular).

Temos $n_2 = 6$ e, consequentemente, a terna $(6, 6, 6)$ é a única solução.

A seguir, estão apresentadas todas as soluções inteiras e positivas da equação $\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} = \frac{1}{2}$.

Soluções inteiras e positivas da equação $\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} = \frac{1}{2}$

n_1	n_2	n_3
3	7	42
3	8	24
3	9	18
3	10	15
3	12	12
4	5	20
4	6	12
4	8	8
5	5	10
6	6	6

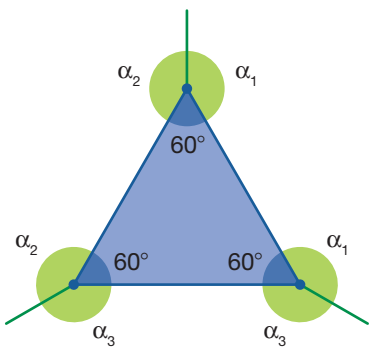
Vimos que existem dez combinações de três polígonos regulares de lados congruentes que podem ser posicionados ao redor de um vértice comum de modo que não haja lacunas e que os conjuntos interiores dessas regiões não tenham pontos em comum. Porém, o objetivo, nesse momento, é determinar quais delas possibilitam ladrilhar o plano.

Questão G. Tente ladrilhar o plano posicionando, ao redor de um vértice comum, um triângulo equilátero e outros dois polígonos regulares. Em quais casos esse ladrilhamento foi possível? Resposta: Uma combinação de três polígonos envolvendo um triângulo equilátero ladrilha o plano apenas se os outros dois polígonos forem congruentes.

Dica

Para resolver a questão **G**, utilize as peças construídas anteriormente.

Vamos analisar, por exemplo, uma combinação envolvendo um triângulo equilátero e outros dois polígonos regulares.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Note que:

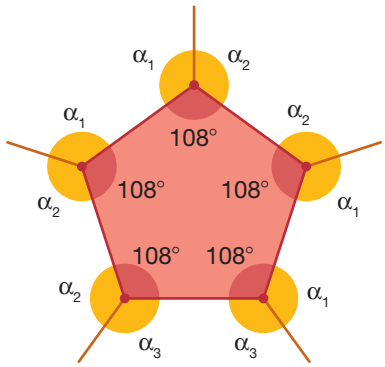
- $\alpha_1 + \alpha_3 + 60° = 360°$
- $\alpha_2 + \alpha_3 + 60° = 360°$
- $\alpha_1 + \alpha_2 + 60° = 360°$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Desse modo, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$ e, consequentemente, uma combinação envolvendo um triângulo equilátero ladrilha o plano apenas se os outros dois polígonos forem congruentes. Logo, as combinações $(3, 7, 42)$, $(3, 8, 24)$, $(3, 9, 18)$, $(3, 10, 15)$ e $(3, 12, 12)$ não ladrilham o plano.

De maneira análoga, em uma combinação envolvendo um pentágono regular, é necessário que os outros dois polígonos sejam congruentes.

OBJETO DIGITAL
Vídeo: Descoberto um novo ladrilhamento não periódico

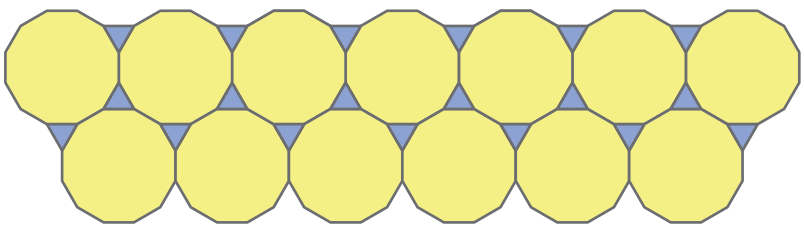


Nesse caso, as combinações $(4, 5, 20)$ e $(5, 5, 10)$ não ladrilham o plano.

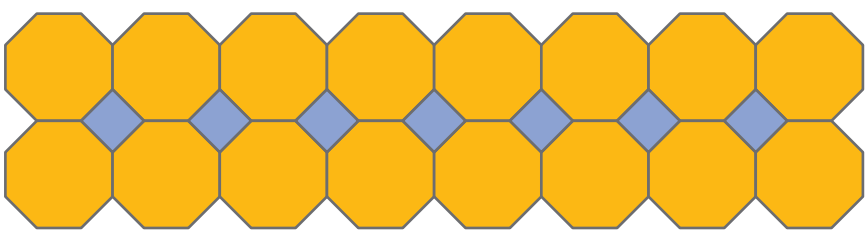
Portanto, as combinações de três polígonos regulares que ladrilham o plano são $(3, 12, 12)$, $(4, 6, 12)$, $(4, 8, 8)$ e $(6, 6, 6)$.

Os ladrilhamentos semirregulares formados por três polígonos regulares ao redor de cada vértice estão desenhados a seguir.

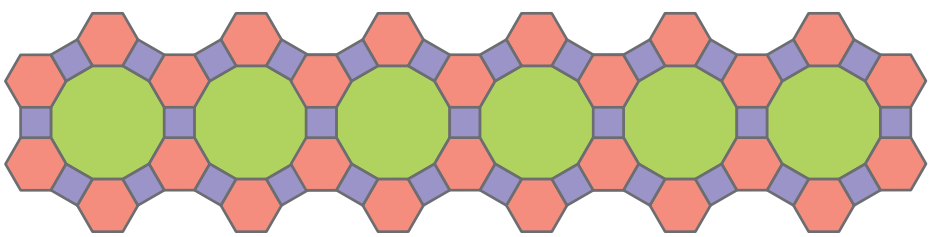
Dica
Lembre-se de que $(6, 6, 6)$ é um ladrilhamento regular.



- $(3, 12, 12)$



- $(4, 8, 8)$



- $(4, 6, 12)$

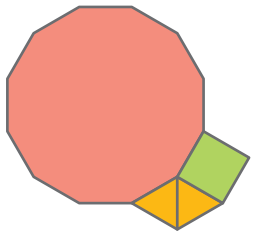
ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

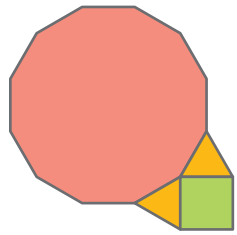
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Anote as respostas no caderno.

3. Ao combinar, ao redor de um vértice, quatro polígonos regulares de dois ou mais tipos com lados congruentes, de maneira que eles rodeiem completamente o vértice, podemos obter configurações como as apresentadas a seguir.

Professor, professora: Caso julgue conveniente, oriente os estudantes a realizar as investigações propostas nas tarefas desta seção com o auxílio de um *software* de Geometria dinâmica.





ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Dica

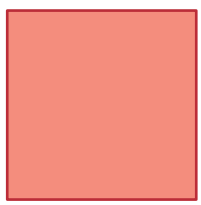
Para resolver as tarefas desta página, utilize, se necessário, as peças construídas anteriormente.

Podemos verificar que, nas combinações (3, 3, 4, 12) e (3, 4, 3, 12), os mesmos polígonos regulares são posicionados ao redor de um vértice comum. Porém, enquanto a combinação (3, 3, 4, 12) não admite eixo de simetria, a combinação (3, 4, 3, 12) admite um eixo. Nesse caso, consideraremos as combinações (3, 3, 4, 12) e (3, 4, 3, 12) como distintas.

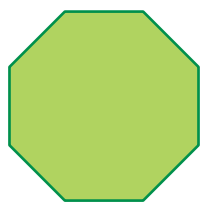
a) Junte-se a três colegas e posicionem quatro polígonos regulares de dois ou mais tipos de lados congruentes ao redor de um vértice comum, de maneira que eles rodeiem completamente o vértice. São seis as possíveis soluções, das quais duas já estão apresentadas. Determine as outras quatro soluções e apresente-as para seus colegas e o professor. Resposta: (3, 3, 6, 6), (3, 6, 3, 6), (3, 4, 6, 4) e (3, 4, 4, 6).

b) Quais são os ladrilhamentos semirregulares com quatro polígonos regulares em cada vértice? Resposta: (3, 6, 3, 6) e (3, 4, 6, 4).

4. Eleonor precisa construir um ladrilhamento que seja bem-comportado. Para isso, ela pode optar por um dos seguintes polígonos.



Quadrado.



Octógono regular.

ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

De acordo com as informações, classifique cada afirmação como verdadeira ou falsa.

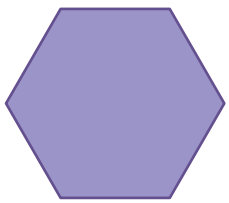
a) Esse ladrilhamento pode ser construído apenas com octógonos regulares. Resposta: Falsa.

b) Esse ladrilhamento pode ser construído posicionando ao redor de cada vértice um octógono regular e três quadrados. Resposta: Falsa.

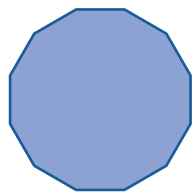
c) Esse ladrilhamento pode ser construído posicionando ao redor de cada vértice dois octógonos regulares e um quadrado. Resposta: Verdadeira.

5. Com quais dos tipos de polígono regular apresentados a seguir é possível obter ladrilhamentos semirregulares dispostos com cinco polígonos em cada vértice? Resposta: Triângulo equilátero; hexágono regular; quadrado.









ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

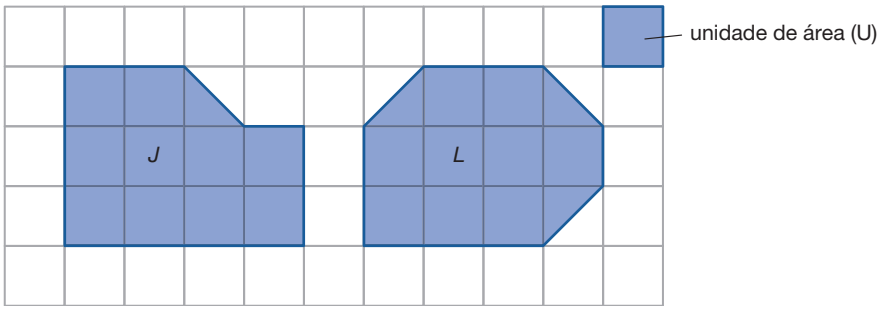
6. Demonstre que existem 11 ladrilhamentos bem-comportados do plano. Em seguida, construa cada um deles. Resposta no final do **Livro do Estudante**.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Estudando área de figuras planas

Para medir a área de uma figura plana, devemos compará-la com uma unidade de área, que chamaremos de U. O resultado dessa comparação é um número que expressa quantas vezes a unidade de área "cabe" na figura *F*.

Considere, por exemplo, as figuras *J* e *L* na malha quadriculada.



Verificamos que a unidade de área "cabe" 10,5 vezes em cada uma dessas figuras. Dessa maneira, dizemos que a área de *J* e de *L* é 10,5 U, isto é:

área de *J* = área de *L* = 10,5 U

Observação

A fim de simplificar a escrita, vamos dizer "a área do polígono" ao nos referir à área da região delimitada por esse polígono. Por exemplo, em vez de dizer "a área da região quadrada", diremos simplesmente "a área do quadrado".

Professor, professora: Para deduzir a fórmula da área das figuras, verifique a possibilidade de os estudantes fazerem as construções geométricas das figuras. Para isso, leve para a sala de aula uma malha quadriculada com quadradinhos de 1 cm de lado. Esse tipo de tarefa leva os estudantes a identificar relações e a avaliar o resultado obtido.

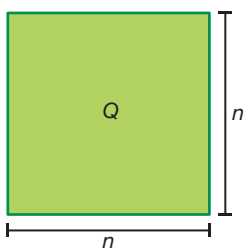
Área do quadrado, do retângulo, do paralelogramo e do losango

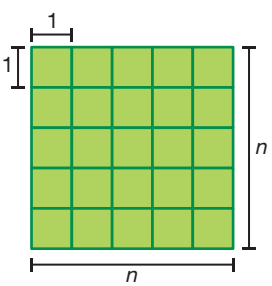
Neste tópico, estudaremos expressões que possibilitam calcular a área de quadrados, retângulos, paralelogramos e losangos.

Área do quadrado

Por definição, um quadrado unitário tem área igual a 1, pois o comprimento de seu lado é 1.

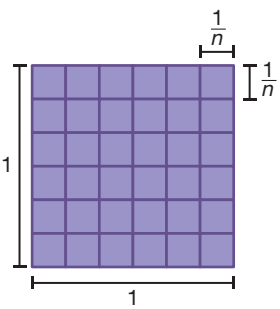
Considere um quadrado *Q* de lado *n*, com $n \in \mathbb{N}$. Podemos decompor esse quadrado em n^2 quadrados unitários. Assim, a área do quadrado *Q* é $n^2 \cdot 1 = n^2$. Na figura, é apresentado o caso em que *n* é igual a 5.





Quadrado é todo quadrilátero com os quatro ângulos internos retos e os quatro lados com o mesmo comprimento.

Por outro lado, se considerarmos um quadrado unitário decomposto em n^2 quadrados *Q'* de lado $\frac{1}{n}$, com $n \in \mathbb{N}^*$, teremos que a área de cada quadrado *Q'* é igual a $\frac{1}{n^2}$. Na figura, é apresentado o caso em que *n* é igual a 6.



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Diante dessas conclusões, vamos mostrar que a área de um quadrado Q" de lado $\frac{x}{n}$, com $x, n \in \mathbb{N}^*$ é igual a $\left(\frac{x}{n}\right)^2$. De fato, o quadrado Q" pode ser decomposto em x^2 quadrados de lado $\frac{1}{n}$. Assim, a área do quadrado Q" é:

$$x^2 \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{x^2}{n^2} = \left(\frac{x}{n}\right)^2$$

Mostramos que, se o comprimento de um quadrado for expresso por um número racional a, então a área desse quadrado é a^2. Porém, pode-se demonstrar que, se o comprimento do lado de um quadrado for expresso por um número irracional i, tem-se ainda que a área desse quadrado é i^2.

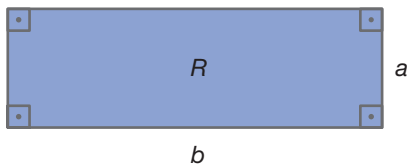
A área de um quadrado de lado a é igual a a^2.

Questão H. Determine a expressão que possibilita calcular a área de um quadrado, dado o comprimento de sua diagonal. Resposta no final do **Livro do Estudante**.

Questão I. Escreva um algoritmo que possibilite determinar a área de um quadrado, dado o comprimento de sua diagonal. Em seguida, organize-o em um fluxograma.
Resposta no final do **Livro do Estudante**.

Área do retângulo

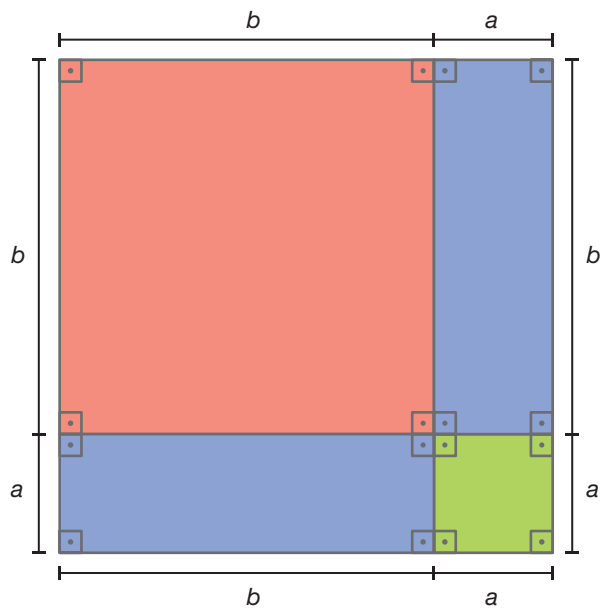
Considere um retângulo R de lados a e b, com $a, b \in \mathbb{R}_+^*$.



Retângulo é todo quadrilátero com os quatro ângulos internos retos.

Em seguida, construa um quadrado de lado $a + b$, formado por duas cópias de R, um quadrado de lado a e um quadrado de lado b. Indicando por A a área do retângulo R, temos:

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= A + A + a^2 + b^2\\ 2A &= (a+b)^2 - a^2 - b^2\\ 2A &= a^2 + 2ab + b^2 - a^2 - b^2\\ 2A &= 2ab\\ A &= ab\end{aligned}$$



Portanto, a área do retângulo R é igual a ab.

A área de um retângulo de lados a e b é igual a ab.

Professor, professora: Peça aos estudantes que, em grupos, estimem a área da superfície da carteira, da sala de aula ou da quadra de esportes. Questione se as medidas estimadas são maiores ou menores do que 1 m² e, em seguida, peça a eles que meçam o comprimento e a largura reais, comparando os resultados.

Questão J. Qual é a figura com a maior área: um retângulo cujos comprimentos dos lados têm 2 cm e 5 cm ou um quadrado cujo comprimento de lado tem 3,7 cm?
Resposta: O quadrado cujo comprimento do lado é 3,7 cm.

ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

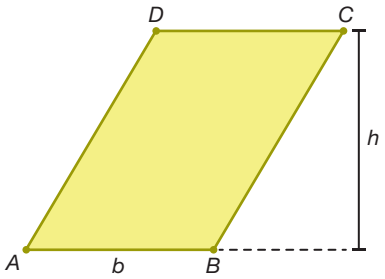
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Área do paralelogramo

No paralelogramo $ABCD$, b é o comprimento da base e h a altura do paralelogramo, com $b, h \in \mathbb{R}_+^*$.

Professor, professora: Antes de propor aos estudantes o trabalho com a área do paralelogramo, questione-os sobre as propriedades desse quadrilátero. Se julgar necessário, apresente-as na lousa.

Paralelogramo é todo quadrilátero com dois pares de lados paralelos.

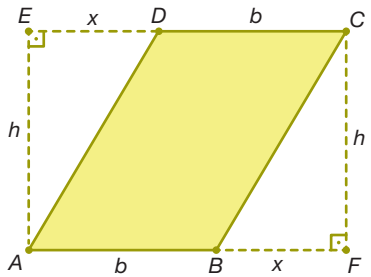


Se traçarmos $\overline{AE}$ e $\overline{CF}$ perpendiculares à reta que contém $\overline{AB}$, obtemos o retângulo $AECF$, composto do paralelogramo $ABCD$ e dos triângulos retângulos congruentes ADE e BCF.

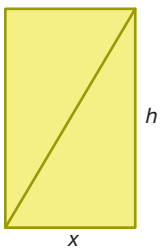
Dica

Note que os triângulos ADE e BCF são congruentes pelo caso LAL, pois:

- $AE = CF = h$;
- $E\widehat{A}D = B\widehat{C}F$, já que $D\widehat{A}B = B\widehat{C}D$ (ângulos opostos de um paralelogramo), $E\widehat{A}D = 90° - D\widehat{A}B$ e $B\widehat{C}F = 90° - B\widehat{C}D$;
- $AD = BC$ (lados opostos de um paralelogramo).



Como os triângulos ADE e BCF são congruentes, juntos eles formam um retângulo cuja área é xh.



Desse modo, a área do retângulo $AECF$ é igual à área do paralelogramo $ABCD$, que indicaremos por A, mais a área do retângulo formado pelos triângulos ADE e BCF. Assim:

$$(x + b) \cdot h = A + xh$$
$$xh + bh = A + xh$$
$$A = bh$$

Portanto, a área do paralelogramo $ABCD$ é igual a bh.

A área de um paralelogramo de base b e altura h é igual a bh.

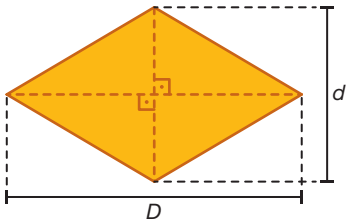
Questão K. Qual é, em centímetros quadrados, a área de um paralelogramo cuja base mede 2 cm e a altura mede 5 cm? Resposta: 10 cm

Questão L. Qual é, em metros, a altura de um paralelogramo cuja área mede 51,66 m² e o comprimento da base mede 12,3 m? Resposta: 4,2 m

ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Área do losango

Considere o losango a seguir, em que D é o comprimento da diagonal maior e d o comprimento da diagonal menor, com D e d representando números reais positivos.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Professor, professora: Antes de propor aos estudantes o trabalho com a área do losango, questione-os sobre as propriedades desse quadrilátero. Se julgar necessário, apresente-as na lousa.

Losango é todo paralelogramo com os quatro lados de mesmo comprimento.

A área de um losango, cujo comprimento da diagonal maior é D e da diagonal menor é d, é igual a:

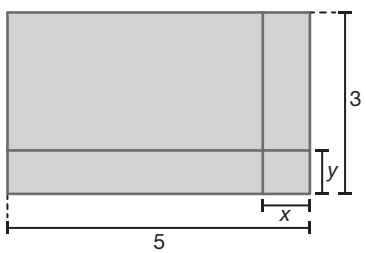
$$\frac{D \cdot d}{2}$$

Professor, professora: Após os estudantes tentarem resolver a questão **M**, discuta com eles a importância de demonstrar a fórmula da área do losango $A = \frac{D \cdot d}{2}$, além de informar como essa demonstração é baseada na decomposição do losango em quatro triângulos retângulos congruentes. Incentive-os a desenhar essas decomposições para visualizarem melhor.

Questão M. Mostre que a afirmação apresentada é verdadeira, ou seja, que a área A de um losango, cujo comprimento da diagonal maior é D e da diagonal menor é d, é igual a $A = \frac{D \cdot d}{2}$, em que D e d são números reais positivos. Resposta no final do **Livro do Estudante**.

Exercícios e problemas resolvidos

R1. (Enem, 2012) Um forro retangular de tecido traz em sua etiqueta a informação de que encolherá após a primeira lavagem, mantendo, entretanto, seu formato. A figura a seguir mostra as medidas originais do forro e o tamanho do encolhimento (x) no comprimento e (y) na largura. A expressão algébrica que representa a área do forro após ser lavado é $(5 - x)(3 - y)$.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA/ENEM 2012

Nestas condições, a área perdida do forro, após a primeira lavagem, será expressa por:

a) $2xy$
b) $15 - 3x$
c) $15 - 5y$
d) $-5y - 3x$
e) $5y + 3x - xy$

Resolução

Para obter a expressão que representa a área perdida do forro, calculamos a diferença entre as áreas dos retângulos de lados 5 e 3 e de lados $(5 - x)$ e $(3 - y)$.

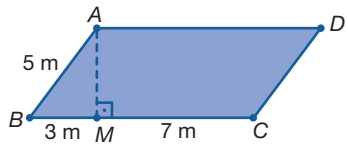
$$(5 \cdot 3) - [(5 - x)(3 - y)] = 15 - (15 - 5y - 3x + xy) =$$
$$= 15 - 15 + 5y + 3x - xy = 5y + 3x - xy$$

Portanto, a alternativa correta é a **e**.

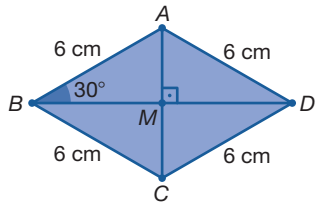
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

R2. Calcule a área do:

a) paralelogramo.



b) losango.



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Resolução

a) Inicialmente, calculamos, em metros, a altura AM do paralelogramo por meio do Teorema de Pitágoras.

$$(AB)^2 = (BM)^2 + (AM)^2 \Rightarrow 5^2 = 3^2 + (AM)^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (AM)^2 = 25 - 9 \Rightarrow AM = \sqrt{16} = 4$$

Observação

Note que $AM = 4$, pois $AM > 0$.

Em seguida, calculamos a área S do paralelogramo:

$$S = BC \cdot AM = \underbrace{10}_{7+3} \cdot 4 = 40$$

Portanto, a área desse paralelogramo é $40\ m^2$.

b) Calculando, em centímetros, o comprimento das diagonais $\overline{BD}$ e $\overline{AC}$ do losango, temos:

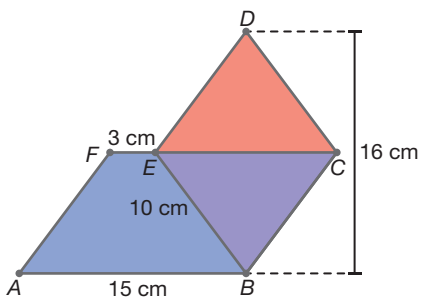
- $\cos 30° = \frac{BM}{AB} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\frac{BD}{2}}{6} \Rightarrow BD = 6\sqrt{3}$.
- $\text{sen}\,30° = \frac{AM}{AB} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{\frac{AC}{2}}{6} \Rightarrow AC = 6$.

Agora, calculamos a área S do losango:

$$S = \frac{BD \cdot AC}{2} = \frac{6\sqrt{3} \cdot 6}{2} = 18\sqrt{3}$$

Portanto, a área desse losango é $18\sqrt{3}\ cm^2$.

R3. Calcule a área da figura a seguir sabendo que ela foi construída por meio da sobreposição de um paralelogramo e de um losango.



TATIANE GALHEIRO/ARQUIVO DA EDITORA

Resolução

Seja L, P e S a área, em centímetros quadrados, do losango, do paralelogramo e da região de sobreposição dessas figuras, respectivamente. Sendo assim, temos que a área A da figura é dada por:

$$A = L + P - S$$
$$A = \frac{16 \cdot (15 - 3)}{2} + 15 \cdot \frac{16}{2} - \frac{12 \cdot 8}{2}$$
$$A = 96 + 120 - 48 = 168$$

Portanto, a área da figura é $168\ cm^2$.

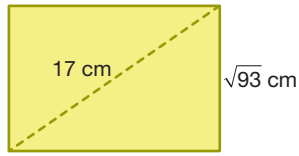
Observação

Note que a região de sobreposição do paralelogramo e do losango é um triângulo cuja medida do comprimento da base é 12 cm e o da altura é 8 cm.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

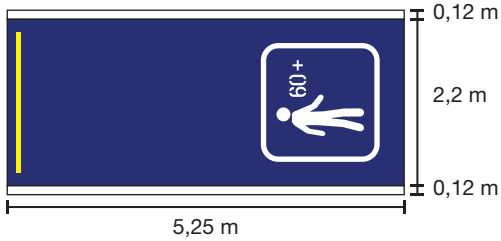
Anote as respostas no caderno.

7. Calcule a área do retângulo. Resposta: $14\sqrt{93}$ cm²



TATIANE GALHEIRO/ARQUIVO DA EDITORA

8. A seguir são apresentadas as dimensões das vagas destinadas à pessoas idosas em um estacionamento.



CARLOS BORIN/ARQUIVO DA EDITORA

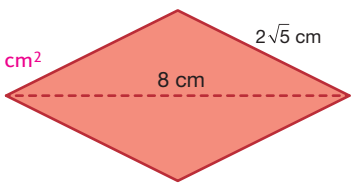
Para pintar essas vagas, o gerente do estacionamento contratou um profissional que cobra R$ 25,00 por metro quadrado. Quantos reais esse profissional cobrou para pintar uma dessas vagas?
Resposta: R$ 320,25

Dica

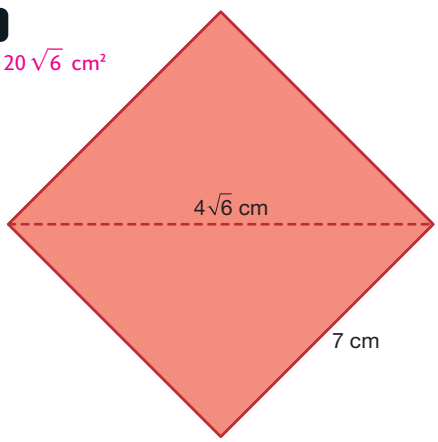
Para resolver este problema, desconsidere a barra de proteção em amarelo.

9. Calcule a área dos losangos.

A.
Resposta: 16 cm²



B.
Resposta: $20\sqrt{6}$ cm²

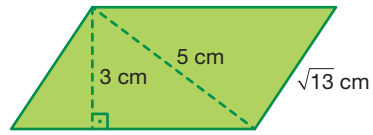


RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

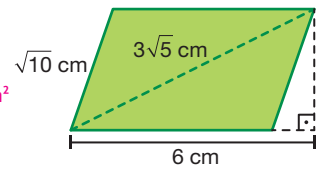
TATIANE GALHEIRO/ARQUIVO DA EDITORA

10. Calcule a área dos paralelogramos.

A.
Resposta: 18 cm²



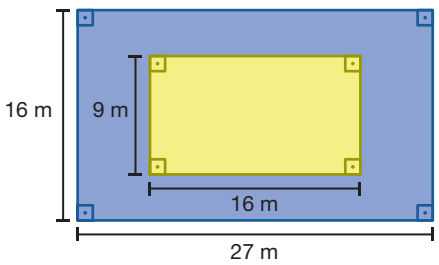
B.
Resposta: 15 cm²



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

TATIANE GALHEIRO/ARQUIVO DA EDITORA

11. Para oferecer boas condições de uso e de segurança em uma quadra poliesportiva, um grupo de voluntários pretende revitalizá-la. Na primeira etapa desse trabalho, o piso da quadra será pintado como indicado na imagem.

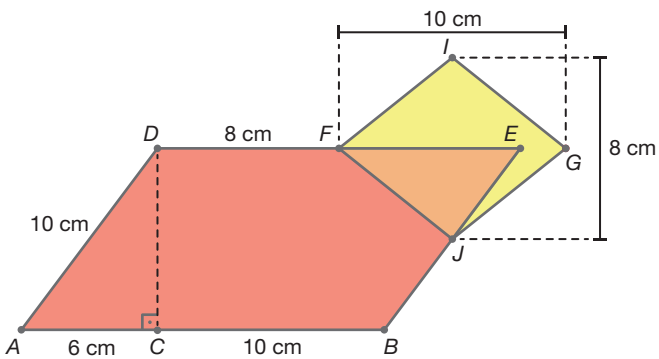


RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

a) Sabendo que é possível pintar 18 m² com 1 L de tinta azul e 16 m² com 1 L de tinta amarela, quantos litros de cada tinta, no mínimo, serão necessários para pintar essa quadra?
Resposta: Tinta azul: 16 L; tinta amarela: 9 L.

b) Para realizar esse trabalho, serão compradas latas de tinta com capacidade de 3,6 L. Sabendo que o preço de cada lata de tinta é R$ 29,50, determine quantos reais, no mínimo, serão gastos com a compra das tintas nessa etapa. Resposta: R$ 236,00

12. Calcule a área da figura a seguir, sabendo que ela foi construída por meio da sobreposição do paralelogramo *ABED* e do losango *FIGJ* e que os segmentos de reta *FG* e *FE* pertencem a uma mesma reta.
Resposta: 152 cm²



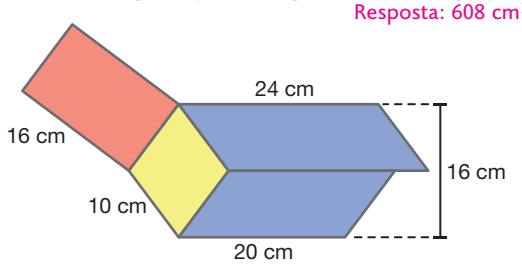
TATIANE GALHEIRO/ARQUIVO DA EDITORA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

15. Professor, professora: Diga aos estudantes que em 1953 o território amazônico brasileiro passou a ser chamado Amazônia Legal. Além disso, informe-os de que, atualmente, essa região é composta dos estados do Acre, Amapá, Amazonas, Pará, Rondônia, Roraima, Tocantins e Mato Grosso, bem como de alguns municípios do estado do Maranhão.

13. De acordo com as medidas indicadas, calcule a área total da figura sabendo que os polígonos em vermelho, em azul e em amarelo são, respectivamente, retângulo, paralelogramo e losango.

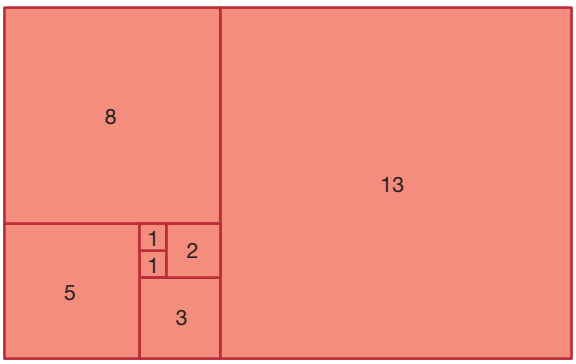
Resposta: 608 cm²



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

14. Um dos fenômenos que podem ser observados na natureza é a presença da chamada sequência de Fibonacci, como o padrão de crescimento de algumas plantas e de outros seres vivos. Nela, o 1º e o 2º termos são iguais a 1, e cada termo seguinte é obtido por meio da adição dos dois antecedentes (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...). Uma das maneiras de obter a sequência de Fibonacci é por meio da justaposição de quadrados seguindo o padrão proposto.

OBJETO DIGITAL ***Carrossel de imagens:***
Mitos e verdades sobre a razão áurea



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Dica

Na figura, o comprimento do lado de cada quadrado está indicado em seu interior.

Desse modo, obtemos a sequência de Fibonacci, que, nesse caso, está escrita em função do comprimento do lado de cada quadrado. Considerando que o comprimento dos lados de cada quadrado apresentado na figura anterior está em metros, calcule a área total da figura obtida ao justapor o quadrado que corresponde, na sequência de Fibonacci, ao:

a) 8º termo. Resposta: 714 m²

b) 9º termo. Resposta: 1870 m²

PARA FIXAR

Para saber mais sobre a história de Fibonacci, os mistérios da sequência e a relação com o número de ouro, busque na internet e assista ao vídeo *O que é a sequência de Fibonacci e por que é chamada de "código secreto da natureza"*.

15. De acordo com o projeto PRODES, estima-se que de 2009 a 2023 foram desmatados 64 939 km² da Amazônia Legal.

ODS 15

O desmatamento realizado nesse período corresponde à área de, aproximadamente, quantos campos de futebol com 68 m de largura e 105 m de comprimento? Resposta: 9 095 098 campos de futebol.

16. Qual é a área de um paralelogramo cujos ângulos internos são retos e a medida do comprimento de cada lado é 12 cm? Resposta: 144 cm²

17. Considere o retângulo $ABCD$ com $AB = 2 \cdot BC$ e $AC = 6\sqrt{5}$ cm. Qual é a área do losango cujos vértices são os pontos médios dos lados do retângulo $ABCD$? Resposta: 36 cm²

18. Em 1899, o matemático Georg Alexander Pick publicou uma fórmula válida para a área de uma região determinada por um polígono cujos vértices são pontos de uma rede no plano (conjunto de pontos dispostos de maneira regular vertical e horizontalmente, tal que a menor distância entre dois pontos é igual a 1 u).

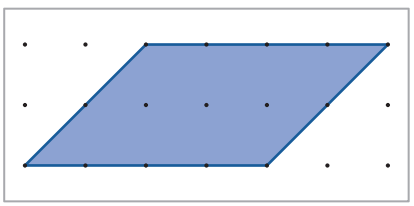
A fórmula é dada pela expressão:

$$A = 0{,}5 \cdot B + C - 1$$

Na expressão, A indica a área da região, B a quantidade de pontos da rede situados sobre o polígono que determina a região e C a quantidade de pontos da rede situados na região interior do polígono.

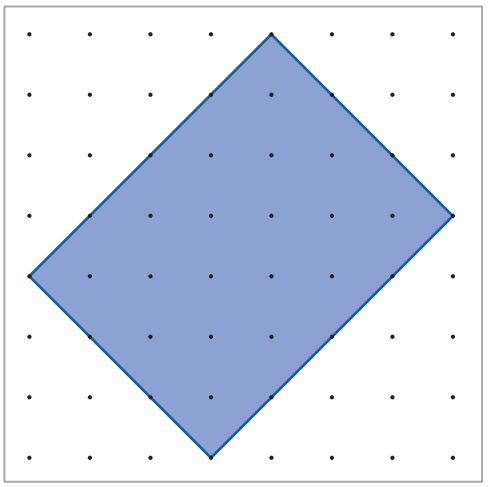
Calcule a área das figuras a seguir por meio da fórmula de Pick.

A.



Resposta: 8 u²

B.



Resposta: 24 u²

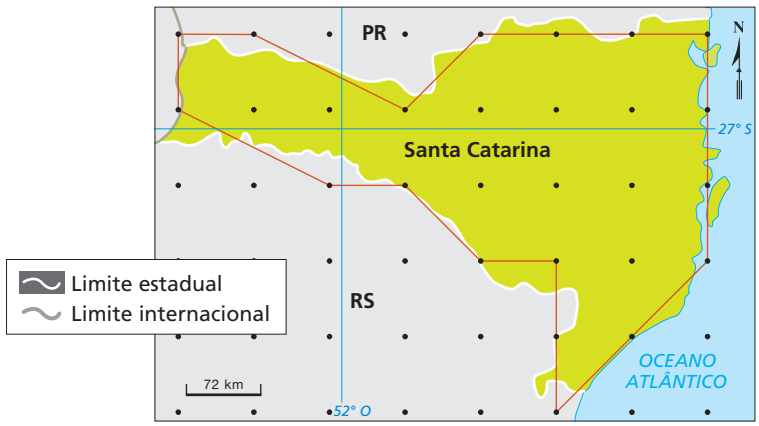
RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

TATIANE GALHEIRO/ARQUIVO DA EDITORA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

19. Uma curiosa aplicação da fórmula de Pick está no cálculo aproximado de áreas usando mapas geográficos. Por exemplo, para estimar a área de Santa Catarina usando essa fórmula, basta construir uma rede de pontos sobre o mapa cuja menor distância entre dois pontos seja 1 cm, e traçar um polígono com vértices na rede que mais se assemelhe ao estado.

Estado de Santa Catarina



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

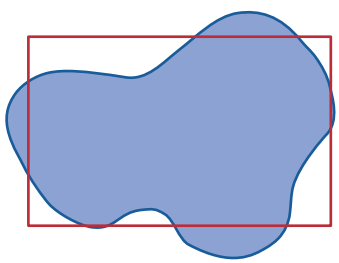
Fonte de pesquisa: IBGE. *Atlas geográfico escolar*. 9. ed. Rio de Janeiro, 2023. p. 180.

Por meio da fórmula de Pick e com o auxílio do mapa, calcule a área aproximada de Santa Catarina. Compare sua resposta com a área de Santa Catarina estimada pelo IBGE, que é 95 346,181 km^2.

Resposta: 88 128 km^2; Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes cheguem a uma boa aproximação da área estimada.

20. Para obter a área aproximada da região *R*, pode-se construir uma rede de pontos sobre ela, cuja menor distância entre dois pontos seja 1 cm, e traçar um polígono com vértices na rede que mais se assemelhe à região. Em seguida, aplica-se a fórmula de Pick.

Outra maneira de obter essa aproximação é construir sobre a região um retângulo cuja área seja aproximadamente igual à área de *R*, medir o comprimento dos lados do retângulo construído e calcular sua área.



RONALDO INÁCIO /ARQUIVO DA EDITORA

Observação

As regiões que ficam fora do retângulo compensam, mais ou menos, os espaços vazios do interior.

Com o auxílio de uma régua, meça o comprimento dos lados do retângulo e determine a área aproximada da região *R*. Resposta: 10 cm^2

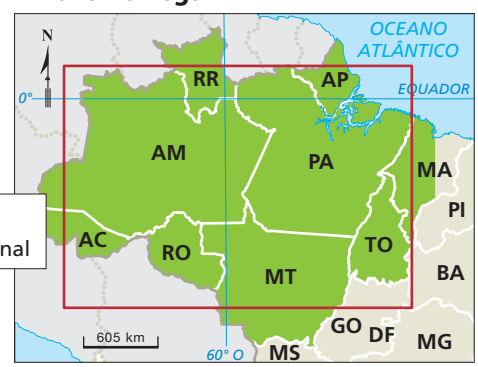
21. Para obter a área aproximada da Amazônia Legal, Aroldo aplicou o método apresentado na tarefa anterior.

a) Meça os lados do retângulo construído por Aroldo e determine a área aproximada da Amazônia Legal. Resposta: 5 387 888 km^2

b) Em uma das tarefas anteriores, verificamos que a área total desmatada da Amazônia Legal de 2009 até o fim de 2023 é aproximadamente 64 939 km^2. Quantos por cento da área da Amazônia Legal foram desmatados nesse período?

Resposta: Aproximadamente 1,2%.

Amazônia Legal



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Fonte de pesquisa: IBGE. *Amazônia Legal 2022*. Disponível em: https://geoftp.ibge.gov.br/organizacao_do_territorio/estrutura_territorial/amazonia_legal/2022/Mapa_da_Amazonia_Legal_2022_sem_sedes.pdf. Acesso em: 2 ago. 2024.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

DESENVOLVIMENTO SUSTENTÁVEL

As pessoas idosas e o direito de ir e vir

Professor, professora: Oriente os estudantes a consultar mais informações sobre os **Objetivos de Desenvolvimento Sustentável** (ODS) no início deste volume.

ODS 11

De acordo com o IBGE, a população idosa tem aumentado nos últimos anos. Em 1950, a quantidade de pessoas com 60 anos de idade ou mais no Brasil correspondia a cerca de 5% da população. Já em 2010, esse percentual era aproximadamente 10%, e projeções sugerem que, em 2050, chegue aos 29%. De acordo com o Ministério dos Direitos Humanos e da Cidadania, 47,7% das pessoas idosas são negras.

O envelhecimento da população brasileira está associado, entre outros fatores, ao aumento da esperança de vida ao nascer, que saltou de cerca de 69,8 anos em 2000 para, aproximadamente, 76,3 anos em 2018, e à redução da taxa de fecundidade.

Entre as causas do aumento da esperança de vida é possível mencionar avanços em políticas públicas relacionadas à saúde e à educação e fatores que favoreceram o desenvolvimento econômico do país nas últimas décadas.

Além disso, a criação do Estatuto da Pessoa Idosa, em 2003, contribuiu para assegurar diversos direitos às pessoas idosas. Você já ouviu falar desse documento? Conhece os direitos prescritos às pessoas idosas? Analise os exemplos a seguir.

Às pessoas idosas deve ser garantido o direito à vida, à saúde, à alimentação, ao lazer, à cultura e ao esporte.



LIGHT FIELD STUDIOS/SHUTTERSTOCK

Pessoas idosas praticando esporte ao ar livre, em 2023.

Toda pessoa idosa tem o direito de exercer atividade profissional, respeitando suas condições físicas, intelectuais e psíquicas.



WAVE BREAK MEDIA/SHUTTERSTOCK

Pessoa idosa trabalhando, em 2023.

Professor, professora: Se julgar conveniente, incentive os estudantes a pesquisar programas e ações públicas e privadas que estejam em execução no país, voltados para o bem-estar da pessoa idosa, tais como as ações da Secretaria Nacional dos Direitos da Pessoa Idosa (SNDPI), cujos principais objetivos são o fortalecimento da cidadania de pessoas idosas em situação de vulnerabilidade e das que são vítimas de discriminação múltipla pertencentes a grupos sociais caracterizados por diversidades histórica, social, étnico-racial, econômica, territorial, cultural e religiosa, na perspectiva da equidade e intersetorialidade.

O atendimento preferencial imediato e individualizado também é direito da pessoa idosa.



PEOPLEIMAGES - YURI A/SHUTTERSTOCK

Profissional da saúde prestando atendimento prioritário individual a uma pessoa idosa, em 2022.

ILUSTRAÇÕES: KEITHY MOSTACHI/ARQUIVO DA EDITORA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

O Estatuto da Pessoa Idosa prevê também o direito de acesso a vagas de estacionamentos de locais públicos e privados às pessoas idosas. Leia um trecho da lei a seguir.

> Art. 41. É assegurada a reserva para as pessoas idosas, nos termos da lei local, de 5% (cinco por cento) das vagas nos estacionamentos públicos e privados, as quais deverão ser posicionadas de forma a garantir a melhor comodidade à pessoa idosa.
>
> BRASIL. Ministério da Justiça. Lei nº 10.741, de 1º de outubro de 2003. Dispõe sobre o Estatuto da Pessoa Idosa e dá outras providências. *Diário Oficial da União*, Brasília, DF, 3 out. 2003. p. 3. Disponível em: https://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/2003/l10.741.htm. Acesso em: 2 ago. 2024.

LAÍS GARBELINI/ARQUIVO DA EDITORA

BETO CELLI/PULSAR IMAGENS



Sinalização vertical de vaga exclusiva para pessoa idosa.

Observação

Para estacionar nas vagas destinadas a pessoas idosas, é obrigatório o uso da credencial de estacionamento específica. Qualquer cidadão com mais de 60 anos de idade pode emitir essa credencial.

A sinalização das vagas exclusivas para pessoas idosas é vertical, com uma placa de sinalização, e horizontal, ou seja, por meio de um símbolo ou legenda de "Idoso", com numeração e marca delimitadora da vaga de estacionamento regular. A reserva dessas vagas às pessoas com 60 anos ou mais é uma maneira de garantir o acesso a espaços públicos seguros e inclusivos a elas.

Atividades

Anote as respostas no caderno.

Oriente os estudantes a escrever as respostas no caderno.

1. Você já conhecia o Estatuto da Pessoa Idosa? Junte-se a um colega, acessem o documento e citem outros direitos mencionados nele.

1. Resposta pessoal. Os estudantes podem citar a garantia de acesso à rede de serviços de saúde e de assistência social locais; o direito social ao envelhecimento; a garantia da liberdade, do respeito, da dignidade como pessoa humana e sujeito de direitos civis, políticos, individuais e sociais; garantia do sustento à pessoa idosa e sua família, caso não tenha condição; entre outros.

2. Em certo estacionamento há 500 vagas. Quantas dessas vagas, no mínimo, devem ser destinadas a pessoas idosas? Qual é a área total desse estacionamento que deve ser destinada a essas pessoas?

Resposta: 25 vagas de estacionamento destinadas a pessoas idosas. A área total de vagas destinadas a pessoas idosas é de 320,25 m².

3. Você já presenciou alguma situação em que uma pessoa idosa não teve seus direitos respeitados? Quais atitudes contribuiriam para que situações como essas não ocorressem? Converse sobre isso com os colegas e o professor.

Resposta pessoal. Incentive os estudantes a relatar situações em que presenciaram desrespeito a pessoas idosas, em espaços públicos ou privados, levando-os a perceber a importância de combater ações que resultam no etarismo, de modo que compreendam a relevância de serem ativos na promoção da inclusão e dos direitos das pessoas idosas.

4. Cite atitudes que podem contribuir para melhorar a qualidade de vida das pessoas idosas e de que maneira isso pode contribuir para o alcance do ODS 11.

Resposta pessoal. Os estudantes podem citar atitudes de respeito a pessoas idosas no dia a dia, como ceder lugar em assentos ou em filas; auxiliar na travessia de ruas, caso a pessoa idosa queira e permita; além de condutas que cooperem para que os direitos previstos no Estatuto de Pessoa Idosa sejam assegurados, como reservar vagas de estacionamento a pessoas idosas e não as ocupar sem ser parte desse grupo da população, dar atendimento preferencial etc. Espera-se que os estudantes compreendam que garantir a inclusão segura das pessoas idosas é um dos caminhos para que o ODS 11 seja alcançado.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Área do triângulo e do trapézio

Neste tópico, estudaremos expressões que possibilitam calcular a área de triângulos e de trapézios.

Professor, professora: Se julgar conveniente, oriente os estudantes a fazer as construções geométricas das figuras, a fim de auxiliá-los na dedução das expressões de cálculo de área.

Área do triângulo

Triângulo é todo polígono de três lados e três ângulos internos. Àquele em que um dos ângulos internos é reto, chamamos **triângulo retângulo**; o que tem todos os lados com comprimentos iguais, chamamos **triângulo equilátero**.

Considere o triângulo de base b e altura h, em que b e h são números reais positivos. Com outro triângulo congruente a esse, podemos compor um paralelogramo de altura h e base b.



A área A_P do paralelogramo pode ser calculada da seguinte maneira: $A_P = b \cdot h$.

Como a área A do triângulo é igual à metade da área do paralelogramo, temos:

$$A = \frac{b \cdot h}{2}$$

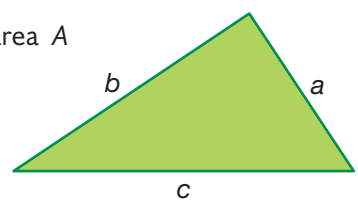
A área de um triângulo de base b e altura h é igual a $\frac{b \cdot h}{2}$.

Também podemos calcular a área de um triângulo conhecendo apenas os comprimentos de seus três lados.

No triângulo apresentado, a, b e c são os comprimentos dos lados.

Utilizando o semiperímetro $p = \frac{a + b + c}{2}$, podemos demonstrar que a área A desse triângulo pode ser calculada pela seguinte fórmula:

$$A = \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}$$



Professor, professora: Diga aos estudantes que o semiperímetro corresponde à metade da soma dos comprimentos de todos os lados de um polígono.

Observação

A fórmula $A = \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}$ para o cálculo da área de um triângulo é conhecida como fórmula de Herão, em homenagem ao matemático Herão de Alexandria, que viveu em algum período entre 150 a.C. e 250 d.C. Em sua obra *A métrica*, são tratadas as áreas de várias figuras planas e encontra-se a dedução dessa fórmula.

No caso do triângulo equilátero, podemos ainda calcular a área por meio de outra fórmula.

Calculamos a altura h e a área A de um triângulo equilátero em função do comprimento a do lado utilizando, respectivamente, as fórmulas $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ e $A = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Questão N. Prove que a afirmação apresentada na página anterior é verdadeira, ou seja, que a altura h e a área A de um triângulo equilátero, em função do comprimento a do lado, podem ser expressas, respectivamente, por $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ e $A = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.
Resposta no final do **Livro do Estudante**.

Questão O. Escreva um algoritmo que possibilite calcular a área de um triângulo equilátero, dado o comprimento de sua altura. Em seguida, organize-o em um fluxograma.
Resposta no final do **Livro do Estudante**.

Área do trapézio

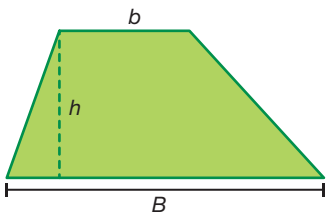
O processo de cálculo da área de um polígono qualquer é facilitado quando fazemos decomposições em polígonos como triângulos, retângulos, paralelogramos ou qualquer outro polígono cuja área seja conhecida.

Considere o trapézio de base maior B, base menor b e altura h, em que B, b e h são números reais positivos.

Trapézio é todo quadrilátero com apenas um par de lados paralelos.

A área de um trapézio de base maior B, base menor b e altura h é igual a:

$$\frac{(B + b) \cdot h}{2}$$

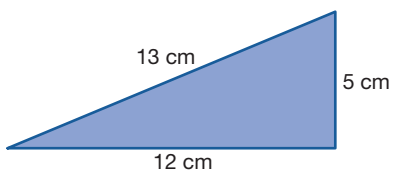


RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Questão P. Prove que a afirmação apresentada é verdadeira, ou seja, que a área A de um trapézio de base maior B, base menor b e altura h é igual a $A = \frac{(B + b) \cdot h}{2}$.
Resposta no final do **Livro do Estudante**.

Exercícios e problemas resolvidos

R4. Calcule a área do triângulo.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Resolução

Utilizando a fórmula do semiperímetro para $a = 5$, $b = 12$, $c = 13$, temos:

$$p = \frac{a + b + c}{2} = \frac{5 + 12 + 13}{2} = \frac{30}{2} = 15$$

$$A = \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)} = \sqrt{15(15 - 5)(15 - 12)(15 - 13)} =$$

$$= \sqrt{15 \cdot 10 \cdot 3 \cdot 2} = \sqrt{900} = 30$$

Portanto, a área do triângulo é 30 cm^2.

Observação

Professor, professora: Se julgar necessário, lembre os estudantes de que a recíproca do Teorema de Pitágoras também é válida.

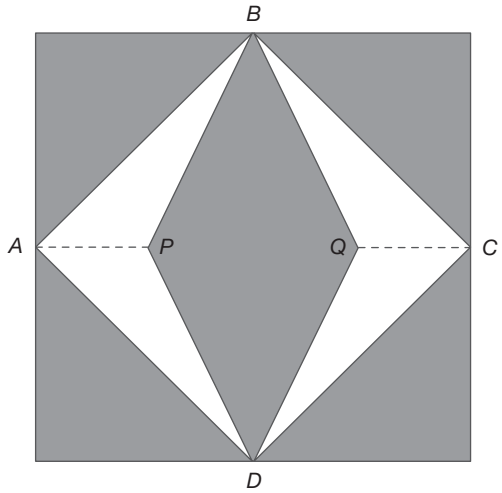
Como o triângulo é retângulo $(13^2 = 12^2 + 5^2)$, com 12 cm de base e 5 cm de altura, outra maneira de calcular sua área é:

$$A = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{12 \cdot 5}{2} = \frac{60}{2} = 30$$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

R5. (Enem, 2012) Para decorar a fachada de um edifício, um arquiteto projetou a colocação de vitrais compostos de quadrados de lado medindo 1 m, conforme a figura a seguir.

Professor, professora: No problema **R5**, por se tratar de uma questão do Enem, embora estejamos usando "comprimento do lado", aparece a palavra "medindo" para se referir ao comprimento do lado dos quadrados que compõem o vitral. Ao utilizar o termo "mede" nesse problema, essa medida refere-se ao comprimento do segmento.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA/ENEM 2012

Nesta figura, os pontos *A*, *B*, *C* e *D* são pontos médios dos lados do quadrado e os segmentos $\overline{AP}$ e $\overline{QC}$ medem $\frac{1}{4}$ da medida do lado do quadrado. Para confeccionar um vitral, são usados dois tipos de materiais: um para a parte sombreada da figura, que custa R$ 30,00 o m^2, e outro para a parte mais clara (regiões *ABPDA* e *BCDQB*), que custa R$ 50,00 o m^2.

De acordo com esses dados, qual é o custo dos materiais usados na fabricação de um vitral?

a) R$ 22,50 **c)** R$ 40,00 **e)** R$ 45,00

b) R$ 35,00 **d)** R$ 42,50

Resolução

Para solucionar esse problema, inicialmente calculamos a área A_1 da parte mais clara do vitral, que pode ser decomposta em 4 triângulos congruentes cujo comprimento da base é *AP*, ou seja, $\frac{1}{4}$ m, e o comprimento da altura é igual à metade do comprimento do lado do quadrado, que corresponde a $\frac{1}{2}$ m. Então:

$$A_1 = 4 \cdot \frac{\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}$$

Logo, a área da parte mais clara do vitral é $\frac{1}{4}$ m^2.

Vamos calcular, em seguida, a área A_2 da parte sombreada do vitral, que corresponde à diferença da área do quadrado, em metros quadrados, e a área da parte mais clara, também em metros quadrados. Então:

$$A_2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

Logo, a área da parte sombreada do vitral é $\frac{3}{4}$ m^2.

Por fim, determinamos o custo *C* dos materiais. Como o metro quadrado do material para confecção da parte sombreada custa R$ 30,00 e o metro quadrado do material para confecção da parte mais clara custa R$ 50,00, fazemos:

$$C = A_1 \cdot 50 + A_2 \cdot 30$$

$$C = \frac{1}{4} \cdot 50 + \frac{3}{4} \cdot 30$$

$$C = 35$$

Desse modo, o custo dos materiais usados na confecção de um vitral é R$ 35,00.

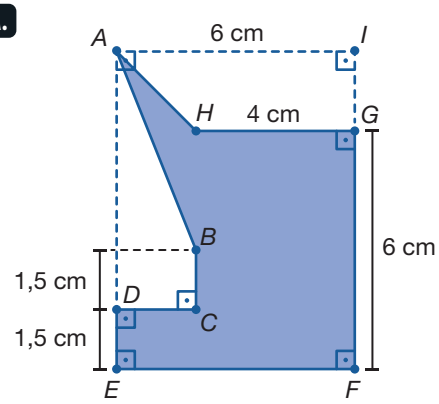
Portanto, a alternativa correta é a **b**.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

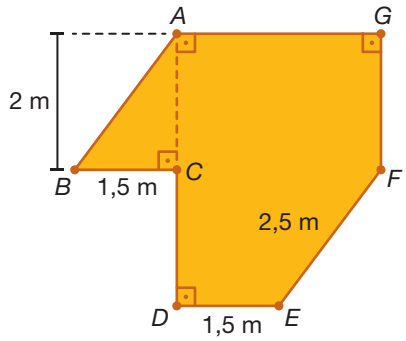
R6. Calcule a área de cada polígono a seguir.

Imagens sem proporção entre si.

A.

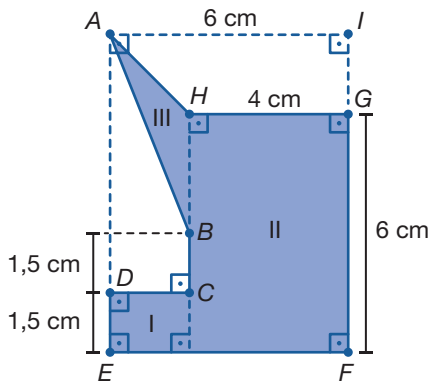


B.



Resolução

A. Inicialmente, vamos decompor o polígono *ABCDEFGH* em outros cuja expressão de cálculo de área conhecemos.



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Nesse caso, obtemos o retângulo I, o retângulo II e o triângulo III.

Assim, a área do polígono *ABCDEFGH*, a qual indicaremos por *A*, é igual a:

$$A = A_{I} + A_{II} + A_{III}$$

Nesse cálculo, A_{I}, A_{II} e A_{III} indicam, respectivamente, a área do retângulo I, do retângulo II e do triângulo III.

Assim:

$$A = (6 - 4) \cdot 1{,}5 + 4 \cdot 6 + \frac{(6 - 1{,}5 - 1{,}5) \cdot (6 - 4)}{2}$$

$$A = 3 + 24 + 3$$

$$A = 30$$

B. Portanto, a área do polígono *ABCDEFGH* é igual a 30 cm².

Professor, professora: Se achar necessário, ao trabalhar o item **B**, retome com os estudantes algumas transformações geométricas, a fim de que eles compreendam de maneira significativa o processo de reconfiguração do polígono.

Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo *ABC*, temos:

$$(AB)^2 = (BC)^2 + (AC)^2$$

$$(AB)^2 = 1{,}5^2 + 2^2$$

$$(AB)^2 = 2{,}25 + 4$$

$$AB = \sqrt{6{,}25} = 2{,}5$$

Observação

Note que $AB = 2{,}5$, pois $AB > 0$.

Como $AB = 2{,}5$ cm, podemos reconfigurar o polígono *ABCDEFG* transladando o triângulo *ABC* de maneira que $\overline{AB}$ e $\overline{EF}$ coincidam. Desse modo, obtemos o retângulo *ADCG*, cuja área, a qual indicaremos por A_r, sabemos calcular.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

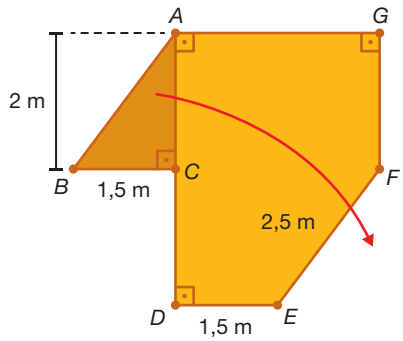


Imagem original.

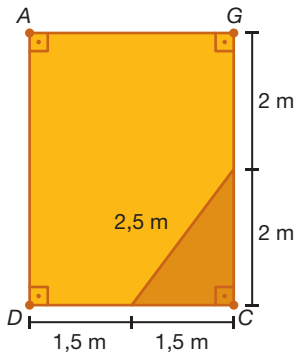


Imagem com o triângulo *ABC* transladado.

ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Assim:

$$A_r = (1{,}5 + 1{,}5) \cdot (2 + 2) = 3 \cdot 4 = 12$$

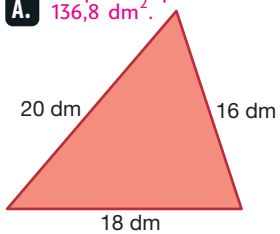
Portanto, a área do retângulo *ADCG* é igual a 12 m² e, consequentemente, a área do polígono *ABCDEFG* é igual a 12 m².

Exercícios e problemas

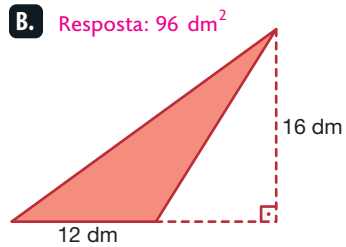
Anote as respostas no caderno.

22. Calcule a área de cada triângulo.

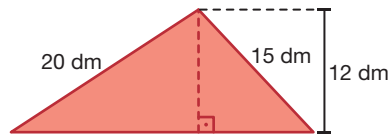
A. Resposta: Aproximadamente 136,8 dm².



B. Resposta: 96 dm²

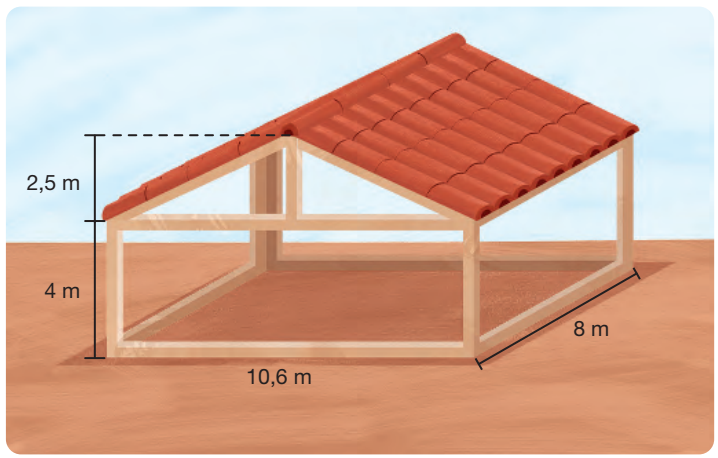


C. Resposta: 150 dm²



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

23. Em certo sítio, o proprietário construiu uma estrutura de madeira, como a ilustrada a seguir, que será utilizada como armazém. Essa construção ocupará uma superfície retangular, e suas paredes, portas e janelas serão construídas com tábuas de madeira.



LEONARDO GIBRAN/ARQUIVO DA EDITORA

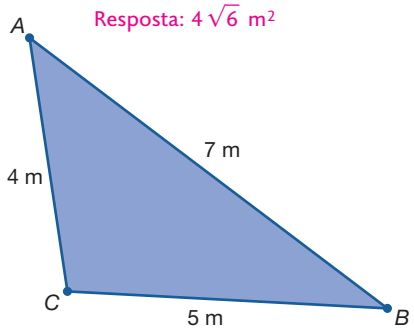
a) Qual será a área da superfície ocupada por esse armazém? Resposta: 84,8 m²

b) Sabendo que as portas e janelas ocuparão 8 m² e que as vigas verticais, utilizadas na estrutura, são perpendiculares às vigas horizontais, determine quantos metros quadrados de madeira, no mínimo, serão necessários para construir as paredes desse armazém. Resposta: 167,3 m²

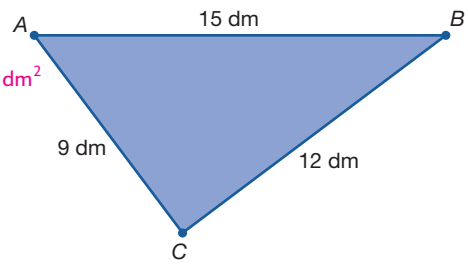
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

24. Aplicando a fórmula de Herão, calcule a área dos triângulos apresentados a seguir.

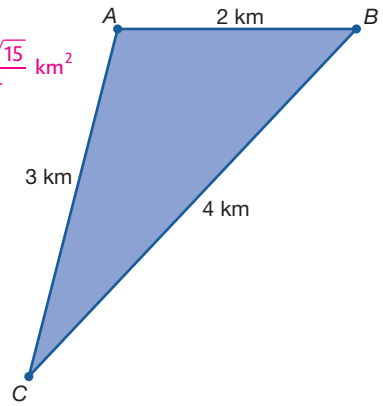
A. Resposta: $4\sqrt{6}$ m²



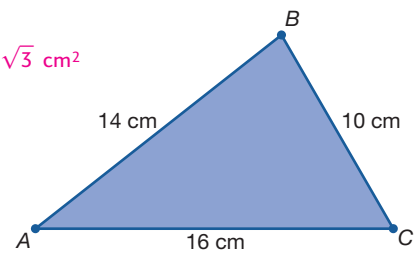
B. Resposta: 54 dm²



C. Resposta: $\frac{3\sqrt{15}}{4}$ km²



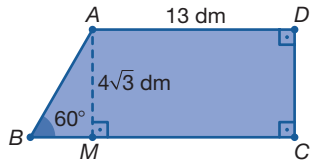
D. Resposta: $40\sqrt{3}$ cm²



25. Em um triângulo retângulo, o comprimento de um dos catetos é $\sqrt{3}$ cm e o da hipotenusa, $2\sqrt{2}$ cm. Determine o comprimento do outro cateto e a área desse triângulo. Resposta: $\sqrt{5}$ cm; $\frac{\sqrt{15}}{2}$ cm²

26. Qual é o comprimento da altura de um triângulo equilátero cuja área é $9\sqrt{3}$ cm²? Resposta: $3\sqrt{3}$ cm

27. Calcule a área do trapézio a seguir. Resposta: $60\sqrt{3}$ dm²

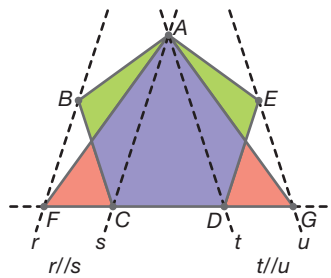


RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

28. Classifique a afirmativa a seguir em verdadeira ou falsa. Depois, justifique sua resposta.

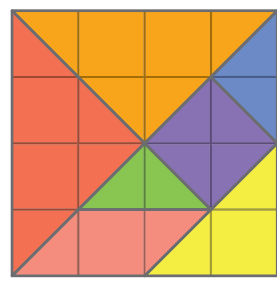
"Na figura, as áreas do pentágono *ABCDE* e do triângulo *AFG* são iguais."

Resposta no final do **Livro do Estudante**.



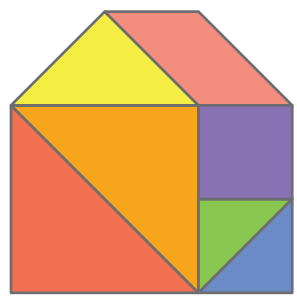
RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

29. O tangram é um dos mais famosos quebra-cabeças do mundo e talvez seja o mais antigo. Ele surgiu há mais de 4 mil anos. A união de suas sete peças forma um quadrado.



Tangram em uma malha quadriculada.

Reconfigurando as peças do tangram, podemos formar várias figuras, como o hexágono a seguir.



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

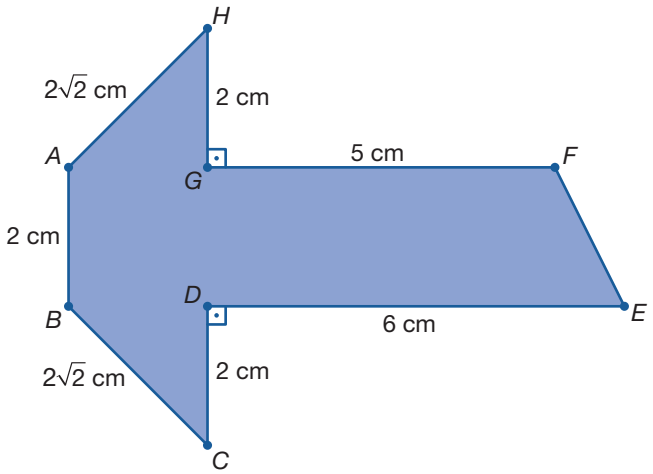
Determine a área desse hexágono sabendo que a peça em formato de paralelogramo (peça não quadrada) tem 10 cm² de área. Resposta: 80 cm²

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: TATIANE GALHEIRO/ARQUIVO DA EDITORA

30. Sabendo que $\overline{DE} // \overline{GF}$ e que os pontos *A*, *G* e *F* são colineares, assim como os pontos *B*, *D* e *E*, determine a área do polígono *ABCDEFGH*.

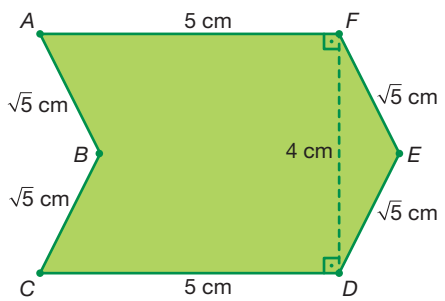
Resposta: 19 cm²



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

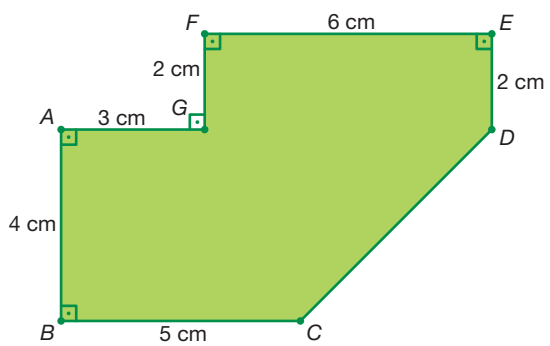
31. Em cada item, determine a área do polígono.

A.



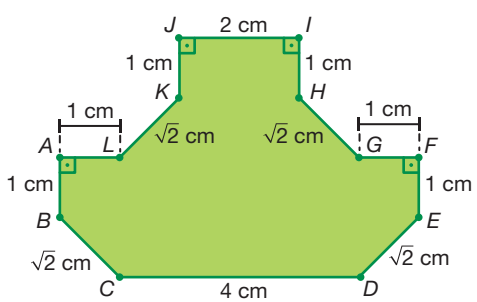
Resposta: 20 cm²

B.



Resposta: 40 cm²

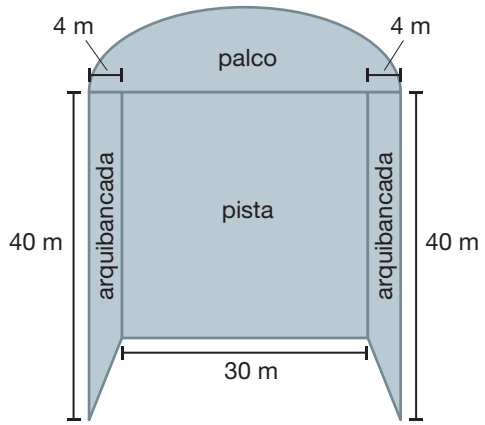
C.



Resposta: 16 cm²

ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

32. Para comemorar o aniversário de certa cidade, haverá um *show* musical. Os espaços destinados ao público, nesse evento, têm formato de trapézio retângulo (arquibancadas) e de quadrado (pista). Analise a seguir o esquema que representa o local onde esse evento será realizado.

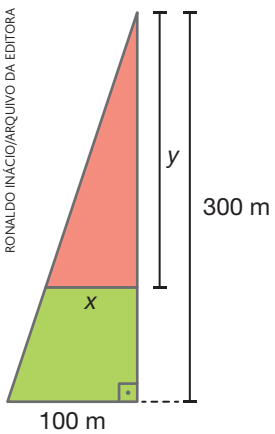


RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Para melhor acomodação do público, estipulou-se que haverá no máximo 6 pessoas por metro quadrado. Com base nessas informações, determine o público máximo que esse evento poderá receber.

Resposta: 7 080 pessoas.

33. Pedro é um pequeno produtor de tomates e alfaces. Ele dividiu seu terreno triangular em duas partes: uma em formato de triângulo retângulo e outra em formato de trapézio, como representado na imagem.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Observação

Você consome produtos de sua região? Esses itens são provenientes da agricultura familiar, de povos indígenas ou de comunidades quilombolas? O apoio à agricultura familiar, por meio de políticas públicas, pode ajudar a garantir a autonomia alimentar dessas comunidades e contribuir para o abastecimento regional, oferecendo alimentos a preços mais acessíveis.

Sabendo que, nessa divisão, ambas as partes têm áreas iguais, determine os valores de *x* e *y*.

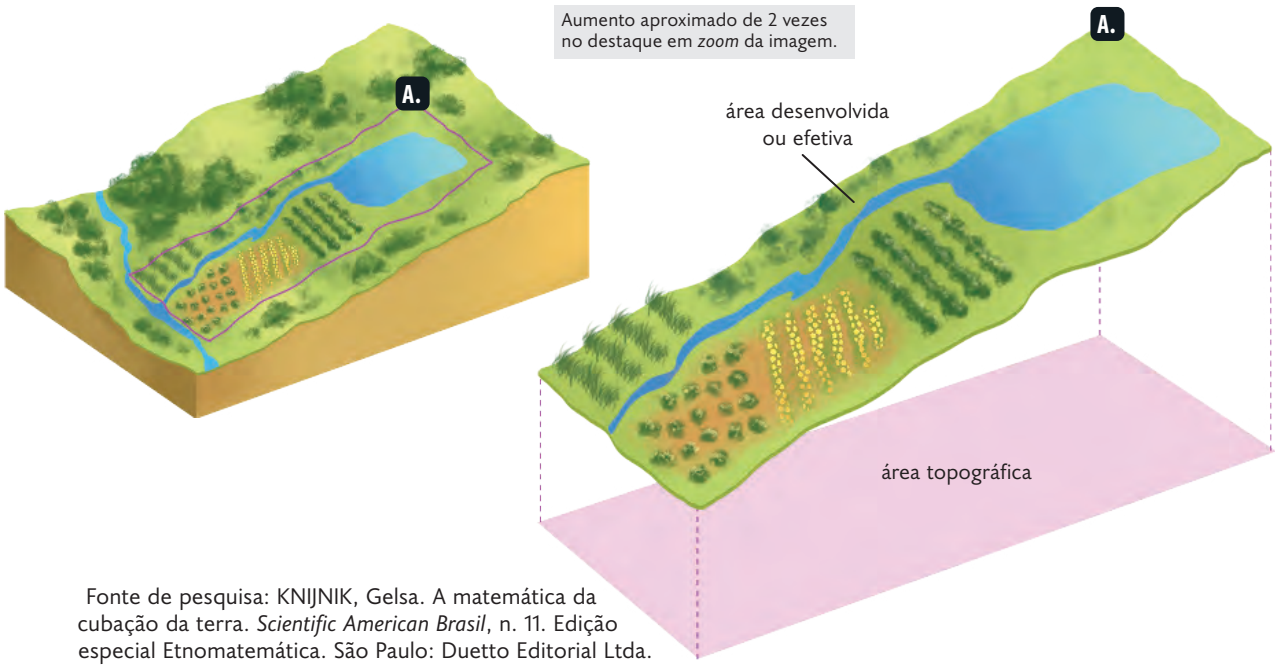
Resposta: $x = 50\sqrt{2}$ m e $y = 150\sqrt{2}$ m

34. Considere o quadrado *ABCD*, cuja área é 9 cm², e os pontos *F* e *G* pertencentes, respectivamente, às diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ desse quadrado, de maneira que $\overline{FG}$ seja paralelo ao lado $\overline{AB}$. Sabendo que *E* é o ponto de interseção dessas diagonais e que $EF = \frac{1}{3}AB$, determine a área do triângulo *EFG*.

Resposta: 0,5 cm²

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

35. A cubação é um método popular de medição de terra que tem origem ainda na Antiguidade, com os egípcios. O método consiste em medir o contorno do terreno cuja área será calculada considerando seus acidentes de relevo (inclinações, ondulações, entre outros), geralmente com o auxílio de cordas, assim como os antigos faziam. A área obtida nesse sistema costuma ser denominada efetiva ou desenvolvida. Embora o método de medição considerado para escrituras legais seja o da medição topográfica, na qual é realizada a projeção do contorno do terreno sobre um plano horizontal, a cubação é utilizada por muitos camponeses de pequenas propriedades rurais para previsões de plantio, financiamentos de safra etc.

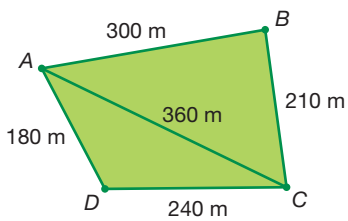


ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Fonte de pesquisa: KNIJNIK, Gelsa. A matemática da cubação da terra. *Scientific American Brasil*, n. 11. Edição especial Etnomatemática. São Paulo: Duetto Editorial Ltda.

O método da cubação consiste em aproximar figuras para facilitar o cálculo da área aproximada do terreno. No exemplo a seguir, a região indicada pelo quadrilátero *ABCD* é aproximada por um retângulo *A'B'C'D'*.

Região real



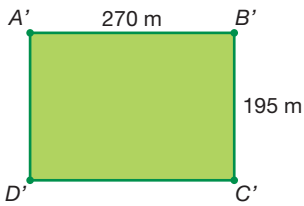
RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

$A_1 = \sqrt{435 \cdot 135 \cdot 225 \cdot 75} + \sqrt{390 \cdot 210 \cdot 30 \cdot 150}$

$A_1 = 50\,677{,}56$

Área real: $50\,677{,}56\ m^2$

Região aproximada



SERGIO L. FILHO/ARQUIVO DA EDITORA

$A_2 = 270 \cdot 195 = 52\,650$

Área aproximada: $52\,650\ m^2$

a) Resposta: O quadrilátero *ABCD* foi decomposto em dois triângulos: *ABC* e *ADC*. O cálculo da área desses triângulos foi obtido por meio da fórmula de Herão $A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, em que a, b e c são os comprimentos dos lados, e $p = \frac{a+b+c}{2}$ é o semiperímetro do triângulo.

Dica

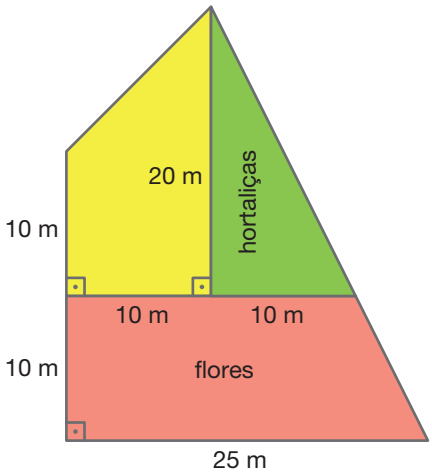
O comprimento do retângulo *A'B'C'D'* foi obtido calculando a média aritmética entre *AB* e *CD*. Já a altura foi obtida pela média aritmética entre *AD* e *BC*.

a) Qual processo foi considerado para calcular a área real da região de acordo com o quadrilátero *ABCD* no esquema apresentado?

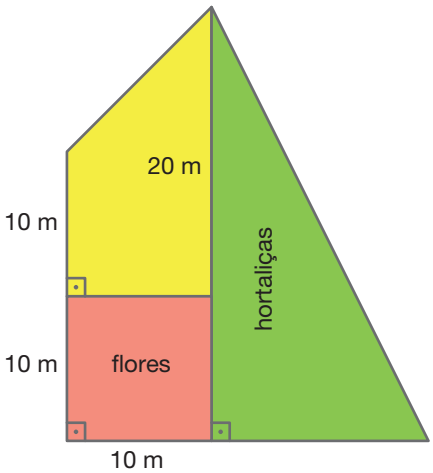
b) Suponha que um terreno tenha a forma de um trapézio isósceles com os lados medindo 500 m, 200 m, 500 m e 800 m. Qual é a área aproximada desse terreno pelo método da cubação? Resposta: $250\,000\ m^2$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

36. Na casa de Eunice, há uma região destinada ao plantio de flores e outra, ao plantio de hortaliças.



Devido à alta exposição de suas flores ao sol, Eunice vai remanejar as regiões de plantio. O esquema a seguir mostra como será a nova distribuição.



De acordo com as informações apresentadas, após o remanejamento, a região destinada ao plantio: Resposta: Alternativa **e**.

a) de flores diminuirá em 125%.

b) de flores diminuirá em 10% e a de hortaliças aumentará em 50%.

c) de hortaliças diminuirá em 50% e o de flores aumentará em, aproximadamente, 55,56%.

d) de hortaliças diminuirá em 20%.

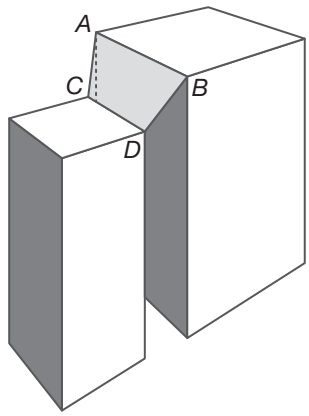
e) de flores diminuirá em, aproximadamente, 55,56% e o de hortaliças aumentará em 125%.

37. Considere o losango de diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$, inscrito em uma circunferência de centro O e raio 2 cm. Determine a área do triângulo OEF, em que E é ponto médio de $\overline{AB}$ e F, ponto médio de $\overline{BC}$. Resposta: 1 cm²

38. Escreva um algoritmo que determine a área de um triângulo equilátero, dado seu perímetro. Em seguida, organize-o em um fluxograma. Resposta no final do **Livro do Estudante**.

39. Construa um quadrilátero que não seja um paralelogramo ou um trapézio e indique as medidas de seus lados. Depois, troque com um colega para cada um determinar a área aproximada, pelo método de cubação, do quadrilátero construído pelo outro. Resposta pessoal. Orientações sobre esta tarefa no **Suplemento para o professor**.

40. (Fuvest-SP, 2019) Uma empresa estuda cobrir um vão entre dois prédios (com formato de paralelepípedos reto-retângulos) que têm paredes laterais paralelas, instalando uma lona na forma de um quadrilátero, com pontas presas nos pontos A, B, C e D, conforme indicação da figura.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA/FUVEST-SP 2019

Sabendo que a lateral de um prédio tem 80 m de altura e 28 m de largura, que a lateral do outro prédio tem 60 m de altura e 20 m de largura e que essas duas paredes laterais distam 15 m uma da outra, a área total dessa lona seria de:

a) 300 m²

b) 360 m²

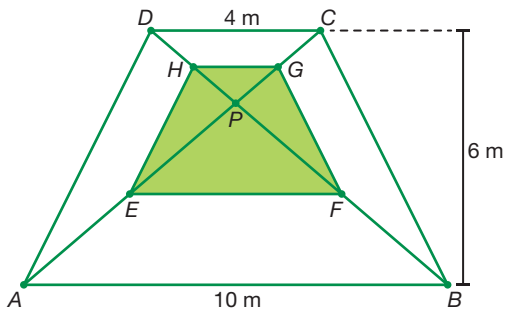
c) 600 m²

d) 720 m²

e) 1200 m²

Resposta: Alternativa **c**.

41. Luiz deseja reduzir a área de seu jardim. Para se planejar, ele construiu o seguinte esquema, em que o jardim atual está representado pelo trapézio isósceles $ABCD$.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Sabendo que o novo jardim de Luiz está representado pelo trapézio $EFGH$ e que E, F, G e H são pontos médios de $\overline{AP}$, $\overline{BP}$, $\overline{CP}$ e $\overline{DP}$, determine sua área. Resposta: 10,5 m²

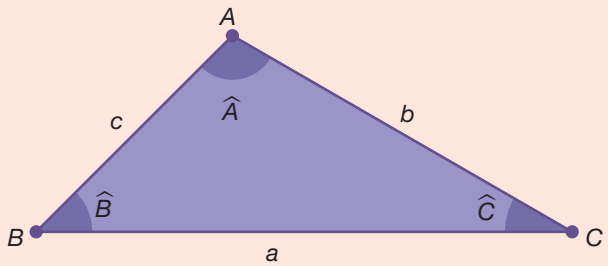
ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Cálculo da área de um triângulo utilizando Trigonometria

Neste tópico, estudaremos como calcular a área de um triângulo conhecendo os comprimentos de dois de seus lados e a medida do ângulo formado por eles.

Para todo triângulo *ABC*, sua área é dada pelo semiproduto dos comprimentos de dois lados quaisquer pelo seno do ângulo por eles formado.

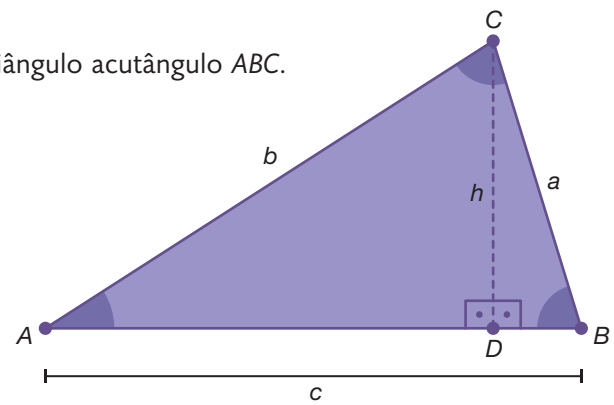


$$S = \frac{bc \cdot \operatorname{sen}\hat{A}}{2} \qquad S = \frac{ac \cdot \operatorname{sen}\hat{B}}{2} \qquad S = \frac{ab \cdot \operatorname{sen}\hat{C}}{2}$$

Para demonstrar essas fórmulas, consideraremos o triângulo acutângulo *ABC*.

Do triângulo retângulo *ACD*, temos:

$$\operatorname{sen}\hat{A} = \frac{h}{b} \Rightarrow h = b \cdot \operatorname{sen}\hat{A}$$



Como a área *S* do triângulo *ABC* é dada por $S = \frac{c \cdot h}{2}$, segue que:

$$S = \frac{c \cdot h}{2} = \frac{c \cdot \overbrace{b \cdot \operatorname{sen}\hat{A}}^{h}}{2} = \frac{bc \cdot \operatorname{sen}\hat{A}}{2}$$

De maneira análoga, podemos demonstrar as fórmulas $S = \frac{ac \cdot \operatorname{sen}\hat{B}}{2}$ e $S = \frac{ab \cdot \operatorname{sen}\hat{C}}{2}$.

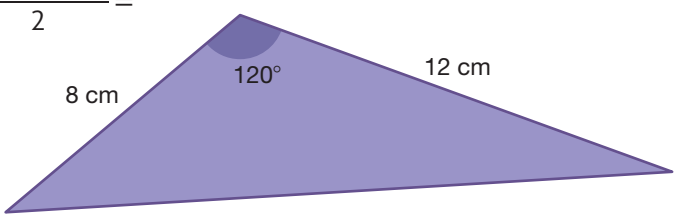
Para triângulos obtusângulos e triângulos retângulos, podemos demonstrar as fórmulas de maneira semelhante à apresentada.

Exemplo

Vamos calcular a área *S* do triângulo apresentado.

$$S = \frac{8 \cdot 12 \cdot \operatorname{sen}120°}{2} = \frac{8 \cdot 12 \cdot \overbrace{\operatorname{sen}60°}^{\operatorname{sen}(180° - 120°)}}{2} = \frac{8 \cdot 12 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} =$$

$$= 24\sqrt{3} \simeq 41{,}57$$



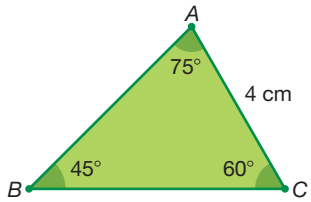
Portanto, $S \simeq 41{,}57\ \text{cm}^2$.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Exercícios e problemas resolvidos

R7. Determine a área do triângulo *ABC*.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Resolução

Inicialmente, calculamos o comprimento do lado $\overline{AB}$, em centímetros, por meio da lei dos senos.

$$\frac{AB}{\text{sen } 60°} = \frac{AC}{\text{sen } 45°} \Rightarrow \frac{AB}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{4}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \Rightarrow AB = \frac{2\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \Rightarrow AB = \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{6}$$

Em seguida, aplicamos a fórmula da área de um triângulo qualquer.

$$S = \frac{4 \cdot 2\sqrt{6} \cdot \text{sen } 75°}{2} \simeq \frac{4 \cdot 2\sqrt{6} \cdot 0{,}966}{2} \simeq 9{,}46$$

Portanto, a área do triângulo é aproximadamente 9,46 cm².

Observação

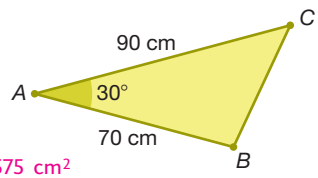
O valor de sen75° pode ser consultado na tabela trigonométrica ou obtido em uma calculadora científica, por exemplo.

Exercícios e problemas

Anote as respostas no caderno.

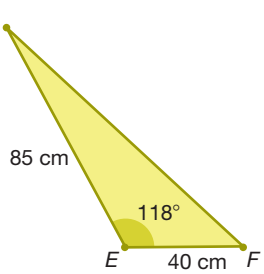
42. Determine a área de cada triângulo.

A.



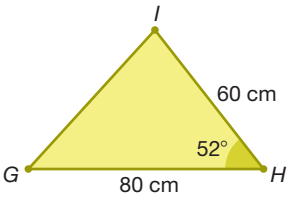
Resposta: 1575 cm²

B.



Resposta: Aproximadamente 1501,1 cm².

C.



Resposta: Aproximadamente 1891,2 cm².

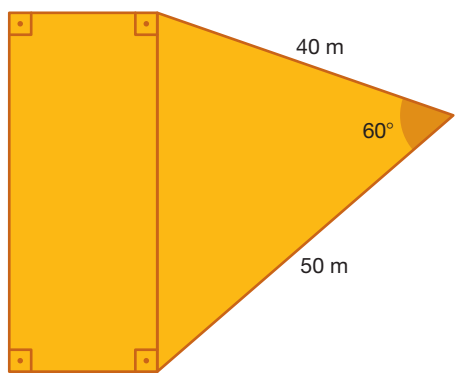
ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

43. Calcule a área do:

a) triângulo *ABC*, sabendo que os comprimentos de dois de seus lados medem 36 cm e 42 cm e a medida do ângulo formado por eles é 65°.
Resposta: Aproximadamente 684,9 cm².

b) triângulo *GHI*, sabendo que os comprimentos de dois de seus lados medem 90 cm e 90 cm e a medida do ângulo formado por eles é 43°.
Resposta: Aproximadamente 2 762,1 cm².

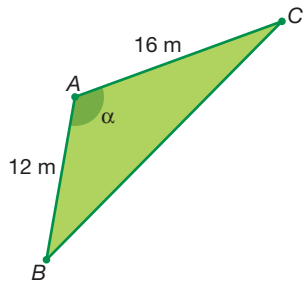
44. Dois terrenos vizinhos, um retangular e outro triangular, têm áreas iguais. De acordo com as medidas indicadas, determine as dimensões aproximadas do terreno retangular.
Resposta: 18,9 m e 45,8 m



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

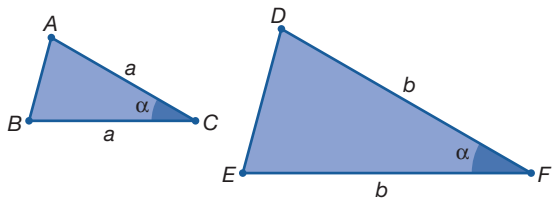
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

45. A área do triângulo *ABC* é 83,1 m^2, e o ângulo α, formado entre os lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$, é obtuso. De acordo com as medidas indicadas na figura, calcule a medida de α. Resposta: Aproximadamente 120°.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

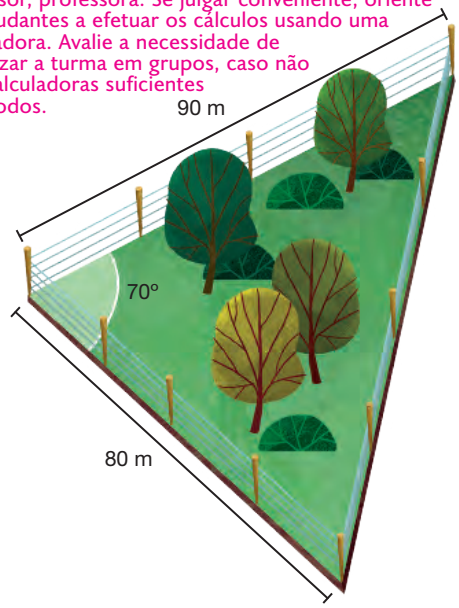
46. Sejam S_1 e S_2 as áreas dos triângulos *ABC* e *DEF*, respectivamente. Sabendo que $S_2 = 3 \cdot S_1$, calcule a razão $\frac{b}{a}$. Resposta: $\frac{b}{a} = \sqrt{3}$



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

47. Uma cerca foi construída em volta de um terreno triangular em que dois dos lados têm 90 m e 80 m de comprimento, e o ângulo formado entre eles mede 70°. Sabendo que a cerca tem 4 fios de arame em cada trecho, calcule o comprimento total de arame utilizado em sua construção e o comprimento da área cercada.

Professor, professora: Se julgar conveniente, oriente os estudantes a efetuar os cálculos usando uma calculadora. Avalie a necessidade de organizar a turma em grupos, caso não haja calculadoras suficientes para todos.



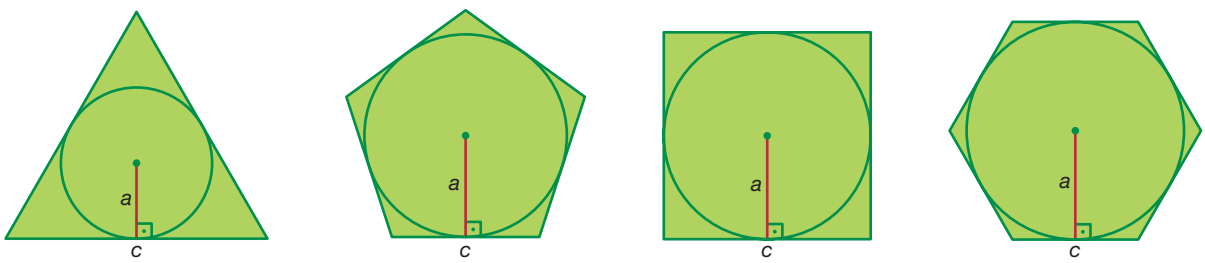
LEONARDO GIBRAN/ARQUIVO DA EDITORA

Resposta: Aproximadamente 1072 m; aproximadamente 3384 m^2.

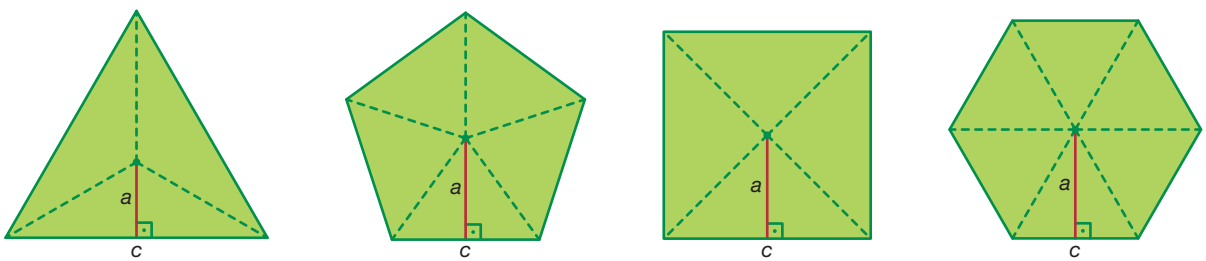
Área de polígonos regulares

Vimos que os polígonos regulares são os que têm todos os lados congruentes e todos os ângulos internos também congruentes.

Em todo polígono regular pode ser inscrita uma circunferência. O raio de uma circunferência inscrita em um polígono regular é o **apótema** do polígono. Nos exemplos a seguir, *a* é o comprimento do apótema dos polígonos regulares.



Os polígonos regulares a seguir foram decompostos em triângulos isósceles congruentes.



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Os polígonos de n lados da página anterior foram decompostos em n triângulos congruentes. Podemos obter a área de cada um desses polígonos calculando a área de um triângulo e multiplicando o resultado pela quantidade de lados correspondentes.

Aprendemos que, para calcular a área A de um triângulo, podemos multiplicar o comprimento da base b pelo da altura h e dividir o resultado por 2, isto é, aplicar a fórmula $A = \frac{b \cdot h}{2}$. No caso dos triângulos em que os polígonos regulares foram decompostos, a base é um dos lados do polígono, e a altura é o apótema.

Assim, podemos indicar a área A de um polígono regular de n lados com comprimento c da seguinte maneira:

$$A = n \cdot \frac{c \cdot a}{2}$$

Podemos escrever essa fórmula de outra maneira.

$$A = \underbrace{\frac{n \cdot c}{2}}_{p} \cdot a \Rightarrow A = p \cdot a$$

Nesse cálculo, p é o semiperímetro do polígono regular e a é o comprimento do apótema.

Observação

Na fórmula, $\frac{n \cdot c}{2}$ corresponde ao semiperímetro de um polígono regular, pois:

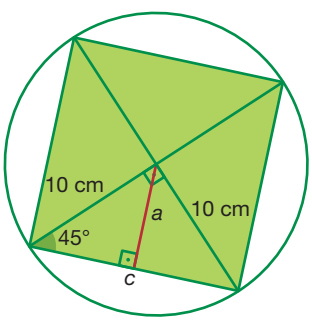
$$\frac{n \cdot c}{2} = \frac{\overbrace{c + c + c + \ldots + c}^{n \text{ fatores } c}}{2} = p$$

Exercícios e problemas resolvidos

R8. Calcule a área de um quadrado inscrito em uma circunferência de raio 10 cm.

Resolução

O quadrado pode ser decomposto em 4 triângulos congruentes.



OHANNA SCHMITT/ARQUIVO DA EDITORA

Observação

As diagonais de um quadrado se intersectam formando 4 ângulos retos. Além disso, elas são bissetrizes dos ângulos internos do quadrado.

Vamos calcular a área desse quadrado de duas maneiras.

1ª maneira

Vamos usar a fórmula estudada neste tópico. Nesse caso, precisamos determinar a medida do comprimento do apótema a e do lado c do quadrado. Para isso, fazemos:

- $\text{sen}45° = \frac{a}{10} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{a}{10} \Rightarrow a = 5\sqrt{2}$
- $c^2 = 10^2 + 10^2 \Rightarrow c = 10\sqrt{2}$

Dessa maneira, a área A do quadrado é:

$$A = 4 \cdot \frac{10\sqrt{2} \cdot 5\sqrt{2}}{2} = 200$$

Portanto, a área do quadrado inscrito em uma circunferência de raio 10 cm é 200 cm^2.

2ª maneira

Basta notar que o quadrado pode ser decomposto em 4 triângulos retângulos congruentes cujo comprimento da base é 10 cm e cujo comprimento da altura mede 10 cm. Nesse caso, a área A desse quadrado é dada por:

$$A = 4 \cdot \frac{10 \cdot 10}{2} = 200$$

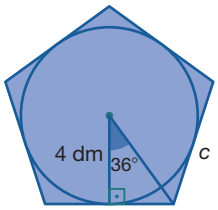
Portanto, a área do quadrado inscrito em uma circunferência de raio 10 cm mede 200 cm^2.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

R9. Determine a área de um pentágono regular circunscrito a uma circunferência de raio 4 dm. (Considere $\text{tg}36° = 0{,}73$).

Resolução

O raio da circunferência determina o comprimento do apótema a do pentágono de lado c.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Na figura, temos um triângulo retângulo de catetos medindo a e $\frac{c}{2}$. O ângulo central da circunferência, que corresponde a um dos ângulos do triângulo, mede:

$$\frac{360°}{10} = 36°$$

Assim, segue que:

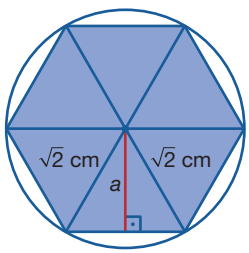
$$\text{tg}36° = \frac{\frac{c}{2}}{4} \Rightarrow 0{,}73 = \frac{c}{8} \Rightarrow c = 5{,}84$$

Dessa maneira, $c = 5{,}84$ dm e, consequentemente, a área do pentágono é:

$$A = n \cdot \frac{c \cdot a}{2} = 5 \cdot \frac{5{,}84 \cdot 4}{2} = 58{,}4$$

Portanto, a área do pentágono é aproximadamente 58,4 dm^2.

R10. Qual é a área de um hexágono regular inscrito em uma circunferência de raio $\sqrt{2}$ cm?



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Resolução

O hexágono pode ser decomposto em 6 triângulos equiláteros de lado $\sqrt{2}$ cm, conforme apresenta a figura.

Podemos calcular a área do hexágono de duas maneiras.

1ª maneira

Inicialmente, obtemos o comprimento, em centímetros, do apótema do hexágono, aplicando a fórmula do comprimento da altura do triângulo equilátero.

$$h = a = \frac{c\sqrt{3}}{2} \Rightarrow a = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

Em seguida, substituímos na fórmula $A = n \cdot \frac{c \cdot a}{2}$:

$$A = 6 \cdot \frac{\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{6}}{2}}{2} = 6 \cdot \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{6}}{2 \cdot 2} = \frac{6 \cdot \sqrt{12}}{4} = \frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$$

Portanto, a área do hexágono é $3\sqrt{3}$ cm^2.

2ª maneira

Calculamos a área de seis triângulos equiláteros de lado $\sqrt{2}$ cm.

$$A = 6 \cdot \underbrace{\frac{c^2 \cdot \sqrt{3}}{4}}_{\substack{\text{área do} \\ \text{triângulo} \\ \text{equilátero}}} = 6 \cdot \frac{\left(\sqrt{2}\right)^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 3 \cdot \frac{2\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$$

Portanto, a área do hexágono é $3\sqrt{3}$ cm^2.

Professor, professora: Se julgar necessário, relembre os estudantes de que um triângulo equilátero tem três lados com comprimentos iguais, ou seja, é um caso particular de triângulo isósceles.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Acessando tecnologias

Área de polígonos regulares

Professor, professora: É possível desenvolver o trabalho com esta seção utilizando o GeoGebra, um *software* dinâmico de Matemática que representa conceitos de Geometria e Álgebra. Disponível em: https://www.geogebra.org/. Acesso em: 13 ago. 2024.

Nesta seção, calcularemos a área de polígonos regulares com o auxílio de um *software* de Geometria dinâmica. Vamos, por exemplo, calcular a área de um hexágono regular de lados com 5 cm.

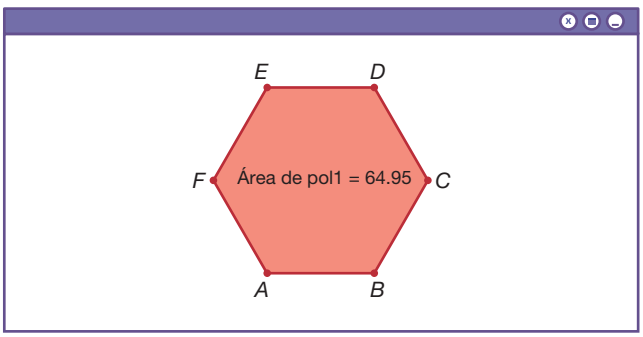
A. Construa $\overline{AB}$, tal que $AB = 5$ cm. Para isso, selecione a ferramenta **Segmento com Comprimento Fixo** e marque o ponto A.

B. Na janela **Segmento com Comprimento Fixo**, digite o comprimento de $\overline{AB}$, que nesse caso é 5.

C. Utilizando a ferramenta **Polígono Regular**, clique sobre os pontos A e B.

D. Na janela **Polígono Regular**, digite a quantidade de vértices do polígono, que nesse caso é 6.

E. Com a ferramenta **Área**, clique no hexágono construído.



Portanto, a área do hexágono regular de lados 5 cm é aproximadamente 64,95 cm^2.

Observação

A área obtida nesse exemplo é uma aproximação com duas casas decimais. Para obter uma aproximação com mais casas decimais, clique na aba **Global**, em **Configurações**, e selecione no item **Arredondamento** a quantidade de casas decimais desejadas.

Agora é sua vez!

1. Calcule a área de um:

- triângulo equilátero de lados 6 cm.
  Resposta: Aproximadamente 15,59 cm^2.
- hexágono regular de lados 2 m.
  Resposta: Aproximadamente 10,39 m^2.
- pentágono regular de lados 7 dm.
  Resposta: Aproximadamente 84,3 dm^2.
- dodecágono regular de lados 1 mm.
  Resposta: Aproximadamente 11,2 mm^2.

2. Junte-se a dois colegas e, utilizando um *software* de Geometria dinâmica, determinem a área de um triângulo equilátero e de um pentágono regular cujos comprimentos do apótema deles sejam, respectivamente, 7 cm e 3 dm. Resposta: A área do triângulo é aproximadamente 254,61 cm^2 e a do pentágono é aproximadamente 32,69 dm^2.

3. Escreva um algoritmo que possibilite calcular a área de um polígono regular qualquer, dados o comprimento do apótema, a quantidade de lados e o comprimento de cada um deles. Em seguida, organize-o em um fluxograma. Resposta no final do **Livro do Estudante**.

4. Escreva um programa em Scratch que resolva o problema proposto a seguir.
Resposta no final do **Livro do Estudante**.

Determinar a área de um polígono regular qualquer, dados o comprimento de seu apótema, a quantidade de lados e o comprimento de cada um deles.

SERGIO L. FILHO/ARQUIVO DA EDITORA
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Razão entre áreas de figuras planas

Você já estudou que, quando dois polígonos são semelhantes, a razão entre o comprimento de seus lados correspondentes é igual. Vamos considerar os seguintes triângulos semelhantes.



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Como os triângulos são semelhantes, temos:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{h_1}{h_2} = k$$

Calculando a razão entre as áreas dos triângulos ABC e $A'B'C'$, obtemos:

$$\frac{A_{ABC}}{A_{A'B'C'}} = \frac{\frac{m_1 \cdot h_1}{2}}{\frac{m_2 \cdot h_2}{2}} = \frac{m_1 \cdot h_1}{m_2 \cdot h_2} = \frac{m_1}{m_2} \cdot \frac{h_1}{h_2} = k \cdot k = k^2$$

Podemos verificar que a razão entre as áreas de dois triângulos semelhantes é igual ao quadrado da razão de proporcionalidade. Essa propriedade ocorre não somente para os triângulos, mas para quaisquer duas regiões semelhantes.

Dica

Lembre-se de que a área de um triângulo pode ser calculada por meio da fórmula $A = \frac{b \cdot h}{2}$.

Observação

O resultado k é chamado razão de proporcionalidade.

Exemplo

As áreas de dois triângulos semelhantes são, respectivamente, 5 cm^2 e 45 cm^2. Sabendo que o comprimento do maior lado do 1º triângulo é 5 cm, podemos obter o comprimento do maior lado do 2º triângulo da seguinte maneira.

$$k^2 = \frac{45}{5} \Rightarrow k^2 = 9 \Rightarrow k = 3$$

Assim:

$$k = \frac{x}{5} \Rightarrow 3 = \frac{x}{5} \Rightarrow x = 15$$

Portanto, o comprimento do maior lado do 2º triângulo mede 15 cm.

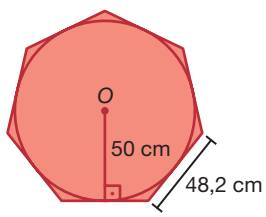
Exercícios e problemas

Anote as respostas no caderno.

48. Em cada item, calcule a área do polígono regular.

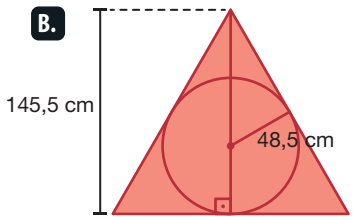
ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

A.



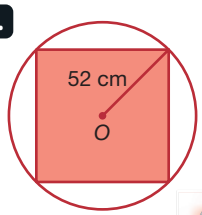
Resposta: 8 435 cm^2

B.



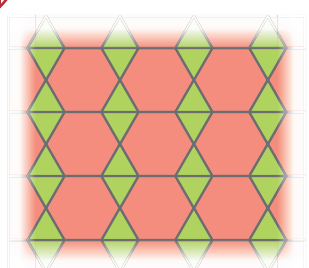
Resposta: Aproximadamente 12 222 cm^2.

C.



Resposta: 5 408 cm^2

49. Em determinada praça de 3 000 m^2 de área, serão assentadas lajotas de dois formatos, hexágonos regulares e triângulos equiláteros, seguindo o padrão proposto.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

De acordo com as informações e desconsiderando desperdícios e o espaço do rejunte, calcule quantos metros quadrados de cada tipo de lajota serão utilizados para cobrir toda a área da praça.

Resposta: Hexágonos regulares: 2 250 m^2; triângulos equiláteros: 750 m^2.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

50. Neste capítulo, aprendemos a fórmula para a área de um triângulo qualquer deduzida por Herão, em sua obra *A métrica*. Essa fórmula é válida porque qualquer triângulo pode ser inscrito em uma circunferência, o que não ocorre, por exemplo, para todos os quadriláteros.

Em trabalhos posteriores, creditados a matemáticos hindus, foi deduzida uma extensão da fórmula de Herão, válida para quadriláteros que podem ser inscritos em uma circunferência. Essa fórmula pode ser escrita como:

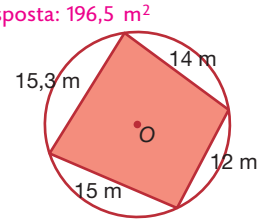
$$A = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$

Nesta fórmula, a, b, c, d são os comprimentos dos lados do quadrilátero, p é o semiperímetro e A é a área.

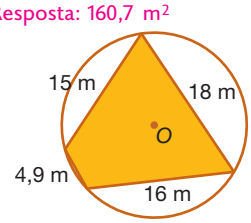
Aplicando essa fórmula, calcule a área aproximada de cada quadrilátero inscrito na circunferência de centro O.

Professor, professora: Na tarefa **51**, por se tratar de uma questão do Enem, embora estejamos usando "comprimento do lado", por exemplo, cita-se a palavra "mediam" para se referir ao comprimento do lado da base retangular. Ao empregar o termo "mede" nesse problema, essa medida refere-se ao comprimento do segmento.

A. Resposta: 196,5 m²



B. Resposta: 160,7 m²



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

51. (Enem, 2013) A cerâmica constitui-se em um artefato bastante presente na história da humanidade. Uma de suas várias propriedades é a retração (contração), que consiste na evaporação da água existente em um conjunto ou bloco cerâmico quando submetido a uma determinada temperatura elevada. Essa elevação de temperatura, que ocorre durante o processo de cozimento, causa uma redução de até 20% nas dimensões lineares de uma peça.

Disponível em: https://arq.ufsc.br/. Acesso em: 3 mar. 2012.

Suponha que uma peça, quando moldada em argila, possuía uma base retangular cujos lados mediam 30 cm e 15 cm. Após o cozimento, esses lados foram reduzidos em 20%.

Em relação à área original, a área da base dessa peça, após o cozimento, ficou reduzida em:

a) 4% **b)** 20% **c)** 36% **d)** 64% **e)** 96%

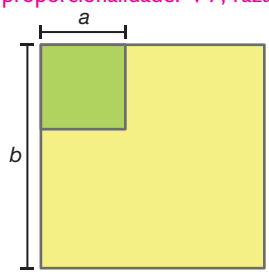
Resposta: Alternativa **c**.

52. Calcule a razão entre as áreas de dois decágonos regulares, considerando que os comprimentos de seus lados são, respectivamente, 9 cm e 3 cm.

Resposta: 9

53. Na figura estão ilustrados dois quadrados. Sabe-se que a razão entre a área da região amarela e a área da região verde é 6. Com base nessas informações, determine a razão de proporcionalidade entre o quadrado maior e o menor, bem como a razão entre suas áreas.

Resposta: Razão de proporcionalidade: $\sqrt{7}$; razão entre as áreas: 7.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

54. Amrita Sher-Gil (1912-1941) é reconhecida como uma das artistas modernas mais célebres da Índia. Ela estudou na *École des Beaux Arts* de Paris, onde foi influenciada pelo Realismo. Ao retornar à Índia, ela adotou essa abordagem modernista para retratar a vida pobre, porém colorida, da população local, resultando em uma arte que harmonizava perfeitamente o Oriente e o Ocidente.

A seguir é apresentada a reprodução de uma das obras dessa artista.



GALERIA NACIONAL DE ARTE MODERNA, NOVA DELI

Two Women, de Amrita Sher-Gil. Óleo sobre tela, 74 cm × 100 cm, 1935.

Utilizando uma régua, meça as dimensões dessa reprodução e determine a razão R entre a área da imagem original e a área da reprodução.

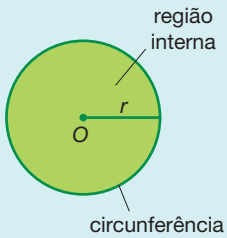
Resposta: Aproximadamente 93,3.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Área do círculo

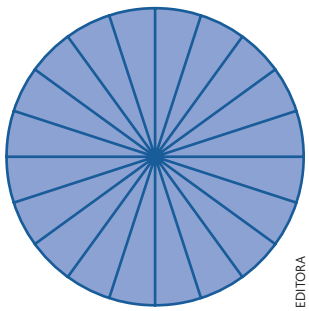
Observação

Ao reunir a circunferência e todos os seus pontos internos, obtemos uma figura denominada **círculo**. Em um círculo, podemos destacar os seguintes elementos:

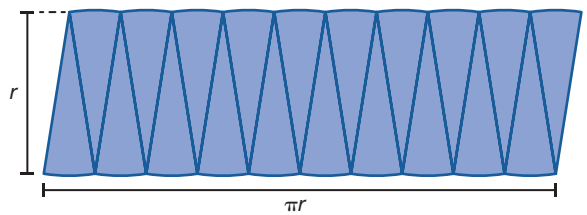


OBJETO DIGITAL
***Mapa clicável*:** Mapa de símbolos proporcionais

Podemos calcular a área A de um círculo por meio da fórmula $A = \pi r^2$, cuja dedução envolve conceitos que não serão estudados. Contudo, vamos analisar uma maneira que auxilia na compreensão dessa fórmula. Inicialmente, dividimos um círculo em 20 partes iguais.



Depois, organizamos cada uma dessas partes e obtemos uma figura que lembra um paralelogramo, cuja altura é aproximadamente o comprimento do raio do círculo, e o comprimento da base é cerca da metade do comprimento da circunferência, isto é, $\frac{2\pi r}{2} = \pi r$.



Professor, professora: Se julgar necessário, explique aos estudantes que a dedução da fórmula da área do círculo envolve o conceito de limite.

ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

A área A de um paralelogramo é dada pelo produto entre o comprimento de sua base b e sua altura h.

$$A_p = b \cdot h \Rightarrow \pi r \cdot r = \pi r^2$$

Como a figura que lembra o paralelogramo foi obtida com as partes do círculo, então a área A do círculo é dada por $A = \pi r^2$.

A área de um círculo de raio r é igual a πr^2.

Exemplo

Vamos calcular a área aproximada de um círculo de raio 7 cm.

$$A = \pi r^2 \Rightarrow A = 3{,}14 \cdot 7^2 = 3{,}14 \cdot 49 \simeq 154$$

Portanto, a área aproximada do círculo é 154 cm^2.

Observação

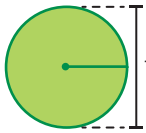
No exemplo, considerou-se $\pi = 3{,}14$.

Antes de a área exata de um círculo ser conhecida, muitos estudiosos obtiveram aproximações com uma precisão impressionante, levando em consideração os recursos disponíveis na época. Entre os inúmeros problemas citados no Papiro de Rhind, documento egípcio que data de cerca de 1650 a.C., está uma aproximação para a área do círculo a qual é considerada igual à área de um quadrado cujo comprimento do lado é igual a $\frac{8}{9}$ do comprimento do diâmetro do círculo dado.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Por exemplo, um círculo de diâmetro 1 cm tem área aproximada à de um quadrado de lado $\frac{8}{9}$ cm.

Círculo



$A_c = \pi \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2$

$A_c \simeq 0{,}785 \text{ cm}^2$

Quadrado

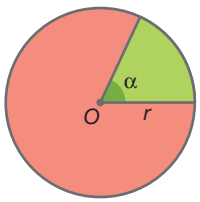


$A_q = \left(\frac{8}{9}\right)^2$

$A_q \simeq 0{,}790 \text{ cm}^2$

Área do setor circular

A parte indicada em verde no círculo de raio r corresponde a um setor circular determinado por um ângulo central α (em graus).



Ao dobrar a medida do ângulo central, a área do setor dobra; ao triplicar a medida do ângulo central, a área do setor triplica; e assim por diante. Nesse caso, a área do setor circular e o ângulo central que o determina são grandezas diretamente proporcionais. Assim, utilizando regra de três simples, podemos calcular a área A_s desse setor circular.

Ângulo (em graus)	Área
360	πr^2
α	A_s

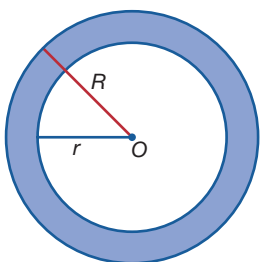
$$\frac{360}{\alpha} = \frac{\pi r^2}{A_s} \Rightarrow A_s \cdot 360 = \alpha \cdot \pi r^2 \Rightarrow A_s = \frac{\alpha}{360}\pi r^2$$

A área A_s de um setor circular, de uma circunferência de raio r determinado por um ângulo central α, é dada por:

$$A_s = \frac{\alpha}{360^\circ}\pi r^2$$

Área da coroa circular

A região indicada em azul corresponde a uma coroa circular.



Observação

Duas circunferências são **concêntricas** quando têm o mesmo centro. A região compreendida entre essas duas circunferências é denominada **coroa circular**.

Professor, professora: Os estudantes devem perceber que é possível resolver problemas relacionados à área do setor circular e da coroa circular sem aplicar fórmulas específicas, utilizando apenas a fórmula da área do círculo.

Calculamos a área A_c da coroa circular determinada pelas circunferências concêntricas de raios R e r, com $R > r$, aplicando a fórmula $A_c = \pi\left(R^2 - r^2\right)$.

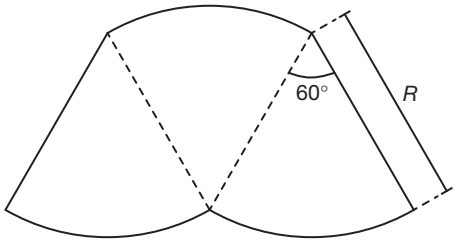
Questão Q. Prove que a afirmação apresentada é verdadeira, ou seja, que a área da coroa circular determinada pelas circunferências concêntricas de raios R e r, com $R > r$, é dada por $A_c = \pi\left(R^2 - r^2\right)$. Resposta: A área da coroa circular pode ser obtida calculando-se a diferença entre a área do círculo de raio R e a área do círculo de raio r, isto é: $A_c = \pi R^2 - \pi r^2 \Rightarrow A_c = \pi\left(R^2 - r^2\right)$.

Questão R. Escreva um algoritmo que possibilite determinar a área da coroa circular, dado o comprimento dos raios das circunferências que a determinam. Em seguida, organize esse algoritmo em um fluxograma. Resposta no final do **Livro do Estudante**.

ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Exercícios e problemas resolvidos

R11. (Enem, 2015) O proprietário de um parque aquático deseja construir uma piscina em suas dependências. A figura representa a vista superior dessa piscina, que é formada por três setores circulares idênticos, com ângulo central igual a 60°. O raio R deve ser um número natural.



TATIANE GALHEIRO/ARQUIVO DA EDITORA/ENEM 2015

O parque aquático já conta com uma piscina em formato retangular com dimensões 50 m × 24 m. O proprietário quer que a área ocupada pela nova piscina seja menor do que a ocupada pela piscina já existente. Considere 3,0 como aproximação para π. O maior valor possível para R, em metros, deverá ser:

a) 16 **b)** 28 **c)** 29 **d)** 31 **e)** 49

Resolução

Inicialmente calculamos, em metros quadrados, a área A_r ocupada pela piscina retangular e a área A_s ocupada pela piscina com setores circulares.

- $A_r = 50 \cdot 24 = 1\,200$
- $A_s = 3 \cdot \left(\frac{60}{360} \cdot 3 \cdot R^2\right) = \frac{3}{2}R^2$

Do enunciado, devemos ter $A_s < A_r$. Assim:

$$\frac{3}{2}R^2 < 1\,200 \Rightarrow R^2 < 800$$

Como $\underbrace{28^2}_{784} < 800 < \underbrace{29^2}_{841}$ e R tem de ser o maior número natural possível, segue que $R = 28$ m.

Portanto, a alternativa correta é a **b**.

R12. A partir de 2002, passou a circular no Brasil um novo modelo de moeda de 1 real. Ela tem um núcleo prateado composto de aço inoxidável e um anel externo dourado, que lembra uma coroa circular, composto de aço revestido de bronze.



BANCO CENTRAL DO BRASIL

Essa moeda apresenta, entre outras características, algumas grafias encontradas em cerâmicas de origem indígena, fazendo referência às raízes étnicas brasileiras. Essas características da moeda de 1 real são importantes elementos de segurança para evitar fraudes. Calcule a área aproximada da coroa circular dourada da moeda de 1 real. (Considere π = 3,14).

Observação

Nesse cálculo, $R = 13{,}5 = \frac{27}{2}$ e $r = 9 = \frac{18}{2}$.

Resolução

A área da coroa circular é dada por:

$$A_c = \pi\left(R^2 - r^2\right) = 3{,}14\left(13{,}5^2 - 9^2\right) = 3{,}14 \cdot 101{,}25 \simeq 318$$

Portanto, a área da coroa dourada da moeda de 1 real é aproximadamente 318 mm^2.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

TRABALHO E JUVENTUDES

Qual é a função de um pedreiro?

Entre os profissionais da construção civil, o pedreiro desempenha um papel fundamental na execução de projetos arquitetônicos. A atuação desse profissional se faz necessária desde o início até o fim da construção, ou seja, desde o momento da fundação até o acabamento do empreendimento.

O ofício dessa profissão envolve habilidades manuais que exigem certa agilidade e esforço físico, além de conhecimentos matemáticos para desenvolver suas tarefas. Os pedreiros aplicam a Matemática em várias situações, como medir comprimentos, calcular ângulos e áreas, estimar a quantidade de materiais necessários, além de fazer o orçamento do serviço e prever o término da construção. Em muitas das etapas do trabalho, geralmente esses profissionais se apropriam de conceitos da Geometria, como de razão e proporção, e ativam o raciocínio lógico para desenvolverem operações aritméticas.

Diversas ferramentas e alguns maquinários auxiliam os pedreiros nesse trabalho, sendo essenciais em seu dia a dia, como régua, esquadro, compasso, prumo, trena, mangueira de nivelamento, martelo, serras, pás, picaretas, furadeiras e betoneiras. Na realização do serviço, eles trabalham em grupo com outros profissionais da construção civil. Entre eles estão serventes, pintores, encanadores, eletricistas e outros pedreiros. Além dessas interações, eles ainda mantêm contato direto com o engenheiro e com o arquiteto da obra.

1. Sugestão de resposta: A Matemática é importante para executar diversas etapas de seu trabalho, como calcular a área a fim de saber a quantidade de materiais necessários para a construção, estimar orçamentos, delimitar as medições do terreno, aplicar os conhecimentos relacionados às medidas de comprimento, aplicar noções de Geometria para erguer alicerces, calcular volume e porcentagem, entre outras funções.



JOA SOUZA/SHUTTERSTOCK

Pedreiros trabalhando na construção de uma escola pública no município de Ilhéus, BA, em 2023.

PARA EXPANDIR

Que tal conhecer o local de trabalho de um pedreiro? Nessa visita, aproveite para conhecer mais sobre o dia a dia desse profissional. Também é possível usar essa visita para fazer a entrevista proposta na atividade **2**.

Observação

Ainda não há um curso superior específico para se tornar pedreiro. Contudo, os profissionais da área geralmente se qualificam por meio de cursos profissionalizantes e aprimoram seus conhecimentos técnicos com a experiência diária da prática da profissão.

Professor, professora: Ao realizar a visita a um canteiro de obras, certifique-se de que todos os estudantes estejam devidamente equipados com EPIs, a fim de garantir a integridade física deles e evitar acidentes.

Atividades

Anote as respostas no caderno.

Oriente os estudantes a escrever as respostas no caderno.

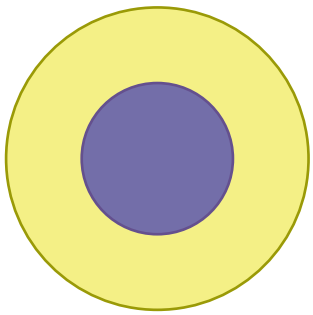
1. Por meio de um exemplo prático, explique qual é a importância da Matemática para o trabalho de um pedreiro.

2. Convidem um pedreiro para uma entrevista. Para isso, ele pode ir à escola ou vocês podem entrevistá-lo remotamente. Antes disso, preparem as questões a fim de obterem diferentes informações. Perguntem quais são as tarefas executadas por esse profissional na construção civil, quais foram os motivos que o levaram a escolher essa profissão, quais dificuldades ele enfrenta no trabalho, como ele aplica a Matemática em suas atividades profissionais, entre outros questionamentos.

2. Resposta pessoal. Oriente os estudantes a contatar o profissional a ser entrevistado e a elaborar as questões para a entrevista. Se a entrevista for realizada remotamente, auxilie-os também na preparação dos materiais necessários.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

55. Márcio vai confeccionar um tapete para o quarto de sua filha. Para isso, inicialmente, ele fez um projeto do trabalho, conforme apresentado a seguir.



OHANNA SCHMITT/ARQUIVO DA EDITORA

Dica

Nas tarefas desta seção, sempre que necessário, considere $\pi = 3{,}14$.

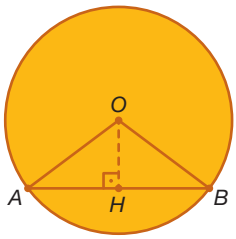
Para construir esse projeto, ele traçou dois círculos concêntricos: um de raio 5 cm e outro de raio 10 cm. Sabendo que esse projeto está na escala 1 : 8, determine qual será, em metros quadrados, a área da região:

a) roxa do tapete. Resposta: Aproximadamente 0,5 m².

b) amarela do tapete.
Resposta: Aproximadamente: 1,5 m².

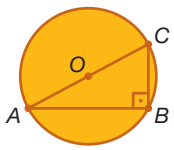
56. Em cada item, determine a área do círculo de centro O.

a) $AB = 8$ cm e $OH = 3$ cm.
Resposta: 25π cm².



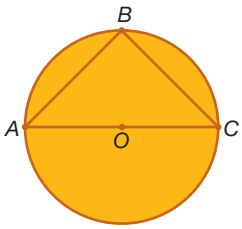
RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

b) $AB = 2\sqrt{7}$ cm e $BC = 2\sqrt{2}$ cm.
Resposta: 9π cm².



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

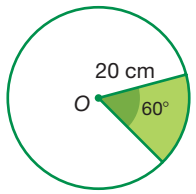
c) $AB = BC = 6$ cm.
Resposta: 18π cm².



TATIANE GALHEIRO/ARQUIVO DA EDITORA

57. Calcule a área de cada setor em verde.

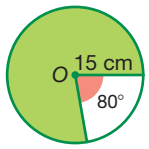
A.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Resposta: $\frac{200\pi}{3}$ cm²

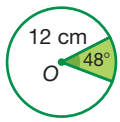
C.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Resposta: 175π cm²

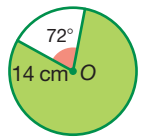
B.



TATIANE GALHEIRO/ARQUIVO DA EDITORA

Resposta: $19{,}2\pi$ cm²

D.



TATIANE GALHEIRO/ARQUIVO DA EDITORA

Resposta: $156{,}8\pi$ cm²

58. Considere as circunferências C_1 e C_2 de raios r_1 e r_2, respectivamente. Sabendo que a área de C_1 é igual a $\frac{16}{3}\pi$ e que $r_2 = 1{,}5 \cdot r_1$, determine a área de C_2. Resposta: 12π

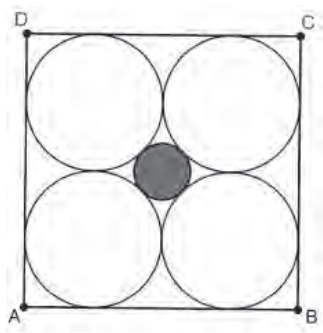
59. (Unicamp, 2024) Sr. Gauss tem uma *pizzaria*, chamada π-zzaria, que vende dois tipos de *pizzas* circulares: uma individual, de diâmetro d; e uma de 20 cm de diâmetro, partida em quatro pedaços iguais.

Considerando que o preço de uma *pizza* é proporcional à sua área, qual precisa ser o valor de d para que quatro *pizzas* individuais custem o mesmo que a *pizza* mencionada, de quatro pedaços?

a) 6 cm **b)** 8 cm **c)** 10 cm **d)** 12 cm

Resposta: Alternativa **c.**

60. (UFRGS, 2024) Na figura abaixo, $ABCD$ é um quadrado de lado 4. Os quatro círculos maiores são tangentes aos lados do quadrado e tangentes entre si. O círculo menor sombreado tangencia os círculos maiores.



UFRGS 2024

A área do círculo sombreado é

a) $\pi(3 - 2\sqrt{2})$.

b) $2\pi(3 - \sqrt{2})$.

c) $2\pi(3 - 2\sqrt{2})$.

d) $4\pi(3 - \sqrt{2})$.

e) $4\pi(3 - 2\sqrt{2})$.

Resposta: Alternativa **a.**

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

61. Um grande marco para a agricultura irrigada foi o sistema de irrigação de pivô central. Essa técnica é composta de uma gigantesca haste, que gira em torno do próprio eixo, na qual estão fixados as tubulações, os aspersores e outros componentes. O pivô central tem várias vantagens em relação a outros sistemas. Uma delas é que, ao completar um ciclo de irrigação, o equipamento chega ao mesmo lugar em que estava inicialmente, pronto para iniciar outro ciclo. Sabendo que em certa propriedade há uma área circular de 7 850 m² irrigada por um único pivô central, calcule, aproximadamente, o comprimento da haste desse pivô.

Resposta: 50 m

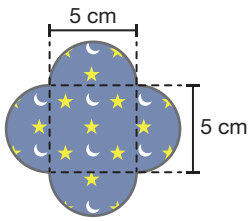


ADRIANO KIRIHARA/PULSAR IMAGENS

Vista aérea de lavouras de café irrigadas por pivô central, no município de Cristalina, GO, em 2018.

OBJETO DIGITAL ***Infográfico clicável*:** Sistema de irrigação por pivô central fixo

62. Na confecção de um tapete de retalhos, uma costureira usou 20 pedaços de tecido, como ilustrado a seguir.

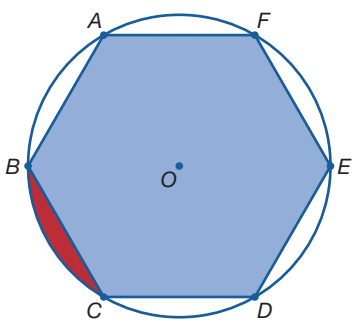


RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Considerando que o pedaço de tecido pode ser dividido em um quadrado e quatro semicírculos iguais, determine, de acordo com as medidas indicadas, quantos centímetros quadrados de tecido foram utilizados na confecção do tapete.

Resposta: Aproximadamente 1285 cm².

63. Considere o hexágono regular *ABCDEF* inscrito na circunferência de centro *O*.



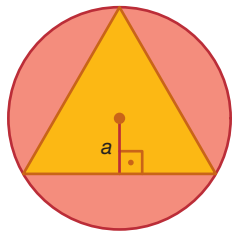
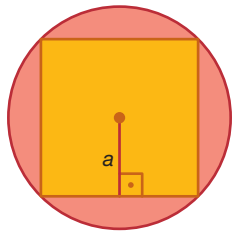
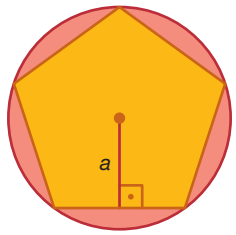
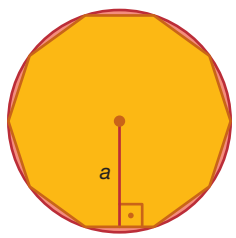
OHANNA SCHMITT/ARQUIVO DA EDITORA

Sabendo que o raio da circunferência mede 5 cm, determine a área da região destacada em vermelho.

Resposta: $\frac{50\pi - 75\sqrt{3}}{12}$ cm²

64. Analise a sequência de figuras em que estão ilustrados polígonos regulares de *n* lados inscritos em círculos de raio 100 cm.

Sequência de polígonos regulares de *n* lados inscritos em círculos de raio 100 cm

n	Figura	*a*
3		50 cm
4		70,7 cm
5		80,9 cm
⋮	⋮	⋮
10		95,1 cm
⋮	⋮	⋮

ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

a) Qual é a área aproximada de cada círculo?

Resposta: 31 400 cm²

b) Calcule a área aproximada dos polígonos ilustrados na sequência.

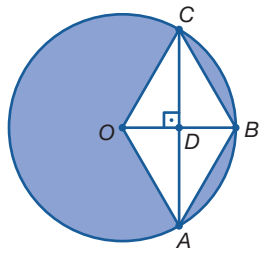
c) O que é possível notar em relação às áreas do polígono e do círculo à medida que *n* aumenta?

Sugestão de resposta: A área do polígono inscrito se aproxima da área do círculo circunscrito.

64. b) Resposta: $n = 3$: 12 990 cm²; $n = 4$: 20 006,04 cm²; $n = 5$: 23 777 cm²; $n = 10$: 29 405 cm².

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

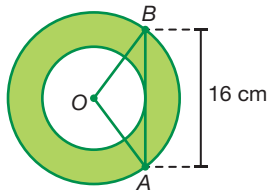
65. Na figura, O é o centro do círculo e $OABC$ é um losango. Resposta: Aproximadamente 9,10 cm².



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Sabendo que $OD = 1$ cm, determine, com o auxílio de uma calculadora, a área da região em azul.

66. Na figura, os círculos são concêntricos de centro O, e o lado $\overline{AB}$ do triângulo OAB é tangente ao círculo de menor raio.

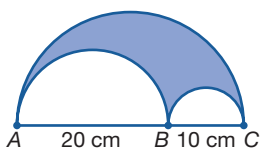


RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Sabendo que a área do círculo de maior raio é 100π cm² e que a área da região delimitada pelo triângulo é 48 cm², determine a área da coroa circular em verde. Resposta: 64π cm²

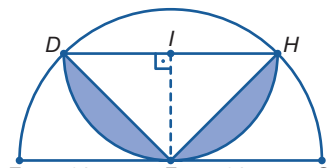
67. As figuras a seguir foram construídas com semicírculos. Em cada item, determine a área da região em azul.

A. Imagens sem proporção entre si.



Resposta: 50π cm²

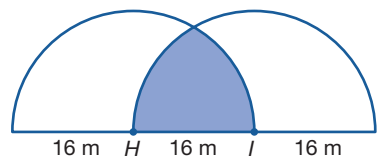
B.



$\overline{EG} // \overline{DH}$

Resposta: $100(\pi - 2)$ m²

C.



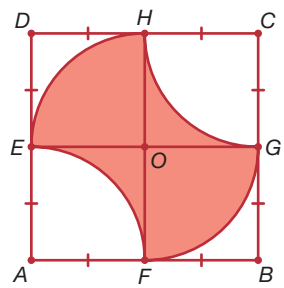
Resposta: $\frac{64}{3}\left(4\pi - 3\sqrt{3}\right)$ m²

ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

68. Na figura apresentada:

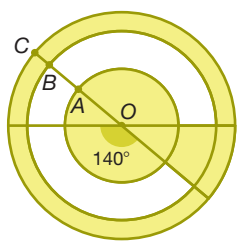
- o comprimento do lado do quadrado $ABCD$ é 10 cm;
- $\overset{\frown}{EF}$ é um arco de circunferência de centro A;
- $\overset{\frown}{EH}$ e $\overset{\frown}{FG}$ são arcos de circunferência de centro O;
- $\overset{\frown}{GH}$ é um arco de circunferência de centro C.

Qual é a área da região em vermelho? Resposta: 50 cm²



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

69. Na figura, as circunferências são concêntricas de centro em O.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Sabendo que $AO = 6$ cm, $AB = 4$ cm e $BC = 2$ cm, determine a área da região amarela.
Resposta: Aproximadamente 273,5 cm².

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

70. É provável que por volta de 1650 a.C. o escriba Ahmes tenha copiado o Papiro de Rhind, uma das principais fontes de informações referentes à Matemática egípcia antiga, de um documento ainda mais antigo.

Muitos dos problemas do Papiro de Rhind decorrem de fórmulas de mensuração necessárias para o cálculo de áreas de terras. Os problemas 48 e 50 desse papiro podem dar uma pista de como os egípcios obtiveram a fórmula para calcular a área do círculo.

Problema 48: "Compare a área do círculo com a do quadrado circunscrito".

Este é o único problema em que sua solução é geométrica.



LEONARDO GIBRAN /ARQUIVO DA EDITORA

LAÍS GARBELINI/ARQUIVO DA EDITORA

Problema 50: "Exemplo de um corpo redondo de diâmetro 9. Qual é a sua área?"

Um escriba apresentou a seguinte solução para esse problema.

Remova $\frac{1}{9}$ do diâmetro, e o restante é 8. Faça a multiplicação de 8 por 8. Portanto, a área é 64.

Em linguagem atual, temos:

"Para calcular a área do círculo, subtraia do diâmetro sua nona parte e eleve o restante ao quadrado".

KEITHY MOSTACHI/ARQUIVO DA EDITORA

Fontes de pesquisa: BOYER, Carl Benjamin. *História da matemática*. Tradução: Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher, 1974. p. 9, 13. GASPAR, Maria Terezinha; MAURO, Suzeli. *Explorando a Geometria através da História da Matemática e da Etnomatemática*. Disponível em: http://www.sbem.com.br/files/viii/pdf/07/MC10721746500.pdf. Acesso em: 30 abr. 2024.

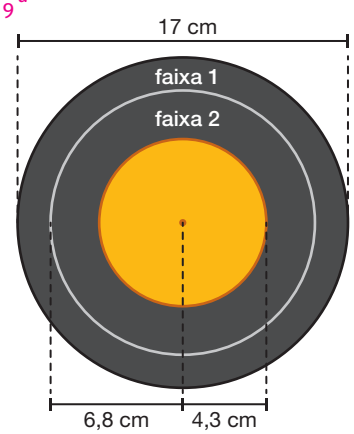
Professor, professora: Peça aos estudantes que utilizem a fórmula de resolução do Problema 50 do Papiro de Rhind para verificar se a aproximação feita pelos egípcios é satisfatória. Solicite que construam um círculo de raio 9 cm e um quadrado de lado $\frac{8}{9}d$, em que d indique o comprimento do diâmetro do círculo construído. Por fim, oriente-os a comparar a área dessas duas figuras visual e numericamente.

a) Por meio do problema 50, é possível obter o valor para π que era utilizado pelos egípcios. Qual era essa aproximação? Resposta: $\pi \simeq \frac{256}{81} \simeq 3{,}1605$

b) A quadratura do círculo ou o problema de construir um quadrado com área igual à de um círculo dado é um dos mais famosos problemas na história da Matemática. A importância desse problema reside no fato de que ele não pode ser resolvido com compasso e régua não graduada. Considerando um círculo de diâmetro d e a maneira pela qual os egípcios calculavam sua área, escreva uma relação entre o lado a do quadrado e o diâmetro de um círculo de mesma área. Resposta: $a = \frac{8}{9}d$

71. Anteriormente, foram apresentadas algumas informações sobre os discos de vinil. Por exemplo, verificamos que o tempo das músicas está relacionado à área das faixas do disco.

Existem diferentes tipos de disco de vinil, como os EP (abreviatura do termo inglês *extended play*), que são discos com 17 cm de diâmetro e capacidade para aproximadamente 8 minutos de música em cada lado. Analise o EP e duas de suas faixas em um dos lados.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

a) Calcule a área aproximada de cada faixa. Resposta: Faixa **1**: 81,6714 cm²; faixa **2**: 87,135 cm².

b) Qual das faixas apresentadas tem maior duração? Justifique sua resposta. Resposta: Faixa **2**, pois sua área é maior do que a da faixa **1**.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

6. a) Resposta: Verdadeiro. Sugestão de resposta: Como todo quadrado é um losango, sua área é igual à metade do produto de suas diagonais.

Anote as respostas no caderno.

SÍNTESE DO CAPÍTULO

Neste capítulo, estudamos ladrilhamento e área de figuras planas. Agora, vamos refletir sobre seus conhecimentos. Como estratégia de estudo, sugerimos que você faça uma autoavaliação, revise conceitos e sintetize o que foi estudado. Para isso, resolva as questões propostas.

1. Você conhecia algum dos conteúdos estudados neste capítulo? Cite-o. Resposta pessoal. Orientações sobre esta questão no **Suplemento para o professor**.

2. A seguir estão apresentados os principais conteúdos estudados neste capítulo.

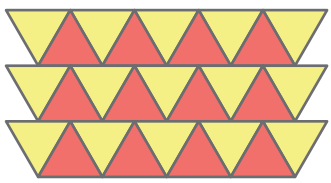
> Ladrilhamento regular • Ladrilhamento semirregular • Área do quadrado • Área do retângulo • Área do paralelogramo • Área do losango • Área do triângulo • Área do trapézio • Área do círculo • Área do setor circular • Área da coroa circular

Resposta pessoal. Orientações sobre esta questão no **Suplemento para o professor**.

Você teve dificuldades em algum deles? Não se recorda de algum desses conceitos? Ficou com dúvidas? Reflita sobre esses questionamentos e, se necessário, retome o que foi estudado.

3. Identifique qual ladrilhamento é bem-comportado.

Ladrilhamento **I**



Ladrilhamento **II**

Resposta: Ladrilhamento **II**.



ILUSTRAÇÕES: TATIANE GALHEIRO/ARQUIVO DA EDITORA

4. Com quais tipos de polígonos é possível obter um ladrilhamento regular no plano?

Resposta: Triângulos equiláteros, quadrados e hexágonos regulares.

5. Escreva um passo a passo que possibilite calcular a área de um hexágono regular.

6. Classifique cada afirmação em verdadeira ou falsa. Depois, justifique em seu caderno as afirmações verdadeiras e reescreva as falsas, tornando-as verdadeiras.

a) A área de um quadrado é igual à metade do produto dos comprimentos de suas diagonais.

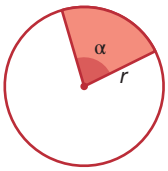
b) Os pontos médios dos lados de um retângulo de área R determinam um paralelogramo de área $\frac{R}{4}$.

6. b) Resposta: Falso. Sugestão de resposta: Os pontos médios dos lados de um retângulo de área R determinam um paralelogramo de área $\frac{R}{2}$.

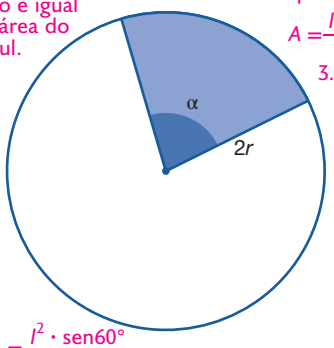
c) A área A de um triângulo equilátero de lado l pode ser obtida pela fórmula $A = \frac{l^2 \cdot \text{sen}60°}{2}$.

7. É correto afirmar que a área do setor circular vermelho é igual à metade da área do setor circular azul? Resposta: Não, pois a área A_V do setor circular vermelho é igual a $A_V = \frac{\alpha \cdot \pi \cdot r^2}{360°}$. Já a área A_A do setor circular azul é dada por

$$A_A = \frac{\alpha \cdot \pi \cdot (2r)^2}{360°} = \frac{\alpha \cdot \pi \cdot 4r^2}{360°} = 4\frac{(\alpha \cdot \pi \cdot r^2)}{360°} = 4A_V.$$



Portanto, a área do setor circular vermelho é igual a um quarto da área do setor circular azul.



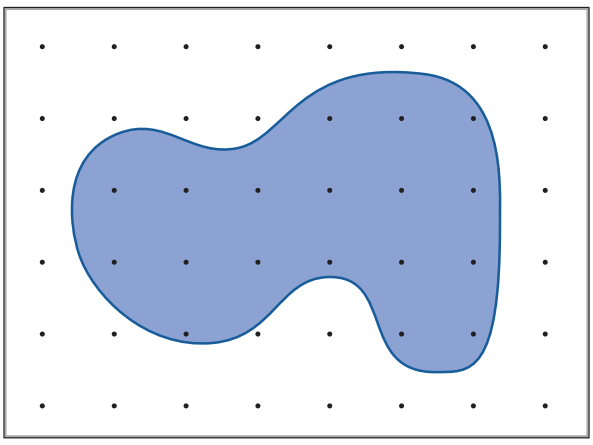
ILUSTRAÇÕES: OHANNA SCHMITT/ARQUIVO DA EDITORA

6. c) Resposta: Verdadeiro. Sugestão de resposta: Como em um triângulo equilátero o ângulo entre dois de seus lados mede 60°, sua área A é dada por:

$$A = \frac{l \cdot l \cdot \text{sen}60°}{2} = \frac{l^2 \cdot \text{sen}60°}{2}.$$

5. Sugestão de resposta:
1. Decomponha o hexágono regular em seis triângulos equiláteros.
2. Calcule a área de cada triângulo aplicando a fórmula $A = \frac{l^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$.
3. Multiplique o resultado obtido no passo **2** por 6.

8. Qual estratégia você utilizaria para determinar a área da região azul apresentada na malha pontilhada? Resposta pessoal. Sugestão de resposta: Utilizaria a fórmula de Pick.



TATIANE GALHEIRO/ARQUIVO DA EDITORA

9. Escolha um dos conteúdos estudados neste capítulo para elaborar um problema. Depois, troque com um colega para que ele o resolva. Por fim, verifique se a resposta obtida por ele está correta. 10. Resposta pessoal. Orientações sobre esta questão no **Suplemento para o professor**.

10. Faça uma síntese do que foi estudado neste capítulo. Demonstre-a com desenhos e dê exemplos.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

9. Resposta pessoal. Antes de elaborarem o problema, peça aos estudantes que analisem os contextos propostos nas seções **Exercícios e problemas** deste capítulo e, se julgar conveniente, oriente-os a investigar outros problemas disponíveis em provas de vestibular e Enem.

CAPÍTULO

5

MATRIZES, DETERMINANTE E SISTEMAS LINEARES



MDV EDWARDS/SHUTTERSTOCK

Imagem pixelada de um pequeno cachorro. Imagem original capturada com resolução de 72 PPI.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Professor, professora: Explique aos estudantes que, tanto no sistema RGB (*red*, *green* e *blue*) quanto no de escala de cinza, a organização dos *pixels* em linhas e colunas é o que forma a imagem. Se julgar conveniente, explique a eles como representar as cores por meio de ternas numéricas, mostrando que a disposição dos números, no sistema RGB, interfere na cor obtida – por exemplo, uma cor representada por (25, 113, 249) é diferente da cor representada por (249, 113, 25). Essa disposição retangular expressa o conhecimento prévio para o assunto a ser estudado no capítulo. Verifique se todos percebem intuitivamente que a matriz formada pelos pixels não apresenta número algum, mas sim quadradinhos com a combinação das cores vermelha, verde e azul que formam a imagem, dispostos como se fossem os elementos de uma matriz.

Você já ouviu falar em TVs e monitores com resolução **UHD**, ***Full* HD** ou 4K? Mas, afinal, o que é resolução? Qual é a diferença entre essas resoluções? Existe alguma relação entre a resolução de tela e o tamanho da tela?

A tela dos dispositivos eletrônicos é formada por milhares ou milhões de minúsculos pontos luminosos chamados ***pixels***. Você talvez possa vê-los bem de perto se olhar uma TV ou um monitor grande, mas são praticamente imperceptíveis em *smartphones*, *tablets* ou *smartwatches*. A imagem é formada porque os *pixels* estão dispostos em linhas e colunas justapostas e podem exibir várias cores e tonalidades.

Por convenção popular, a resolução nada mais é do que a quantidade de *pixels* em cada linha e em cada coluna da tela. Por exemplo, uma imagem exibida com resolução de 1920 × 1080, também conhecida por *Full* HD, é formada por 2 073 600 *pixels*. Por conveniência, o primeiro número indica a quantidade de colunas. Cada *pixel* pode ser identificado por sua posição e cor, permitindo alterações e reconhecimento de padrões na imagem exibida.

Não devemos confundir a **resolução de tela** com o **tamanho da tela**. Um monitor de 15" e um televisor de 50" podem ter a mesma resolução máxima *Full* HD, ou seja, a mesma quantidade de *pixels*. No entanto, a quantidade de *pixels* por polegada (**PPI**) será diferente, assim como o tamanho de cada *pixel*.

Neste capítulo, você vai estudar:

- matrizes;
- igualdade de matrizes;
- operações com matrizes;
- matriz inversa;
- equações envolvendo matrizes;
- determinantes;
- sistemas lineares;
- escalonamento de um sistema linear.

***Full* HD:** do inglês *full high definition*; em português, alta definição completa.

***Pixel*:** do inglês *picture element*; em português, elemento de imagem.

PPI: do inglês *pixel per inches*; em português, *pixels* por polegadas.

UHD: do inglês *ultra high definition*; em português, ultra-alta definição.

Professor, professora: Oriente os estudantes a escrever as respostas no caderno.

1. Conhecendo o número de linhas e de colunas de *pixels* da tela de um monitor, que procedimento pode ser realizado para determinar a quantidade de *pixels* que compõem essa tela?
Resposta: Multiplicar o número de linhas pelo número de colunas.

2. Pesquise sobre a resolução *High Definition* (HD) e calcule a quantidade de *pixels* que compõem uma tela com essa resolução. Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes obtenham os seguintes dados: 1 280 × 720, totalizando 921 600 *pixels*.

3. Atualmente, muitos televisores e monitores são do tipo *Smart*, isto é, eles se conectam à internet e oferecem diversas funcionalidades adicionais. Alguns dos modelos mais recentes dessas telas têm resolução 4K ou UHD, que equivale ao dobro da resolução horizontal e vertical da *Full* HD. Quantos *pixels*, no total, formam uma imagem exibida em aparelhos com essa resolução máxima? Resposta: 8 294 400 *pixels* no total (3 840 × 2 160).

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Matrizes

Para organizar a representação das informações ou auxiliar em cálculos mais complexos, é comum o uso de tabelas numéricas retangulares. Essas tabelas, compostas com certa quantidade de **linhas** (fileiras horizontais) e de **colunas** (fileiras verticais), na Matemática são denominadas **matrizes**.

As matrizes são amplamente utilizadas em diversas áreas, como Computação Gráfica, Engenharia, Física e Administração.

Analise a tabela a seguir.

População indígena e quilombola no Brasil, em 2022

Pessoas	Sexo		
	Masculino	Feminino	Total
Indígenas	834 816	665 353	1 694 836
Quilombolas	860 020	664 833	1 330 186

Fonte de pesquisa: IBGE. *Cidades*. Disponível em: https://cidades.ibge.gov.br/brasil/pesquisa/10102/122229. Acesso em: 16 jul. 2024.

Podemos representar essa tabela pela seguinte matriz.

$$\begin{bmatrix} 834\,816 & 665\,353 & 1\,694\,836 \\ 860\,020 & 664\,833 & 1\,330\,186 \end{bmatrix}$$

Como essa matriz tem 2 linhas e 3 colunas, dizemos que é de ordem (ou tipo) 2×3 (lê-se: dois por três). Nela, a 1ª linha, por exemplo, corresponde à população indígena em 2022 em cada categoria, masculino, feminino e total, e a 2ª coluna à população feminina indígena e quilombola.

1ª linha
$$\begin{bmatrix} 834\,816 & 665\,353 & 1\,694\,836 \\ 860\,020 & 664\,833 & 1\,330\,186 \end{bmatrix}$$

2ª coluna
$$\begin{bmatrix} 834\,816 & 665\,353 & 1\,694\,836 \\ 860\,020 & 664\,833 & 1\,330\,186 \end{bmatrix}$$

O elemento da matriz localizado na 1ª linha e na 2ª coluna corresponde à população indígena feminina em 2022.

2ª coluna
1ª linha
$$\begin{bmatrix} 834\,816 & 665\,353 & 1\,694\,836 \\ 860\,020 & 664\,833 & 1\,330\,186 \end{bmatrix}$$

Uma matriz de ordem $m \times n$, com m e n sendo números naturais não nulos, é toda tabela composta de $m \cdot n$ elementos dispostos em m linhas e n colunas.

Vamos analisar alguns exemplos de matrizes.

a) Matriz de ordem 3×4: três linhas e quatro colunas.

- $\begin{bmatrix} -3 & 1{,}2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & -3{,}2 & 1 \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} 0 & \sqrt{2} & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -5 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

Observação

Convencionou-se que a ordenação das linhas de uma matriz seja dada de cima para baixo, e a ordenação das colunas seja da esquerda para a direita.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

b) Matriz de ordem 2×1: duas linhas e uma coluna.

- $\begin{bmatrix} -21 \\ 64 \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} -1{,}3 \\ 15 \end{bmatrix}$

c) Matriz de ordem 3×2: três linhas e duas colunas.

- $\begin{bmatrix} -6 & 7 \\ 12 & 1 \\ \sqrt{3} & 0 \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5{,}2 & 0 \\ 0 & -120 \end{bmatrix}$

d) Matriz de ordem 1×4: uma linha e quatro colunas.

- $\begin{bmatrix} 2 & -7 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

Indicaremos as matrizes por uma letra maiúscula e cada um de seus elementos pela mesma letra porém minúscula, acompanhada de dois índices que indicam, respectivamente, a linha e a coluna em que o elemento está localizado.

Considerando, por exemplo, a matriz $A = \begin{bmatrix} 7 & -5 \\ 13 & 9 \end{bmatrix}$, temos o elemento da:

- 1ª linha e 1ª coluna: $a_{11} = 7$ (lê-se: a um um é igual a sete).
- 1ª linha e 2ª coluna: $a_{12} = -5$ (lê-se: a um dois é igual a menos cinco).
- 2ª linha e 1ª coluna: $a_{21} = 13$ (lê-se: a dois um é igual a treze).
- 2ª linha e 2ª coluna: $a_{22} = 9$ (lê-se: a dois dois é igual a nove).

Vamos representar genericamente uma matriz A de ordem $m \times n$, ou seja, com m linhas e n colunas, da seguinte maneira:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & & a_{3j} & \cdots & a_{3n} \\ & \vdots & & \ddots & & \vdots & \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

No elemento a_{ij}, o índice i indica a linha, e o j indica a coluna em que o elemento está localizado. O elemento a_{32}, por exemplo, tem $i = 3$ e $j = 2$, ou seja, está localizado na 3ª linha e na 2ª coluna.

Essa matriz também pode ser indicada por $A = (a_{ij})_{m \times n}$.

Exercícios e problemas resolvidos

R1. Uma matriz tem 32 elementos e a quantidade de colunas é o dobro da quantidade de linhas. Qual é a ordem dessa matriz?

Resolução

A ordem da matriz é dada por $m \times n$, tal que $m \cdot n = 32$.

Como a quantidade de colunas é o dobro da quantidade de linhas, temos $n = 2m$. Ou seja:

$m \cdot n = 32 \Rightarrow m \cdot 2m = 32 \Rightarrow m^2 = 16$

Nesse caso, $m = 4$ ou $m = -4$ (impossível). Substituindo $m = 4$ na igualdade $m \cdot n = 32$, obtemos:

$m \cdot n = 32 \Rightarrow 4 \cdot n = 32 \Rightarrow n = 8$

Portanto, a ordem da matriz é 4×8.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

R2. Escreva a matriz $A = (a_{ij})_{1\times 3}$, tal que $a_{ij} = 3i - 2j$.

Resolução

A ordem da matriz A é 1×3, ou seja, $A = [a_{11} \quad a_{12} \quad a_{13}]$.

Substituindo os valores de i e j na lei de formação, temos:

- $a_{11} = 3 \cdot 1 - 2 \cdot 1 = 3 - 2 = 1$
- $a_{12} = 3 \cdot 1 - 2 \cdot 2 = 3 - 4 = -1$
- $a_{13} = 3 \cdot 1 - 2 \cdot 3 = 3 - 6 = -3$

Portanto, a matriz é $A = [1 \quad -1 \quad -3]$.

R3. Escreva a matriz $B = (b_{ij})_{3\times 2}$, tal que $b_{ij} = \begin{cases} (-1)^j, \text{ se } i \leq j \\ 2i + j, \text{ se } i > j \end{cases}$.

Resolução

A ordem da matriz B é 3×2.

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix}$$

Temos duas sentenças que definem a matriz B.

- Se $i \leq j$: $b_{11} = (-1)^1 = -1$;
  $b_{12} = (-1)^2 = 1$;
  $b_{22} = (-1)^2 = 1$
- Se $i > j$: $b_{21} = 2 \cdot 2 + 1 = 5$;
  $b_{31} = 2 \cdot 3 + 1 = 7$;
  $b_{32} = 2 \cdot 3 + 2 = 8$

Portanto, a matriz é $B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 5 & 1 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$.

Alguns tipos de matriz

Estudaremos agora algumas matrizes que, por apresentarem certas características, recebem uma nomenclatura diferenciada.

Matriz quadrada

Denominamos **matriz quadrada** toda matriz A de ordem $m \times n$, em que $m = n$, ou seja, a quantidade de linhas é igual à quantidade de colunas. Nesse caso, dizemos simplesmente que a matriz A é de **ordem *n***, indicada por A_n.

Em uma matriz quadrada A de ordem n, os elementos a_{ij}, em que $i = j$, formam a **diagonal principal**. Já os elementos em que $i + j = n + 1$ formam a **diagonal secundária**.

Exemplos

a) Matriz quadrada de ordem 3.

$$B_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 11 \\ 3 & -4 & 7 \\ -5 & 8 & 0 \end{bmatrix}$$

diagonal secundária — diagonal principal

b) Matriz quadrada de ordem 4.

$$C_4 = \begin{bmatrix} -3 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 6 \\ 4 & -5 & 2 & -4 \\ 9 & 8 & 7 & -1 \end{bmatrix}$$

diagonal secundária — diagonal principal

Observação

Nos exemplos apresentados, os elementos da diagonal secundária:

- em B_3, (b_{13}, b_{22} e b_{31}) têm $i + j = \underbrace{4}_{n+1}$.
- em C_4, (c_{14}, c_{23}, c_{32} e c_{41}) têm $i + j = \underbrace{5}_{n+1}$.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Matriz triangular

Uma matriz quadrada de ordem n é denominada **matriz triangular** quando todos os elementos acima ou abaixo da diagonal principal são nulos.

Exemplos

a) Matriz triangular de ordem 2.

$$A_2 = \begin{bmatrix} 25 & 0 \\ -32 & 14 \end{bmatrix}$$

diagonal principal

b) Matriz triangular de ordem 3.

$$B_3 = \begin{bmatrix} 8 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

diagonal principal

c) Matriz triangular de ordem 3.

$$C_3 = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 6 & -5 & 1 \end{bmatrix}$$

diagonal principal

Denomina-se **matriz triangular superior** toda matriz triangular cujos elementos nulos estão abaixo da diagonal principal. Do mesmo modo, a **matriz triangular inferior** é toda matriz triangular cujos elementos nulos estão acima da diagonal principal.

Nos exemplos anteriores, C_3 é uma matriz triangular inferior; B_3, uma matriz triangular superior.

Matriz diagonal

Denominamos **matriz diagonal** toda matriz quadrada na qual os elementos acima e abaixo da diagonal principal são nulos.

Professor, professora: Converse com os estudantes acerca das diferenças nas definições de matrizes triangulares e matrizes diagonais. Verifique se eles perceberam que a matriz diagonal é um caso particular de matriz triangular.

Exemplos

a) Matriz diagonal de ordem 3.

$$D_3 = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

diagonal principal

b) Matriz diagonal de ordem 4.

$$E_4 = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

diagonal principal

Matriz identidade

A matriz quadrada em que todos os elementos da diagonal principal são iguais a 1 e os demais elementos são nulos é denominada **matriz identidade**. Indicamos uma matriz identidade de ordem n por I_n.

Exemplos

a) Matriz identidade de ordem 1.

$$I_1 = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$$

diagonal principal

b) Matriz identidade de ordem 2.

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

diagonal principal

c) Matriz identidade de ordem 3.

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

diagonal principal

Observação

Em uma matriz identidade I_n, temos:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ se } i = j \\ 0, \text{ se } i \neq j \end{cases}$$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Matriz nula

Denominamos **matriz nula** aquela que tem todos os elementos iguais a zero. Indicamos uma matriz nula de ordem $m \times n$ por $0_{m \times n}$ ou, se a matriz nula for quadrada, por 0_n.

Exemplos

a) Matriz nula de ordem 2×4.

$$0_{2 \times 4} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

b) Matriz nula de ordem 3.

$$0_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriz linha

Toda matriz que tem apenas uma linha é denominada **matriz linha**, ou seja, a matriz de ordem $m \times n$ é uma matriz linha se $m = 1$.

Exemplos

a) Matriz linha de ordem 1×5: $\begin{bmatrix} -3 & 2 & 7 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

b) Matriz linha de ordem 1×3: $\begin{bmatrix} 4 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

Matriz coluna

Toda matriz que tem apenas uma coluna é denominada **matriz coluna**, ou seja, a matriz de ordem $m \times n$ é uma matriz coluna se $n = 1$.

Exemplos

a) Matriz coluna de ordem 5×1.

$$\begin{bmatrix} -8 \\ 17 \\ 34 \\ 1 \\ 9 \end{bmatrix}$$

b) Matriz coluna de ordem 3×1.

$$\begin{bmatrix} 9 \\ -2 \\ \pi \end{bmatrix}$$

Igualdade de matrizes

Quando duas matrizes A e B de mesma ordem têm os elementos correspondentes (de mesma posição) iguais, então dizemos que essas matrizes são iguais, ou seja, $A = B$. De maneira semelhante, se duas matrizes A e B têm ordens diferentes ou os elementos correspondentes não são todos iguais, então $A \neq B$.

Observação

Em notação matemática, se para todo $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$ temos $a_{ij} = b_{ij}$, então $A_{m \times n} = B_{m \times n}$.

Exercícios e problemas resolvidos

R4. Considere as matrizes de mesma ordem $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 3 & 0 & -5 \end{bmatrix}$ e $B = (b_{ij})_{2 \times 3}$, tal que $b_{ij} = 2i - j^2$. Essas matrizes são iguais ou diferentes entre si?

Resolução

Obtendo os elementos de B, temos:

- $b_{11} = 2 \cdot 1 - 1^2 = 1$
- $b_{12} = 2 \cdot 1 - 2^2 = -2$
- $b_{13} = 2 \cdot 1 - 3^2 = -7$
- $b_{21} = 2 \cdot 2 - 1^2 = 3$
- $b_{22} = 2 \cdot 2 - 2^2 = 0$
- $b_{23} = 2 \cdot 2 - 3^2 = -5$

Assim, segue que:

- $a_{11} = b_{11}$
- $a_{12} = b_{12}$
- $a_{13} = b_{13}$
- $a_{21} = b_{21}$
- $a_{22} = b_{22}$
- $a_{23} = b_{23}$

Portanto, as matrizes são iguais entre si, ou seja, $A = B$.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Matriz transposta

Dada uma matriz A de ordem $m \times n$, denomina-se **matriz transposta** de A, indicada por A^t, a matriz de ordem $n \times m$ cujas linhas são ordenadamente iguais às colunas de A.

Observação

Note que, para todo $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$, se $A = (a_{ij})_{m \times n}$, então $A^t = (b_{ij})_{n \times m}$, tal que $a_{ij} = b_{ji}$.

Exemplos

- $A = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ -1 & 0 \\ 8 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 8 \\ 7 & 0 & 2 \end{bmatrix}$
- $B = \begin{bmatrix} 10 & -3 \\ -8 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow B^t = \begin{bmatrix} 10 & -8 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$
- $C = \begin{bmatrix} 1 & 7 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow C^t = \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ -2 \end{bmatrix}$
- $D = \begin{bmatrix} -3 \end{bmatrix} \Rightarrow D^t = \begin{bmatrix} -3 \end{bmatrix}$

Matriz simétrica

Quando uma matriz quadrada A é igual à sua transposta $A^t (A = A^t)$, dizemos que A é uma **matriz simétrica**.

Exemplo

Considere a matriz A e sua transposta A^t.

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 6 \\ 5 & 6 & 3 \end{bmatrix} \qquad A^t = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 6 \\ 5 & 6 & 3 \end{bmatrix}$$

Como $A = A^t$, então A é uma matriz simétrica.

Em uma matriz simétrica, os elementos simétricos em relação à diagonal principal são iguais, ou seja, se uma matriz $A = (a_{ij})_n$ é simétrica, então $a_{ij} = a_{ji}$ para todo $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Exercícios e problemas resolvidos

R5. Determine os valores de x e y para que a matriz $M = \begin{bmatrix} 3x + 10 & 0 \\ 0 & 4y - 9 \end{bmatrix}$ seja igual à matriz I_2.

Resolução

De acordo com o enunciado, devemos ter a seguinte igualdade:

$$\begin{bmatrix} 3x + 10 & 0 \\ 0 & 4y - 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Note que as matrizes têm a mesma ordem. Então, basta calcular x e y de maneira que os elementos correspondentes sejam iguais.

- $3x + 10 = 1 \Rightarrow 3x = -9 \Rightarrow x = -3$
- $4y - 9 = 1 \Rightarrow 4y = 10 \Rightarrow y = \frac{5}{2}$

Exercícios e problemas

Anote as respostas no caderno.

1. Escreva a ordem de cada matriz.

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & -6 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$ Resposta: 2 × 2

b) $B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -8 & 4 & 0 \\ \sqrt{2} & 15 & -4{,}3 \\ 1 & 7 & 10 \\ -9 & \pi & 0{,}5 \end{bmatrix}$ Resposta: 5 × 3

c) $C = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 8 & 13 \end{bmatrix}$ Resposta: 1 × 4

d) $D = \begin{bmatrix} -1 & \frac{3}{5} & x^3 & -3 \\ 1 & \sqrt[3]{-8} & 4 & x+1 \end{bmatrix}$ Resposta: 2 × 4

2. A tabela periódica apresenta a distribuição dos elementos químicos de acordo com suas características e propriedades. As linhas da tabela periódica, numeradas de cima para baixo, são chamadas períodos, e as colunas, numeradas da esquerda para a direita, são denominadas grupos.

Professor, professora: Diga aos estudantes que a distribuição dos elementos é feita da seguinte maneira: os elementos que têm o mesmo número de camadas de elétrons estão em um mesmo período, e os elementos que têm características físicas e químicas semelhantes estão no mesmo grupo. Além disso, verifique se eles perceberam que os períodos não têm a mesma quantidade de elementos e que o mesmo ocorre com os grupos.

Tabela periódica dos elementos

Com massas atômicas referidas ao isótopo 12 do carbono

CYNTHIA SERIGUCHI/ARQUIVO DA EDITORA

Grupos: 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18

Períodos: 1 2 3 4 5 6 7

1	1 H Hidrogênio 1,01																2 He Hélio 4,00
2	3 Li Lítio 6,94	4 Be Berílio 9,01											5 B Boro 10,81	6 C Carbono 12,01	7 N Nitrogênio 14,01	8 O Oxigênio 16,00	9 F Flúor 19,00	10 Ne Neônio 20,18
3	11 Na Sódio 22,99	12 Mg Magnésio 24,31											13 Aℓ Alumínio 26,98	14 Si Silício 28,09	15 P Fósforo 30,97	16 S Enxofre 32,06	17 Cℓ Cloro 35,45	18 Ar Argônio 39,95
4	19 K Potássio 39,10	20 Ca Cálcio 40,08	21 Sc Escândio 44,96	22 Ti Titânio 47,87	23 V Vanádio 50,94	24 Cr Crômio 52,00	25 Mn Manganês 54,94	26 Fe Ferro 55,85	27 Co Cobalto 58,93	28 Ni Níquel 58,69	29 Cu Cobre 63,55	30 Zn Zinco 65,38	31 Ga Gálio 69,72	32 Ge Germânio 72,63	33 As Arsênio 74,92	34 Se Selênio 78,97	35 Br Bromo 79,90	36 Kr Criptônio 83,80
5	37 Rb Rubídio 85,47	38 Sr Estrôncio 87,62	39 Y Ítrio 88,91	40 Zr Zircônio 91,22	41 Nb Nióbio 92,91	42 Mo Molibdênio 95,95	43 Tc Tecnécio (97)	44 Ru Rutênio 101,07	45 Rh Ródio 102,91	46 Pd Paládio 106,42	47 Ag Prata 107,87	48 Cd Cádmio 112,41	49 In Índio 114,82	50 Sn Estanho 118,71	51 Sb Antimônio 121,76	52 Te Telúrio 127,60	53 I Iodo 126,90	54 Xe Xenônio 131,29
6	55 Cs Césio 132,91	56 Ba Bário 137,33	57 - 71 Lantanídios	72 Hf Háfnio 178,49	73 Ta Tântalo 180,95	74 W Tungstênio 183,84	75 Re Rênio 186,21	76 Os Ósmio 190,23	77 Ir Irídio 192,22	78 Pt Platina 195,08	79 Au Ouro 196,97	80 Hg Mercúrio 200,59	81 Tℓ Tálio 204,38	82 Pb Chumbo 207,20	83 Bi Bismuto 208,98	84 Po Polônio (209)	85 At Astato (210)	86 Rn Radônio (222)
7	87 Fr Frâncio (223)	88 Ra Rádio (226)	89 - 103 Actinídios	104 Rf Rutherfórdio (267)	105 Db Dúbnio (268)	106 Sg Seabórgio (269)	107 Bh Bóhrio (270)	108 Hs Hássio (269)	109 Mt Meitnério (277)	110 Ds Darmstádtio (281)	111 Rg Roentgênio (282)	112 Cn Copernício (285)	113 Nh Nihônio (286)	114 Fℓ Fleróvio (290)	115 Mc Moscóvio (290)	116 Lv Livermório (293)	117 Ts Tennesso (294)	118 Og Oganessônio (294)

Número atômico
Símbolo
Nome
Massa atômica

6	57 La Lantânio 138,91	58 Ce Cério 140,12	59 Pr Praseodímio 140,91	60 Nd Neodímio 144,24	61 Pm Promécio (145)	62 Sm Samário 150,36	63 Eu Európio 151,96	64 Gd Gadolínio 157,25	65 Tb Térbio 158,93	66 Dy Disprósio 162,50	67 Ho Hólmio 164,93	68 Er Érbio 167,26	69 Tm Túlio 168,93	70 Yb Itérbio 173,05	71 Lu Lutécio 174,97
7	89 Ac Actínio (227)	90 Th Tório 232,04	91 Pa Protactínio 231,04	92 U Urânio 238,03	93 Np Netúnio (237)	94 Pu Plutônio (244)	95 Am Amerício (243)	96 Cm Cúrio (247)	97 Bk Berkélio (247)	98 Cf Califórnio (251)	99 Es Einstênio (252)	100 Fm Férmio (257)	101 Md Mendelévio (258)	102 No Nobélio (259)	103 Lr Laurêncio (262)

Tabela periódica atual: períodos e grupos.

Hidrogênio; Metais; Metais de transição interna; Não metais; Gases nobres

Tabela produzida com base em: BROWN, Theodore Lawrence *et al*. *Chemistry*: the central science. 15. ed. Expanded edition. Londres: Pearson Education, 2022.

IUPAC Commission on Isotopic Abundances and Atomic Weights. *Atomic weights of the elements 2019*. Disponível em: https://iupac.org/wp-content/uploads/2022/07/IUPAC_Periodic_Table-04May22_CRA.pdf. Acesso em: 12 set. 2024.

SOCIEDADE BRASILEIRA DE QUÍMICA. *Tabela Periódica dos Elementos*. 2023. Disponível em: https://www.sbq.org.br/anexos/tabela%20periodica_SBQ_3.0_set2023.pdf. Acesso em: 12 set. 2024.

a) Quantos são os períodos da tabela periódica? E quantos são os grupos? Resposta: 7 períodos; 18 grupos.

b) Quantos elementos pertencem ao período 3? E ao período 5? Resposta: 8 elementos; 18 elementos.

c) Qual é o símbolo do elemento do:

- período 2 e grupo 14? Resposta: C
- período 6 e grupo 11? Resposta: Au
- período 5 e grupo 17? Resposta: I

d) Indique o período e o grupo ao qual pertence o elemento de símbolo:

- Zn. Resposta: Período 4, grupo 12.
- Cℓ. Resposta: Período 3, grupo 17.
- Db. Resposta: Período 7, grupo 5.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

3. O cinema nacional apresenta uma diversidade rica e única, oferecendo narrativas que refletem a cultura e a realidade do Brasil e podem levar à reflexão crítica e ao diálogo entre diversas expressões culturais. Embora enfrente desafios, como a escassez de financiamento, suas produções continuam a gerar inovações e a conquistar o público.

Na tabela, estão apresentados dados comparativos entre os lançamentos do cinema nacional e do estrangeiro.

3. a) Resposta: $\begin{bmatrix} 7 & 24 \\ 57 & 14 \\ 97 & 213 \\ 161 & 251 \end{bmatrix}$

Quantidade de títulos do cinema lançados por gênero, em 2023

Gênero	Lançamentos brasileiros	Lançamentos estrangeiros
Animação	7	24
Documentário	57	14
Ficção	97	213
Total	161	251

Fonte de pesquisa: SECRETARIA DE REGULAÇÃO (SRG). *Mercado cinematográfico – Informe anual 2023*. Brasília: Ancine, 2014. p. 36. Disponível em: https://www.gov.br/ancine/pt-br/oca/publicacoes/arquivos.pdf/informe-mercado-cinematografico-2023.pdf. Acesso em: 16 jul. 2024.

Resposta no final do **Livro do Estudante**.

a) Represente a tabela por uma matriz 4×2.

b) Nessa matriz, o que representa:

- a 4ª linha?
- a 1ª coluna?
- o elemento da 3ª linha com a 1ª coluna?

c) Você assistiu a algum filme brasileiro recentemente? Se sim, qual foi? Se não, há algum que gostaria de assistir? Compartilhe com os colegas. Resposta pessoal.

PARA EXPANDIR

Algumas produções nacionais nos levam a reconhecer a diversidade de vozes de nossa cultura e a entender melhor os processos de resistência e transformação que moldaram a sociedade brasileira. Que tal conhecer uma dessas produções? Para isso, assista ao filme de animação Uma história de amor e fúria (2013), dirigido por Luiz Bolognesi, que explora a história do Brasil sob uma perspectiva decolonial, abordando as complexidades da identidade nacional em meio à luta por liberdade.

4. Na matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 5{,}7 & -3 & 2 \\ 4 & 15 & 3 & \sqrt{7} & 6 \\ \pi & -9 & 10 & -2 & 8 \end{bmatrix}$, determine o valor do elemento:

a) a_{11}. Resposta: 0

b) a_{13}. Resposta: 5,7

c) a_{31}. Resposta: π

d) a_{24}. Resposta: $\sqrt{7}$

5. Escreva as matrizes.

5. a) Resposta: $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

a) $A = (a_{ij})_{2\times 2}$, tal que $a_{ij} = i - j$

5. b) Resposta: $B = \begin{bmatrix} 4 & 9 & 16 \\ 9 & 16 & 25 \end{bmatrix}$

b) $B = (b_{ij})_{2\times 3}$, tal que $b_{ij} = (i + j)^2$

c) $C = (c_{ij})_{3\times 2}$, tal que $c_{ij} = \begin{cases} i, \text{ se } i = j \\ i + j, \text{ se } i \neq j \end{cases}$

6. Resolva as questões. Em seguida, compare suas respostas com as de um colega.

a) Qual é a ordem de uma matriz formada por 7 elementos? Resposta: 1×7 ou 7×1

b) Qual é a ordem de uma matriz formada por 20 elementos?
Resposta: 1×20, 20×1, 2×10, 10×2, 4×5 ou 5×4

7. Escreva a matriz quadrada A de ordem 2, tal que $a_{ij} = i^2 - 3j + i \cdot j$. Resposta: $A = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

8. Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 10 \\ 3 & 6 & 0 & -2 \\ 1 & -4 & -1 & 3 \\ -5 & 1 & 0 & -6 \end{bmatrix}$, calcule a diferença entre a soma dos elementos da diagonal principal e a dos elementos da diagonal secundária. Resposta: 0

9. Classifique cada matriz em quadrada, triangular, diagonal, identidade, nula, linha ou coluna.

a) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ Resposta: Linha.

b) $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ Resposta: Nula.

c) $C = \begin{bmatrix} 5 & \pi & 0 \\ 0 & 12 & -4 \\ -3 & 1 & -7 \end{bmatrix}$ Resposta: Quadrada.

d) $D = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ Resposta: Quadrada e triangular.

e) $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ Resposta: Quadrada, triangular, diagonal e identidade.

f) $F = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ Resposta: Coluna.

10. O **traço** de uma matriz quadrada é igual à soma dos elementos da diagonal principal. Calcule o traço de cada matriz apresentada a seguir.

a) $A = \begin{bmatrix} 5 & 12 \\ 8 & -9 \end{bmatrix}$ Resposta: -4

b) $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 4 & 5 & -2 \\ 8 & 9 & 3 \end{bmatrix}$ Resposta: 7

c) $C = \begin{bmatrix} 2 & -4 & -5 \\ 0{,}5 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 7{,}4 \end{bmatrix}$ Resposta: 12,4

d) $D = \begin{bmatrix} -1 & 4 & \sqrt{3} \\ \frac{2}{3} & -2{,}5 & 4 \\ 0 & -\sqrt{3} & -0{,}5 \end{bmatrix}$ Resposta: -4

5. c) Resposta: $C = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$

11. Escreva uma matriz diagonal de ordem 4 cujo traço seja 25. Resposta no final do **Livro do Estudante**.

8. Professor, professora: Ao resolver a tarefa **9**, diga aos estudantes que uma matriz pode ter mais de uma classificação, pois alguns tipos são um caso particular de outro. Por exemplo, a matriz identidade também é matriz quadrada.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

12. Classifique cada afirmação em verdadeira ou falsa.

a) Toda matriz quadrada nula é triangular. Resposta: Verdadeira.

b) A matriz identidade é um exemplo de matriz diagonal. Resposta: Verdadeira.

c) Toda matriz quadrada é triangular superior. Resposta: Falsa.

d) Quando pelo menos um elemento da matriz é igual a 0, então a matriz é denominada nula. Resposta: Falsa.

e) O traço da matriz identidade é numericamente igual à sua ordem. Resposta: Verdadeira.

13. (Fatec-SP, 2017) Uma tela de computador pode ser representada por uma matriz de cores, de forma que cada elemento da matriz corresponda a um *pixel** na tela.

Numa tela em escala de cinza, por exemplo, podemos atribuir 256 cores diferentes para cada *pixel*, do preto absoluto (código da cor: 0) passando pelo cinza intermediário (código da cor: 127) ao branco absoluto (código da cor: 255).


FATEC-SP 2017

Suponha que na figura estejam representados 25 *pixels* de uma tela.

A matriz numérica que corresponde às cores da figura apresentada é dada por:

$$\begin{bmatrix} 255 & 0 & 127 & 0 & 255 \\ 0 & 127 & 0 & 255 & 0 \\ 127 & 0 & 255 & 0 & 127 \\ 0 & 255 & 0 & 127 & 0 \\ 255 & 0 & 127 & 0 & 255 \end{bmatrix}$$

*Menor elemento em uma tela ao qual é possível atribuir-se uma cor.

Uma matriz $M = (a_{ij})$ quadrada de ordem 5, em que i representa o número da linha e j representa o número da coluna, é definida da seguinte maneira.

$$a_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{se } i = j \\ 127, & \text{se } i > j \\ 255, & \text{se } i < j \end{cases}$$

A matriz M corresponde a uma matriz de cores em escala de cinza, descrita pelo texto, em uma tela. Resposta: Alternativa **a**.

Sobre essa matriz de cores, pode-se afirmar que ela:

a) terá o mesmo número de *pixels* brancos e cinzas.

b) terá o mesmo número de *pixels* brancos e pretos.

c) terá o mesmo número de *pixels* pretos e cinzas.

d) terá uma diagonal com cinco *pixels* brancos.

e) terá uma diagonal com cinco *pixels* cinzas.

14. Determine os valores de x e y em cada item.

a) $\begin{bmatrix} 2 & x \\ 7 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ y & 0 \end{bmatrix}$ Resposta: $x = -3$; $y = 7$

b) $\begin{bmatrix} 2x-1 & 0 & -5 \\ 0 & 4 & 6 \\ 5y+3 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3y & 0 & -5 \\ 0 & 2x & 6 \\ 4x & -1 & 0 \end{bmatrix}$

Resposta: $x = 2$; $y = 1$

15. O mapa apresenta as rotas, indicadas pelas setas vermelhas, oferecidas por uma companhia aérea que atua em certos locais do Brasil.

Rotas aéreas, em 2021



Fonte de pesquisa: IBGE. *Atlas geográfico escolar*. 9. ed. Rio de Janeiro, 2023.

RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

a) Em quais estados brasileiros essa companhia aérea atua? Resposta: Roraima, Amazonas, Acre, Rondônia e Mato Grosso.

b) O município de Boa Vista está localizado em qual estado brasileiro? Resposta: Roraima.

c) Qual é a distância em linha reta entre Manaus e Rio Branco? Resposta: Aproximadamente 1149 km.

d) O estado em que Boa Vista se localiza faz fronteira com quais países? Resposta: Guiana e Venezuela.

e) Escreva a matriz $C = (c_{ij})_{5\times5}$, tal que: $c_{ij} = 1$ se existe percurso direto da cidade i para a cidade j; e $c_{ij} = 0$ se não existe percurso direto da cidade i para a cidade j. Resposta no final do **Livro do Estudante**.

Dica

Considere que não existe percurso de uma cidade para ela mesma.

f) A matriz C é uma matriz triangular? É uma matriz diagonal? Resposta: Não; não.

g) Qual é o traço da matriz C? Resposta: 0

16. Escreva a transposta de cada matriz.

a) $A = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -8 & 3 & 5 \\ -2 & 3 & 1 & -6 \\ 1 & 5 & -6 & 7 \end{bmatrix}$ Resposta no final do **Livro do Estudante**.

b) $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & \frac{5}{2} \\ -2 & 0 & 6 \\ \frac{5}{2} & 6 & 13 \end{bmatrix}$

17. Qual das matrizes apresentadas na tarefa anterior é simétrica? Resposta: B

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Adição e subtração de matrizes

Neste tópico, estudaremos a adição e a subtração de matrizes, o que pode auxiliar na interpretação e na obtenção de novos dados com base em informações previamente conhecidas.

Adição de matrizes

No Brasil, as mulheres conquistaram o direito de votar e de receber votos com muita luta ao longo da história. Para elas, esse direito foi instituído apenas em 1932. A paulistana Carlota Pereira de Queirós (1892-1982) foi a primeira mulher eleita deputada federal no país, em 1934.



ARQUIVO/ESTADÃO CONTEÚDO

Carlota Pereira de Queirós, médica, pedagoga e política brasileira, retratada em dezembro de 1963.

PARA EXPANDIR

Que tal conhecer mais de 40 histórias sobre mulheres extraordinárias que transformaram sua própria realidade e impactaram a vida de outras pessoas? Para isso, leia o livro *Mulheres incríveis*, de Kate Schatz.

Professor, professora: Se julgar conveniente, converse com os estudantes sobre outras conquistas femininas no Brasil que foram importantes marcos históricos e incentive-os a pesquisar mais sobre este assunto. Diga, por exemplo, que em 1827 as meninas foram liberadas para frequentar a escola. Já em 1988, a Constituição Brasileira passou a reconhecer para as mulheres os mesmos direitos dos homens. Algumas conquistas são mais recentes, como a sanção da Lei Maria da Penha, em 2006, a da Lei do feminicídio, em 2015, e quando a importunação sexual feminina passou a ser considerada crime, em 2015. Questione os estudantes sobre o que eles consideram que ainda deve ser conquistado pelas mulheres, ou seja, quais direitos, embora conquistados legalmente, ainda não são praticados no dia a dia.

OBJETO DIGITAL
***Carrossel de imagens*:**
Mulheres na política

Contudo, atualmente, percebe-se ainda a necessidade de um avanço na participação da mulher na composição dos ambientes políticos institucionais no Brasil.

As tabelas a seguir apresentam a quantidade de homens e de mulheres eleitos deputados federais e senadores no Brasil em duas eleições.

Quantidade de candidatos eleitos para a Câmara Federal do Brasil, em 2018 e 2022

Ano da eleição	Mulher	Homem
2018	77	436
2022	91	422

Fonte de pesquisa: Justiça Eleitoral. *TSE Mulheres*. Disponível em: https://www.justicaeleitoral.jus.br/tse-mulheres/#historia. Acesso em: 16 jul. 2024.

Quantidade de candidatos eleitos para o Senado Federal do Brasil, em 2018 e 2022

Ano da eleição	Mulher	Homem
2018	6	47
2022	4	23

Fonte de pesquisa: Justiça Eleitoral. *TSE Mulheres*. Disponível em: https://www.justicaeleitoral.jus.br/tse-mulheres/#historia. Acesso em: 16 jul. 2024.

Com base nas tabelas, podemos construir as matrizes $A = \begin{bmatrix} 77 & 436 \\ 91 & 422 \end{bmatrix}$, para a Câmara Federal, e $B = \begin{bmatrix} 6 & 47 \\ 4 & 23 \end{bmatrix}$, para o Senado Federal. Ao adicionar os elementos de mesma posição nas matrizes A e B, obtemos uma matriz que representa o total de candidatos eleitos por sexo no Brasil para a Câmara Federal e para o Senado Federal nos anos de 2018 e 2022.

$$\begin{bmatrix} 77 + 6 & 436 + 47 \\ 91 + 4 & 422 + 23 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 83 & 483 \\ 95 & 445 \end{bmatrix}$$

Ao adicionar os elementos correspondentes das matrizes A e B, estamos adicionando essas matrizes, ou seja, calculando $A + B$.

Consideremos as matrizes $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$, de mesma ordem $m \times n$. A soma $A + B$ é igual à matriz $C = (c_{ij})$ de ordem $m \times n$, tal que $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ para todo $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$.

Questão A.

Em sua opinião, o que muda na política quando mais mulheres passam a ocupar ambientes políticos institucionais, participando também da tomada de decisões? Converse com os colegas e o professor.

Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes percebam, por exemplo, que, quanto mais diversificada for a composição dos ambientes políticos institucionais, maior será a chance de construir uma sociedade mais justa e igualitária.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Matriz oposta

Analise a adição das matrizes $A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & -6 \\ -3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -5 & -4 & 6 \\ 3 & -1 & 0 \end{bmatrix}$.

$$A + B = \begin{bmatrix} 5 & 4 & -6 \\ -3 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5 & -4 & 6 \\ 3 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 + (-5) & 4 + (-4) & -6 + 6 \\ -3 + 3 & 1 + (-1) & 0 + 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Nesse caso, como $A + B$ resulta em uma matriz nula, dizemos que B é a matriz oposta de A, e vice-versa.

Dada uma matriz A, denominamos **matriz oposta** de A, indicada por $-A$, a matriz cuja adição a A resulta em uma matriz nula de mesma ordem, ou seja, $A_{m\times n} + (-A_{m\times n}) = 0_{m\times n}$. Nas matrizes A e $-A$, os elementos correspondentes são opostos.

Propriedades da adição de matrizes

A adição de matrizes tem as mesmas propriedades básicas da adição de números reais, uma vez que foi definida por meio da adição de seus elementos correspondentes. Assim, considerando A, B e C matrizes de mesma ordem $m \times n$, temos:

- propriedade comutativa: $A + B = B + A$
- propriedade associativa: $(A + B) + C = A + (B + C)$
- elemento neutro: $A_{m\times n} + 0_{m\times n} = A_{m\times n}$
- elemento oposto: $A_{m\times n} + (-A_{m\times n}) = 0_{m\times n}$

Subtração de matrizes

Dadas duas matrizes A e B de mesma ordem $m \times n$, denominamos diferença entre A e B, indicada por $A - B$, a matriz C obtida ao calcular a adição de A com o oposto de B, ou seja, $A - B = A + (-B) = C$.

Exemplo

Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ -7 & 1 \end{bmatrix}$, segue que:

$$A - B = A + (-B) = \underbrace{\begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}}_{A} + \underbrace{\begin{bmatrix} -5 & -4 \\ 7 & -1 \end{bmatrix}}_{-B} = \begin{bmatrix} 8 + (-5) & 4 + (-4) \\ 3 + 7 & -5 + (-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 10 & -6 \end{bmatrix}$$

Sendo $A = (a_{ij})_{m\times n}$, $B = (b_{ij})_{m\times n}$ e $C = (c_{ij})_{m\times n}$, com $A - B = C$, temos $a_{ij} - b_{ij} = c_{ij}$. Assim, também podemos calcular $A - B$ subtraindo de cada elemento de A o elemento correspondente de B.

Exemplo

Considerando as matrizes $A = \begin{bmatrix} 12 & 7 & -1 \\ 9 & -4 & 5 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 5 \\ -6 & 2 & -8 \end{bmatrix}$, temos:

$$A - B = \begin{bmatrix} 12 & 7 & -1 \\ 9 & -4 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 0 & 5 \\ -6 & 2 & -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 - 4 & 7 - 0 & -1 - 5 \\ 9 - (-6) & -4 - 2 & 5 - (-8) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 7 & -6 \\ 15 & -6 & 13 \end{bmatrix}$$

Questão B.

Para quaisquer matrizes A e B de mesma ordem, $A - B = B - A$? Justifique sua resposta.

Resposta: Não, pois A e B são matrizes não nulas e $A - B = C$, então $B - A = -C$.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Exercícios e problemas resolvidos

R6. Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$, calcule $\big[A + (-B)\big] + (-A) + C$.

Resolução

Utilizando as propriedades da adição de matrizes, temos:

$$\big[A + (-B)\big] + (-A) + C \overset{\text{aplicando as propriedades comutativa e associativa}}{=} \big[A + (-A)\big] + (-B) + C \overset{\text{aplicando o elemento oposto da adição}}{=} 0_2 + (-B) + C \overset{\text{aplicando o elemento neutro da adição}}{=} -B + C$$

Segue que:

$$\big[A + (-B)\big] + (-A) + C = -B + C = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Observação

Note que $A + (-A) = 0_2$ corresponde à matriz nula de ordem 2 (elemento neutro da adição).

Observação

Como consequência da propriedade comutativa e do elemento neutro, temos:

$$0_n + (-B_n) = (-B_n) + 0_n = -B_n$$

20. Resposta pessoal. Sugestão de resposta: $\begin{bmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ -5 & -4 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & -6 \\ 5 & 6 & 2 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 10 & 3 & -3 \\ 4 & 0 & -1 \\ -2 & 7{,}5 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 12 & -1 & -4 \\ 1 & 0 & 2 \\ -2 & 5{,}5 & -5 \end{bmatrix}$.

Exercícios e problemas

Anote as respostas no caderno.

18. Efetue os cálculos.

a) $A = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 6 \\ 1 & -8 \end{bmatrix}$ Resposta: $A = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 4 & -8 \end{bmatrix}$

b) $B = \begin{bmatrix} 10 & 18 \\ -9 & 15 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -7 & 0 \\ 12 & -4 \end{bmatrix}$ Resposta: $B = \begin{bmatrix} 17 & 18 \\ -21 & 19 \end{bmatrix}$

c) $C = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -8 \\ 0 & -6 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -5 & -1 \\ -6 & 0 & 10 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ Resposta: $C = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -9 \\ -6 & -6 & 11 \\ 4 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

d) $D = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 9 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -4 & 10 \\ -1 & 7 \end{bmatrix}$ Resposta: $D = \begin{bmatrix} 9 & -14 \\ 7 & -3 \end{bmatrix}$

19. Considere as matrizes apresentadas a seguir.

$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -7 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 5 & -8 \\ 0 & 3 \\ 10 & 0 \end{bmatrix}$ $C = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 3 & -1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ $D = \begin{bmatrix} -2 & 4 & -1 \\ 1 & 0{,}5 & 3{,}4 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ $E = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 0 \\ -1 & 2{,}5 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ $F = \begin{bmatrix} 3 & 4 & -7 \\ 10 & 7 & 3 \\ 2 & 3{,}5 & -1 \end{bmatrix}$

Resposta: $X = \begin{bmatrix} -2 & 13 \\ 2 & -9 \\ -15 & 3 \end{bmatrix}$ e $Y = \begin{bmatrix} -2 & 12 & -8 \\ 12 & 5 & 2{,}4 \\ 0 & 5{,}5 & -3 \end{bmatrix}$.

Calcule $X = A - B - C$ e $Y = D - E + F$.

20. Escreva uma adição e uma subtração de matrizes cujo resultado seja $\begin{bmatrix} -2 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 9 \end{bmatrix}$.

21. Uma empresa de telefonia fixa oferece a seus clientes duas opções de planos residenciais. As matrizes J, F e M indicam, respectivamente, as vendas desses planos em uma área de cobertura que compreende quatro bairros nos meses de janeiro, fevereiro e março. Em cada uma delas, as linhas indicam os tipos de plano **I** e **II** (de cima para baixo) e as colunas os bairros **A**, **B**, **C** e **D** (da esquerda para a direita).

$J = \begin{bmatrix} 15 & 25 & 22 & 19 \\ 23 & 16 & 18 & 21 \end{bmatrix}$ $F = \begin{bmatrix} 18 & 24 & 22 & 25 \\ 20 & 21 & 19 & 23 \end{bmatrix}$ $M = \begin{bmatrix} 22 & 25 & 20 & 23 \\ 22 & 20 & 26 & 19 \end{bmatrix}$

a) Escreva a matriz $T_{2\times4}$ que representa o total de vendas dos planos **I** e **II** em cada bairro no trimestre apresentado. Resposta no final do **Livro do Estudante**.

b) Em qual bairro foram vendidas mais unidades do plano **I**? E do plano **II**? Resposta: Bairro **B**; bairro **A**.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

22. Escreva a oposta de cada matriz.

a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$ Resposta: $-A = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -5 & 0 \end{bmatrix}$

b) $B = \begin{bmatrix} 1 & -\pi \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$ Resposta: $-B = \begin{bmatrix} -1 & \pi \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$

c) $C = \begin{bmatrix} 1 & -0{,}5 & -1 \\ \sqrt[3]{-6} & 2 & 10 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ Resposta: $-C = \begin{bmatrix} -1 & 0{,}5 & 1 \\ -\sqrt[3]{-6} & -2 & -10 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

d) $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ Resposta: $-D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

e) $E = \begin{bmatrix} -4 & 2{,}4 & 3 \\ 0 & -9{,}1 & 44 \end{bmatrix}$ Resposta: $-E = \begin{bmatrix} 4 & -2{,}4 & -3 \\ 0 & 9{,}1 & -44 \end{bmatrix}$

f) $F = \begin{bmatrix} -\sqrt{3} & 2 \\ 5{,}2 & -4 \\ \frac{2}{3} & -\frac{4}{7} \end{bmatrix}$ Resposta: $-F = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & -2 \\ -5{,}2 & 4 \\ -\frac{2}{3} & \frac{4}{7} \end{bmatrix}$

23. Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 8 & -2 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$, calcule o que se pede em cada item.

a) $B + B$ b) $B + A$ c) $A + A^t$ d) $A - B$

Respostas no final do **Livro do Estudante**.

24. Analise a previsão de temperatura para algumas cidades brasileiras.

Previsão de temperatura mínima para alguns dias de fevereiro de 2024

Local	Dia				
	1	2	3	4	5
Brasília (DF)	19 °C	18 °C	18 °C	18 °C	18 °C
Campo Grande (MS)	22 °C	24 °C	23 °C	22 °C	22 °C
Cuiabá (MT)	25 °C	25 °C	25 °C	25 °C	24 °C
Goiânia (GO)	21 °C	20 °C	21 °C	21 °C	20 °C

Fonte de pesquisa: INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS. *Centro de Previsão de Tempo e Estudos Climáticos*. Disponível em: http://tempo.cptec.inpe.br. Acesso em: 30 jan. 2024.

Previsão de temperatura máxima para alguns dias de fevereiro de 2024

Local	Dia				
	1	2	3	4	5
Brasília (DF)	28 °C	29 °C	28 °C	29 °C	29 °C
Campo Grande (MS)	35 °C	34 °C	32 °C	31 °C	30 °C
Cuiabá (MT)	34 °C	34 °C	34 °C	33 °C	31 °C
Goiânia (GO)	33 °C	32 °C	33 °C	33 °C	32 °C

Fonte de pesquisa: INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS. *Centro de Previsão de Tempo e Estudos Climáticos*. Disponível em: http://tempo.cptec.inpe.br. Acesso em: 30 jan. 2024.

a) Escreva as matrizes M e N que apresentam, respectivamente, as temperaturas mínimas e máximas segundo o dia e a cidade. Resposta no final do **Livro do Estudante**.

b) Considere as matrizes A, B e C, de modo que: $A = M + N$; $B = N - M$; $C = M - N$. A previsão de variação de temperatura de cada dia é dada por qual dessas matrizes? Resposta: Matriz B.

c) Transcreva no caderno a matriz que você identificou no item **b**. Resposta no final do **Livro do Estudante**.

d) Para qual cidade estava prevista a maior variação de temperatura em 4 de fevereiro de 2024? E a menor? Resposta: Goiânia; Cuiabá.

e) Em qual dia Campo Grande apresentou a maior previsão de variação de temperatura? Resposta: dia 1.

25. Sabendo que $A + I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 0 & -7 & 8 \\ -1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$, em que I_3 é a matriz identidade de ordem 3, determine a matriz A. Resposta no final do **Livro do Estudante**.

26. Junte-se a um colega e estabeleçam quatro matrizes, A, B, C e 0, de mesma ordem, e verifiquem numericamente a validade das seguintes propriedades. Resposta pessoal. Explique aos estudantes que os itens desta tarefa não correspondem a demonstrações, apenas a verificações numéricas.

a) $A + B = B + A$

b) $(A + B) + C = A + (B + C)$

c) $A + 0 = A$

d) $A + (-A) = 0$

Observação

A matriz nula $0_{m \times n}$ está representada por 0.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Multiplicação de um número real por uma matriz

Dada uma matriz $A = (a_{ij})$ de ordem $m \times n$, e um número real k, então $k \cdot A$ é uma matriz $B = (b_{ij})$ também de ordem $m \times n$, tal que $b_{ij} = k \cdot a_{ij}$ para todo $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$.

Exemplo

Sendo $A = \begin{bmatrix} 5 & 7 & -1 \\ -3 & 4 & 11 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -16 & 13 \\ 10 & 0 \end{bmatrix}$, temos:

- $3 \cdot A = 3 \cdot \begin{bmatrix} 5 & 7 & -1 \\ -3 & 4 & 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cdot 5 & 3 \cdot 7 & 3 \cdot (-1) \\ 3 \cdot (-3) & 3 \cdot 4 & 3 \cdot 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & 21 & -3 \\ -9 & 12 & 33 \end{bmatrix}$
- $-\frac{1}{4} \cdot B = -\frac{1}{4} \cdot \begin{bmatrix} -16 & 13 \\ 10 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} \cdot (-16) & -\frac{1}{4} \cdot 13 \\ -\frac{1}{4} \cdot 10 & -\frac{1}{4} \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -\frac{13}{4} \\ -\frac{5}{2} & 0 \end{bmatrix}$

Exercícios e problemas resolvidos

R7. Seja $A_{2\times2}$ uma matriz qualquer. Mostre que $(\alpha + \beta) \cdot A = \alpha \cdot A + \beta \cdot A$, sendo α e β números reais.

Resolução

$$(\alpha + \beta) \cdot A = (\alpha + \beta) \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\alpha + \beta) \cdot a_{11} & (\alpha + \beta) \cdot a_{12} \\ (\alpha + \beta) \cdot a_{21} & (\alpha + \beta) \cdot a_{22} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha \cdot a_{11} + \beta \cdot a_{11} & \alpha \cdot a_{12} + \beta \cdot a_{12} \\ \alpha \cdot a_{21} + \beta \cdot a_{21} & \alpha \cdot a_{22} + \beta \cdot a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \cdot a_{11} & \alpha \cdot a_{12} \\ \alpha \cdot a_{21} & \alpha \cdot a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta \cdot a_{11} & \beta \cdot a_{12} \\ \beta \cdot a_{21} & \beta \cdot a_{22} \end{bmatrix} =$$

$$= \alpha \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \beta \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \alpha \cdot A + \beta \cdot A$$

Portanto, $(\alpha + \beta) \cdot A = \alpha \cdot A + \beta \cdot A$.

Observação

Dadas as matrizes A e B, de mesma ordem, e dois números reais α e β, são válidas as propriedades:

- $\alpha \cdot (A + B) = \alpha \cdot A + \alpha \cdot B$
- $(\alpha + \beta) \cdot A = \alpha \cdot A + \beta \cdot A$
- $\alpha \cdot (\beta \cdot A) = (\alpha \cdot \beta) \cdot A$
- $(\alpha \cdot A)^t = \alpha \cdot A^t$

Exercícios e problemas

Anote as respostas no caderno.

27. Efetue os cálculos. Respostas no final do **Livro do Estudante**.

a) $-3 \cdot \begin{bmatrix} -1 & \pi & \frac{1}{6} \\ 0 & -4 & 2 \end{bmatrix}$ b) $\frac{2}{3} \cdot \begin{bmatrix} -6 & 3x \\ 0 & 1 \\ 9x^2 & -2 \end{bmatrix}$

28. Considerando duas matrizes quaisquer $A_{m\times n}$ e $B_{m\times n}$ e um número real α, mostre que:

a) $\alpha \cdot (A + B) = \alpha \cdot A + \alpha \cdot B$ b) $(\alpha \cdot A)^t = \alpha \cdot A^t$

Respostas no final do **Livro do Estudante**.

Dica

Antes de resolver o problema, estabeleça duas matrizes A e B de mesma ordem e um número real α. Depois, verifique numericamente a validade dessas propriedades.

29. Determine os valores de x, y e z de modo que $4 \cdot \begin{bmatrix} x & 2 \\ -z & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} y & 6 \\ 5 & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 0 \end{bmatrix}$. Resposta: $x = \frac{7}{4}$; $y = 4$; $z = -3$

30. Na matriz C, a 1ª linha indica a quantidade de tecido (em metros quadrados); a 2ª, a quantidade de botões usados na confecção de 3 modelos diferentes de camisa, correspondentes a cada uma das colunas.

$$C = \begin{bmatrix} 0{,}9 & 0{,}8 & 1{,}1 \\ 5 & 7 & 8 \end{bmatrix}$$

Escreva a matriz que indica a quantidade necessária desses materiais para a confecção de 18 camisas de cada modelo. Respostas no final do **Livro do Estudante**.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Multiplicação de matrizes

Em certa fábrica, duas máquinas **X** e **Y** produzem cada uma dois tipos de peça: **I** e **II**. Analise a proporção de cada tipo de peça produzida pelas máquinas e as quantidades de peças produzidas em certo mês.

Proporção na produção total das peças em agosto de 2024

Máquina	Peça I	Peça II
X	0,25	0,60
Y	0,75	0,40

Fonte de pesquisa: Administração da fábrica.

Produção total por tipo de peça em agosto de 2024

Peça	Quantidade
I	680
II	590

Fonte de pesquisa: Administração da fábrica.

Professor, professora: As informações apresentadas nas tabelas são fictícias.

Podemos calcular o total de peças produzidas pelas máquinas **X** e **Y** naquele mês por meio dos seguintes cálculos.

- Máquina **X**: $0{,}25 \cdot 680 + 0{,}60 \cdot 590 = 524$, ou seja, 524 peças.
- Máquina **Y**: $0{,}75 \cdot 680 + 0{,}40 \cdot 590 = 746$, ou seja, 746 peças.

Assim, podemos expressar a produção de cada máquina conforme indicado na tabela apresentada.

Produção por máquina em agosto de 2024

Máquina	Quantidade
X	524
Y	746

Fonte de pesquisa: Administração da fábrica.

Se considerarmos as matrizes A, B e C correspondentes, respectivamente, à proporção na produção total das peças, à produção total por tipo de peça e à produção por máquina, os cálculos realizados correspondem ao que se define como **multiplicação de matrizes**.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0{,}25 & 0{,}60 \\ 0{,}75 & 0{,}40 \end{bmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 680 \\ 590 \end{bmatrix}}_{B} = \begin{bmatrix} 0{,}25 \cdot 680 + 0{,}60 \cdot 590 \\ 0{,}75 \cdot 680 + 0{,}40 \cdot 590 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 524 \\ 746 \end{bmatrix}}_{C = A \cdot B}$$

Dadas as matrizes $A = (a_{ij})$, de ordem $m \times n$, e $B = (b_{ij})$, de ordem $n \times p$, o produto $A \cdot B$ é a matriz $C = (c_{ij})$, de ordem $m \times p$, na qual cada elemento c_{ij} é obtido multiplicando-se ordenadamente os elementos da linha i de A e da coluna j de B e adicionando as parcelas correspondentes aos produtos das multiplicações.

$$A_{m \times n} \cdot B_{n \times p} = C_{m \times p}$$

De acordo com a definição apresentada, o produto de duas matrizes A e B existe somente se a quantidade de colunas de A for igual à quantidade de linhas de B, e a matriz $A \cdot B$ obtida tem a mesma quantidade de linhas de A e a mesma quantidade de colunas de B.

Na multiplicação de matrizes, podemos destacar as seguintes propriedades.

- Propriedade **I** (associativa): $(A_{m \times n} \cdot B_{n \times p}) \cdot C_{p \times r} = A_{m \times n} \cdot (B_{n \times p} \cdot C_{p \times r})$.
- Propriedade **II** (distributiva): $(A_{m \times n} + B_{m \times n}) \cdot C_{n \times p} = A_{m \times n} \cdot C_{n \times p} + B_{m \times n} \cdot C_{n \times p}$ e $A_{m \times n} \cdot (B_{n \times p} + C_{n \times p}) = A_{m \times n} \cdot B_{n \times p} + A_{m \times n} \cdot C_{n \times p}$.
- Propriedade **III** (elemento neutro): $A_{m \times n} \cdot I_n = A_{m \times n}$ e $I_m \cdot A_{m \times n} = A_{m \times n}$, sendo I a matriz identidade.
- Propriedade **IV**: $(k \cdot A_{m \times n}) \cdot B_{n \times p} = A_{m \times n} \cdot (k \cdot B_{n \times p}) = k \cdot (A_{m \times n} \cdot B_{n \times p})$, com $k \in \mathbb{R}$.
- Propriedade **V**: $(A_{m \times n} \cdot B_{n \times p})^t = B^t{}_{p \times n} \cdot A^t{}_{n \times m}$.

Professor, professora: Diga aos estudantes que as propriedades apresentadas podem ser demonstradas. No entanto, optamos por não fazê-lo neste livro. Além disso, vale lembrar que a propriedade comutativa não é válida para a multiplicação de matrizes. Existindo a multiplicação de matrizes $A \cdot B$, temos as seguintes possibilidades:
1ª) $A \cdot B \neq B \cdot A$;
2ª) $A \cdot B = B \cdot A$;
3ª) não existe $B \cdot A$.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Exercícios e problemas resolvidos

R8. Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} x-1 & 2 \\ x & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} x-3 & 0 \\ x-2 & 2 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$, determine o número real x para que $A \cdot B - C = I_2$, em que I_2 é a matriz identidade de ordem 2×2.

Resolução

Inicialmente, fazemos a multiplicação $A \cdot B$.

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} x-1 & 2 \\ x & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x-3 & 0 \\ x-2 & 2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} (x-1)\cdot(x-3) + 2\cdot(x-2) & (x-1)\cdot 0 + 2\cdot 2 \\ x\cdot(x-3) + 0\cdot(x-2) & x\cdot 0 + 0\cdot 2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} (x^2 - 3x - 1x + 3) + (2x - 4) & 4 \\ x^2 - 3x & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^2 - 2x - 1 & 4 \\ x^2 - 3x & 0 \end{bmatrix}$$

Em seguida, subtraímos C.

$$A \cdot B - C = \begin{bmatrix} x^2 - 2x - 1 & 4 \\ x^2 - 3x & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} x^2 - 2x - 1 - 6 & 4 - 4 \\ x^2 - 3x - 4 & 0 - (-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^2 - 2x - 7 & 0 \\ x^2 - 3x - 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Lembrando que I_2 é a matriz identidade de ordem 2×2, ou seja, que $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, vamos escrever a igualdade $A \cdot B - C = I_2$ e comparar os elementos de mesma posição.

$$\begin{bmatrix} x^2 - 2x - 7 & 0 \\ x^2 - 3x - 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Com isso, obtemos as seguintes equações.

- a_{11}: $x^2 - 2x - 7 = 1$
- a_{21}: $x^2 - 3x - 4 = 0$
- a_{12}: $0 = 0$
- a_{22}: $1 = 1$

Para determinar o valor de x, precisamos resolver as equações $x^2 - 2x - 7 = 1$ e $x^2 - 3x - 4 = 0$.

Observação

Para resolver uma equação do tipo $ax^2 + bx + c = 0$, com a, b e c reais e $a \neq 0$, podemos aplicar a fórmula resolutiva $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$, na qual $\Delta = b^2 - 4ac$.

Para solucionar a equação $x^2 - 2x - 7 = 1$, vamos aplicar a fórmula resolutiva.

$$x^2 - 2x - 7 = 1 \Rightarrow x^2 - 2x - 8 = 0$$
$$a = 1;\ b = -2;\ c = -8$$
$$\Delta = (-2)^2 - 4\cdot 1\cdot(-8) = 36$$

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{36}}{2\cdot 1}$$
$$x = \frac{2 \pm 6}{2}$$

Sendo assim, $x = -2$ ou $x = 4$.

Aplicamos novamente a fórmula resolutiva, dessa vez para resolver a equação $x^2 - 3x - 4 = 0$.

$$x^2 - 3x - 4 = 0$$
$$a = 1;\ b = -3;\ c = -4$$
$$\Delta = (-3)^2 - 4\cdot 1\cdot(-4) = 25$$

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{25}}{2\cdot 1}$$
$$x = \frac{3 \pm 5}{2}$$

Sendo assim, $x = -1$ ou $x = 4$.

O único valor que satisfaz simultaneamente as equações é $x = 4$.

Portanto, $x = 4$ é o único valor possível para que se verifique a igualdade $A \cdot B - C = I_2$.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

R9. Inspirado em sua experiência com artesanatos, Sandro começou a fazer pulseiras. Uma de suas estratégias para facilitar a administração dos recursos e evitar o excesso, a falta ou o desperdício de matéria-prima é produzi-las por encomenda, com divulgação em uma plataforma digital, ou seja, ele só produz o que vai vender.

Além disso, Sandro sabe exatamente os custos envolvidos na produção das pulseiras, de tal maneira que o comprador pode escolher entre várias opções de estilo, cores, tamanhos e materiais naturais. No entanto, os preços de custo e de venda são limitados a apenas quatro opções, conforme apresentado.

Preço de custo e de venda dos diferentes tipos de pulseira, no mês vigente

Tipo	Preço de custo (R$)	Preço de venda (R$)
A	2	5
B	4	8
C	6	12
D	8	18

Fonte de pesquisa: Controle administrativo de Sandro.

Em certa semana, Sandro precisou trabalhar seis dias. A tabela a seguir apresenta as quantidades de pulseiras vendidas nessa semana.

Quantidade de pulseiras vendidas em certa semana

Dia	Tipo A	Tipo B	Tipo C	Tipo D
Segunda-feira	3	5	4	0
Terça-feira	2	0	6	5
Quarta-feira	5	2	1	7
Quinta-feira	0	3	9	1
Sexta-feira	8	5	10	4
Sábado	10	15	20	15

Fonte de pesquisa: Controle administrativo de Sandro.

a) Escreva duas matrizes, A e B, com os números apresentados na primeira e na segunda tabela, respectivamente. Depois, calcule a matriz $B \cdot A$.

b) Qual é o significado de cada coluna da matriz $B \cdot A$?

c) É possível calcular o produto $A \cdot B$? Justifique sua resposta.

Resolução

a) Escrevendo as matrizes $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 8 \\ 6 & 12 \\ 8 & 18 \end{bmatrix}_{4\times 2}$ e $B = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 6 & 5 \\ 5 & 2 & 1 & 7 \\ 0 & 3 & 9 & 1 \\ 8 & 5 & 10 & 4 \\ 10 & 15 & 20 & 15 \end{bmatrix}_{6\times 4}$, a matriz $B \cdot A$ será:

$$B \cdot A = \begin{bmatrix} 3\cdot 2 + 5\cdot 4 + 4\cdot 6 + 0\cdot 8 & 3\cdot 5 + 5\cdot 8 + 4\cdot 12 + 0\cdot 18 \\ 2\cdot 2 + 0\cdot 4 + 6\cdot 6 + 5\cdot 8 & 2\cdot 5 + 0\cdot 8 + 6\cdot 12 + 5\cdot 18 \\ 5\cdot 2 + 2\cdot 4 + 1\cdot 6 + 7\cdot 8 & 5\cdot 5 + 2\cdot 8 + 1\cdot 12 + 7\cdot 18 \\ 0\cdot 2 + 3\cdot 4 + 9\cdot 6 + 1\cdot 8 & 0\cdot 5 + 3\cdot 8 + 9\cdot 12 + 1\cdot 18 \\ 8\cdot 2 + 5\cdot 4 + 10\cdot 6 + 4\cdot 8 & 8\cdot 5 + 5\cdot 8 + 10\cdot 12 + 4\cdot 18 \\ 10\cdot 2 + 15\cdot 4 + 20\cdot 6 + 15\cdot 8 & 10\cdot 5 + 15\cdot 8 + 20\cdot 12 + 15\cdot 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 & 103 \\ 80 & 172 \\ 80 & 179 \\ 74 & 150 \\ 128 & 272 \\ 320 & 680 \end{bmatrix}$$

b) A 1ª coluna da matriz $B \cdot A$ representa o preço de custo de todas as pulseiras vendidas no dia da semana correspondente. Já a 2ª coluna representa a quantia arrecadada com a venda das pulseiras no dia da semana correspondente.

c) Não. A ordem da matriz A é 4×2 e a da matriz B é 7×4, ou seja, a quantidade de colunas da matriz A é diferente da quantidade de linhas da matriz B, impossibilitando o produto $A \cdot B$.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

31. Efetue os cálculos.

a) $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -6 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ Resposta: $\begin{bmatrix} 4 & 10 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$

b) $B = \begin{bmatrix} -1 & 5 & -2 \\ 0 & 6 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ Resposta: $\begin{bmatrix} -1 & 8 & -3 \\ 0 & 12 & 4 \end{bmatrix}$

c) $C = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 9 \\ 0 & 9 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & -9 \\ 0 & -9 & -1 \end{bmatrix}$ Resposta: $\begin{bmatrix} -5 & 8 & 18 \\ 8 & -94 & -36 \\ 18 & -36 & -82 \end{bmatrix}$

d) $D = \begin{bmatrix} 6 & 8 & \sqrt{3} & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ \sqrt{3} \\ 7 \end{bmatrix}$ Resposta: $\begin{bmatrix} 9 \end{bmatrix}$

e) $E = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ Resposta: $\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -5 \end{bmatrix}$

f) $F = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \\ 7 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix}$ Resposta: $\begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 0 & 0 \\ 8 & 12 \\ 14 & 21 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

g) $G = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ Resposta: $\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$

h) $H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & -2 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ Resposta: $\begin{bmatrix} 10 & 5 \\ 6 & 6 \\ 5 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$

32. Sejam as matrizes $A = (a_{ij})_{3\times 2}$ e $B = (b_{ij})_{m\times 4}$.

a) Determine o valor de m para que exista o produto $A \cdot B$. Resposta: $m = 2$

b) Considerando o valor de m obtido no item **a**, qual é a ordem da matriz $C = A \cdot B$? Resposta: 3×4

33. Sendo as matrizes $A = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{2} \\ 4 & -5 \end{bmatrix}$, calcule $A \cdot B$ e $B \cdot A$.

Resposta no final do **Livro do Estudante**.

34. Junte-se a um colega e estabeleçam três matrizes quadradas, A, B e C, de ordem 2 e verifiquem numericamente a validade das propriedades a seguir.

a) $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$

b) $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$

c) $A \cdot I_2 = I_2 \cdot A = A$

d) $(k \cdot A) \cdot B = k \cdot (A \cdot B)$, com $k \in \mathbb{R}$

e) $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$

Resposta pessoal. Explique aos estudantes que os itens desta tarefa não correspondem a demonstrações, apenas a verificações numéricas.

35. Analise parte da tabela de classificação da série *A* do Campeonato Brasileiro de Futebol Masculino de 2023, em determinada rodada.

Classificação na 38ª rodada do Campeonato Brasileiro de Futebol Masculino, em 2023

Time	Resultado		
	Vitórias	Empates	Derrotas
Palmeiras	20	10	8
Grêmio	21	5	12
Atlético Mineiro	19	9	10
Flamengo	19	9	10
Botafogo	18	10	10

Fonte de pesquisa: ANTOMIL, Marcos. Palmeiras confirma a supremacia nacional com empate no Mineirão. *O Estado de S. Paulo*, São Paulo, 7 dez. 2023.

A quantidade de vitórias, empates e derrotas de cada time pode ser representada pela matriz a seguir.

$$A = \begin{bmatrix} 20 & 10 & 8 \\ 21 & 5 & 12 \\ 19 & 9 & 10 \\ 19 & 9 & 10 \\ 18 & 10 & 10 \end{bmatrix}$$

Para obter a pontuação dos times, são atribuídos 3 pontos para vitória, 1 para empate e 0 para derrota, formando a matriz $B = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

a) Determine a matriz C que fornece o total de pontos de cada um desses times até essa rodada. Resposta no final do **Livro do Estudante**.

b) Qual foi a pontuação obtida pelo Palmeiras? E pelo Flamengo? Resposta: 70 pontos; 66 pontos.

36. Dadas as matrizes $P = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$, $Q = \begin{bmatrix} 1 & -6 & 0 \\ 5 & -3 & 2 \end{bmatrix}$ e $R = (r_{ij})$, com $R = P \cdot Q$, escreva o elemento:

a) r_{12}. Resposta: -12 b) r_{21}. Resposta: 19 c) r_{23}. Resposta: 8

37. Sendo $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -4 & 6 & 9 \\ 10 & -7 & 0 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, calcule o que se pede em cada item.

a) $A \cdot B$ b) $A^t \cdot C$ c) $C \cdot B$ d) $(A + C) \cdot B$

Respostas no final do **Livro do Estudante**.

38. Calcule os valores de x e y de modo que a igualdade $\begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x & 3 \\ 1 & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 2 \end{bmatrix}$ seja verdadeira. Resposta: $x = -3$; $y = \frac{1}{2}$

39. Dadas as matrizes $A_{p\times q}$, $B_{3\times r}$ e $C_{4\times s}$, determine os valores de p, q, r e s sabendo que o produto $A \cdot B \cdot C$ é da ordem 5×3. Resposta: $p = 5$; $q = 3$; $r = 4$; $s = 3$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Matriz inversa

Sendo A uma matriz quadrada de ordem n, denominamos a matriz quadrada B, também de ordem n, de **matriz inversa** de A se $A \cdot B = I_n$ e $B \cdot A = I_n$, sendo I_n a matriz identidade de ordem n. De maneira geral, indicamos a inversa de A por A^{-1}. Quando uma matriz quadrada tem inversa, dizemos que essa matriz é **invertível** (ou inversível). Já quando a matriz não tem inversa, dizemos que ela é **não invertível** (ou não inversível).

Observação

De maneira geral, quanto maior a ordem de uma matriz quadrada, mais cálculos são necessários para obter a sua inversa. Nesse sentido, programas específicos de computador costumam ser empregados nessa tarefa, como a planilha eletrônica.

Exemplo

A matriz $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ é invertível, e sua inversa é $A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, pois:

- $A \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$
- $A^{-1} \cdot A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$

Exercícios e problemas resolvidos

R10. Caso exista, determine a inversa da matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$.

40. a) Resposta: $\begin{bmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{10} & \frac{3}{10} \end{bmatrix}$

Resolução

Se existir, a inversa da matriz A é do tipo $X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, tal que $A \cdot X = I_2$, ou seja:

$$A \cdot X = I_2 \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 3a + c & 3b + d \\ 5a + 2c & 5b + 2d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Da igualdade de matrizes, temos os sistemas:

$$\begin{cases} 3a + c = 1 \cdot (-2) \\ 5a + 2c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -6a - 2c = -2 \\ 5a + 2c = 0 \end{cases}$$

$$-a = -2 \Rightarrow a = 2$$

$$3a + c = 1 \Rightarrow 3 \cdot 2 + c = 1 \Rightarrow c = -5$$

$$\begin{cases} 3b + d = 0 \cdot (-2) \\ 5b + 2d = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -6b - 2d = 0 \\ 5b + 2d = 1 \end{cases}$$

$$-b = 1 \Rightarrow b = -1$$

$$3b + d = 0 \Rightarrow 3 \cdot (-1) + d = 0 \Rightarrow d = 3$$

Em seguida, verificamos se $X \cdot A = I_2$.

$$X \cdot A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 3 + (-1) \cdot 5 & 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 \\ (-5) \cdot 3 + 3 \cdot 5 & (-5) \cdot 1 + 3 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

Como $A \cdot X = X \cdot A = I_2$, segue que a matriz A é invertível, e sua inversa é $A^{-1} = X = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$.

Observação

Caso um dos sistemas fosse impossível, a matriz A não seria invertível.

Exercícios e problemas

40. b) Resposta: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Anote as respostas no caderno.

40. Obtenha, caso exista, a inversa de cada matriz.

a) $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

b) $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

c) $C = \begin{bmatrix} -12 & 6 \\ 18 & -9 \end{bmatrix}$

Resposta: Não existe C^{-1}.

d) $D = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 8 & 0 \end{bmatrix}$

Resposta: $\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{8} \end{bmatrix}$

41. Sendo $A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & n \\ -\frac{1}{2} & 3 \end{bmatrix}$ a matriz inversa de $A = \begin{bmatrix} m & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, calcule o valor de $m + n$. Resposta: 7

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

42. A palavra criptografia é derivada de *kriptos*, que em grego significa oculto, escondido. Contudo, a criptografia não tem como objetivo ocultar a existência de uma mensagem, mas esconder o seu significado.

De acordo com uma chave estabelecida previamente pelo receptor e pelo transmissor, o texto é codificado para tornar a mensagem incompreensível a terceiros. O receptor torna a mensagem compreensível ao decodificá-la por meio da chave.



HELOÍSA PINTARELLI/ ARQUIVO DA EDITORA

Um dos métodos utilizados para criptografar mensagens é por meio de matrizes. Para isso, podemos, por exemplo, relacionar as letras do alfabeto e o símbolo #, que representa um espaço em branco, a números primos da seguinte maneira.

#	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41	43

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
47	53	59	61	67	71	73	79	83	89	97	101	103

Convertendo a mensagem CÓDIGO SECRETO para a forma numérica apresentada, obtemos:

C	O	D	I	G	O	#	S	E	C	R	E	T	O
7	53	11	29	19	53	2	71	13	7	67	13	73	53

Suponha que a chave utilizada seja a matriz quadrada invertível $A = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$. Como essa matriz é de ordem 2, organizamos a sequência de números como elementos de uma matriz B com duas linhas, ou seja:

$$B = \begin{bmatrix} 7 & 53 & 11 & 29 & 19 & 53 & 2 \\ 71 & 13 & 7 & 67 & 13 & 73 & 53 \end{bmatrix}$$

Ao realizar a multiplicação $A \cdot B$, obtemos a matriz C, que será enviada ao receptor. Recebida a mensagem, ele a decodifica multiplicando a inversa da chave por C, ou seja, $A^{-1} \cdot C = B$. Por fim, o receptor, utilizando a associação entre letras e números, poderá obter a mensagem original.

a) Determine a matriz C enviada ao receptor no exemplo apresentado. Resposta no final do **Livro do Estudante**.

b) Mostre que a mensagem codificada no item **a**, ao ser decodificada, gera a mensagem original. Resposta no final do **Livro do Estudante**.

c) No enunciado desta tarefa, foram relacionados números primos às letras do alfabeto. Explique o que são números primos. Resposta no final do **Livro do Estudante**.

d) Suponha que chegou até um receptor a seguinte matriz.

$$M = \begin{bmatrix} 187 & 151 & 299 & 639 & 367 & 227 & 63 & 83 & 278 \\ 141 & 115 & 225 & 497 & 293 & 171 & 50 & 63 & 209 \end{bmatrix}$$

Sabendo que essa mensagem foi criptografada usando a mesma relação de letras e símbolos apresentada nesta tarefa, cuja chave é a matriz $A = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, qual é a mensagem codificada?
Resposta: A mensagem é "missão fracassada".

e) Escolha outra maneira para relacionar letras a números, defina uma matriz-chave e escreva uma mensagem a ser codificada por meio de uma matriz. Envie essa matriz a um colega, disponibilizando a ele a matriz-chave e a relação letra/número. Peça a ele que decodifique a mensagem. Por fim, verifiquem se a mensagem secreta foi obtida. Resposta pessoal. Orientações sobre este item no **Suplemento para o professor**.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

EDUCAÇÃO MIDIÁTICA

Professor, professora: Durante o trabalho com esta seção, comente com os estudantes que, em casos de tentativa de ataques virtuais, é muito importante para a vítima salvar a maior quantidade possível de evidências desse ataque, como capturas de tela, documentos, perfis de rede social, *e-mails* e mensagens de textos. Em muitos casos, os golpes começam com a prática de *phishing* ou com os criminosos incentivando as próprias vítimas a enviarem seus dados pessoais. Além disso, é essencial procurar uma delegacia física ou virtual para fazer um boletim de ocorrência (B.O.).

Criptografia e segurança digital

Início de conversa

Converse com os colegas sobre a questão a seguir.

1. Você conhece alguém que foi vítima de alguma tentativa de golpe ou fraude na internet?

OBJETO DIGITAL ***Podcast*:** Criptografia na Segunda Guerra Mundial

Como vimos, por meio de matrizes inversas é possível criar chaves de criptografia, isto é, ocultar o significado de uma mensagem, tornando-a legível apenas por meio de códigos. Em relação à internet, a criptografia pode ser utilizada para muitas finalidades, como proteger arquivos, dados pessoais e informações de usuários e empresas.

A internet oferece diversas funcionalidades, como informações, notícias e entretenimento. Contudo, nem sempre ela é um ambiente seguro. Em 2022, por exemplo, foram mapeadas em média 17 tentativas de golpes ou fraudes por hora em computadores e celulares no Brasil. Estima-se que esses golpes tenham causado um prejuízo de cerca 500 milhões de reais. Roubo de dados por meio de *links* maliciosos e falsos anúncios que prometem grandes descontos são algumas das modalidades mais conhecidas de ataques virtuais na atualidade.

Um dos primeiros registros de golpes digitais no mundo ocorreu em 1989. Na ocasião, o cientista e biólogo Joseph Popp distribuiu disquetes com informações e resultados de pesquisas sobre o vírus da Síndrome da Imunodeficiência Adquirida (AIDS na sigla em inglês) para vários estudiosos e instituições de pesquisa. No entanto, ao acessar os arquivos do disquete, ocorria o bloqueio dos computadores e uma mensagem exibida na tela solicitava depósitos em dinheiro em troca da devolução dos dados pessoais e dos arquivos de pesquisa armazenados na máquina. Era o primeiro ato de *ransomware*.

Os disquetes foram enviados para endereços em todo o mundo obtidos em uma lista de contatos, o que disseminou rapidamente o golpe e provocou muitos danos na época para os usuários de computador. Diversas pessoas perderam o trabalho de suas vidas porque não conseguiram reverter os danos.

Uma das vítimas foi Eddy Willems, funcionário de uma seguradora na Bélgica. Ao carregar um disquete em seu computador, em dezembro de 1989, Willems esperava verificar registros de algumas pesquisas médicas divulgadas aos participantes de uma conferência da Organização Mundial de Saúde sobre a AIDS em Estocolmo. Porém, foi surpreendido dias depois com o travamento das funções da máquina e, na tela, apareceu uma mensagem solicitando que enviasse cento e oitenta e nove dólares a uma caixa postal no Panamá. Felizmente para ele, não foi necessário ceder à chantagem, porque conseguiu reverter a situação sem perder as informações que guardava.

Graças aos esforços da polícia, Joseph foi preso, acusado de chantagem e tem sido considerado o inventor do *ransomware*. Mas até hoje não se sabe ao certo os motivos que o levaram a essa atitude.

Fonte de pesquisa: GLÓRIA JUNIOR, Irapuan; SILVA, Stephany Victoria Nascimento da. *Ransomware*: a evolução dos ataques na contemporaneidade e seus desafios para a segurança digital. *Journal of Technology & Information*, v. 3, n. 2, 2023. Disponível em: http://www.jtni.com.br/index.php/JTnI/article/view/84. Acesso em: 16 set. 2024.

O caso ocorrido com Eddy Willems iniciou um grande ponto de discussão para a comunidade cibernética e o legado do crime cometido por Joseph Popp persiste até hoje. Especialistas em segurança avaliam que os ataques de *ransomware* contra empresas e indivíduos têm a tendência de continuar crescendo porque os golpistas encontram facilidade na execução da prática ilícita e se sentem seguros por causa da dificuldade de serem rastreados. Ao clicar em um *link* malicioso, o *ransomware* normalmente instala um *software* no computador sem que o usuário saiba e, a partir de uma vulnerabilidade em um servidor desatualizado nessa máquina, causa estragos nos sistemas internos. As vítimas mais visadas são empresas e grandes investidores, que podem ser explorados mediante pedidos de muito dinheiro para o resgate.

1. Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes comentem sobre casos de tentativas de golpe na internet. Em caso positivo, peça-lhes que compartilhem o acontecimento com os colegas, buscando refletir sobre a frequência com que essas ações acontecem em nosso cotidiano.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Um dos princípios do *ransomware* é a criptografia. Por meio de uma prática conhecida como *phishing* (consiste no envio de um *e-mail* ou mensagem de texto que incentiva o usuário a clicar em *links* suspeitos), o dispositivo digital é infectado com um ***malware*** que criptografa as informações e impossibilita que os usuários acessem os arquivos da máquina. Em geral, os alvos preferidos são as grandes empresas, no entanto qualquer pessoa pode ser vítima de *ransomware*, tendo suas fotografias e dados pessoais sequestrados.

A criptografia também é uma ferramenta importante para a segurança digital. Esta última é o conjunto de práticas, processos e ferramentas digitais que buscam proteger computadores, *smartphones* e sistemas operacionais em geral de informações contra os ataques virtuais.

Em nosso cotidiano, os dispositivos de segurança digital monitoram e bloqueiam possíveis ameaças por meio de criptografia. Aplicativos de mensagens instantâneas, por exemplo, criptografam as mensagens para evitar que outras pessoas invadam nossa privacidade. Além do uso de dispositivos de segurança digital, há outros cuidados e hábitos que podemos adotar para preservar nossa privacidade e evitar golpes e ataques virtuais. Vamos conhecer alguns deles?

Cookies: nesse caso, arquivos pequenos gerado pelos navegadores e armazenados no computador ou *smartphone*.

Malware: termo utilizado para classificar qualquer *software* que tenha a intenção de prejudicar um computador ou *smartphone*.

- Utilize a aba anônima de navegadores, especialmente em computadores de uso público. Em geral, esse tipo de aba não armazena os dados de navegação, dificultando que terceiros obtenham seus dados pessoais, endereços de *e-mail* e redes sociais, por exemplo.
- Evite clicar em *links* e *e-mails* suspeitos. Em geral, a maioria dos golpes acontece por meio de *sites* e *e-mails* que prometem grandes descontos e ofertas imperdíveis. Clicar nesses *links* pode abrir caminho para a instalação de *softwares* maliciosos.
- Mantenha os navegadores e o sistema operacional de computadores e *smartphones* sempre atualizados. As empresas de tecnologia enviam atualizações sempre que detectam alguma falha ou ameaça de segurança para os dispositivos digitais.
- Limpe ***cookies*** dos navegadores. Em geral, a limpeza desses arquivos dificulta os ataques aos históricos de navegação, aos dados pessoais e ao endereço de conta de *e-mail* e redes sociais, por exemplo.
- Ao navegar pela internet, verifique se o *site* tem protocolo de segurança e criptografia. Isso pode ser feito observando se o *link* na barra de endereço co-



LEONARDO GIBRAN/ARQUIVO DA EDITORA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

1. Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes reflitam sobre a realidade próxima e comentem acerca das práticas e hábitos cotidianos relacionados à segurança digital de seus computadores e *smartphones*. Deixe-os à vontade para falar sobre o tema e verifique se algum deles apontou outras medidas além daquelas apresentadas no texto. Se possível, durante a discussão, comente que esses cuidados não somente ajudam a evitar fraudes e golpes, mas também contribuem para a preservação de nossa privacidade.

Atividades

Anote as respostas no caderno.

1. Quais medidas você adota para evitar fraudes, golpes ou roubo de informações e dados pessoais em seu computador ou *smartphone*?

2. De acordo com o que você aprendeu em sala de aula, como a matriz inversa pode ajudar na segurança digital de computadores e *smartphones*? Resposta: A matriz inversa pode ajudar na criptografia de informações. Em geral, sistemas e ferramentas de segurança digital, como os protocolos de HTTPS e aplicativos de mensagem instantânea, utilizam criptografia para proteger informações e dados pessoais dos usuários de internet.

3. Junte-se a dois colegas e produzam cartazes conscientizando a comunidade escolar sobre os perigos da internet e apresentando dicas de segurança digital.

Resposta pessoal. Oriente os estudantes a produzir cartazes com dados estatísticos sobre o número de golpes e fraudes virtuais no país, por exemplo. Se julgar pertinente, ajude-os a produzir gráficos, infográficos e tabelas. Em relação às dicas de segurança digital, incentive-os a pesquisar informações que possam ajudar a comunidade escolar a se prevenir contra ataques virtuais. Após a elaboração dos cartazes, peça-lhes que os colem em locais visíveis na escola, para que todos possam se informar sobre o assunto.

Equações envolvendo matrizes

Existem equações cuja incógnita é uma matriz. Em geral, para resolver equações com essa característica usamos as operações de adição, subtração e multiplicação de matrizes, além do conceito de matriz inversa, estudados anteriormente.

Exercícios e problemas resolvidos

R11. Sendo $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ e X uma matriz 3×2, resolva a equação matricial $X + A = B$.

Resolução

Utilizando as propriedades operatórias da adição, temos:

$$X + A = B \Rightarrow X + A + (-A) = B + (-A) \Rightarrow X + 0_{3\times 2} = B - A \Rightarrow X = B - A$$

Segue que: $X = B - A \Rightarrow X = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -4 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Portanto, a solução da equação é $X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -4 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

R12. Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 19 \\ 31 \end{bmatrix}$, determine a matriz X tal que $A \cdot X = B$.

Resolução

Podemos resolver a equação de duas maneiras.

1ª maneira

A ordem da matriz X é 2×1, pois $A_{2\times 2} \cdot X_{2\times 1} = B_{2\times 1}$.

A matriz X é do tipo $X = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$, tal que $A \cdot X = B$,

ou seja:

$$A \cdot X = B \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 \\ 31 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 3a + b \\ 5a + 2b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 \\ 31 \end{bmatrix}$$

Da igualdade de matrizes, temos o sistema:

$$\begin{cases} 3a + b = 19 \cdot (-2) \\ 5a + 2b = 31 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -6a - 2b = -38 \\ 5a + 2b = 31 \end{cases}$$

$$-a = -7 \Rightarrow a = 7$$

$$3a + b = 19 \Rightarrow 3 \cdot 7 + b = 19 \Rightarrow b = -2$$

Portanto, $X = \begin{bmatrix} 7 \\ -2 \end{bmatrix}$.

2ª maneira

Multiplicamos pela esquerda os membros da equação $A \cdot X = B$ por A^{-1}.

$$A \cdot X = B \Rightarrow A^{-1} \cdot (A \cdot X) = A^{-1} \cdot B$$

Utilizando as propriedades operatórias das matrizes, segue que:

$$A^{-1} \cdot (A \cdot X) = A^{-1} \cdot B \Rightarrow \underbrace{(A^{-1} \cdot A)}_{I_2} \cdot X = A^{-1} \cdot B \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underbrace{I_2 \cdot X}_{X} = A^{-1} \cdot B \Rightarrow X = A^{-1} \cdot B$$

Devemos calcular o produto da inversa da matriz A por B. Calculando inicialmente A^{-1}, obtemos $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$. Logo:

$$X = A^{-1} \cdot B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 19 \\ 31 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2 \cdot 19 + (-1) \cdot 31 \\ (-5) \cdot 19 + 3 \cdot 31 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Portanto, $X = \begin{bmatrix} 7 \\ -2 \end{bmatrix}$.

Observação

Nesse caso, foi possível utilizar a 2ª maneira porque a matriz A é invertível.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

R13. Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$, resolva o sistema $\begin{cases} -X + 2Y = A \\ X - Y = B \end{cases}$.

Resolução

Temos:

$$\begin{cases} -X + 2Y = A \\ X - Y = B \end{cases}$$
$$Y = A + B$$

Professor, professora: Oriente os estudantes a substituir as matrizes X e Y no sistema e verificar a igualdade.

Logo:

$$Y = A + B \Rightarrow Y = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Isolando X e substituindo Y na igualdade $X - Y = B$, segue que:

$$X - Y = B \Rightarrow X - Y + Y = B + Y \Rightarrow X = B + Y \Rightarrow X = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Portanto, a solução do sistema é $X = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ e $Y = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$.

Exercícios e problemas

Anote as respostas no caderno.

43. Determine a matriz X em cada item.

a) $X - \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ 4 & 5 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 9 \\ 23 & -8 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$ Resposta: $\begin{bmatrix} 18 & 6 \\ 27 & -3 \\ 8 & 3 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 5 & 3 & 4 \\ -4 & 1 & 7 \\ 6 & 0 & -8 \end{bmatrix} + X = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ Resposta: $\begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -5 \\ -6 & 0 & 9 \end{bmatrix}$

44. Sendo $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 7 & -1 \end{bmatrix}$, determine X tal que a igualdade $A \cdot X + B = \begin{bmatrix} 8 & 10 \\ 12 & 5 \end{bmatrix}$ seja verdadeira.

Resposta no final do **Livro do Estudante**.

45. Resolva os sistemas.

a) $\begin{cases} X + Y = \begin{bmatrix} 2 & 12 \\ 8 & -6 \end{bmatrix} \\ Y - X = \begin{bmatrix} 5 & -7 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \end{cases}$ Resposta: $X = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{19}{2} \\ 2 & -\frac{9}{2} \end{bmatrix}$; $Y = \begin{bmatrix} \frac{7}{2} & \frac{5}{2} \\ 6 & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$

b) $\begin{cases} X + Y = [3 \quad 5 \quad 2] \\ X - 2Y = [-3 \quad 0 \quad 8] \end{cases}$ Resposta: $X = \begin{bmatrix} 1 & \frac{10}{3} & 4 \end{bmatrix}$; $Y = \begin{bmatrix} 2 & \frac{5}{3} & -2 \end{bmatrix}$

46. Sendo $M = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ e $N = \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \end{bmatrix}$, determine a matriz X tal que $M \cdot X = N$.

Resposta no final do **Livro do Estudante**.

47. Em certa escola, a nota final dos estudantes é obtida por meio de dois trabalhos e uma prova, e cada avaliação tem um peso diferente. A tabela apresenta as notas de alguns estudantes.

Professor, professora: As informações apresentadas na tabela são fictícias.

Notas de Língua Portuguesa para alguns estudantes no 1º bimestre de 2025

Estudante	Nota			
	Trabalho 1	Trabalho 2	Prova	Final
André	8,0	9,0	9,0	8,8
Bianca	8,0	8,5	9,5	8,9
Carolina	9,5	10,0	9,0	9,4

Fonte de pesquisa: Secretaria da escola.

a) Determine, em porcentagem, o peso de cada avaliação.
Resposta: Trabalho **1**: peso 20%; trabalho **2**: peso 30%; prova: peso 50%.

b) Qual será a nota final de um estudante que obteve as notas 7, 9 e 8 no trabalho **1**, no trabalho **2** e na prova, respectivamente? Resposta: 8,1

c) Sabe-se que a nota final de um estudante foi 9. Quais são as possíveis notas obtidas por ele em cada avaliação? Sugestões de resposta: No trabalho **1**: 8, no trabalho **2**: 8, na prova: 10; no trabalho **1**: 9, no trabalho **2**: 9, na prova: 9.

Dica

Nomeie os pesos dos trabalhos de **1** e **2** e da prova de x, y e z, respectivamente.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

DESENVOLVIMENTO SUSTENTÁVEL

Menos sódio, mais saúde

Professor, professora: Oriente os estudantes a consultar mais informações sobre os **Objetivos de Desenvolvimento Sustentável** (ODS) no início deste volume.

ODS 2

Afinal, o sal de cozinha faz mal para os seres humanos? Como muitos outros alimentos, a resposta é: em excesso, sim!

O cloreto de sódio, popularmente conhecido como sal de cozinha, é usado como tempero em diversos pratos, além de ser um excelente conservante de alimentos. No entanto, quando ingerido em grandes quantidades, pode provocar a retenção de líquidos pelas células, exigindo do coração mais esforço em bombear o sangue para o corpo. Seu uso em excesso também pode ser relacionado ao aumento da pressão arterial.

Para se ter uma ideia, 1 g de sal contém 400 mg de sódio, e a Organização Mundial da Saúde (OMS) recomenda que seu consumo seja de menos de 5 g diárias. No entanto, contrariando a recomendação, estudos mostraram que a ingestão média do brasileiro é de 12 g de sal por dia, e o hipertenso chega a consumir diariamente 17,4 g.

Quais dos alimentos retratados nas imagens você tem o hábito de consumir com mais frequência? Qual deles você considera mais adequado para compor uma alimentação saudável?



MARIA PAOLINI/SHUTTERSTOCK

Prato com variedade de frutas tropicais.



TATJANA BAIBAKOVA/SHUTTERSTOCK

Prato com macarrão, carne e molho.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Professor, professora: Ao trabalhar o assunto destas páginas, converse com os estudantes a respeito dos hábitos alimentares adotados por eles e por seus familiares tanto em relação ao sódio quanto a outros compostos. Reforce os malefícios do sódio em excesso para o nosso organismo, incentivando o consumo de alimentos naturais, como frutas, verduras e legumes.



CACIO MURILO/SHUTTERSTOCK

Prato com arroz, feijão, legumes, farofa e carne de frango grelhada.

PARA EXPANDIR

Conheça um pouco mais sobre outras recomendações para uma alimentação adequada e saudável, entre outras informações importantes. Para isso, acesse o pdf do **Guia Alimentar** publicado no *site* do Ministério da Saúde. Disponível em:

https://www.gov.br/saude/pt-br/assuntos/saude-brasil/publicacoes-para-promocao-a-saude/guia_alimentar_populacao_brasileira_2ed.pdf/view

Acesso em: 23 set. 2024.

Professor, professora: Explique aos estudantes que a Organização Mundial da Saúde (OMS) é uma agência internacional responsável por elaborar padrões internacionais relativos aos mais variados assuntos associados à saúde. Essa organização atua em temas importantes, como poluição, doenças infecciosas, obesidade infantil, saúde mental, entre outros, além de estabelecer a Classificação Internacional de Doenças, que consiste em um referencial indispensável aos médicos atuantes em todo o planeta. Além das recomendações em relação à ingestão de sódio, a OMS também recomenda a redução no consumo de açúcares e de gorduras trans, por exemplo.

Alimentos ricos em sódio, como enlatados, conservas, embutidos, temperos prontos, frituras e salgadinhos devem ser evitados. Esses alimentos costumam ser mais consumidos que os naturais porque, de modo geral, têm sabor atrativo, preços mais acessíveis quando comparados aos dos *in natura*, e são de consumo rápido, sem necessidade de preparo. Contudo, além de não suprir as necessidades nutricionais diárias do corpo humano, o consumo excessivo desses alimentos está associado a diversas doenças, entre elas as cardiovasculares.

Já a ingestão de alimentos ricos em potássio exerce efeito anti-hipertensivo e protege o corpo humano contra problemas cardiovasculares. É recomendável que a ingestão diária de potássio seja de no mínimo 3 510 mg, que pode ser obtidas por meio de uma alimentação rica em vegetais frescos e algumas frutas, a exemplo das mostradas na página anterior.

Assim, procure consumir alimentos nutritivos, substituindo o excesso de sal por frutas e hortaliças, pois elas ajudam o paladar a se adaptar à comida menos salgada. O alho e a cebola contêm compostos protetores das artérias; o limão acrescenta vitamina C na refeição e atenua a vontade de ingerir sal; as ervas (alecrim, cebolinha, coentro, manjericão, pimenta etc.) contribuem para o bom funcionamento de todo o organismo.

Atitudes como essas ajudam a melhorar a qualidade da nutrição do nosso corpo diariamente, evitando diversas doenças. Alguns alimentos importantes para a nutrição do corpo humano podem ser encontrados em feiras livres.



LUIZ BARRIONUEVO/SHUTTERSTOCK

Feira livre na cidade de São Paulo, em 2021.

Atividades

Anote as respostas no caderno.

1. Qual é a importância de controlar a quantidade de sódio no consumo de alimentos? Converse com os colegas sobre isso.
Resposta: Espera-se que os estudantes tenham compreendido que o controle da quantidade de sódio evita doenças relacionadas à pressão arterial, contribuindo, assim, para a manutenção da saúde do corpo.

2. Analise as quantidades de sódio e potássio contidas em 1 g de pão francês e em 1 g de leite.

Quantidade de sódio e de potássio presentes no pão francês e no leite comum

Pão francês: 6,48 mg de sódio; 0,51 mg de potássio.

Leite: 1,42 mg de sódio; 1,40 mg de potássio.

LAÍS GARBELINI/ARQUIVO DA EDITORA

Por meio de uma equação matricial, determine a quantidade aproximada de pão francês e de leite que uma pessoa pode ingerir para obter 780 mg de sódio e 500 mg de potássio.
Resposta: Pão francês: 100 g; leite: 255 g.

3. Considerando a quantidade recomendada de sódio que uma pessoa pode ingerir diariamente, calcule a quantidade dessa substância que ainda pode ser consumida por uma pessoa que já ingeriu 780 mg de sódio.
Resposta: 1220 mg.

4. Em sua opinião, todas as pessoas têm acesso a alimentos seguros e nutritivos? Por que isso acontece? Em conjunto com os colegas de sala, faça uma pesquisa sobre o tema. Depois, escreva um texto coletivo e a importância da nutrição adequada a todos os seres humanos.
Resposta pessoal. Com base em seus conhecimentos prévios e suas vivências, é esperado que os estudantes respondam que nem todas as pessoas têm acesso a alimentos seguros e nutritivos e que isso acontece por diversos motivos, como a desigualdade social, sendo a fome uma consequência dela. Oriente os estudantes a pesquisar mais informações sobre o tema na internet, bem como as metas e ações do ODS 2, explicando de que maneira o poder público pode prover acesso a alimentos nutritivos e saudáveis a todas as pessoas e como essas ações contribuem para que o objetivo seja alcançado.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

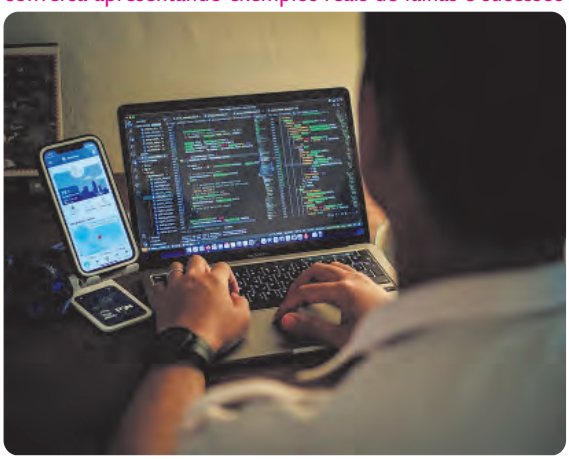
TRABALHO E JUVENTUDES

O que faz um criptógrafo?

As matrizes podem ser usadas em diversas áreas e por profissionais de diferentes campos de atuação. Um deles, por exemplo, é o criptógrafo. Ele é um profissional que utiliza técnicas especiais para garantir mais proteção e mais segurança na produção e na troca de dados e de mensagens, transformando-as em informações sigilosas. As técnicas consistem na criação de chaves secretas com algoritmos criptográficos, ou seja, códigos que somente usuários autorizados podem decifrar suas informações.

Professor, professora: Para enriquecer a compreensão dos estudantes sobre o papel do criptógrafo, promova uma roda de conversa apresentando exemplos reais de falhas e sucessos em segurança digital, mostrando como a criptografia pode proteger dados e como sua ausência pode levar a vazamentos de informações. Inclua também exemplos históricos de criptografia, como a Máquina Enigma usada durante a Segunda Guerra Mundial e sua importância na história.

KHARIS ARDI/SHUTTERSTOCK



Profissional programador usando computador para codificar um material.

PARA EXPANDIR

Por ser uma profissão de características peculiares, é possível exercê-la em *home office*. Que tal pesquisar na internet outras informações sobre esse trabalho, como piso salarial da categoria, carga horária e benefícios? Aproveite para verificar a representatividade brasileira e os desafios que esses profissionais ainda enfrentam no nosso país.

As chaves produzidas por um criptógrafo podem ser utilizadas para codificar troca de mensagens instantâneas, transações eletrônicas, assinaturas digitais, além de pastas e arquivos confidenciais.

Atualmente, o trabalho do criptógrafo encontra-se em ascensão no mercado de trabalho. O aumento de ameaças digitais tem feito com que empresas nacionais e internacionais busquem cada vez mais por profissionais especializados no desenvolvimento de sistemas de segurança cibernética.

Além de empresas privadas, o criptógrafo pode atuar na esfera pública, trabalhando em setores de segurança digital de governos municipais, estaduais e federal, ou em universidades, atuando na área acadêmica.

1. Resposta pessoal. Incentive a participação de todos os estudantes, oportunizando um momento de fala para que comentem sobre os aspectos mais interessantes na opinião deles, mesmo aqueles que não tenham interesse em exercer a profissão. Para os estudantes que mostrarem interesse, pergunte-lhes se gostariam de trabalhar em empresas privadas ou no setor público e o que eventualmente os motiva a seguir a carreira.

Observação

No Brasil ainda não existe um curso superior para formação de criptógrafos. Para atuar nessa área, o interessado pode se graduar em cursos como Ciência da Computação e Matemática e, posteriormente, realizar uma pós-graduação na área de criptografia.

Atividades

Anote as respostas no caderno.

1. Quais aspectos você achou mais interessante na profissão de criptógrafo? Você exerceria essa profissão? Conte para os colegas.

2. O britânico Alan Turing (1912-1954), considerado o pai da computação, foi um dos mais importantes matemáticos a estudar técnicas criptográficas. Reúna-se com mais quatro colegas e realizem uma pesquisa em livros ou na internet sobre as principais contribuições de Turing para as técnicas de codificar e decodificar informações. Depois, em sala de aula, apresentem o resultado da pesquisa e conversem sobre o assunto com os demais colegas.

Resposta pessoal. Espera-se que, por meio da pesquisa, os estudantes conheçam a história e os trabalhos do matemático Alan Turing e valorizem o seu legado, já que ele foi um dos mais importantes estudiosos de técnicas criptográficas nas décadas de 1930 e 1940, além de autor de projetos que foram fundamentais para o aprimoramento das atuais técnicas de segurança digital.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Determinante de uma matriz

Para toda matriz quadrada de números reais é possível associar um número real denominado **determinante**. O estudo dos determinantes está associado, por exemplo, ao estudo de sistemas lineares, assunto deste capítulo. Indicamos o determinante de uma matriz A por $\det A$.

Observação

Não existe determinante de matrizes que não sejam quadradas.

Determinante de uma matriz de ordem 1

Em uma matriz quadrada de ordem 1, ou seja, que tem um único elemento, o determinante é, por definição, o próprio elemento. Se $A = [a_{11}]$, então $\det A = a_{11}$.

Exemplo

Dadas as matrizes $A = [7]$ e $B = [-13]$, temos:

- $\det A = 7$
- $\det B = -13$

Determinante de uma matriz de ordem 2

Em uma matriz quadrada de ordem 2, o determinante é dado pela diferença entre o produto dos elementos da diagonal principal e o produto dos elementos da diagonal secundária.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \Rightarrow \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

Observação

Podemos indicar o determinante de uma matriz A com os elementos dessa matriz limitados por duas barras.

Exemplo

Sendo a matriz $A = \begin{bmatrix} -4 & 7 \\ -6 & 8 \end{bmatrix}$, então $\det A = \begin{vmatrix} -4 & 7 \\ -6 & 8 \end{vmatrix} = -4 \cdot 8 - 7 \cdot (-6) = -32 + 42 = 10$.

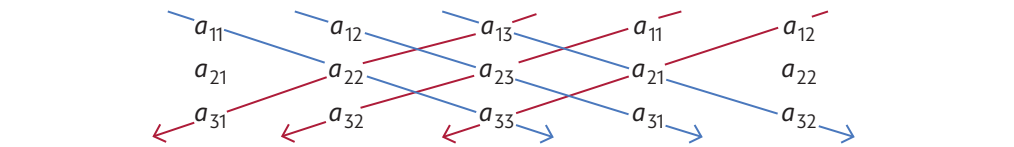
Determinante de uma matriz de ordem 3

Em uma matriz quadrada de ordem 3 dada por $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, o determinante é obtido por meio dos seguintes cálculos:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}$$

Podemos obter esses seis produtos por meio de um dispositivo denominado **regra de Sarrus**. Nessa regra, à direita da matriz, repetimos suas duas primeiras colunas. Em seguida, realizamos as multiplicações conforme indicado, conservando os sinais dos produtos obtidos no sentido da diagonal principal e mudando os sinais dos produtos obtidos no sentido da diagonal secundária.



$\underbrace{(a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31})(a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32})(a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33})}_{\text{muda o sinal}}\underbrace{(a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33})(a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31})(a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32})}_{\text{conserva o sinal}}$

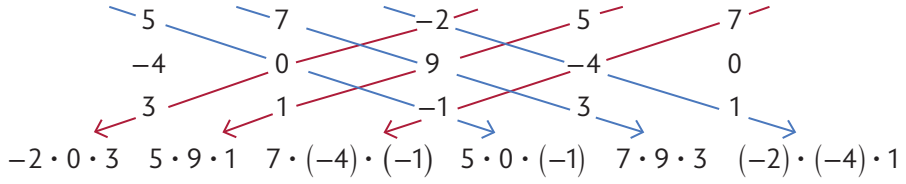
Ao adicionarmos esses resultados, obtemos o determinante da matriz.

$$\det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}$$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Exemplo

O determinante da matriz $A = \begin{bmatrix} 5 & 7 & -2 \\ -4 & 0 & 9 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ é:



$\det A = 5 \cdot 0 \cdot (-1) + 7 \cdot 9 \cdot 3 + (-2) \cdot (-4) \cdot 1 - (-2) \cdot 0 \cdot 3 - 5 \cdot 9 \cdot 1 - 7 \cdot (-4) \cdot (-1) =$

$= 0 + 189 + 8 + 0 - 45 - 28 = 124$

Professor, professora: Se necessário, ao resolver a tarefa 49, lembre os estudantes de que o traço de uma matriz quadrada corresponde à soma dos elementos da diagonal principal.

Exercícios e problemas resolvidos

R14. Sejam as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ x & 3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & x \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$. Determine o valor de x, de modo que $\det A = \det B$.

Resolução

Calculando os determinantes das matrizes A e B, temos:

- $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ x & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 - 2 \cdot x = 3 - 2x$
- $\det B = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & x \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 0 - 2 - 3 + x - 0 = x - 3$

Segue que:

$\det A = \det B \Rightarrow 3 - 2x = x - 3 \Rightarrow -3x = -6 \Rightarrow x = 2$

Observação

Note que $A \neq B$, porém, para $x = 2$, $\det A = \det B$.

50. b) Resposta: $k \cdot A = \begin{bmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{bmatrix} \Rightarrow \det(k \cdot A) = \begin{vmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{vmatrix} = ka \cdot kd - kb \cdot kc = k^2 \cdot a \cdot d - k^2 \cdot b \cdot c = k^2 \cdot \underbrace{(ad - bc)}_{\det A}$

Exercícios e problemas

Anote as respostas no caderno.

50. a) Resposta: $A^t = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \Rightarrow \det A^t = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = \underbrace{ad - bc}_{\det A}$

48. Calcule o determinante das matrizes a seguir.

a) $A = [-12]$ Resposta: -12

b) $B = \begin{bmatrix} 2 & -7 & -3 \\ 3 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & 6 \end{bmatrix}$ Resposta: 144

49. Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 8 & 2 & 1 \\ -1 & y & x \end{bmatrix}$, calcule os valores de x e y para que o traço de A seja 6 e $\det A = -61$.

Resposta: $x = 2$; $y = 9$

50. Mostre que são válidas as seguintes propriedades para uma matriz quadrada $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.

a) $\det A = \det A^t$.

b) $\det(k \cdot A) = k^2 \cdot \det A$, com k um número real.

Observação

De modo geral, as propriedades $\det A = \det A^t$ e $\det(k \cdot A) = k^n \cdot \det A$ são válidas para uma matriz quadrada qualquer de ordem n.

51. Sendo $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & -4 \\ -2 & 7 & 1 \end{bmatrix}$, calcule:

a) $\det A$. Resposta: 125

b) $2 \cdot \det A$. Resposta: 250

c) $\det(2A)$. Resposta: 1000

d) $\det(2A^t)$. Resposta: 1000

52. Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 3 & x \\ x & x^2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 6x & x \\ 2x & 1 \end{bmatrix}$, em que x é um número real, quais valores de x tornam verdadeira a igualdade $\det A = 3 \cdot \det B$?

Resposta: $x = 0$ ou $x = \frac{9}{4}$

53. Sabendo que $M = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}$, $N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ a & 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $\det(M \cdot N) = -360$, determine o valor de a.

Resposta: 5

54. Determine os valores de x na igualdade a seguir.

$$\frac{1}{4} \cdot \begin{vmatrix} 2x & 6 & -1 \\ 2(x-1) & 0 & -2 \\ 2 & 4 & -2x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 1 & x \\ 0 & 3 & 5 \\ 2x & 4 & 2 \end{vmatrix}$$

Resposta: $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ou $x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Teorema de Jacobi e Teorema de Binet

No estudo dos determinantes, podemos destacar duas propriedades importantes: Teorema de Jacobi e Teorema de Binet.

Observação

As propriedades apresentadas nesta página podem ser demonstradas, porém não as apresentaremos neste livro.

Teorema de Jacobi

Ao adicionar a uma linha (ou coluna) de uma matriz quadrada A outra linha (ou coluna) previamente multiplicada por um número real, obtemos uma matriz B, tal que $\det A = \det B$.

Exemplo

Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 4 & 7 & 1 \\ 2 & 6 & -4 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$, temos:

$$\det A = \begin{vmatrix} 4 & 7 & 1 \\ 2 & 6 & -4 \\ -1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -48 + 28 + 0 + 6 + 0 + 28 = 14$$

Se, por exemplo, adicionarmos à 2ª linha da matriz A a 3ª linha multiplicada por 2, obtemos a matriz $B = \begin{bmatrix} 4 & 7 & 1 \\ 0 & 6 & -8 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$. Calculando o determinante de B, temos:

$$\det B = \begin{vmatrix} 4 & 7 & 1 \\ 0 & 6 & -8 \\ -1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -48 + 56 + 0 + 6 + 0 + 0 = 14$$

Note que a matriz B foi obtida a partir da matriz A de acordo com o Teorema de Jacobi e, portanto, $\det A = \det B = 14$.

Observação

Note que na matriz B:

- $b_{21} = a_{21} + 2 \cdot a_{31} = 2 + 2 \cdot (-1) = 0$
- $b_{22} = a_{22} + 2 \cdot a_{32} = 6 + 2 \cdot 0 = 6$
- $b_{23} = a_{23} + 2 \cdot a_{33} = -4 + 2 \cdot (-2) = -8$

Teorema de Binet

Dadas as matrizes quadradas A e B de mesma ordem, temos $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$.

Exercícios e problemas

Anote as respostas no caderno.

55. Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -3 & 1 & 4 \\ 0 & 6 & 8 \end{bmatrix}$, escreva uma matriz B diferente de A, tal que $\det A = \det B$.

Resposta no final do **Livro do Estudante**.

56. Sendo $A = \begin{bmatrix} 7 & 1 & 3 \\ 6 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, resolva o que se pede.

Professor, professora: Solicite aos estudantes que comparem os procedimentos utilizados na resolução do item **b** desta tarefa com aqueles utilizados por um colega.

a) Calcule $\det A$.
Resposta: 1

b) Obtenha a matriz I_3 a partir da matriz A.
Resposta no final do **Livro do Estudante**.

57. Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & -3 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$, calcule:

a) $\det B$.
Resposta: -4

b) $\det A^t$.
Resposta: 51

c) $\det(A \cdot C)$.
Resposta: 918

d) $\det(C \cdot B)$.
Resposta: -72

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Introdução aos sistemas lineares

Professor, professora: Se possível, proponha a questão **C** e, em seguida sua resolução, antes de os estudantes iniciarem o trabalho com esta página. Desse modo, espera-se que eles não sejam influenciados pelos conteúdos aqui abordados.

Questão C. Qual estratégia você utilizaria para resolver o problema apresentado a seguir?

Resposta pessoal. Sugestão de resposta: Escreveria e resolveria um sistema de equações do 1º grau.

Ao realizar uma pesquisa, Paulo constatou que, utilizando certo aplicativo **A** por 10 min e um aplicativo **B** por 2 min, consome 3 MB de seu plano de dados. Porém, quando utiliza **A** por 5 min e **B** por 6 min, consome 4 MB. Quantos megabaites por minuto consome cada um desses aplicativos?

Para resolver esse problema, podemos escrever um sistema de equações do 1º grau ou um **sistema linear**, assunto que você provavelmente já estudou. Se chamarmos de x o consumo de dados por minuto do aplicativo **A** e de y o do aplicativo **B**, temos as seguintes equações:

$$10x + 2y = 3 \qquad\qquad 5x + 6y = 4$$

Nesta equação, note que:
$10x$: tempo, em minutos, de uso de **A**;
$2y$: tempo, em minutos, de uso de **B**;
3: consumo em MB.

Nesta equação, note que:
$5x$: tempo, em minutos, de uso de **A**;
$6y$: tempo, em minutos, de uso de **B**;
4: consumo em MB.

Utilizando essas equações, podemos escrever o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} 10x + 2y = 3 \\ 5x + 6y = 4 \end{cases}$$

Neste tópico, estudaremos sistemas lineares, assim como métodos para resolvê-los.

O sistema linear apresentado, por exemplo, tem como solução $x = 0{,}2$ e $y = 0{,}5$, ou seja, os aplicativos **A** e **B** consomem, por minuto, 0,2 MB e 0,5 MB, respectivamente.

Professor, professora: Diga aos estudantes que, para resolver o sistema apresentado, é preciso determinar os valores de x e y que satisfazem simultaneamente as duas equações. No decorrer do estudo deste tópico, retome o problema apresentado para que os estudantes possam resolvê-lo. Se achar oportuno, resolva-o na lousa junto deles.

Equação linear

Toda equação do 1º grau com uma ou mais incógnitas é denominada **equação linear**.

De maneira geral:

Denomina-se equação linear aquela que pode ser escrita na forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \ldots + a_nx_n = b,$$

em que:

- $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ são números reais denominados **coeficientes**;
- $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ são as **incógnitas**;
- b é uma constante real denominada **termo independente**.

A seguir, são apresentados alguns exemplos de equações lineares.

- $3x - 2y = 8$. Nesse caso, 3 e -2 são os coeficientes; x e y são as incógnitas; e 8 é o termo independente.
- $-x + \frac{2}{5}y + 4z - 13w = -7$. Nesse caso, -1, $\frac{2}{5}$, 4 e -13 são os coeficientes; x, y, z e w são as incógnitas; e -7 é o termo independente.

As equações lineares em que o termo independente é igual a zero são denominadas **equações lineares homogêneas**. A equação linear $-7x + 4y = 0$, por exemplo, é homogênea.

Observação

Para uma equação ser linear, cada termo, com exceção do independente (que não tem incógnita), deve ser composto por apenas uma incógnita, cujo expoente é 1. Alguns exemplos de equações **não lineares**:

- $8x + 3xy = -1$
- $5x^2 - 2y + z = 6$
- $3\sqrt{x} = 12$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

A **solução** de uma equação linear $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \ldots + a_nx_n = b$ é toda ênupla $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n)$ que, ao substituir ordenadamente $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ na equação, torna a igualdade verdadeira.

$$a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3 + \ldots + a_n\alpha_n = b$$

Exemplos

a) $-2x + 5y = -1$

Nessa equação, $(3, 1)$ é solução, pois $-2 \cdot 3 + 5 \cdot 1 = -1$. O par $(8, 3)$ também é solução, pois $-2 \cdot 8 + 5 \cdot 3 = -1$. Porém, $(1, 3)$ não é solução, pois $\underbrace{-2 \cdot 1 + 5 \cdot 3}_{13} \neq -1$.

b) $3x - 2y + 5z = 4$

Nessa equação, a terna $(-1, 4, 3)$ é solução, pois $3 \cdot (-1) - 2 \cdot 4 + 5 \cdot 3 = 4$. Porém, a terna $(2, -4, 1)$ não é solução, pois $\underbrace{3 \cdot 2 - 2 \cdot (-4) + 5 \cdot 1}_{19} \neq 4$.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Exercícios e problemas resolvidos

R15. Determine o valor de α de modo que a terna $(\alpha, -2\alpha, 1 - \alpha)$ seja solução da equação linear $5x + y - 2z = 13$.

Resolução

Substituindo ordenadamente os valores de x, y e z na equação, temos:

$$5\alpha + (-2\alpha) - 2 \cdot (1 - \alpha) = 13 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 5\alpha - 2\alpha - 2 + 2\alpha = 13 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 5\alpha = 15 \Rightarrow \alpha = 3$$

Professor, professora: Oriente os estudantes a substituir $\alpha = 3$ na terna dada e verificar que ela é solução da equação linear.

Portanto, $\alpha = 3$.

R16. Verifique se os pares ordenados $(-4, 1)$, $(-2, 0)$, $(0, 1)$ e $(8, 5)$ são solução da equação $y - \frac{x}{2} = 1$. Em seguida, represente geometricamente essa equação.

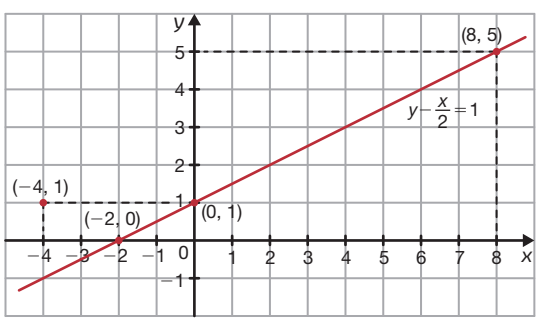
Resolução

O par ordenado:

- $(-4, 1)$ não é solução, pois $1 - \frac{(-4)}{2} = 3$ e $3 \neq 1$.
- $(-2, 0)$ é solução, pois $0 - \frac{(-2)}{2} = 1$.
- $(0, 1)$ é solução, pois $1 - \frac{0}{2} = 1$.
- $(8, 5)$ é solução, pois $5 - \frac{8}{2} = 1$.

Geometricamente, a equação $y - \frac{x}{2} = 1$ é uma reta que passa pelos pontos $(-2, 0)$, $(0, 1)$ e $(8, 5)$. Assim:

RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA



Observação

No caso de uma equação linear de três incógnitas, cada terna (x, y, z) representa um ponto no espaço.

Sistema linear

Denomina-se **sistema linear** $m \times n$ o conjunto S formado por m equações e n incógnitas, que pode ser indicado da seguinte maneira.

$$S = \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ldots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Exemplos

a) Sistema linear 3×2 nas incógnitas x e y.

$$\begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ 4x + y = 3 \\ -x + y = -2 \end{cases}$$

b) Sistema linear 2×3 nas incógnitas x, y e z.

$$\begin{cases} 2x - 4y - 5z = 0 \\ x + 2y - 3z = 7 \end{cases}$$

Observação

No sistema linear S, por exemplo:

- a_{11} é o coeficiente da incógnita x_1 na 1ª equação;
- a_{23} é o coeficiente da incógnita x_3 na 2ª equação;
- a_{m2} é o coeficiente da incógnita x_2 na m-ésima equação.

Solução de um sistema linear

A solução de um sistema linear $m \times n$ é toda ênupla $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n)$ que é solução de cada uma das m equações desse sistema.

OBJETO DIGITAL

Vídeo: Desafio lógico dos sistemas lineares com figuras

Exemplos

a) $\begin{cases} 4x - 5y = 1 \\ -2x + y = -11 \end{cases}$

Como $\begin{cases} 4 \cdot 9 - 5 \cdot 7 = 1 \\ -2 \cdot 9 + 7 = -11 \end{cases}$, o par $(9, 7)$ é solução do sistema.

Por outro lado, como $\begin{cases} 4 \cdot 4 - 5 \cdot 3 = 1 \\ -2 \cdot 4 + 3 \neq -11 \end{cases}$, concluímos que o par $(4, 3)$ não é solução do sistema.

Observação

Em relação ao sistema linear **a**, o par $(4, 3)$ não é solução, pois satisfaz apenas uma das equações. Já o par $(9, 7)$ é solução, pois satisfaz as duas equações simultaneamente.

b) $\begin{cases} 2x + 3y + 6z = 15 \\ -x + 4y + z = 24 \\ 3x - y + 7z = -7 \end{cases}$

Como $\begin{cases} 2 \cdot (-3) + 3 \cdot 5 + 6 \cdot 1 = 15 \\ -(-3) + 4 \cdot 5 + 1 = 24 \\ 3 \cdot (-3) - 5 + 7 \cdot 1 = -7 \end{cases}$, a terna $(-3, 5, 1)$ é solução do sistema.

Sistema linear homogêneo

Denomina-se **sistema linear homogêneo** aquele em que todas as equações lineares são homogêneas.

Em um sistema linear homogêneo, a ênupla $(0, 0, 0, \ldots, 0)$ é uma das soluções, denominada solução trivial ou nula. Além da trivial, esse tipo de sistema pode ter outras soluções, chamadas não triviais.

Um exemplo de sistema linear homogêneo é $\begin{cases} 2x + 3y + z = 0 \\ 3x + 2y - 6z = 0 \\ -x - y + z = 0 \end{cases}$. Além da solução trivial $(0, 0, 0)$, esse sistema admite soluções não triviais como $(-4, 3, -1)$.

Professor, professora: Se necessário, lembre os estudantes de que as equações lineares homogêneas são aquelas em que o termo independente é igual a zero. Além disso, oriente-os a realizar os cálculos necessários e verificar que a terna $(-4, 3, -1)$ é solução do sistema

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 0 \\ 3x + 2y - 6z = 0. \\ -x - y + z = 0 \end{cases}$$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Exercícios e problemas resolvidos

R17. Represente geometricamente a solução do sistema linear $\begin{cases} 3x + y = 1 \\ 2x - 3y = 8 \end{cases}$.

Resolução

Vamos resolver o sistema linear utilizando o método da adição.

$$\begin{cases} 3x + y = 1 \cdot (3) \\ 2x - 3y = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9x + 3y = 3 \\ 2x - 3y = 8 \end{cases}$$

$$11x = 11 \Rightarrow x = 1$$

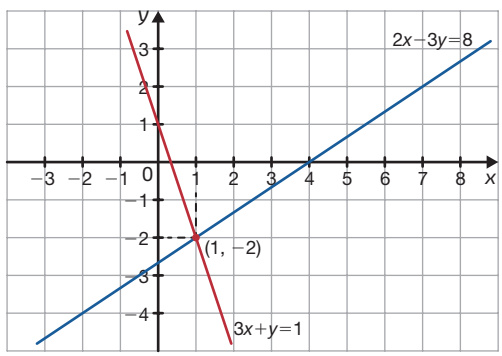
$$3x + y = 1 \Rightarrow 3 \cdot 1 + y = 1 \Rightarrow y = -2$$

Observação

Provavelmente você já estudou como é a resolução de sistemas lineares 2×2 por meio dos métodos da **adição** e da **substituição**.

Portanto, a solução do sistema é $(1, -2)$.

Para representar geometricamente a solução desse sistema, traçamos, inicialmente, as retas que representam cada uma de suas equações. Em seguida, marcamos o ponto de interseção entre elas, que é a representação geométrica da solução do sistema.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Professor, professora: O estudo deste exercício pode ser realizado com o suporte de um *software* de Geometria dinâmica, possibilitando relacionar as representações algébricas e geométricas com o auxílio da tecnologia. Uma sugestão de *software* dessa natureza é o GeoGebra, que é livre e gratuito para *download*. Dessa maneira, além de realizar as construções manualmente, com o auxílio de malhas quadriculadas, os estudantes podem fazer construções utilizando o *software*, comparando os resultados obtidos entre si. Disponível em: https://www.geogebra.org/classic. Acesso em: 14 ago. 2024.

Retas concorrentes indicam que existe um único ponto que corresponde à solução do sistema.

R18. Para tornar o campeonato brasileiro de futebol mais competitivo, a Confederação Brasileira de Futebol (CBF) adotou em 2003 o sistema de pontuação por pontos corridos, no qual são atribuídos 3 pontos para o time vencedor ou 1 ponto para cada time no caso de empate, sendo campeão o time que acumular o maior número de pontos ao final do campeonato.

Considere um time que apenas ganhou ou empatou os 19 primeiros jogos que disputou no campeonato. Quantos jogos esse time empatou, sabendo que ele acumulou 37 pontos?

Resolução

Sendo x e y o número de jogos vencidos e empatados, respectivamente, temos o sistema:

$$\begin{cases} x + y = 19 \\ 3x + y = 37 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, obtemos:

$$\begin{cases} x + y = 19 \cdot (-1) \\ 3x + y = 37 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x - y = -19 \\ 3x + y = 37 \end{cases}$$

$$2x = 18 \Rightarrow x = 9$$

$$x + y = 19 \Rightarrow 9 + y = 19 \Rightarrow y = 10$$

Portanto, o time venceu 9 partidas e empatou 10.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

R19. (UFJF-MG, 2018) Um funcionário da UFJF gastou 106 reais ao comprar 20 lápis, 4 borrachas, 10 canetas e uma mochila para seu filho. Ao chegar em casa, ele percebeu que o valor da mochila é igual a 10 vezes o valor de cada lápis mais 8 vezes o valor de cada borracha e mais 6 vezes o valor de cada caneta. Sabendo-se que o gasto com os lápis é igual ao dobro do gasto com as canetas mais o dobro do gasto com as borrachas, e que o gasto com as borrachas é igual ao gasto com as canetas, determine o preço de cada produto.

Resolução

Sendo B, L, C e M o preço da borracha, do lápis, da caneta e da mochila, temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 20L + 4B + 10C + M = 106 & \text{(Equação } \mathbf{1}\text{)} \\ M = 10L + 8B + 6C & \text{(Equação } \mathbf{2}\text{)} \\ 20L = 2 \cdot 10C + 2 \cdot 4B & \text{(Equação } \mathbf{3}\text{)} \\ 4B = 10C & \text{(Equação } \mathbf{4}\text{)} \end{cases}$$

Para solucionar esse sistema, inicialmente combinamos as equações **3** e **4**, uma vez que ambas são equações menores se comparadas à equação **1** e têm dois termos em comum, B e C. Além disso, a equação **3** pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$20L = 2 \cdot 10C + 2 \cdot 4B$$
$$20L = 20C + 8B$$
$$20L = 20C + 4B + 4B$$

Substituindo a equação **4** na equação **3**, temos:

$$20L = 20C + \underbrace{4B}_{10C} + \underbrace{4B}_{10C} \Rightarrow 20L = 20C + 10C + 10C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 20L = 40C \Rightarrow L = \frac{40C}{20} = 2C$$

Desse modo, obtemos $L = 2C$, que nomearemos por equação **5**.

Reescrevendo a equação **2**, temos:

$$M = 10L + 8B + 6C$$
$$M = 10L + 4B + 4B + 6C$$

Em seguida, substituindo as equações **4** e **5** na equação **2**, temos:

$$M = 10\underbrace{L}_{2C} + \underbrace{4B}_{10C} + \underbrace{4B}_{10C} + 6C \Rightarrow M = 10 \cdot 2C + 10C + 10C + 6C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M = 20C + 10C + 10C + 6C = 46C$$

Dessa forma, obtemos $M = 46C$, que nomearemos de equação **6**.

Substituindo as equações **4**, **5** e **6** na equação **1**, temos:

$$20\underbrace{L}_{2C} + \underbrace{4B}_{10C} + 10C + \underbrace{M}_{46C} = 106 \Rightarrow 20 \cdot 2C + 10C + 10C + 46C = 106 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 40C + 10C + 10C + 46C = 106 \Rightarrow 106C = 106 \Rightarrow C = \frac{106}{106} = 1$$

Por fim, substituindo $C = 1$ nas equações **4**, **5** e **6**, obtemos os valores de B, L e M.

Equação **4**

$4B = 10C$

$4B = 10 \cdot 1$

$B = \frac{10}{4}$

$B = 2{,}5$

Equação **5**

$L = 2C$

$L = 2 \cdot 1$

$L = 2$

Equação **6**

$M = 46C$

$M = 46 \cdot 1$

$M = 46$

Assim, cada borracha custa R$ 2,50, cada lápis custa R$ 2,00, cada caneta custa R$ 1,00, e a mochila custa R$ 46,00.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

58. Escreva os coeficientes e o termo independente de cada equação linear.

a) $4x - 12y = 17$

b) $x - \sqrt{3}y = 0$

c) $-r - 5t = 2$

d) $x + 2y = -1$

e) $-3a + b = 0{,}5$

f) $\frac{3}{2}f - 4g = 4$

g) $\frac{x}{4} + y = \frac{1}{4}$

h) $-2x + y - z = -1$

Resposta no final do **Livro do Estudante**.

59. Classifique cada equação em **linear** ou **não linear**.

a) $x + 3y = 15$ Resposta: Linear.

b) $r^3 - s^2 = 0$ Resposta: Não linear.

c) $15r - 2^2t = 0$ Resposta: Linear.

d) $xy = 1$ Resposta: Não linear.

e) $4 - 2x = 3$ Resposta: Linear.

f) $\sqrt{2}a - \sqrt{5}b^{-1} = 0$ Resposta: Não linear.

g) $\frac{7x}{y} + y = 1$ Resposta: Não linear.

h) $\frac{7x}{4} + y = 1$ Resposta: Linear.

60. Qual equação tem como solução a terna $(1, 2, -5)$?

a) $4x - y + z = 0$

b) $2x - 3y - z = 1$

Resposta: Alternativa **b**.

61. Para cada equação, escreva duas soluções reais.

a) $7x - 12y = 4$

b) $3x + y - z = 0$

c) $x - 4y = 1$

d) $-x - y = 2$

e) $10 - 2x + 2y = 4$

f) $x + y + z = -5$

Resposta no final do **Livro do Estudante**.

62. Para qual valor de α a terna $(4\alpha, \alpha, -3\alpha)$ é solução da equação linear $5x - 15y + z = -4$?

Resposta: $\alpha = -2$

63. Represente geometricamente cada equação linear e escreva, para cada uma delas, duas soluções reais.

a) $3x + y = 6$

b) $x + 5y = 0$

c) $-2x + y = 4$

d) $4x - 2y = 6$

e) $x - y = 5$

f) $x + y = -5$

g) $-x - y = -1$

h) $\frac{2}{3}x + y = \frac{1}{3}$

Resposta no final do **Livro do Estudante**.

64. Verifique quais das ternas apresentadas são soluções do sistema e classifique-o em homogêneo ou não homogêneo. Resposta no final do **Livro do Estudante**.

a) Ternas: $(-1, 5, 0)$; $(0, 0, 0)$; $(1, -2, -3)$.

Sistema: $\begin{cases} 5x + y + z = 0 \\ x - 4y + 3z = 0 \\ 2x - 2y + 2z = 0 \end{cases}$

b) Ternas: $(-1, 1, -1)$; $(1, -2, 4)$; $(0, 0, 0)$.

Sistema: $\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ -x + y + 2z = 0 \\ 4x - y - 5z = 0 \end{cases}$

c) Ternas: $(0, 0, 0)$; $\left(\frac{1}{16}, \frac{21}{16}, \frac{9}{16}\right)$; $\left(0, 1, \frac{1}{3}\right)$.

Sistema: $\begin{cases} x + 2y - 3z = 1 \\ 3x - y + 2z = 0 \\ 2x + y + z = 2 \end{cases}$

65. Resolva cada sistema linear e represente geometricamente sua solução. Resposta no final do **Livro do Estudante**.

a) $\begin{cases} 2x + 5y = 9 \\ -x + 7y = 5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} -x + y = 5 \\ -3x - y = 7 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x + y = 8 \\ -x + y = -4 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x + 2y = 14 \\ x - y = 3 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 2x + y = -8 \\ 3x - 3y = 6 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x - 3y = 15 \\ -2x + 4y = -20 \end{cases}$

66. (Enem, 2009) Um grupo de 50 pessoas fez um orçamento inicial para organizar uma festa, que seria dividido entre elas em cotas iguais. Verificou-se ao final que, para arcar com todas as despesas, faltavam R$ 510,00, e que 5 novas pessoas haviam ingressado no grupo. No acerto foi decidido que a despesa total seria dividida em partes iguais pelas 55 pessoas. Quem não havia ainda contribuído pagaria a sua parte, e cada uma das 50 pessoas do grupo inicial deveria contribuir com mais R$ 7,00.

De acordo com essas informações, qual foi o valor da cota calculada no acerto final para cada uma das 55 pessoas? Resposta: Alternativa **d**.

a) R$ 14,00

b) R$ 17,00

c) R$ 22,00

d) R$ 32,00

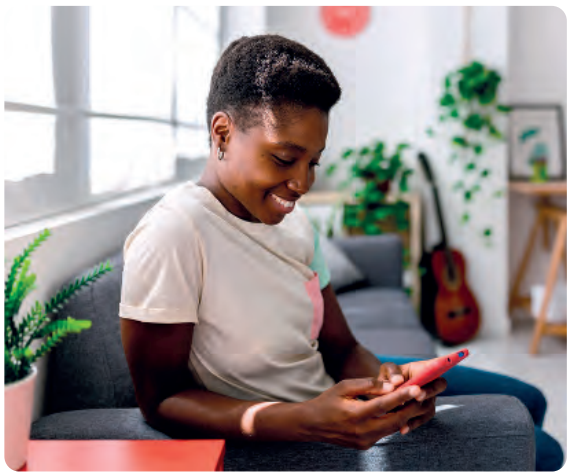
e) R$ 57,00

67. Segundo os cálculos de Paula, em certa loja, 2 blusas, 2 calças, 3 pares de sapatos e 1 bolsa custam, ao todo, R$ 380,00. Além disso, ela percebeu que o preço de 2 bolsas equivale ao preço de 3 blusas, 1 calça e 1 par de sapatos. Ela também viu que o valor de 1 par de sapatos equivale aos valores de 1 blusa e 1 calça e, ainda, que o valor de 1 calça equivale ao dobro do valor de 1 blusa. De acordo com essas informações, determine o preço de cada produto. Resposta: Blusa: R$ 20,00; calça: R$ 40,00; par de sapatos: R$ 60,00; bolsa: R$ 80,00.

68. João, Luciano e Ana se reuniram para organizar um churrasco com os colegas de trabalho e decidiram comprar dois tipos de carne. João pagou R$ 204,00 por 1 kg de carne do tipo **A** e 5 kg de carne do tipo **B**; Luciano pagou R$ 190,90 por 4 kg de carne do tipo **A** e 1 kg de carne do tipo **B**; e Ana comprou 5 kg de carne do tipo **A** e não comprou carne do tipo **B**. Sabendo que as carnes de um mesmo tipo têm o mesmo preço por quilograma, quantos reais Ana pagou pela carne? Resposta: R$ 197,50

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

69. Você usa aplicativos de mensagens? Se usa, costuma ficar ansioso(a) quando alguém recebe e visualiza suas mensagens, mas não responde de imediato? As ferramentas de comunicação e informação permitem que as pessoas, mesmo que estejam em lugares diferentes e distantes, continuem se comunicando de modo quase instantâneo. O processo de evolução dessas ferramentas passou por várias fases e invenções que acabaram se tornando de grande importância para boa parte da sociedade. O acesso à internet móvel nos *smartphones* tornou a comunicação entre as pessoas ainda mais ágil. Contudo, temos de ficar atentos, pois, de maneira geral, os planos de internet móvel são oferecidos de acordo com a quantidade de dados disponíveis no período, em gigabaites (GB), tanto no serviço pré-pago quanto no pós-pago.



XAVIER LORENZO/SHUTTERSTOCK

Pessoa usando *smarthphone*.

Analisando seu consumo de internet móvel, Júlia percebeu que com aproximadamente 1 GB de dados, em certa velocidade de transferência, é possível compartilhar, em média, 3 300 fotos ou assistir a 8 horas e 20 minutos de vídeo em resolução padrão em uma plataforma de vídeos. De acordo com as informações apresentadas, resolva as questões.

a) No dia 12/1/2024, Júlia gastou 120 MB do seu plano de internet móvel assistindo a vídeos em resolução padrão e compartilhando fotos. Sabendo que o gasto com vídeos é igual ao quíntuplo do gasto com o compartilhamento de fotos, determine quantos megabaites aproximadamente ela gastou em cada uma dessas atividades. Resposta: Compartilhamento de fotos: 20 MB; vídeos: 100 MB.

b) Cerca de quantas fotos Júlia compartilhou no dia 12/1/2024 usando sua internet móvel? E durante quanto tempo aproximadamente ela assistiu a vídeos? Respostas: 66 fotos; 50 minutos.

70. A tecnologia está cada vez mais avançada, possibilitando um mundo conectado. Uma das características do momento tecnológico que vivemos é o crescente uso das redes sociais para fins como entretenimento e comunicação. Entre as formas de comunicação mais tradicionais estão as possibilidades de publicar, compartilhar ou reagir a uma postagem.

Em uma rede social na internet, uma postagem teve 688 curtidas a mais do que a quantidade de compartilhamentos, e a soma da quantidade de curtidas com a de compartilhamentos foi 2 000.

a) Sendo x e y a quantidade de curtidas e a de compartilhamentos, respectivamente, escreva um sistema de equações que represente a situação. Resposta: $\begin{cases} x + y = 2\,000 \\ x = y + 688 \end{cases}$

b) Determine a quantidade de compartilhamentos e de curtidas que a postagem teve. Resposta: 1 344 curtidas e 656 compartilhamentos.

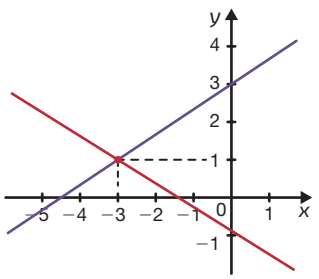
Observação

Você já pensou sobre os desafios que o mundo conectado nos proporciona? Um deles é a disseminação de *fake news*. Muitos usuários compartilham conteúdos sem verificar sua veracidade, o que pode fazer com que notícias falsas se espalhem rapidamente. Esse fenômeno pode ter consequências graves, como a desinformação em questões de saúde, política e meio ambiente. Fique atento! Antes de compartilhar um conteúdo, verifique sua veracidade.

71. Josimar tem R$ 11,00 para comprar canetas e borrachas na papelaria perto de sua casa. Ele tem dinheiro certo para comprar duas canetas e três borrachas, mas faltam-lhe dois reais para comprar três canetas e duas borrachas. Nestas condições, podemos afirmar corretamente que uma borracha custa: Resposta: Alternativa **c**.

a) R$ 2,00. **b)** R$ 1,60. **c)** R$ 1,40. **d)** R$ 1,20.

72. Analise as retas no plano cartesiano.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Qual dos sistemas a seguir apresenta a solução geométrica dada? Resposta: Alternativa **d**.

a) $\begin{cases} -3x + 4y = 13 \\ x - 5y = 8 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 4 \cdot (x + y) + 5 = -3 \\ 7 \cdot (x - y) + 14 = 28 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x - y - 7 = 0 \\ -5x + 2y = 17 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 5x + 8y = -7 \\ -2x + 3y = 9 \end{cases}$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

73. Um método que tem sido utilizado por diversas áreas do conhecimento na resolução de problemas que envolvem a otimização de custos, atendendo a alguns requisitos, é denominado programação linear. Em Nutrição, por exemplo, esse método tem sido empregado na elaboração de dietas que tenham custo mínimo, seguindo determinadas restrições.

Para exemplificar, considere que um indivíduo deva seguir uma dieta alimentar na qual seu lanche da tarde esteja restrito a leite de soja e uma salada de frutas com cereais, o requisito nutricional mínimo de cálcio seja 270 mg, e de vitamina B2, seja 0,775 mg. A seguir são apresentadas as quantidades desses nutrientes nos referidos alimentos.

- Leite de soja (copo de 200 mL): 240 mg de cálcio e 0,3 mg de vitamina B2.
- Salada de frutas (porção de 400 g): 180 mg de cálcio e 1,1 mg de vitamina B2.

Sabemos que o custo de um copo de leite de soja (200 mL) é R$ 2,30 e o da porção de salada de frutas (400 g) é R$ 3,80. Denotando por x a quantidade de leite de soja (em copos) e por y a quantidade de salada de frutas (em porções), a função que representa o custo total dessa refeição é dada por $C = 2{,}3x + 3{,}8y$, denominada função objetivo no método de programação linear. A finalidade desse método consiste em, a partir das restrições apresentadas, obter valores para x e y que tornem mínimo o valor da função objetivo.

As restrições impostas para o lanche da tarde são:

- $240x + 180y \geq 270$ (restrição de cálcio);
- $0{,}3x + 1{,}1y \geq 0{,}775$ (restrição de vitamina B2);
- $x \geq 0$ e $y \geq 0$ (visto que as quantidades de leite e salada de frutas não podem ser negativas).

c) Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes respondam que podemos interpretar geometricamente a solução de cada sistema representando-os no plano cartesiano pelo ponto de interseção das retas que representam as equações que o compõem.

Algumas combinações de leite de soja e salada de frutas



420 mg de cálcio e 1,4 mg de vitamina B2

Atende ao requisito nutricional mínimo.



300 mg de cálcio e 1,25 mg de vitamina B2

Atende ao requisito nutricional mínimo.



210 mg de cálcio e 0,7 mg de vitamina B2

Não atende ao requisito nutricional mínimo.

ILUSTRAÇÕES: LEONARDO GIBRAN/ARQUIVO DA EDITORA

Observação

Não foi levado em consideração o custo nesses casos. Existem outras combinações para as quantidades de leite de soja e salada de frutas que atendem ao requisito nutricional mínimo.

De acordo com o método de programação linear, o custo mínimo dessa refeição será dado pela resolução de um dos seguintes sistemas.

- $\begin{cases} 240x + 180y = 270 \\ x = 0 \end{cases}$
- $\begin{cases} 240x + 180y = 270 \\ 0{,}3x + 1{,}1y = 0{,}775 \end{cases}$
- $\begin{cases} y = 0 \\ 0{,}3x + 1{,}1y = 0{,}775 \end{cases}$

A solução do sistema que resultar no menor valor, quando substituída na função objetivo, representará as quantidades dos alimentos que fornecem o custo mínimo da refeição, seguindo as restrições impostas pela dieta.

a) A alternativa com os pares ordenados que correspondem às soluções dos sistemas lineares na ordem em que foram apresentados é: Resposta: Alternativa **II**.

I) $\left(0, \frac{17}{10}\right)$, $\left(\frac{1}{2}, \frac{17}{10}\right)$ e $\left(\frac{5}{2}, 0\right)$.

II) $\left(0, \frac{3}{2}\right)$, $\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right)$ e $\left(\frac{31}{12}, 0\right)$.

III) $\left(0, \frac{3}{2}\right)$, $\left(\frac{7}{10}, \frac{3}{10}\right)$ e $\left(\frac{5}{2}, 0\right)$.

b) Que quantidade de cada alimento resultará em um custo mínimo para a refeição?
Resposta: 150 mL de leite de soja e 200 g de salada de frutas.

c) De que maneira podemos interpretar geometricamente a solução dos sistemas?

d) Pesquise sobre a utilização do método de programação linear em outras áreas do conhecimento. Depois, compartilhe os resultados obtidos com a turma.
Resposta pessoal. Orientações sobre esta questão no **Suplemento para o professor**.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Matrizes associadas a um sistema linear

Utilizando conhecimentos acerca de matrizes, vamos associar, por exemplo, o sistema $\begin{cases} -3x + 2y = 16 \\ x + 3y = 13 \end{cases}$ à equação matricial $A \cdot X = B$, sendo:

- $A = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ a **matriz dos coeficientes**;
- $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ a **matriz das incógnitas**;
- $B = \begin{bmatrix} 16 \\ 13 \end{bmatrix}$ a **matriz dos termos independentes**.

Escrevendo a equação matricial $A \cdot X = B$, temos:

$$\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ 13 \end{bmatrix}$$

Dado um sistema linear $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ldots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$,

associamos a ele a seguinte equação matricial:

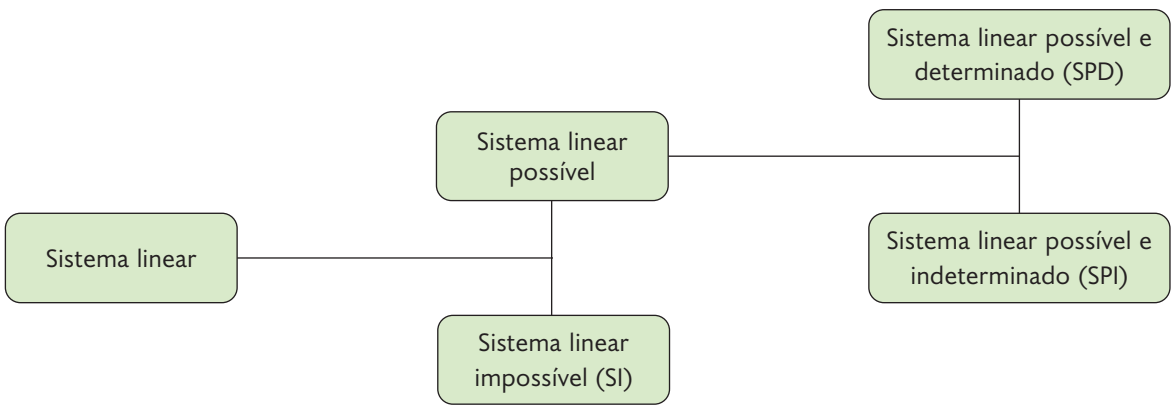
$$A_{m \times n} \cdot X_{n \times 1} = B_{m \times 1} \Rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Essa maneira de representar um sistema linear é denominada **forma matricial do sistema**.

Classificação de um sistema linear

De acordo com o número de soluções que um sistema linear tem, ele pode ser classificado em: **possível e determinado**, quando tem uma única solução; **possível e indeterminado**, quando tem infinitas soluções; ou **impossível**, quando não tem solução.

Representando essa classificação em um esquema, temos:



Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

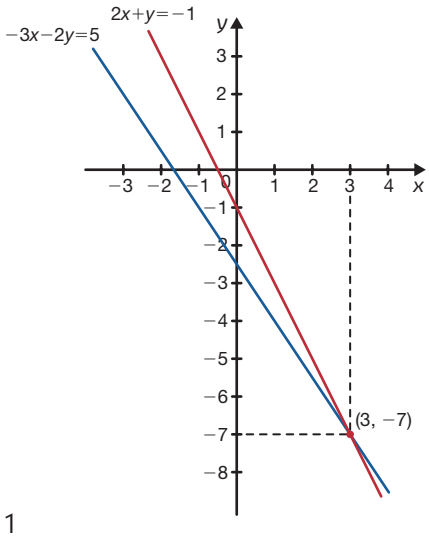
Exemplos

Professor, professora: Uma sugestão para desenvolver os exemplos apresentados é usar um *software* de Geometria dinâmica, como o GeoGebra. Nesse caso, peça aos estudantes que representem geometricamente outros exemplos de sistemas lineares e que os classifiquem com base em sua interpretação. Disponível em: https://www.geogebra.org/classic. Acesso em: 14 ago. 2024.

a) $\begin{cases} 2x + y = -1 \\ -3x - 2y = 5 \end{cases}$

Sistema possível e determinado (SPD), pois tem apenas a solução $(3, -7)$.

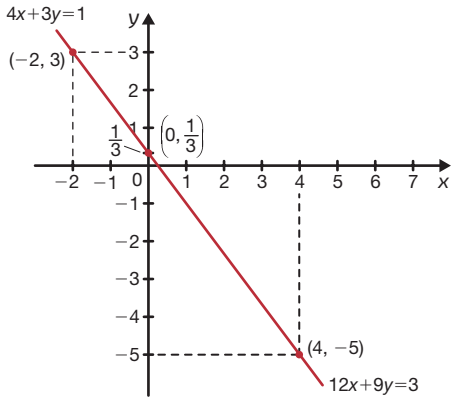
Na representação geométrica do sistema possível e determinado, as retas que representam as equações se cruzam em um único ponto, cujas coordenadas correspondem à única solução.



b) $\begin{cases} 4x + 3y = 1 \\ 12x + 9y = 3 \end{cases}$

Sistema possível e indeterminado (SPI), pois tem infinitas soluções, tais como $(-2, 3)$, $(4, -5)$ e $\left(0, \frac{1}{3}\right)$.

Na representação geométrica do sistema possível e indeterminado, as retas que representam as equações são coincidentes, ou seja, têm infinitos pontos comuns.



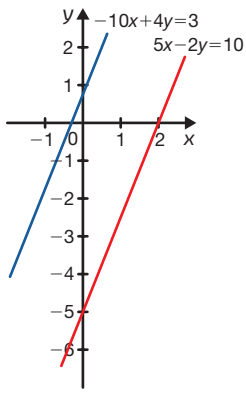
Dica

No exemplo do sistema apresentado, cada termo na 2ª equação corresponde ao triplo do termo correspondente na 1ª, ou seja: $3 \cdot 4x = 12x$; $3 \cdot 3y = 9y$; $3 \cdot 1 = 3$.

c) $\begin{cases} 5x - 2y = 10 \\ -10x + 4y = 3 \end{cases}$

Sistema impossível (SI), pois não tem solução.

Na representação geométrica do sistema impossível, as retas que representam as equações são paralelas; consequentemente, não se cruzam.



Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Exercícios e problemas resolvidos

R20. Classifique cada sistema de equações lineares em SPD, SPI ou SI.

a) $\begin{cases} 2x - y = -1 \\ x + y = 4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} -x + y = 2 \\ 2x - 2y = 4 \end{cases}$ c) $\begin{cases} \frac{x}{2} + y = 1 \\ -3x - 6y = -6 \end{cases}$

Resolução

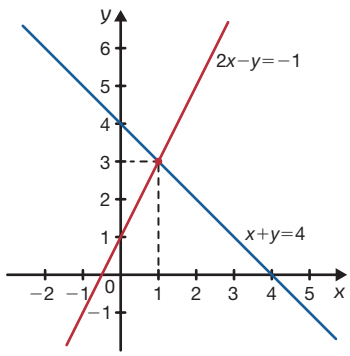
a) Aplicando o método da substituição no sistema $\begin{cases} 2x - y = -1 \\ x + y = 4 \end{cases}$, isolamos y na 1ª equação e substituímos na 2ª.

- $2x - y = -1 \Rightarrow -y = -2x - 1 \Rightarrow y = 2x + 1$
- $x + y = 4 \Rightarrow x + (2x + 1) = 4 \Rightarrow 3x + 1 = 4 \Rightarrow x = 1$

Obtemos y substituindo $x = 1$ em $x + y = 4$.

$$x + y = 4 \Rightarrow 1 + y = 4 \Rightarrow y = 3$$

As retas que representam as equações se cruzam no ponto de coordenadas $(1, 3)$, ou seja, têm um único ponto em comum, que corresponde à solução do sistema.



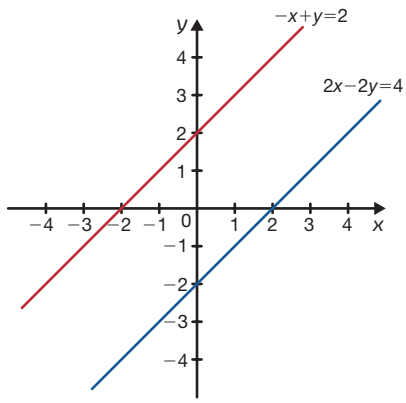
Portanto, o sistema é possível e determinado (SPD).

b) Aplicando o método da adição no sistema $\begin{cases} -x + y = 2 \\ 2x - 2y = 4 \end{cases}$, obtemos:

$$\begin{cases} -x + y = 2 \cdot (2) \\ 2x - 2y = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x + 2y = 4 \\ 2x - 2y = 4 \end{cases}$$
$$0x + 0y = 8$$

Nesse caso, não existem números reais x e y que satisfaçam a equação $0x + 0y = 8$. Sendo assim, o sistema não admite solução.

As retas que representam as equações são paralelas, ou seja, não têm pontos em comum.



Portanto, o sistema é impossível (SI).

ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

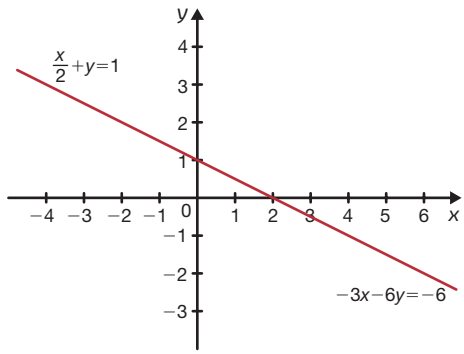
c) Aplicando o método da substituição no sistema $\begin{cases} \frac{x}{2} + y = 1 \\ -3x - 6y = -6 \end{cases}$, isolamos y na 1ª equação e substituímos na 2ª.

- $\frac{x}{2} + y = 1 \Rightarrow y = -\frac{x}{2} + 1$
- $-3x - 6y = -6 \Rightarrow -3x - 6 \cdot \left(-\frac{x}{2} + 1\right) = -6 \Rightarrow -3x + 3x - 6 = -6 \Rightarrow 0x = 0$

Analisando essas informações, verificamos que, para qualquer número real x, a sentença $0x = 0$ é verdadeira. De modo geral, tomando $x = \alpha$, todos os pares da forma $\left(\alpha, -\frac{\alpha}{2} + 1\right)$, com α real, são soluções do sistema.

As retas que representam as equações são coincidentes, ou seja, têm infinitos pontos em comum.

Portanto, o sistema é possível e indeterminado (SPI).



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

R21. Determine a matriz X da equação $A \cdot X = 2B$, sendo $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$.

Resolução

Como A tem ordem 2×2, e B, ordem 2×1, então X é de ordem 2×1, ou seja, da forma $X = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$.

Da equação matricial, temos:

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = 2 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 4a - b \\ a + 2b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 10 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 4a - b = 4 \\ a + 2b = 10 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema pelo método da adição, temos:

$$\begin{cases} 4a - b = 4 \cdot (2) \\ a + 2b = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8a - 2b = 8 \\ a + 2b = 10 \end{cases}$$

$$9a = 18 \Rightarrow a = 2$$

Substituindo $a = 2$ em $a + 2b = 10$, temos:

$$a + 2b = 10 \Rightarrow 2 + 2b = 10 \Rightarrow 2b = 8 \Rightarrow b = 4$$

Portanto, $X = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$.

R22. Dado o sistema de equações $\begin{cases} 3x - y = 5 \\ ax + 2y = b \end{cases}$, determine os valores de a e b para que o sistema seja:

a) possível e indeterminado. **b)** impossível.

Resolução

a) Utilizando o método da adição, temos:

$$\begin{cases} 3x - y = 5 \quad \cdot (2) \\ ax + 2y = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x - 2y = 10 \\ ax + 2y = b \end{cases} \Rightarrow 6x + ax = 10 + b \Rightarrow x \cdot (6 + a) = 10 + b$$

Para o sistema ser possível e indeterminado, é necessário que $0x = 0$. Logo:

- $6 + a = 0 \Rightarrow a = -6$
- $10 + b = 0 \Rightarrow b = -10$

Portanto, se $a = -6$ e $b = -10$, o sistema será possível e indeterminado.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

b) Analogamente ao item **a**, teremos $x \cdot (6 + a) = 10 + b$. Porém, para ter um sistema impossível, é necessário que $0x \neq 0$. Logo:

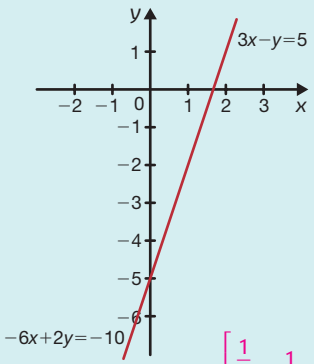
$$6 + a = 0 \Rightarrow a = -6 \text{ e } 10 + b \neq 0 \Rightarrow b \neq -10$$

Portanto, se $a = -6$ e $b \neq -10$, o sistema será impossível.

74. b) Resposta: $\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 4 & -4 & 7 \\ -0{,}5 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}$

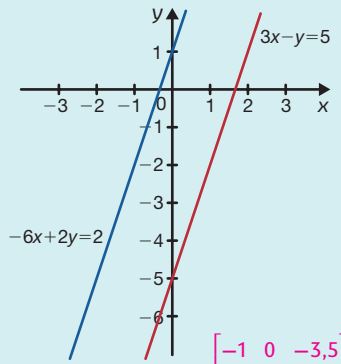
Observação

Na representação geométrica do sistema possível e indeterminado, as retas que representam as equações são coincidentes.



74. e) Resposta: $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 & -1 \\ 1 & \sqrt{7} & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ \sqrt{7} \end{bmatrix}$

Já na representação geométrica do sistema impossível, as retas que representam as equações são paralelas. No exemplo a seguir, considerou-se $b = 2$.



74. f) Resposta: $\begin{bmatrix} -1 & 0 & -3{,}5 \\ 0 & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$

ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Exercícios e problemas

Anote as respostas no caderno.

74. Escreva a equação matricial associada a cada sistema linear.

a) $\begin{cases} -x + 5y = 7 \\ x - 4y = 0 \end{cases}$
Resposta: $\begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \end{bmatrix}$

b) $\begin{cases} x - 2y - z = -1 \\ 4x - 4y + 7z = -4 \\ -0{,}5x + y + z = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ -y + z = 2 \\ -x + y + z = 6 \end{cases}$ Resposta: $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}$

d) $\begin{cases} y + z = 0 \\ x + z = 5 \\ x + y = -1 \end{cases}$ Resposta: $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}$

e) $\begin{cases} \frac{x}{2} + y - z = 0 \\ x + \sqrt{7}y = 2 \\ -x + z = \sqrt{7} \end{cases}$

f) $\begin{cases} -x - 3{,}5z = -1 \\ \frac{y - z}{5} = 3 \\ -x + y = 0 \end{cases}$

75. Classifique cada sistema em SPD, SPI ou SI. Em seguida, represente-o geometricamente.

a) $\begin{cases} -6x + 2y = 0 \\ 3x - y = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x + y = -2 \\ 4x + 2y = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 5x + 3y = -5 \\ 10x + 6y = 15 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3x - y = 5 \\ -2x - 2y = -22 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x + 3y = 7 \\ 2x + y = -1 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x - y = -1 \\ 2x - 2y = -4 \end{cases}$

g) $\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x - y = -5 \end{cases}$

h) $\begin{cases} 2x + y = 7 \\ x + 0{,}5y = 3{,}5 \end{cases}$

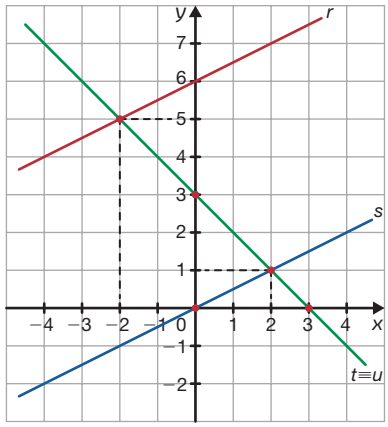
Resposta no final do **Livro do Estudante**.

76. Vimos anteriormente como funciona o sistema de pontuação adotado pela CBF desde 2003. Nesse sistema, são atribuídos 3 pontos para o time vencedor ou 1 ponto para cada time no caso de empate. Utilizando esse sistema, certo time disputou 15 partidas, das quais saiu vitorioso em dois terços das partidas em que não houve empate, e obteve 27 pontos. Determine o número de vitórias, de empates e de derrotas desse time.
Resposta: 8 vitórias; 3 empates; 4 derrotas.

77. Determine o valor de α para o qual o sistema $\begin{cases} x + y = 3 \\ -2x + \alpha y = 0 \end{cases}$ seja impossível.
Resposta: $\alpha = -2$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

78. Analise a representação das retas r, s, t e u em um mesmo plano cartesiano.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

r: $-x + 2y = 12$
s: $-x + 2y = 0$
t: $x + y = 3$
u: $-x - y = -3$

Sem realizar cálculos, determine quantas soluções tem cada sistema a seguir e, depois, escreva-as. Caso o sistema tenha infinitas soluções, escreva apenas algumas delas.

a) $\begin{cases} -x + 2y = 12 \\ x + y = 3 \end{cases}$ Resposta: Uma solução; $(-2, 5)$.

b) $\begin{cases} -x + 2y = 12 \\ -x + 2y = 0 \end{cases}$ Resposta: Não tem solução.

c) $\begin{cases} -x + 2y = 0 \\ -x - y = -3 \end{cases}$ Resposta: Uma solução; $(2, 1)$.

d) $\begin{cases} x + y = 3 \\ -x - y = -3 \end{cases}$ Resposta: Infinitas soluções; algumas são: $(-2, 5)$; $(0, 3)$; $(2, 1)$; $(3, 0)$.

e) $\begin{cases} -x - y = -3 \\ -x + 2y = 12 \end{cases}$ Resposta: Uma solução; $(-2, 5)$.

79. Represente geometricamente os sistemas de equações e, caso eles sejam SPD, determine sua solução.

a) $\begin{cases} 8x - 2y = 2 \\ 3x - y = -6 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2y - 2x = 1 \\ x = y - \frac{1}{2} \end{cases}$

c) $\begin{cases} x - 2y = -4 \\ x + y = 5 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x - 2y = -4 \\ -2x + 4y = 8 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x - 2y = -4 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x = 2 \\ x + 2y = 8 \end{cases}$

g) $\begin{cases} x - y = 0 \\ y = 2 \end{cases}$

h) $\begin{cases} -5x - y = 12 \\ -x + 3y = -4 \end{cases}$

Respostas no final do **Livro do Estudante**.

80. Na cantina de uma escola, são oferecidos dois tipos de sanduíches, de frango e vegetariano, cujos preços estão indicados a seguir.



ILUSTRAÇÕES: LEONARDO GIBRAN/ARQUIVO DA EDITORA

Em um determinado dia, essa cantina arrecadou R$ 324,00 na venda de 33 sanduíches.

a) Nomeando cada sanduíche de frango e vegetariano de A e B, respectivamente, escreva um sistema de equações que represente essa situação. Resposta: $\begin{cases} 8A + 12B = 324 \\ A + B = 33 \end{cases}$

b) Classifique o sistema que você escreveu no item **a** em SPD, SPI ou SI. Resposta: SPD

c) Quantas unidades de cada sanduíche foram vendidas nesse dia?
Resposta: Frango: 18 unidades; vegetariano: 15 unidades.

81. Considere o sistema de equações com coeficientes reais apresentado a seguir.

$$\begin{cases} y = (a - 1) \cdot x + 2 \\ y - 2x = b \end{cases}$$

Para quais valores de a e b esse sistema é:

a) possível e indeterminado?
Resposta: $a = 3$; $b = 2$

b) possível e determinado?
Resposta: $a \neq 3$; $b \in \mathbb{R}$

c) impossível?
Resposta: $a = 3$; $b \neq 2$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

82. Determine a solução dos sistemas de equações, caso exista.

a) $\begin{cases} x - 3y = 6 \\ 2x = 6(y + 1) \end{cases}$

Resposta: Não existe solução.

b) $\begin{cases} 3y - 2x = 3 \\ 5x + 2y = 4 \end{cases}$

Resposta: $x = \frac{6}{19}$; $y = \frac{23}{19}$

c) $\begin{cases} 2y - x = 4 \\ y + 2x = -4 \end{cases}$

Resposta: $x = -\frac{12}{5}$; $y = \frac{4}{5}$

d) $\begin{cases} -x + y = -4 \\ -x + 4y = 4 \end{cases}$

Resposta: $x = \frac{20}{3}$; $y = \frac{8}{3}$

82. f) Resposta: $x = \frac{7}{10}$; $y = \frac{13}{10}$

e) $\begin{cases} 4x + y = 2 \\ 2x + \frac{y}{2} = \frac{1}{2} \end{cases}$

Resposta: Não existe solução.

f) $\begin{cases} -3x + y = -\frac{4}{5} \\ x + y = 2 \end{cases}$

g) $\begin{cases} -\frac{3}{8}x + y = -\frac{5}{9} \\ \frac{4}{9}x + y = \frac{11}{2} \end{cases}$

Resposta: $x = \frac{436}{59}$; $y = \frac{2\,353}{1062}$

h) $\begin{cases} 7{,}4x + y = 8 \\ -14{,}8x - 2y = -18 \end{cases}$

Resposta: Não existe solução.

83. Um motorista abasteceu seu carro com uma mistura de etanol e gasolina, totalizando 40 L. Sabendo que a quantidade de etanol colocada foi 3 vezes a de gasolina, calcule a quantidade de cada combustível com que o carro foi abastecido.

Resposta: Etanol: 30 L; gasolina: 10 L.

84. Em cada item, o sistema foi classificado em SPD, SPI ou SI.

a) $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$ (SPD)

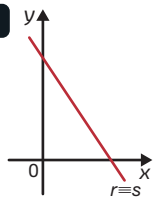
b) $\begin{cases} a_3x + b_3y = c_3 \\ a_4x + b_4y = c_4 \end{cases}$ (SPI)

c) $\begin{cases} a_5x + b_5y = c_5 \\ a_6x + b_6y = c_6 \end{cases}$ (SI)

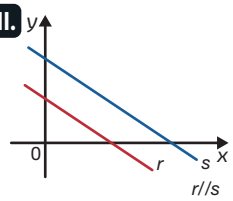
d) $\begin{cases} a_7x + b_7y = 0 \\ a_8x + b_8y = 0 \end{cases}$ (SPD)

Associe cada sistema a um dos gráficos a seguir, escrevendo a letra e o símbolo romano correspondentes. Resposta: **a–IV; b–I; c–III; d–II.**

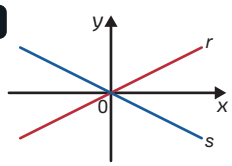
I.



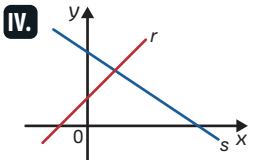
III.



II.



IV.



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

85. (Unifesp, 2004) Numa determinada livraria, a soma dos preços de aquisição de dois lápis e um estojo é R$ 10,00. O preço do estojo é R$ 5,00 mais barato que o preço de três lápis. A soma dos preços de aquisição de um estojo e de um lápis é

Resposta: Alternativa **d**.

a) R$ 3,00. **c)** R$ 6,00. **e)** R$ 12,00.

b) R$ 4,00. **d)** R$ 7,00.

87. Resposta: $\begin{cases} 2{,}5L + 1{,}6P = 26{,}70 \\ 4L + 3{,}5P = 54{,}00 \end{cases}$; L = R$ 3,00; P = R$ 12,00

86. Resolva a seguinte equação matricial.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Resposta: $x = 3$; $y = -2$; $z = -1$

87. Em certa banca de feira, 2,5 kg de laranjas (L) mais 1,6 kg de peras (P) custam R$ 26,70. Nessa mesma banca, 4 kg de laranjas mais 3,5 kg de peras custam R$ 54,00. Com base nessas informações, escreva e resolva um sistema linear cuja solução forneça o preço de 1 kg de laranjas e 1 kg de peras.

88. Para analisar a solução de um sistema com duas equações e duas incógnitas, Marta executou os seguintes passos em um *software* de Geometria dinâmica.

A. Na **Janela de Álgebra**, ela digitou uma equação do sistema e depois teclou **Enter**. Fez o mesmo procedimento para outra equação do sistema.

B. Selecionou a ferramenta **Interseção de Dois Objetos** e, em seguida, clicou na reta formada pela 1ª equação e depois clicou na reta formada pela 2ª equação.

Observação

Devemos ficar atentos às seguintes questões ao analisar a solução de sistemas de equações dada pelo *software* de Geometria dinâmica.

- O ponto de interseção mostrado pode ser uma aproximação do ponto de interseção real.
- Caso o sistema seja impossível ou possível e indeterminado, aparecerá um erro na interseção das retas na **Janela de Álgebra**. Sendo assim, é necessário analisar a **Janela de Visualização** para descobrir se o sistema é SPI ou SI.

Classifique os sistemas a seguir em SPD, SPI ou SI usando um *software* de Geometria dinâmica e dê a solução dos sistemas possíveis e determinados.

a) $\begin{cases} 2x - 4y = 7 \\ -3x + 6y = -10 \end{cases}$ Resposta: SI

b) $\begin{cases} 7x - 9y = 18 \\ 2x + 3y = 27 \end{cases}$ Resposta: SPD; solução: (7,62; 3,92).

c) $\begin{cases} -3x - 8y = 18 \\ x + 3y = 10 \end{cases}$ Resposta: SPD; solução: (−134, 48).

d) $\begin{cases} 8x - 2y = 26 \\ -4x + y = -13 \end{cases}$ Resposta: SPI

e) $\begin{cases} 12x - 2y = 36 \\ -10x + 6y = -30 \end{cases}$ Resposta: SPD; solução: (3, 0).

f) $\begin{cases} -16x + 12y = 15 \\ 4x - 3y = 38 \end{cases}$ Resposta: SI

88. Professor, professora: Comente com os estudantes que, no caso do GeoGebra, aparece um ponto de interrogação tanto para a interseção de sistemas impossíveis quanto para a de sistemas possíveis e indeterminados.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

89. O átomo é considerado a unidade fundamental de um elemento químico. O conceito de átomo é um dos mais importantes da Química e por meio dele é possível explicar diversos fenômenos da natureza.

A massa do átomo é expressa em unidades de massa atômica, sendo representada pela letra **u** e tendo como referência a massa do **isótopo** mais abundante do carbono, denominado carbono-12 $\left({}^{12}C\right)$. Uma unidade de massa atômica corresponde a $\frac{1}{12}$ da massa desse isótopo do carbono. A massa atômica é de fundamental importância, pois por meio dela é possível obter as massas moleculares e as fórmulas químicas. Além disso, é utilizada na construção constante da tabela periódica, com o objetivo de organizar e direcionar as informações científicas sobre os elementos químicos.

A massa de uma molécula pode ser determinada adicionando-se as massas de seus átomos componentes. Para determinar, por exemplo, a massa de uma molécula de SO_2 (dióxido de enxofre), que é composta por 1 átomo de enxofre (S) e 2 de oxigênio (O), deve-se adicionar a massa atômica do enxofre a duas vezes a massa atômica do oxigênio.

Fonte de pesquisa: RUSSELL, John B. *Química geral*. Tradução e revisão técnica: Márcia Guekezian *et al*. 2. ed. São Paulo: Makron Books, 1994. v. 1.

A massa atômica de cada elemento é encontrada na tabela periódica. A seguir, apresentamos como calcular a massa da molécula de SO_2.

7	8	9	10
N	**O**	**F**	**Ne**
Nitrogênio	Oxigênio	Flúor	Neônio
14,01	16,00	19,00	20,18
15	16	17	18
P	**S**	**Cℓ**	**Ar**
Fósforo	Enxofre	Cloro	Argônio
30,97	32,06	35,45	39,95

16,00 u (massa atômica)

32,06 u (massa atômica)

Massa atômica de uma molécula de SO_2:
$1 \cdot 32{,}06\ u + 2 \cdot 16{,}00\ u = 64{,}06\ u$

Isótopo: o isótopo de um elemento químico tem átomos com o mesmo número de prótons, porém com diferente número de nêutrons.

Ilustração elaborada com base em: SOCIEDADE BRASILEIRA DE QUÍMICA. *Tabela periódica dos elementos*. 2023. Disponível em: https://www.sbq.org.br/anexos/tabela%20periodica_SBQ_3.0_set2023.pdf. Acesso em: 12 set. 2024.

89. a) Resposta: Carbono: 12 u; hidrogênio: 1 u.

a) Sabendo que a massa de uma molécula de C_2H_4 (etileno) corresponde a 28 u e a massa de uma molécula de C_4H_{10} (butano) corresponde a 58 u, determine a massa atômica do carbono (C) e do hidrogênio (H).

b) Conhecendo apenas a massa de uma molécula de $C_4H_8O_2$ (ácido butírico), que corresponde a 88 u, produzido quando a manteiga se deteriora, e de uma molécula de $C_8H_{10}O_2N_4$ (cafeína), que corresponde a 194 u, é possível determinar a massa atômica de C, H, O e N (nitrogênio)? Justifique sua resposta.
Resposta: Não. Espera-se que os estudantes respondam que, se obtivermos um sistema de equações com base nessas informações, ele será possível e indeterminado.

Escalonamento de um sistema linear

Um método muito utilizado para resolver e classificar um sistema linear é o chamado **escalonamento**. Neste tópico, estudaremos o que é um sistema escalonado e como escalonar um sistema linear.

Sistemas lineares equivalentes

Quando dois sistemas lineares apresentam as mesmas soluções, dizemos que eles são **equivalentes**.

Os sistemas $\begin{cases} 2x - y + 4z = 3 \\ -x + 3y - 2z = 6 \\ 3x - y + 5z = 4 \end{cases}$ e $\begin{cases} 3x + 2y - 2z = -1 \\ x + 2y - z = 3 \\ -3y + 5z = 1 \end{cases}$, por exemplo, são equivalentes, pois ambos admitem como única solução a terna $(-1, 3, 2)$.

Já os sistemas $\begin{cases} 2x - y + z = -2 \\ 5x + 2y - z = 3 \\ x - y + 4z = -5 \end{cases}$ e $\begin{cases} x + y + z = 7 \\ x - y + 2z = 6 \\ y - z = -1 \end{cases}$ não são equivalentes, pois admitem soluções únicas e distintas, sendo estas, respectivamente, $(0, 1, -1)$ e $(2, 2, 3)$.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.
RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Ao multiplicar uma equação de um sistema linear S_1 por uma constante real não nula, obtemos um sistema linear S_2, equivalente a S_1.

Exemplo

Multiplicando por 3 a 1ª equação do sistema $S_1 = \begin{cases} 2x + 3y - 4z = -6 \\ -3x + y + z = -7 \\ 5x - 2y + 9y = 23 \end{cases}$, obtemos o sistema $S_2 = \begin{cases} 6x + 9y - 12z = -18 \\ -3x + y + z = -7 \\ 5x - 2y + 9z = 23 \end{cases}$, equivalente a S_1. Esses sistemas têm como única solução a terna $(2, -2, 1)$.

Ao permutar duas equações de um sistema linear S_1, obtemos um sistema linear S_2, equivalente a S_1.

Exemplo

Permutando a 1ª com a 3ª equação do sistema $S_1 = \begin{cases} 4x + 2y - z = 0 \\ -6x - 2y + 2z = 4 \\ x + y + 2z = -2 \end{cases}$, obtemos o sistema $S_2 = \begin{cases} x + y + 2z = -2 \\ -6x - 2y + 2z = 4 \\ 4x + 2y - z = 0 \end{cases}$, equivalente a S_1. Esses sistemas têm como única solução a terna $(-3, 5, -2)$.

Ao substituir uma equação de um sistema linear S_1 pela soma dela com qualquer outra equação desse sistema multiplicada por uma constante diferente de zero, obtemos um sistema linear S_2 equivalente a S_1.

Exemplo

Substituindo a 2ª equação do sistema $S_1 = \begin{cases} 5x - 3y = 11 \\ -2x + y = -5 \end{cases}$ pela soma dela com a 1ª equação, obtemos o sistema $S_2 = \begin{cases} 5x - 3y = 11 \\ 3x - 2y = 6 \end{cases}$, equivalente a S_1. Esses sistemas têm como única solução o par $(4, 3)$.

Professor, professora: Após trabalhar os procedimentos para escalonar um sistema linear, peça aos estudantes que resolvam os sistemas apresentados nesta página.

Sistema linear escalonado

Dizemos que um sistema linear, com incógnitas escritas na mesma ordem em todas as equações, está na forma escalonada se o primeiro coeficiente não nulo de cada equação estiver à esquerda do primeiro coeficiente não nulo da equação seguinte. Além disso, se os coeficientes de uma equação são todos nulos, escrevemos essa equação após as demais ou a omitimos desde que o termo independente também seja nulo.

São exemplos de sistemas escalonados:

- $\begin{cases} -3x + y - 2z = 0 \\ 0x - 3y + z = -1 \\ 0x + 0y - z = 5 \end{cases}$ ou $\begin{cases} -3x + y - 2z = 0 \\ -3y + z = -1 \\ -z = 5 \end{cases}$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

- $\begin{cases} 2x - 4y + 5z - 3w = 11 \\ 0x + 3y - 4z + w = 7 \\ 0x + 0y + 3z - 2w = -8 \\ 0x + 0y + 0z - 0w = 0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} 2x - 4y + 5z - 3w = 11 \\ 3y - 4z + w = 7 \\ 3z - 2w = -8 \end{cases}$

Um sistema escalonado pode ter o mesmo número de equações e incógnitas ou mais incógnitas do que equações.

Vamos resolver o sistema escalonado $\begin{cases} -x + 2y + 4z = 3 \\ -2y + z = 5 \\ -3z = -9 \end{cases}$, em que o número de equações e de incógnitas são iguais.

Inicialmente, resolvemos a 3ª equação e obtemos o valor de z.

$$-3z = -9 \Rightarrow z = 3$$

Substituímos $z = 3$ na 2ª equação e obtemos o valor de y.

$$-2y + z = 5 \Rightarrow -2y + 3 = 5 \Rightarrow y = -1$$

Substituímos $z = 3$ e $y = -1$ na 1ª equação e obtemos o valor de x.

$$-x + 2y + 4z = 3 \Rightarrow -x + 2 \cdot (-1) + 4 \cdot 3 = 3 \Rightarrow x = 7$$

Portanto, o sistema tem como única solução a terna $(7, -1, 3)$.

Se um sistema linear escalonado tem o número de equações igual ao de incógnitas, então ele é possível e determinado (SPD).

Agora, vamos resolver o sistema escalonado $\begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ 2y - 8z = 0 \end{cases}$, que tem mais incógnitas do que equações.

Nos sistemas com essa característica, as incógnitas que não aparecem no início de nenhuma equação são denominadas incógnitas livres. No exemplo apresentado, a incógnita livre é z.

Para determinar a **solução geral** desse sistema, consideramos $z = k$, sendo k um número real.

Substituindo $z = k$ na 2ª equação, temos:

$$2y - 8z = 0 \Rightarrow 2y - 8k = 0 \Rightarrow y = 4k$$

Substituindo $z = k$ e $y = 4k$ na 1ª equação, temos:

$$x + y - 2z = 0 \Rightarrow x + 4k - 2k = 0 \Rightarrow x = -2k$$

Portanto, a solução geral do sistema é $(-2k, 4k, k)$, com k real.

Se em um sistema linear escalonado o número de incógnitas é maior do que o de equações, então esse sistema é possível e indeterminado (SPI). O **grau de indeterminação** de um sistema depende da quantidade de incógnitas livres, ou seja, se o sistema tem uma incógnita livre, dizemos que ele tem grau de indeterminação 1.

O número de incógnitas livres de um sistema escalonado com m equações e n incógnitas é dado por $n - m$.

Para obter soluções particulares do sistema escalonado, atribuímos valores a k e efetuamos os cálculos. Para $k = 1$, por exemplo, temos:

$$(-2k, 4k, k) = (-2 \cdot 1, 4 \cdot 1{,}1) = (-2, 4, 1)$$

Observação

O sistema linear apresentado não está na forma escalonada, pois a 2ª e a 3ª equações têm a mesma quantidade de coeficientes não nulos.

$\begin{cases} -x + 3y + 7z = -3 \\ -y - 4z = 2 \\ 5y - z = 9 \end{cases}$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Exercícios e problemas resolvidos

R23. Resolva e classifique o sistema $\begin{cases} x + 2y - z + w = 3 \\ \quad y + z - w = -1 \end{cases}$.

Resolução

O sistema está na forma escalonada e tem duas equações e quatro incógnitas. Logo, são duas incógnitas livres e o grau de indeterminação é 2.

Fazendo $z = \alpha$ e $w = \beta$, com α e β reais, temos:

$$\begin{cases} x + 2y - z + w = 3 \\ \quad y + z - w = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y - \alpha + \beta = 3 \\ \quad y + \alpha - \beta = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y = 3 + \alpha - \beta & \text{(I)} \\ \quad y = -1 - \alpha + \beta & \text{(II)} \end{cases}$$

Substituindo II em I, segue que:

$$x + 2 \cdot (-1 - \alpha + \beta) = 3 + \alpha - \beta \Rightarrow x - 2 - 2\alpha + 2\beta = 3 + \alpha - \beta \Rightarrow x = 5 + 3\alpha - 3\beta$$

Logo, a solução geral do sistema é $(5 + 3\alpha - 3\beta, \ -1 - \alpha + \beta, \ \alpha, \ \beta)$.

Portanto, o sistema é SPI.

Observação

Atribuindo, por exemplo, $\alpha = \beta = 1$, obtemos uma das soluções do sistema:
$(5 + 3\alpha - 3\beta, -1 - \alpha + \beta, \alpha, \beta) = (5 + 3 \cdot 1 - 3 \cdot 1, -1 - 1 + 1, 1, 1) = (5, -1, 1, 1)$

Exercícios e problemas

Anote as respostas no caderno.

90. Determine quais são os pares de sistemas lineares equivalentes. Resposta: **a–d**; **b–f**; **c–e**.

a) $\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x + 3y = 9 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 6x + y = 1 \\ -2x + y = -3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x - y = 2 \\ -2x + y = 1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} -x + 2y = 6 \\ x - 4y = -12 \end{cases}$

e) $\begin{cases} \frac{1}{3}x - y = 4 \\ -x + \frac{1}{5}y = 2 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 2x + y = -1 \\ 4x - y = 4 \end{cases}$

91. Determine quais sistemas estão na forma escalonada. Resposta: Alternativas **b** e **d**.

a) $\begin{cases} x - y + 6z = 0 \\ \quad x - z = 1 \\ \quad\quad 3z = 3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y + z + w = 7 \\ -y - z + 3w = 6 \\ \quad z + 5w = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \quad x - 6y = 0 \\ 5x - 4y - z = 5 \\ \quad 3y + z = 2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} y - x = 6 \\ \quad 2x = 8 \end{cases}$

92. Em cada item, determine as condições sobre as constantes A, B, C, D e E para que o sistema fique na forma escalonada. Respostas no final do **Livro do Estudante**.

a) $\begin{cases} 5x + (1 - A)y + z = 0 \\ \quad Bx + 4y + Cz = 4 \\ Dx + (E + 1)y + z = 3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} (A - B)x + 6y + z = 8 \\ (1 - B)x + Cy - z = 5 \\ Dx + Ey - (2 - C)z = 0 \end{cases}$

93. Classifique cada sistema em SPD, SPI ou SI. Em seguida, resolva-os.

a) $\begin{cases} 2x - y + z = 4 \\ \quad y + z = 3 \end{cases}$
Resposta: SPI; solução geral: $\left(\frac{7}{2} - k, \ 3 - k, \ k\right)$, com k real.

b) $\begin{cases} -x + 2y - z = -9 \\ \quad 2y + z = 0 \\ \quad\quad 3z = 12 \end{cases}$
Resposta: SPD; $(1, -2, 4)$

c) $\begin{cases} x + y + z - w = 4 \\ -y - z + w = 0 \\ \quad z + w = -5 \end{cases}$
Resposta: SPI; solução geral: $(4, 5 + 2k, -5 - k, k)$, com k real.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Procedimentos para escalonar um sistema linear

Por meio de operações elementares, podemos, a partir de um sistema linear dado, obter um sistema equivalente na forma escalonada, o que auxilia na resolução e na classificação desse sistema.

Para escalonar um sistema linear, as operações elementares são:

- trocar a ordem das equações do sistema;
- substituir uma equação do sistema por outra equação, resultante de sua adição com outra equação do mesmo sistema multiplicada por um número diferente de zero;
- multiplicar qualquer equação por um número diferente de zero.

Dica

Lembre-se de que sistemas equivalentes têm as mesmas soluções. Portanto, ao resolver um sistema escalonado equivalente a um sistema linear S dado, estamos resolvendo também S.

Exemplo 1

Vamos resolver o sistema linear apresentado a seguir. Para isso, inicialmente transformamos a 2ª e a 3ª equações, de maneira a obter equações com o coeficiente de x igual a zero.

$$\begin{cases} 2x - 3y - z = 0 \\ -2x + y + 2z = -9 \\ 4x + 2y + z = 1 \end{cases} \begin{matrix} \\ \xleftarrow{+} \\ \xleftarrow{+} \end{matrix} \begin{matrix} \\ \cdot(-2) \\ \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 3y - z = 0 \\ -2y + z = -9 \\ 8y + 3z = 1 \end{cases}$$

Por fim, no novo sistema, podemos substituir a 3ª equação pela soma dela com a 2ª equação multiplicada por 4.

$$\begin{cases} 2x - 3y - z = 0 \\ -2y + z = -9 \\ 8y + 3z = 1 \end{cases} \begin{matrix} \\ \\ \xleftarrow{+} \end{matrix} \begin{matrix} \\ \\ \cdot 4 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 3y - z = 0 \\ -2y + z = -9 \\ 7z = -35 \end{cases}$$

Podemos verificar que o sistema obtido está na forma escalonada e é equivalente ao sistema linear dado inicialmente. Resolvendo esse sistema escalonado, estamos também resolvendo o sistema inicial.

- $7z = -35 \Rightarrow z = -5$
- $-2y + z = -9 \Rightarrow -2y + (-5) = -9 \Rightarrow y = 2$
- $2x - 3y - z = 0 \Rightarrow 2x - 3 \cdot 2 - (-5) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

Portanto, o sistema é possível e determinado (SPD) e tem como solução a terna $\left(\frac{1}{2}, 2, -5\right)$.

Exemplo 2

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = -7 \\ -2x - y + z = 3 \\ -x + y - 2z = -4 \end{cases} \begin{matrix} \\ \cdot 2 \\ \end{matrix} \begin{matrix} \\ \xleftarrow{+} \\ \xleftarrow{+} \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y - 3z = -7 \\ 3y - 5z = -11 \\ 3y - 5z = -11 \end{cases} \begin{matrix} \\ \cdot(-1) \\ \xleftarrow{+} \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y - 3z = -7 \\ 3y - 5z = -11 \\ 0y - 0z = 0 \end{cases}$$

Como na 3ª equação o coeficiente de cada incógnita é igual a zero e o termo independente também é igual a zero, essa equação é válida para quaisquer valores de x, y e z. Dessa maneira, ela não contribui para a resolução do sistema, podendo ser desconsiderada e fazendo com que o sistema obtido fique na forma escalonada.

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = -7 \\ 3y - 5z = -11 \\ 0y - 0z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y - 3z = -7 \\ 3y - 5z = -11 \end{cases}$$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Podemos verificar que o sistema escalonado obtido tem mais incógnitas do que equações e, portanto, é um sistema possível e indeterminado (SPI). Nesse caso, o sistema escalonado obtido tem uma incógnita livre (z). Considerando $z = k$, com k real, podemos determinar a solução geral do sistema.

- $3y - 5z = -11 \Rightarrow 3y - 5k = -11 \Rightarrow y = \dfrac{-11 + 5k}{3}$
- $x + 2y - 3z = -7 \Rightarrow x + 2 \cdot \dfrac{-11 + 5k}{3} - 3k = -7 \Rightarrow x = \dfrac{1 - k}{3}$

Portanto, a solução geral do sistema é $\left(\dfrac{1 - k}{3}, \dfrac{-11 + 5k}{3}, k\right)$.

Questão D.
A partir da solução geral apresentada, determine uma das soluções particulares do sistema utilizando $k = 4$.
Resposta: $(-1, 3, 4)$

Exemplo 3

$$\begin{cases} x - 3y + 2z = -4 \\ -x + 2y - z = 5 \\ 3x - 10y + 7z = -3 \end{cases} \xrightarrow{\cdot(-3)\ \text{e}\ +} \begin{cases} x - 3y + 2z = -4 \\ -y + z = 1 \\ -y + z = 9 \end{cases} \xrightarrow{\cdot(-1)\ \text{e}\ +} \begin{cases} x - 3y + 2z = -4 \\ -y + z = 1 \\ 0y + 0z = 8 \end{cases}$$

Nesse caso, a 3ª equação do sistema obtido não é satisfeita, sejam quais forem os valores de x, y e z. Portanto, o sistema é impossível (SI).

Exercícios e problemas resolvidos

R24. Fabiana monta e vende *kits* com produtos de higiene pessoal. Atualmente, ela tem três opções.

Opção **1**: 1 creme dental, 2 desodorantes e 6 sabonetes custam R$ 62,00.

Opção **2**: 2 cremes dentais, 2 desodorantes e 5 sabonetes custam R$ 65,00.

Opção **3**: 3 cremes dentais, 4 desodorantes e 4 sabonetes custam R$ 92,00.

Ela pretende montar outra opção de *kit* com 1 creme dental, 1 desodorante e 5 sabonetes. Sabendo que 1 creme dental, 1 desodorante e 1 sabonete custam, respectivamente, c, d e s, determine qual deve ser o preço dessa nova opção de *kit*.

Resolução

Considerando as opções **1**, **2** e **3**, obtemos o seguinte sistema.

$$\begin{cases} c + 2d + 6s = 62 \\ 2c + 2d + 5s = 65 \\ 3c + 4d + 4s = 92 \end{cases}$$

Devemos calcular o preço de cada produto. Para isso, escalonamos o sistema.

$$\begin{cases} c + 2d + 6s = 62 \\ 2c + 2d + 5s = 65 \\ 3c + 4d + 4s = 92 \end{cases} \xrightarrow{\cdot(-2)\ \text{e}\ +} \begin{cases} c + 2d + 6s = 62 \\ 0c - 2d - 7s = -59 \\ 3c + 4d + 4s = 92 \end{cases} \xrightarrow{\cdot(-3)\ \text{e}\ +} \begin{cases} c + 2d + 6s = 62 \\ 0c - 2d - 7s = -59 \\ 0c - 2d - 14s = -94 \end{cases} \xrightarrow{\cdot(-1)\ \text{e}\ +} \begin{cases} c + 2d + 6s = 62 \\ 0c - 2d - 7s = -59 \\ 0c - 0d - 7s = -35 \end{cases}$$

Na sequência, resolvemos o sistema escalonado.

$$-7s = -35 \qquad -2d - 7 \cdot (5) = -59 \qquad c + 2 \cdot (12) + 6 \cdot (5) = 62$$
$$s = \frac{-35}{-7} \qquad -2d - 35 = -59 \qquad c + 24 + 30 = 62$$
$$s = 5 \qquad -2d = -24 \qquad c = 8$$
$$d = \frac{-24}{-2}$$
$$d = 12$$

Substituindo os valores para obter o preço da nova opção, temos:

$$c + d + 5s = 8 + 12 + 5 \cdot (5) = 45$$

Portanto, o preço da nova opção deve ser R$ 45,00.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Exercícios e problemas

Anote as respostas no caderno.

Professor, professora: A tarefa **98** propõe aos estudantes que elaborem um problema utilizando os conceitos estudados, contribuindo para a ampliação do repertório de reflexões e questionamentos a respeito de determinadas situações.

94. Em um campeonato de futebol, Gil fez 6 gols a mais do que João. Se na próxima rodada cada um fizer um gol, Gil terá feito o triplo da quantidade de gols de João no campeonato. Caso isso aconteça, quantos gols cada um terá feito no campeonato?

Resposta: Gil: 9 gols; João: 3 gols.

95. Resolva os sistemas lineares.

a) $\begin{cases} 3x - y - 2z = 1 \\ x + 2y + z = 9 \\ 2x + y - z = 6 \end{cases}$

Resposta: $x = 2$; $y = 3$; $z = 1$

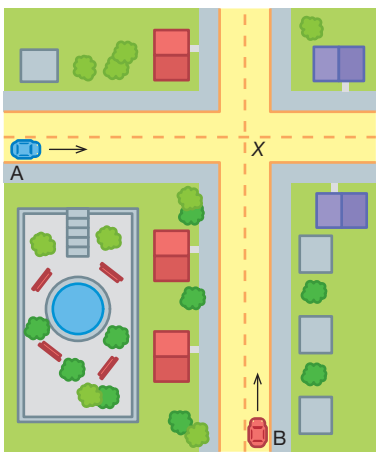
b) $\begin{cases} 4x + y - 3z = 5 \\ 2x + y + z = 7 \\ 2x + 3y + 2z = 7 \end{cases}$

Resposta: $x = 3$; $y = -1$; $z = 2$

96. (Fuvest-SP, 2020) Uma agência de turismo vendeu um total de 78 passagens para os destinos: Lisboa, Paris e Roma. Sabe-se que o número de passagens vendidas para Paris foi o dobro do número de passagens vendidas para os outros dois destinos conjuntamente. Sabe-se também que, para Roma, foram vendidas duas passagens a mais que a metade das vendidas para Lisboa. Qual foi o total de passagens vendidas, conjuntamente, para Paris e Roma? Resposta: Alternativa **d**.

a) 26 **b)** 38 **c)** 42 **d)** 62 **e)** 68

97. Dois carros, **A** e **B**, trafegando em ruas diferentes, dirigem-se em linha reta para um mesmo cruzamento, no ponto X, a uma mesma velocidade constante. Nessas condições, o carro **B** vai passar por X 10 s após o carro **A**. Mas, se o carro **B** aumentar sua velocidade em 20%, ele vai chegar ao cruzamento no mesmo instante que o carro **A**.



SERGIO L. FILHO/ARQUIVO DA EDITORA

De acordo com as informações apresentadas e supondo que os carros mantenham velocidade constante, determine em quantos segundos o carro **A** chegará ao ponto X. Resposta: 50 s

Dica

Lembre-se de que, neste caso, velocidade e tempo são grandezas inversamente proporcionais.

98. Escreva um problema em que seja necessário utilizar o sistema linear a seguir para resolvê-lo. Depois, proponha o problema que você elaborou a um colega e resolva o problema proposto por ele.

Resposta pessoal. A resposta depende de cada problema elaborado pelos estudantes.

$\begin{cases} 2x + 3y = 35 \\ 3x + 5y = 57 \end{cases}$

99. (UEL-PR, 2019) Uma mãe, com o intuito de organizar os brinquedos dos seus filhos, teve a ideia de colocá-los em caixas coloridas. Ela classificou os brinquedos em três categorias, de acordo com seus tamanhos, sendo elas: brinquedos pequenos, médios e grandes. Para a organização, a mãe utilizou caixas de acrílico amarelas, verdes e azuis, as quais comportam as seguintes quantidades de brinquedos:

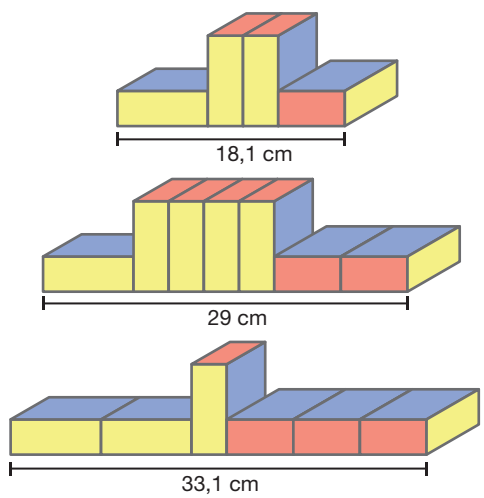
- Caixas Amarelas: 2 grandes, 8 médios e 10 pequenos.
- Caixas Verdes: 2 grandes, 20 médios e 16 pequenos.
- Caixas Azuis: 1 grande, 10 médios e 14 pequenos.

Considere que as crianças tenham 12 brinquedos grandes, 72 brinquedos de tamanho médio e 84 pequenos e que foi colocada, em cada caixa, exatamente a quantidade de brinquedos de cada categoria que ela comporta.

Quantas caixas de cada cor esta mãe utilizou para acomodar todos os brinquedos de seus filhos?

Apresente os cálculos realizados na resolução da questão. Resposta: A mãe utilizou quatro caixas amarelas, uma verde e duas azuis.

100. Nas figuras a seguir, os paralelepípedos reto retângulos têm as mesmas dimensões, assim como suas faces retangulares de mesma cor.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

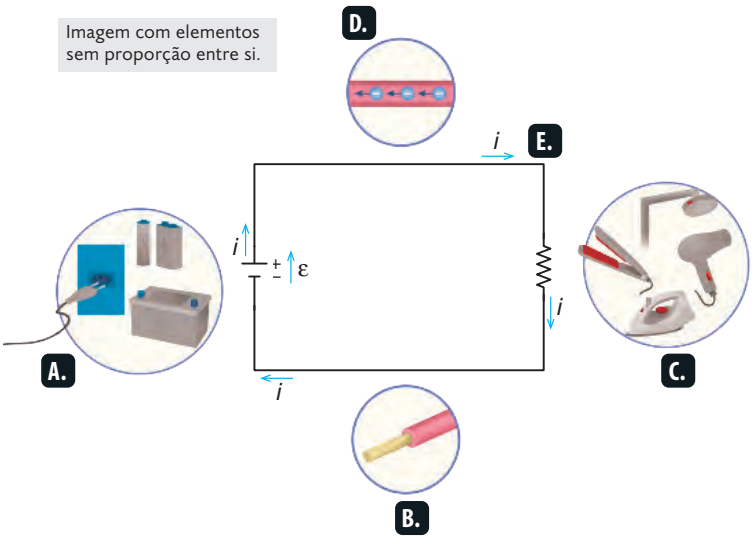
Resposta: 106,848 cm^3

Qual é o volume de um desses paralelepípedos?

Professor, professora: Antes de os estudantes elaborarem o problema da tarefa **98**, peça a eles que analisem os contextos propostos na seção **Exercícios e problemas** deste tópico e, se julgar conveniente, oriente-os a investigar outros problemas disponíveis em provas de vestibular e do Enem.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

101. Você usa muitos equipamentos elétricos? Isso só é possível graças aos circuitos desses equipamentos e às correntes elétricas que os circulam. Esses circuitos elétricos normalmente têm três componentes básicos: um dispositivo que funciona com energia elétrica, como um motor, um eletrodoméstico ou uma lâmpada; fios condutores, como os fios de cobre; e uma fonte de energia elétrica, como uma pilha, uma bateria ou as tomadas elétricas, que permitem acesso à energia elétrica produzida em uma usina. A seguir, é apresentado um esquema simplificado de circuito elétrico com esses três componentes básicos em que a corrente elétrica percorre apenas um caminho.



ILUSTRAÇÕES: HELOÍSA PINTARELLI/ARQUIVO DA EDITORA
RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

A. Fonte: fornece energia elétrica para um circuito e pode ser obtida pela transformação de outras formas de energia (química, mecânica, solar, entre outras). No circuito, as forças eletromotrizes pelas quais as cargas elétricas são transportadas são expressas em volts (V).

B. Condutor: todo material capaz de transportar elétrons é chamado condutor elétrico. Ele é responsável pelo transporte da carga elétrica. A quantidade de carga elétrica que atravessa uma seção transversal desse condutor em determinado intervalo de tempo é chamada **intensidade** de corrente elétrica.

C. Resistor: os resistores são utilizados para criar barreiras na passagem da corrente elétrica fornecida pela fonte, convertendo-a em energia térmica (calor), pois os elétrons colidem com os átomos do fio, gerando calor. No circuito, as resistências são expressas em ohms (Ω).

D. Movimento dos elétrons.

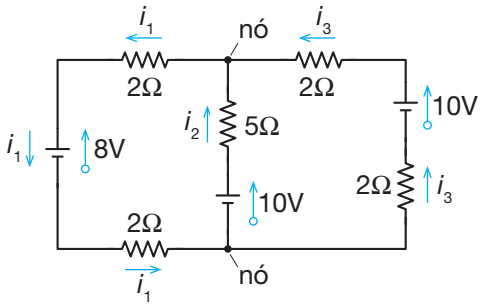
E. Sentido convencional da corrente elétrica. No circuito, as intensidades das correntes elétricas são expressas em ampère (A).

Em 1845, o físico alemão Gustav Kirchhoff (1824-1887) descreveu duas leis que permitiram representar circuitos elétricos por meio de equações lineares, facilitando a análise dos circuitos, principalmente em aplicações reais que aparecem mais circuitos complexos, com muitos caminhos para a corrente percorrer. Nessa abordagem, basta utilizar um sistema linear para determinar as intensidades das correntes elétricas de um circuito.

Primeira Lei de Kirchhoff (lei dos nós): A soma das correntes que entram em um nó é igual à soma das correntes que saem dele.

Segunda Lei de Kirchhoff (lei das malhas): A soma algébrica das variações de potencial encontradas ao percorrer uma malha fechada é sempre zero.

Analise um exemplo de circuito elétrico com mais de um caminho para a corrente elétrica e o sistema linear correspondente obtido por meio da aplicação das Leis de Kirchhoff.



$$\begin{cases} i_1 - i_2 - i_3 = 0 \\ -4i_1 - 5i_2 = -2 \\ 5i_2 - 4i_3 = 0 \end{cases}$$

RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

a) Resolva o sistema linear apresentado. Resposta: $i_1 = \frac{9}{28}$, $i_2 = \frac{1}{7}$ e $i_3 = \frac{5}{28}$.

b) Cite exemplos de fontes de energia elétrica, de condutores e de dispositivos que podem ser utilizados para compor um circuito elétrico. Sugestões de resposta: Fontes de energia elétrica: pilhas, baterias e usinas; condutores: cobre e ouro; dispositivos: aparelhos eletrônicos, eletrodomésticos, lâmpadas e motores.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Discussão de um sistema linear

Dado um sistema linear em que um ou mais coeficientes são dados por um parâmetro real, podemos classificar esse sistema em SI, SPD ou SPI em função desses parâmetros.

Uma das maneiras de discutir um sistema linear é utilizando o método do escalonamento.

Exemplo

Vamos discutir o sistema $\begin{cases} x + 3y + 5z = 12 \\ -2x + 2y + 3z = 3 \\ x - y + az = 1 \end{cases}$ em função de a. Para isso, inicialmente escalonamos o sistema.

$$\begin{cases} x + 3y + 5z = 12 \\ -2x + 2y + 3z = 3 \\ x - y + az = 1 \end{cases} \xrightarrow[\cdot(-1)]{\cdot 2} \Rightarrow \begin{cases} x + 3y + 5z = 12 \\ 8y + 13z = 27 \\ -4y + (a-5)z = -11 \end{cases} \xrightarrow{\cdot \frac{1}{2}} \Rightarrow \begin{cases} x + 3y + 5z = 12 \\ 8y + 13z = 27 \\ (2a+3)z = 5 \end{cases}$$

De acordo com o sistema escalonado obtido, ele pode ser SPD, se $2a + 3 \neq 0$, ou SI, se $2a + 3 = 0$. Segue que:

- $2a + 3 \neq 0 \Rightarrow a \neq -\frac{3}{2}$. Logo, o sistema é SPD para qualquer a real diferente de $-\frac{3}{2}$.
- $2a + 3 = 0 \Rightarrow a = -\frac{3}{2}$. Logo, para $a = -\frac{3}{2}$, o sistema é SI, pois nesse caso o coeficiente de z na 3ª equação será zero; consequentemente, essa equação não será satisfeita, seja qual for z pertencente aos reais.

Para discutir um sistema linear que tem o mesmo número de incógnitas e de equações, podemos utilizar determinantes. Para isso, calculamos o determinante D da matriz dos coeficientes.

- Se $D \neq 0$, o sistema é possível e determinado (SPD).
- Se $D = 0$, o sistema pode ser possível e indeterminado (SPI) ou impossível (SI). Nesse caso, temos de fazer uma análise mais detalhada.

Exemplos

a) Vamos discutir o sistema $\begin{cases} 6x - 2ay + 3z = 1 \\ 3x + y + z = 4 \\ -x + ay - z = 1 \end{cases}$ em função de a. Para isso, inicialmente calculamos o determinante D da matriz dos coeficientes.

$$D = \begin{vmatrix} 6 & -2a & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ -1 & a & -1 \end{vmatrix} = -6 + 2a + 9a + 3 - 6a - 6a = -a - 3$$

Para que o sistema seja SPD, é preciso que $-a - 3 \neq 0$, ou seja, $a \neq -3$.

Para verificar a classificação do sistema quando $a = -3$, substituímos esse valor no sistema e o resolvemos.

$$\begin{cases} 6x + 6y + 3z = 1 \\ 3x + y + z = 4 \\ -x - 3y - z = 1 \end{cases} \xrightarrow[\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)]{\cdot \frac{1}{3}} \Rightarrow \begin{cases} 6x + 6y + 3z = 1 \\ 4y + z = -7 \\ -8y - 2z = 7 \end{cases} \xrightarrow{\cdot 2} \Rightarrow \begin{cases} 6x + 6y + 3z = 1 \\ 4y + z = -7 \\ 0y + 0z = -7 \end{cases}$$

Como a 3ª equação do sistema obtido não é satisfeita para quaisquer y e z reais, o sistema é impossível se $a = -3$.

Em resumo, o sistema é SPD se $a \neq -3$, e SI se $a = -3$.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

b) Vamos discutir o sistema $\begin{cases} 2ax - 8y = 12 \\ -3x + 3ay = -9 \end{cases}$ em função de a. Para isso, inicialmente calculamos o determinante D da matriz dos coeficientes.

$$D = \begin{vmatrix} 2a & -8 \\ -3 & 3a \end{vmatrix} = 6a^2 - 24$$

Para que o sistema seja SPD, é preciso que $6a^2 - 24 \neq 0$, ou seja, $a \neq 2$ e $a \neq -2$.
Considerando $a = 2$, temos:

$$\begin{cases} 4x - 8y = 12 \quad \cdot 3 \\ -3x + 6y = -9 \quad \cdot 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 12x - 24y = 36 \\ -12x + 24y = -36 \end{cases} \xrightarrow{\oplus} \Rightarrow \begin{cases} 12x - 24y = 36 \\ 0x + 0y = 0 \end{cases}$$

Portanto, para $a = 2$, o sistema é SPI.
Considerando $a = -2$, obtemos:

$$\begin{cases} -4x - 8y = 12 \quad \cdot (-3) \\ -3x - 6y = -9 \quad \cdot 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 12x + 24y = -36 \\ -12x - 24y = -36 \end{cases} \xrightarrow{\oplus} \Rightarrow \begin{cases} 12x + 24y = -36 \\ 0x + 0y = -72 \end{cases}$$

Portanto, para $a = -2$, o sistema é SI.
Em resumo, o sistema é SPD para $a \neq 2$ e $a \neq -2$, SPI para $a = 2$, e SI para $a = -2$.

Exercícios e problemas resolvidos

R25. Classifique o sistema homogêneo $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x + y - 2z = 0 \\ -x + 2y + z = 0 \end{cases}$.

Resolução

Calculando o determinante D da matriz dos coeficientes, temos:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 2 - 4 - 1 + 4 - 2 = 0$$

Professor, professora: Explique aos estudantes que, como todo sistema linear homogêneo admite a solução trivial (0, 0, ... , 0), então um sistema linear homogêneo é SPD se $D \neq 0$ e SPI se $D = 0$.

Como $D = 0$, o sistema pode ser possível e indeterminado (SPI) ou impossível (SI). Por outro lado, o sistema admite a solução trivial $(0, 0, 0)$, pois é homogêneo. Portanto, o sistema é SPI.

Exercícios e problemas

105. Resposta: SPD: $a \neq -\frac{1}{2}$; SPI: $a = -\frac{1}{2}$ e $b = 4$; SI: $a = -\frac{1}{2}$ e $b \neq 4$.

Anote as respostas no caderno.

102. Discuta os sistemas lineares em função do parâmetro a. 102. b) Resposta: SPD: $a \neq 0$ e $a \neq -1$; SI: $a = 0$ ou $a = -1$.

a) $\begin{cases} -x + y = 4 \\ 2x - ay = -8 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} (a + 1)x = 3 \\ 4x + ay = 4 \end{cases}$

Resposta: SPD: $a \neq 2$; SPI: $a = 2$

103. Qual deve ser a relação entre as constantes k_1 e k_2 para que o sistema $\begin{cases} 5x - 6y = k_1 \\ -10x + 12y = k_2 \end{cases}$ seja SI?
Resposta: $k_2 \neq -2k_1$

104. Determine o valor da constante a de modo que o sistema seja possível e determinado. Em seguida, a partir dessa restrição, atribua um valor para a e resolva o sistema. Resposta: $a \neq 0$; Sugestão de resposta: $a = 1$ e (21, 4, 16).

$$\begin{cases} x - y - z = 1 \\ (a - 1)x - y + z = 12 \\ x + y - z = 9 \end{cases}$$

105. Discuta o sistema linear indicado a seguir, sabendo que a e b são constantes reais.

$$\begin{cases} 3x - ay = 2 \\ 6x + y = b \end{cases}$$

106. Determine o valor de a para que a equação matricial $\begin{bmatrix} 2 & 4 & a \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ admita somente a solução trivial. Resposta: $a \neq \frac{10}{3}$

107. O sistema linear apresentado a seguir é SPD, SPI ou SI?
Resposta: SPD

$$\begin{cases} x + y = z \\ 3x - y = -z \\ -x + 5y = 10z \end{cases}$$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

SÍNTESE DO CAPÍTULO

Neste capítulo, estudamos matrizes, determinantes, sistemas lineares e escalonamento de um sistema linear. Agora, chegou a hora de refletir sobre o que você aprendeu! Como estratégia de estudos, sugerimos que você faça uma autoavaliação, revise conceitos e sintetize o que foi estudado. Para isso, resolva as questões propostas.

6. b) Resposta: Falsa. Sugestão de correção: Uma matriz quadrada é dita matriz diagonal quando os elementos acima ou abaixo da diagonal principal são nulos.

1. Você conhecia algum dos conteúdos estudados neste capítulo? Cite-os. Resposta pessoal. Orientações sobre esta questão no **Suplemento para o professor**.

2. A seguir, estão os principais conteúdos estudados neste capítulo. Resposta pessoal. Orientações sobre esta questão no **Suplemento para o professor**.

- Matrizes
- Transposta de uma matriz
- Matriz oposta
- Operações de matrizes
- Matriz inversa
- Equações envolvendo matrizes
- Determinante de uma matriz
- Sistemas lineares
- Escalonamento de sistemas lineares

6. c) Resposta: Falsa. Sugestão de correção: A propriedade comutativa não é válida para a subtração de matrizes.

Você teve dificuldades em algum deles? Não se lembra de algum desses conceitos? Ficou com dúvidas? Reflita sobre esses questionamentos e, se necessário, retome o que foi estudado.

3. Quais das matrizes a seguir são triangulares? Resposta: Matriz B.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

4. Resposta: Uma matriz simétrica é uma matriz quadrada que é igual à sua transposta. Sugestão de resposta: $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 3 \\ 5 & 3 & 3 \end{bmatrix}$.

4. O que é uma matriz simétrica? Dê um exemplo.

5. Qual dos itens apresenta uma informação correta sobre matrizes inversas? Resposta: Alternativa **b**.

a) Seja A uma matriz de ordem n. A inversa de A é uma matriz B de ordem n, tal que $A \cdot B = I_n$.

b) A matriz inversa da matriz $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ é a matriz $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

6. Classifique as afirmações a seguir em verdadeira ou falsa. Depois, corrija as falsas, tornando-as verdadeiras.

a) Uma matriz de ordem $n \times m$ é dita quadrada quando $n = m$. Resposta: Verdadeira.

b) Uma matriz quadrada é dita matriz diagonal quando os elementos acima ou abaixo da diagonal principal são diferentes de zero.

c) A subtração de matrizes é comutativa, ou seja, $A - B = B - A$, para quaisquer que sejam as matrizes A e B de mesma ordem $m \times n$.

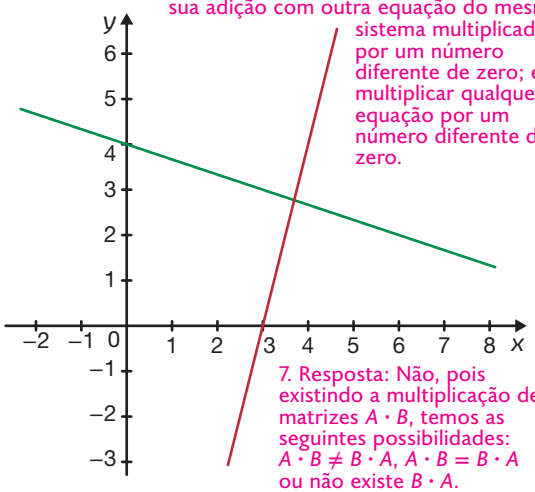
d) $A_3 + I_3 \neq A_3$, para qualquer que seja A_3. Resposta: Verdadeira.

7. A propriedade comutativa é válida para a multiplicação de matrizes? Justifique sua resposta.

8. Sejam A e B matrizes quadradas de ordem 2. Mostre que $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$. Resposta no final do **Livro do Estudante**.

9. Analise a representação geométrica de um sistema linear.

10. Resposta: Trocar a ordem das equações do sistema; substituir uma equação do sistema por outra equação, resultante de sua adição com outra equação do mesmo sistema multiplicada por um número diferente de zero; e multiplicar qualquer equação por um número diferente de zero.



7. Resposta: Não, pois existindo a multiplicação de matrizes $A \cdot B$, temos as seguintes possibilidades: $A \cdot B \neq B \cdot A$, $A \cdot B = B \cdot A$ ou não existe $B \cdot A$.

OHANNA SCHMITT/ARQUIVO DA EDITORA

Esse sistema é SPD, SI ou SPI? Justifique sua resposta. Resposta: SPD, pois as retas que representam as equações do sistema se cruzam em um único ponto.

10. Quais são as operações elementares para escalonar um sistema linear?

11. Escolha um dos conteúdos estudados neste capítulo e elabore um problema envolvendo-o. Depois, troque com um colega para que ele o resolva. Por fim, verifique se a resposta obtida por ele está correta.

12. Faça uma síntese do que foi estudado neste capítulo, usando desenhos e dê exemplos. Resposta pessoal. Orientações sobre esta questão no **Suplemento para o professor**.

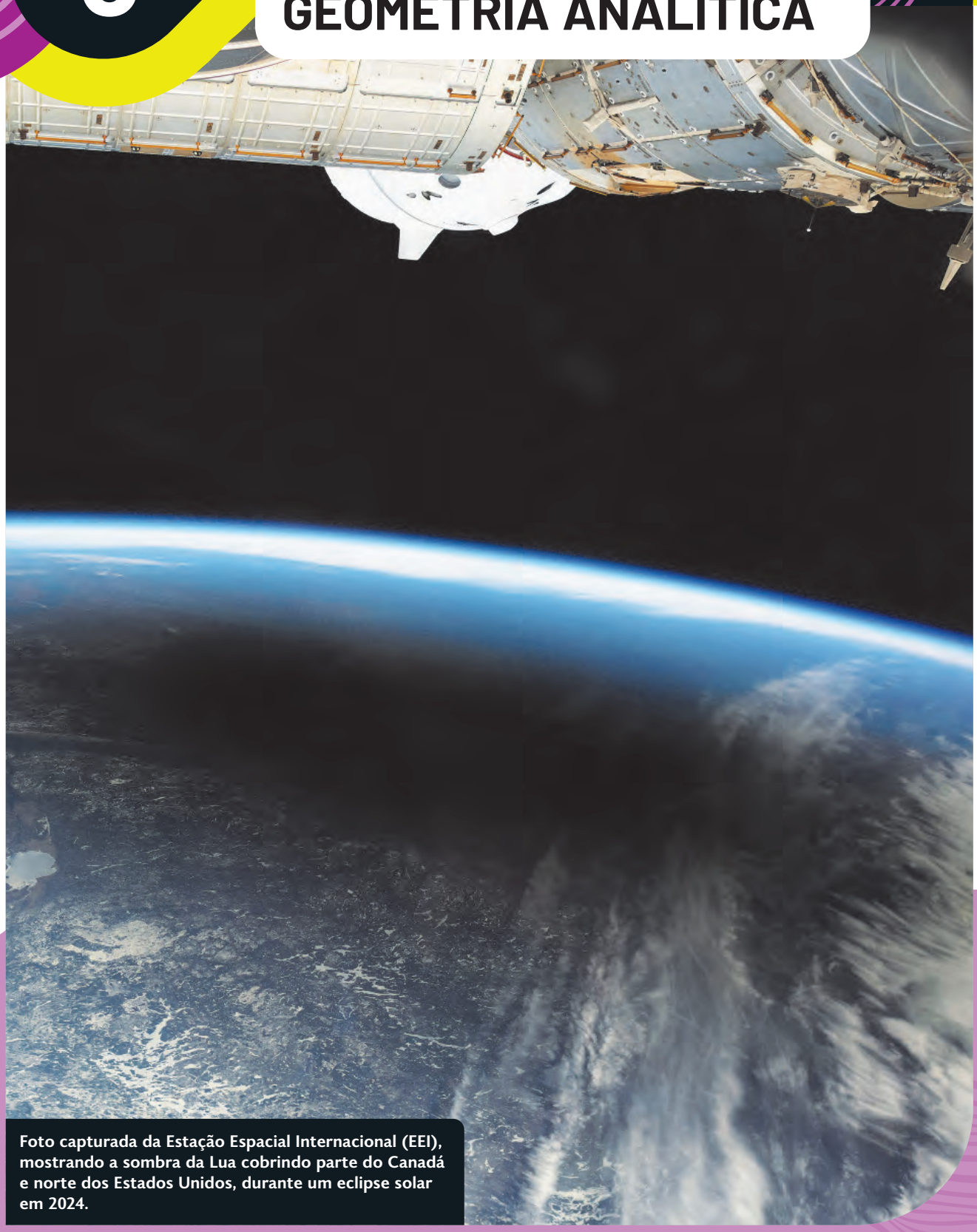
11. Resposta pessoal. Antes de os estudantes elaborarem o problema, peça a eles que analisem os contextos propostos nas seções **Exercícios e problemas** deste capítulo e, se julgar conveniente, oriente-os a investigar outros problemas disponíveis em provas de vestibular e do Enem.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

CAPÍTULO

6

GEOMETRIA ANALÍTICA



NASA

Foto capturada da Estação Espacial Internacional (EEI), mostrando a sombra da Lua cobrindo parte do Canadá e norte dos Estados Unidos, durante um eclipse solar em 2024.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Um eclipse ocorre quando um astro é obscurecido total ou parcialmente pela passagem de outro astro entre ele e um observador ou por posicionar-se junto à projeção da sombra de outro astro. Os eclipses mais conhecidos são o **lunar** e o **solar**.

O eclipse lunar ocorre com a Lua em sua fase cheia. Nele, a Terra fica entre o Sol e a Lua, criando uma sombra sobre a Lua. Esse eclipse pode ser total ou parcial, sendo visível em todas as regiões onde for noite.

O eclipse solar ocorre na fase nova da Lua. Nele, o alinhamento ocorre entre Sol, Lua e Terra, com a Lua projetando sua sombra na Terra, como é mostrado na imagem da página de abertura. Diferentemente do eclipse lunar, o eclipse solar é visível apenas em algumas faixas na Terra e pode ser enxergado de modos diferentes entre elas.

Esses fenômenos não ocorrem todos os meses, pois a órbita da Lua tem uma inclinação em relação à órbita da Terra ao redor do Sol, o que impede eclipses em cada mudança de fase da Lua.

Os eclipses solares podem ser **parciais**, **anulares** ou **totais**. Quando a curvatura da Terra faz com que o eclipse seja anular em algumas regiões e total em outras, ele é denominado eclipse híbrido. Curiosamente, a sombra circular da Terra na Lua durante um eclipse lunar é uma prova antiga da esfericidade da Terra, segundo Pitágoras e Aristóteles.

Os eclipses acontecem quando o Sol, a Terra e a Lua estão alinhados, como três pontos de uma reta. Nas próximas páginas estudaremos a área de triângulos e da equação geral de uma reta, que está relacionada à condição de alinhamento dos três pontos no plano.

Neste capítulo, você vai estudar:

- coordenadas na reta;
- coordenadas no plano;
- distância entre dois pontos;
- coordenadas do ponto médio de um segmento;
- baricentro de um triângulo;
- condição de alinhamento de três pontos;
- área da região determinada por um triângulo;
- equação da reta.

1. Resposta: Durante a fase nova ocorre o eclipse solar e durante a fase cheia ocorre o eclipse lunar.

2. Resposta: Porque a órbita da Lua tem uma inclinação em relação à órbita da Terra ao redor do Sol.

Professor, professora: Oriente os estudantes a escrever as respostas no caderno.

1. Durante quais fases da Lua acontecem os eclipses?

2. Por que não ocorrem eclipses todos os meses?

3. Pesquise as datas dos próximos eclipses que poderão ser vistos do Brasil. Resposta: A resposta depende do ano vigente.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Introdução

OBJETO DIGITAL
***Podcast*: Geometria analítica: Descartes e Fermat**

Muitos estudiosos consideram o início do estudo do que denominamos Geometria analítica como um dos maiores progressos da Matemática. Ela tem entre suas características fazer conexões entre a Geometria e a Álgebra, o que possibilita compreender, por exemplo, as soluções de um sistema linear de duas incógnitas por meio de retas em um plano ou então representar uma figura bidimensional ou tridimensional por meio de uma equação. Não há consenso sobre quando se iniciaram os estudos da Geometria analítica.

Alguns historiadores defendem que práticas que levavam a esse ramo da Matemática já eram do conhecimento de gregos, egípcios e romanos. Outros creditam aos franceses René Descartes (1596-1650) e Pierre de Fermat (1601-1665) o início do estudo sistemático dessa ciência. De acordo com uma lenda, Descartes teve a ideia que originou o sistema de coordenadas cartesianas ao observar uma mosca no forro de seu quarto e supor que seu caminho poderia ser descrito relacionando as distâncias dela às paredes adjacentes.

A maior contribuição de Descartes foi publicada em sua famosa obra *Discurso do método*. Essa obra era acompanhada de três apêndices, e o último deles, intitulado *La géométrie*, apresentava as ideias que fundamentaram o estudo da Geometria analítica. Já Fermat, que trabalhava paralelamente e independentemente de Descartes, realizou estudos relacionados a equações que representavam curvas matemáticas em um plano.

Fonte de pesquisa: EVES, Howard. *Introdução à história da matemática*. Tradução: Hygino H. Domingues. Campinas: Ed. da Unicamp, 2004.



MUSEU DO LOUVRE, PARIS

René Descartes, de Frans Hals. Paris, França. Óleo sobre tela, 78 cm × 69 cm, cerca de 1649-1700.

Neste capítulo, estudaremos os conceitos de ponto e de reta na Geometria analítica.

Professor, professora: A definição de valor absoluto (ou módulo) de um número real foi apresentada no capítulo 2 deste volume. Se julgar conveniente, retome esse conceito com os estudantes.

Coordenadas na reta

Considere fixada uma unidade de medida de comprimento. A cada par de pontos A e B quaisquer, o comprimento do segmento de reta $\overline{AB}$ denomina-se **distância** entre os pontos A e B, a qual indicaremos por AB.

Observação

A distância entre dois pontos é um número real não negativo. Assim, por convenção, a distância entre A e ele mesmo é 0.

Algumas propriedades da distância entre pontos estão apresentadas a seguir.

1. $AB \geq 0$

2. $AB = BA$

3. Se A, B e C são pontos sobre a mesma reta e C está entre A e B, então:

$$AB = AC + CB$$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Uma reta é chamada **orientada** quando sobre ela referenciamos um sentido de percurso, chamado **positivo**. O sentido inverso ao positivo é chamado **negativo**. Dizemos que um ponto B está à direita de um ponto A quando o sentido de percurso de A para B coincide com o sentido positivo escolhido.

Um **eixo** é uma reta orientada na qual fixou-se um ponto O, chamado **origem**. Cada ponto X no eixo corresponde a um número real.

- A origem O do eixo corresponde ao número zero.
- Para cada ponto X no eixo situado à direita de O, há um número real positivo x, tal que $x = OX$.
- Para cada ponto X no eixo situado à esquerda de O, há um número real negativo x', tal que $x' = -OX$.

Na imagem a seguir, temos $x = OX$ e $x' = -OX'$.



Observação

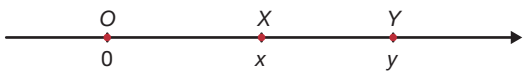
O número real x, correspondente ao ponto X do eixo, é denominado coordenada do ponto X.

Agora, vamos demonstrar que, se x e y são as coordenadas dos pontos X e Y do eixo E, respectivamente, então:

$$XY = |y - x| = |x - y|$$

Se $X = Y$, não há o que demonstrar. Suponha que X esteja à esquerda de Y, ou seja, $x < y$. Assim, devemos analisar três casos.

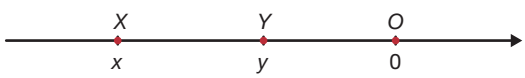
1º Caso: X e Y estão à direita da origem, isto é, $0 < x < y$.



Nessa situação, X está entre O e Y. Além disso, temos $OX = x$ e $OY = y$. Assim:

$$OY = OX + XY \Rightarrow y = x + XY \Rightarrow XY = y - x = |y - x|$$

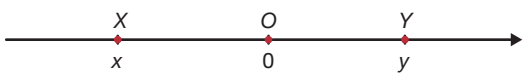
2º Caso: X e Y estão à esquerda da origem, isto é, $x < y < 0$.



Nessa situação, Y está entre O e X. Além disso, temos $OX = -x$ e $OY = -y$. Assim:

$$OX = OY + XY \Rightarrow -x = -y + XY \Rightarrow XY = -x + y = y - x = |y - x|$$

3º Caso: X e Y estão em lados opostos da origem, isto é, $x < 0 < y$.



Nessa situação, O está entre X e Y. Além disso, temos $OX = -x$ e $OY = y$. Assim:

$$XY = OX + OY \Rightarrow XY = -x + y \Rightarrow XY = y - x = |y - x|$$

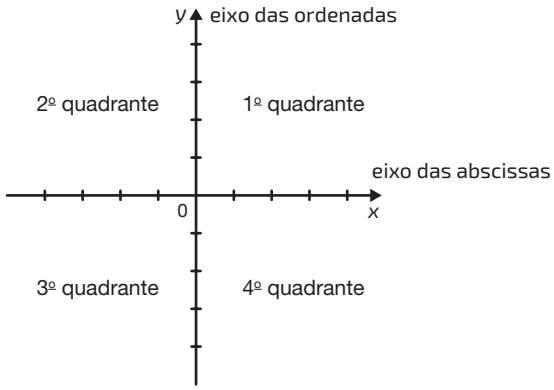
Se X estiver à direita de Y, a demonstração é análoga.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

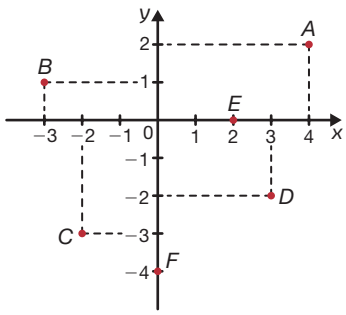
Coordenadas no plano

O **plano cartesiano ortogonal** consiste em um plano com dois eixos perpendiculares graduados na mesma unidade, x e y, que o dividem em quatro regiões. O eixo horizontal x é denominado **eixo das abscissas**, e o eixo vertical y, **eixo das ordenadas**. O ponto em que esses eixos se cruzam é denominado **origem**.



No plano cartesiano, localizamos um ponto P por meio de um par ordenado (a, b) com a e b números reais, que são as coordenadas do ponto. O número a é a abscissa, e o número b, a ordenada do ponto P.

No plano cartesiano a seguir, estão indicados os pontos $A(4, 2)$, $B(-3, 1)$, $C(-2, -3)$, $D(3, -2)$, $E(2, 0)$ e $F(0, -4)$.



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Observação

Se um ponto P pertence ao eixo x, então a ordenada de P é zero. Esse é o caso do ponto E na imagem apresentada.

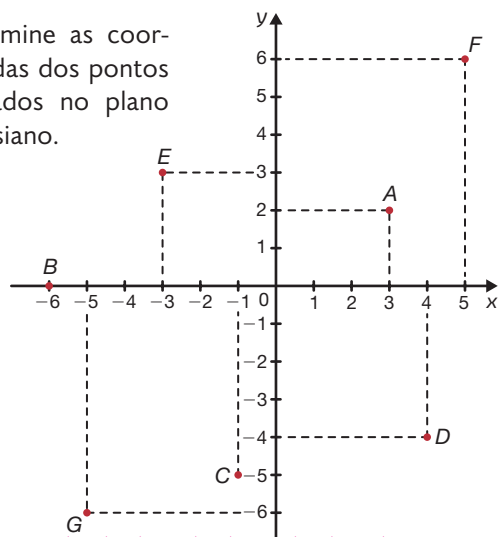
De maneira semelhante, se P pertence ao eixo y, a abscissa de P é zero. Na imagem, o ponto F atende a essa característica.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Exercícios e problemas

Anote as respostas no caderno.

1. Determine as coordenadas dos pontos indicados no plano cartesiano.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Resposta: $A(3, 2)$; $B(-6, 0)$; $C(-1, -5)$; $D(4, -4)$; $E(-3, 3)$; $F(5, 6)$; $G(-5, -6)$.

2. Em um plano cartesiano, em qual quadrante os pontos têm:

a) abscissa positiva? Resposta: 1º e 4º quadrantes.

b) ordenada negativa? Resposta: 3º e 4º quadrantes.

c) abscissa negativa e ordenada positiva? Resposta: 2º quadrante.

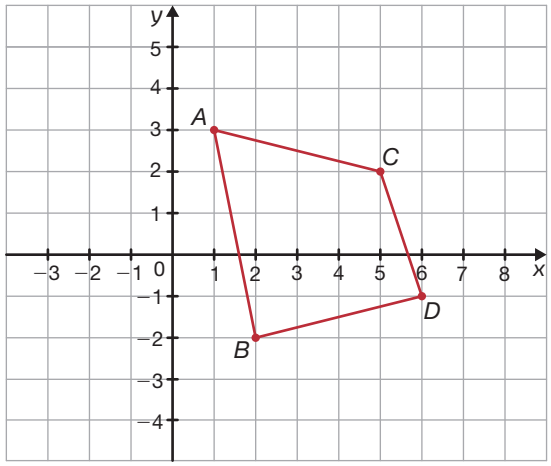
d) abscissa positiva e ordenada negativa? Resposta: 4º quadrante.

3. Leia as informações a seguir e determine as coordenadas dos pontos A, B e C.

- O ponto A tem ordenada 8 e abscissa -6.
- A abscissa do ponto B é igual à metade da abscissa A, e a ordenada é igual a -1.
- O ponto C é simétrico ao ponto B por reflexão em relação ao eixo y.

Resposta: $A(-6, 8)$, $B(-3, -1)$ e $C(3, -1)$.

4. Um quadrilátero *ABCD* foi representado no plano cartesiano.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

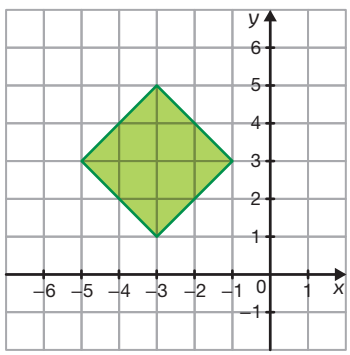
a) Quais são as coordenadas dos vértices desse quadrilátero? Resposta: $A(1, 3)$, $B(2, -2)$, $C(5, 2)$ e $D(6, -1)$

b) Escreva as coordenadas de três pontos do plano, internos a esse quadrilátero. Sugestão de resposta: (3, 1), (4, 1) e (5, 1)

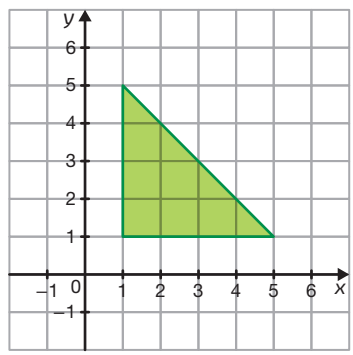
c) Quais devem ser as coordenadas dos vértices de um quadrilátero $A'B'C'D'$ para que ele seja simétrico ao quadrilátero *ABCD* em relação ao eixo *y*? Resposta: $A'(-1, 3)$, $B'(-2, -2)$, $C'(-5, 2)$ e $D'(-6, -1)$

5. De acordo com as imagens apresentadas, elabore um problema e o entregue para um colega resolver. Depois, verifique se ele resolveu o problema corretamente. Resposta pessoal. Orientações sobre esta tarefa no **Suplemento para o professor**.

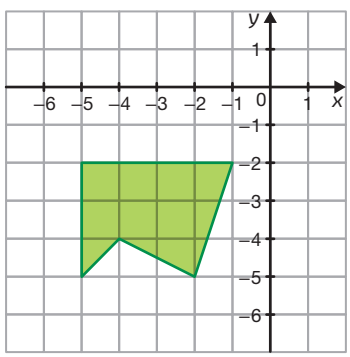
A.



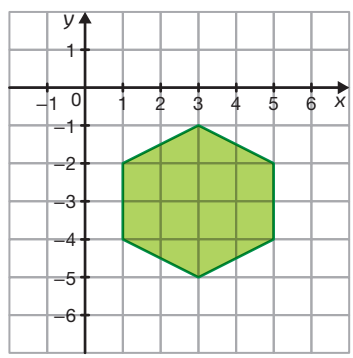
C.



B.



D.



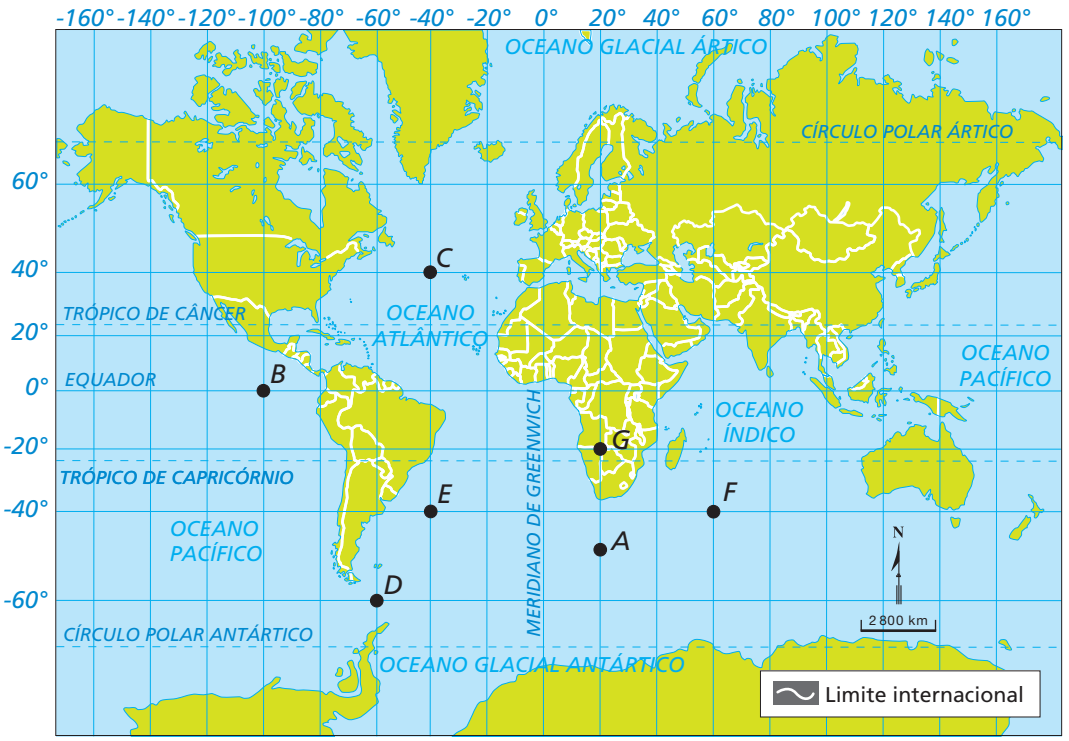
ILUSTRAÇÕES: OHANNA SCHMITT/ARQUIVO DA EDITORA

6. Construa um plano cartesiano e indique os pontos $A(3, -1)$, $B(0, 4)$, $C(-3, 2)$, $D(3, 4)$, $E(-2, -4)$ e $F(-1, 0)$.
Resposta no final do **Livro do Estudante**.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

7. Neste sistema de mapeamento da Terra, as linhas horizontais são os paralelos, que indicam a latitude, sendo a linha do equador a referência, equivalendo ao eixo das abscissas. As linhas verticais são os meridianos, que indicam a longitude, com o meridiano de Greenwich sendo o eixo das ordenadas.

Paralelos e meridianos



KEITHY MOSTACHI/ARQUIVO DA EDITORA

Fonte de pesquisa: IBGE. *Atlas geográfico escolar*. 9 ed. Rio de Janeiro, 2023. p. 28.

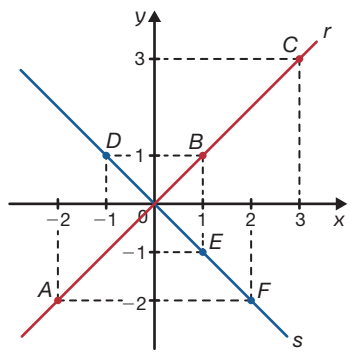
a) De acordo com o mapa, escreva:

- a longitude do ponto *A*. Resposta: 20°
- a latitude do ponto *C*. Resposta: 40°
- as coordenadas geográficas, longitude e latitude, dos pontos *F* e *E*. Resposta: *F*(60°, −40°); *E*(−40°, −40°)

b) Qual é o ponto que está localizado na linha do equador? Qual é a longitude e a latitude desse ponto? Resposta: Ponto *B*. longitude: −100°; latitude: 0°.

c) Qual é o ponto que está localizado no continente africano? Escreva as coordenadas geográficas desse ponto. Resposta: Ponto *G*; *G*(20°, −20°)

8. As retas *r* e *s* são, respectivamente, a bissetriz do 1º e do 3º quadrantes e do 2º e do 4º quadrantes.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

a) Escreva as coordenadas dos pontos:

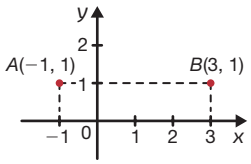
- *A* Resposta: *A*(−2, −2)
- *B* Resposta: *B*(1, 1)
- *C* Resposta: *C*(3, 3)
- *D* Resposta: *D*(−1, 1)
- *E* Resposta: *E*(1, −1)
- *F* Resposta: *F*(2, −2)

b) Considerando os pontos *P*(7, *y*) e *Q*(*x*, 9), determine *x* e *y* para que *P* pertença à bissetriz do 1º e do 3º quadrantes, e *Q*, à bissetriz do 2º e do 4º quadrantes. Resposta: $x = -9$; $y = 7$

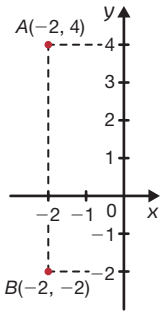
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Distância entre dois pontos

De acordo com o que foi estudado anteriormente, podemos determinar AB quando a reta que contém A e B é paralela ao eixo x ou ao eixo y da seguinte maneira.



$$AB = |3 - (-1)| = 4$$

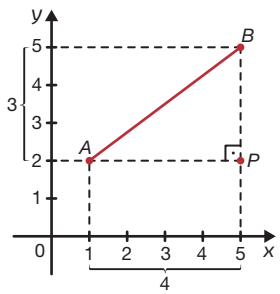


$$AB = |4 - (-2)| = 6$$

Para determinar a distância entre dois pontos cuja reta que os contém não é paralela ao eixo x ou ao eixo y, aplicaremos o Teorema de Pitágoras. Por exemplo, vamos determinar a distância entre os pontos $A(1, 2)$ e $B(5, 5)$.

Note que o triângulo ABP é retângulo em P, $AP = |5 - 1| = 4$ e $BP = |5 - 2| = 3$. Aplicando o Teorema de Pitágoras, temos:

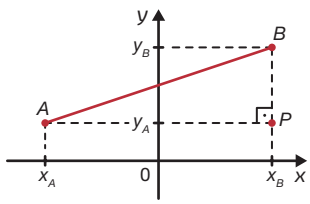
$$(AB)^2 = (AP)^2 + (BP)^2 \Rightarrow (AB)^2 = 4^2 + 3^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (AB)^2 = 25 \Rightarrow AB = 5$$



Observação

Note que $AB = 5$, pois $AB > 0$.

Deduziremos uma fórmula por meio da qual seja possível calcular a distância entre dois pontos quaisquer. Para isso, considere os pontos $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$ em um plano cartesiano.



Como $\overleftrightarrow{AP}$ é paralela ao eixo x e $\overleftrightarrow{BP}$ é paralela ao eixo y, então $AP = |x_B - x_A|$ e $BP = |y_B - y_A|$. Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo ABP, sendo $AB \geq 0$, temos:

$$(AB)^2 = (AP)^2 + (BP)^2 \Rightarrow (AB)^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 \Rightarrow \boxed{AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}}$$

Observação

Denotaremos a reta AB por $\overleftrightarrow{AB}$.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Exemplos

- Distância entre os pontos $A(-3, 1)$ e $B(4, -2)$:

$$AB = \sqrt{\left[4 - (-3)\right]^2 + (-2 - 1)^2} = \sqrt{7^2 + (-3)^2} = \sqrt{49 + 9} = \sqrt{58}$$

- Distância entre os pontos $C(7, -3)$ e $D(-5, 2)$:

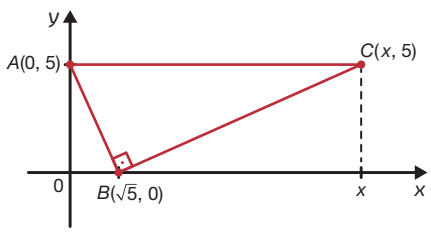
$$CD = \sqrt{(-5 - 7)^2 + \left[2 - (-3)\right]^2} = \sqrt{(-12)^2 + 5^2} = \sqrt{144 + 25} = \sqrt{169} = 13$$

Exercícios e problemas resolvidos

R1. Sabendo que $A(0, 5)$, $B(\sqrt{5}, 0)$ e $C(x, 5)$, em que x é um número real positivo, são vértices de um triângulo retângulo, determine o valor de x.

Resolução

De acordo com as informações apresentadas, temos:



SERGIO L. FILHO/ARQUIVO DA EDITORA

Agora, vamos determinar AB, BC e AC.

- $AB = \sqrt{(0 - \sqrt{5})^2 + (5 - 0)^2} = \sqrt{(-\sqrt{5})^2 + 5^2} = \sqrt{30}$
- $BC = \sqrt{(x - \sqrt{5})^2 + (5 - 0)^2} = \sqrt{x^2 - 2\sqrt{5}x + 5 + 5^2} = \sqrt{x^2 - 2\sqrt{5}x + 30}$
- $AC = |x - 0| = x$

Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo ABC, segue que:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 \Rightarrow x^2 = \left(\sqrt{30}\right)^2 + \left(\sqrt{x^2 - 2\sqrt{5}x + 30}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 = 30 + x^2 - 2\sqrt{5}x + 30 \Rightarrow 2\sqrt{5}x = 60 \Rightarrow x = \frac{60}{2\sqrt{5}} = \frac{30\sqrt{5}}{5} = 6\sqrt{5}$$

Portanto, $x = 6\sqrt{5}$.

R2. Escreva um algoritmo que possibilite determinar as ordenadas dos pontos $A(x, y)$ e $B(x', 5y)$, com $y > 0$, dada a distância entre eles e suas abscissas. Em seguida, organize esse algoritmo em um fluxograma.

Resolução

Antes de apresentarmos os passos para a construção de um algoritmo, vamos relembrar sua definição.

Um **algoritmo** é uma sequência finita de passos (instruções) para resolver determinado problema. Para construir um algoritmo, inicialmente, devemos ler o enunciado do problema, compreendendo-o e destacando os pontos mais importantes. Em seguida, é preciso responder às seguintes questões.

1. Quais são os **dados de entrada**, ou seja, os dados fornecidos no problema?
   Dados de entrada: distância entre os pontos A e B e suas abscissas.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

2. Quais são os **dados de saída**, ou seja, os dados gerados após a execução de todas as etapas do algoritmo?

Dados de saída: ordenadas dos pontos A e B.

3. Conhecendo os dados de entrada e saída, quais **procedimentos** devem ser realizados?

Para responder à questão **3**, aplicaremos a fórmula que possibilita calcular a distância entre dois pontos quaisquer, ou seja:

$$AB = \sqrt{(x'-x)^2 + (5y - y)^2}$$

Elevando ambos os membros da igualdade ao quadrado, segue que:

$$AB^2 = (x'-x)^2 + (5y - y)^2 \Rightarrow AB^2 - (x'-x)^2 = 16y^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y^2 = \frac{AB^2 - (x'-x)^2}{16} \Rightarrow y = \sqrt{\frac{AB^2 - (x'-x)^2}{16}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \frac{\sqrt{AB^2 - (x'-x)^2}}{4}$$

Assim, para determinar a ordenada do ponto A, devemos calcular $\frac{\sqrt{AB^2 - (x'-x)^2}}{4}$, e para calcular a ordenada do ponto B, $5 \cdot \frac{\sqrt{AB^2 - (x'-x)^2}}{4}$.

Agora, escrevemos o algoritmo.

Início

1. Leia a distância entre os pontos A e B.

2. Leia a abscissa x do ponto A.

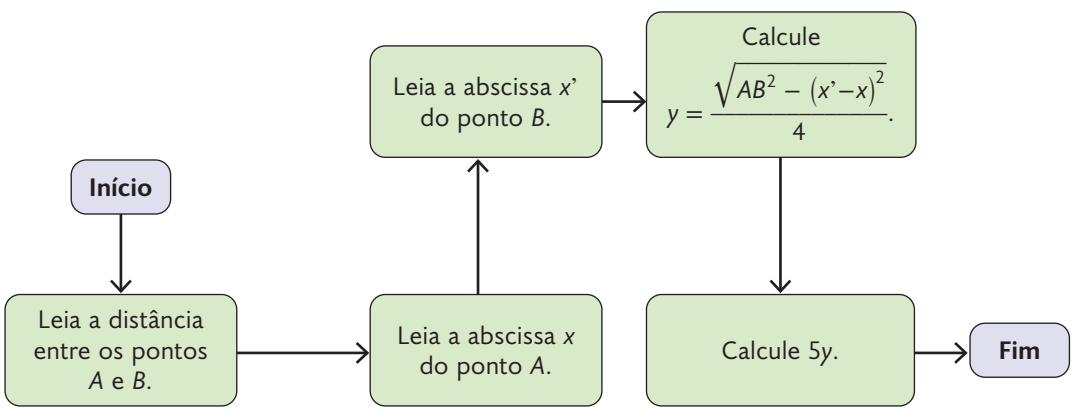
3. Leia a abscissa x' do ponto B.

4. Calcule $y = \frac{\sqrt{AB^2 - (x'-x)^2}}{4}$.

5. Calcule $5y$.

Fim

Por fim, organizamos um fluxograma.



LAÍS GARBELINI/ARQUIVO DA EDITORA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

R3. Os pontos $A(-2, 0)$, $B(2, 0)$, $C\left(0, -2\sqrt{3}\right)$ e $D(0, 1)$ são vértices dos triângulos indicados a seguir. Classifique cada triângulo em isósceles, em equilátero ou em escaleno.

a) Triângulo ABC. **b)** Triângulo ABD. **c)** Triângulo ACD.

Resolução

Inicialmente, calculamos a medida de cada lado dos triângulos.

$AB = \left|2 - (-2)\right| = |4| = 4$

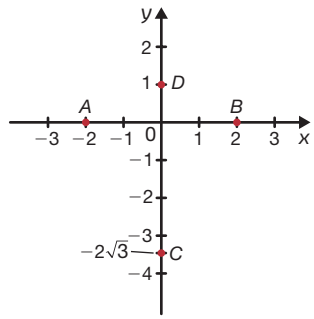
$AC = \sqrt{\left[0 - (-2)\right]^2 + \left(-2\sqrt{3} - 0\right)^2} = \sqrt{2^2 + \left(-2\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{16} = 4$

$AD = \sqrt{\left[0 - (-2)\right]^2 + (1 - 0)^2} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$

$BC = \sqrt{(0 - 2)^2 + \left(-2\sqrt{3} - 0\right)^2} = \sqrt{(-2)^2 + \left(-2\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{16} = 4$

$BD = \sqrt{(0 - 2)^2 + (1 - 0)^2} = \sqrt{(-2)^2 + 1^2} = \sqrt{5}$

$CD = \left|1 - \left(-2\sqrt{3}\right)\right| = \left|1 + 2\sqrt{3}\right| = 1 + 2\sqrt{3}$



a) Como $AB = AC = BC$, segue que o triângulo ABC é equilátero.

b) Como $AD = BD \neq AB$, segue que o triângulo ABD é isósceles.

c) Como $AC \neq AD$, $AC \neq CD$ e $AD \neq CD$, segue que o triângulo ACD é escaleno.

R4. O **circuncentro** de um triângulo é o centro da circunferência que passa por seus vértices. Considerando essa informação, determine as coordenadas do circuncentro C do triângulo de vértices $P(0, 5)$, $Q(3, 6)$ e $R(8, 1)$.

Resolução

Calculando a distância de cada ponto (P, Q e R) ao centro $C\left(x_C, y_C\right)$ da circunferência, temos:

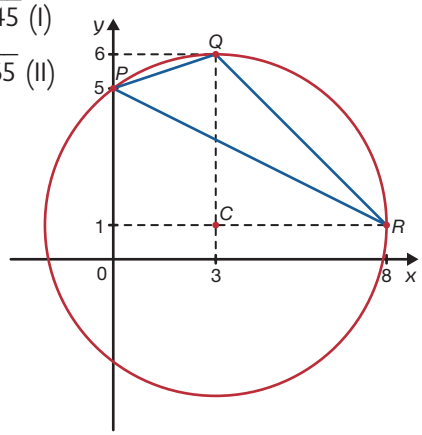
$PC = \sqrt{\left(x_C - 0\right)^2 + \left(y_C - 5\right)^2} = \sqrt{x_C^2 + y_C^2 - 10y_C + 25}$

$QC = \sqrt{\left(x_C - 3\right)^2 + \left(y_C - 6\right)^2} = \sqrt{x_C^2 + y_C^2 - 6x_C - 12y_C + 45}$

$RC = \sqrt{\left(x_C - 8\right)^2 + \left(y_C - 1\right)^2} = \sqrt{x_C^2 + y_C^2 - 16x_C - 2y_C + 65}$

Na imagem a seguir, note que o comprimento do raio da circunferência é dado por $r = PC = QC = RC$. Assim, escrevemos e resolvemos o seguinte sistema de equações.

$$\begin{cases} PC = QC \\ PC = RC \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x_C^2 + y_C^2 - 10y_C + 25} = \sqrt{x_C^2 + y_C^2 - 6x_C - 12y_C + 45} \text{ (I)} \\ \sqrt{x_C^2 + y_C^2 - 10y_C + 25} = \sqrt{x_C^2 + y_C^2 - 16x_C - 2y_C + 65} \text{ (II)} \end{cases}$$



Elevando os membros de I e II ao quadrado, temos:

$$\begin{cases} x_C^2 + y_C^2 - 10y_C + 25 = x_C^2 + y_C^2 - 6x_C - 12y_C + 45 \\ x_C^2 + y_C^2 - 10y_C + 25 = x_C^2 + y_C^2 - 16x_C - 2y_C + 65 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 6x_C + 2y_C = 20 \cdot (4) \\ 16x_C - 8y_C = 40 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 24x_C + 8y_C = 80 \\ 16x_C - 8y_C = 40 \end{cases}$$

$$40x_C = 120 \Rightarrow x_C = 3$$

Substituindo x_C por 3 na equação $6x_C + 2y_C = 20$:

$$6 \cdot 3 + 2y_C = 20 \Rightarrow 2y_C = 2 \Rightarrow y_C = 1$$

Portanto, as coordenadas do circuncentro do triângulo PQR são $x = 3$ e $y = 1$.

Observação

O circuncentro de um triângulo pode ser interno ou externo a ele.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Professor, professora: Destaque para os estudantes que, além de conhecimentos matemáticos e habilidades com ferramentas tecnológicas, é recomendado que os topógrafos tenham conhecimentos sobre tipos de relevo, tipos de solo, cobertura vegetal, entre outros aspectos físico-naturais, noções essas relacionadas à **Geografia**.

A relação do topógrafo com a Geometria

Como vimos, a Geometria analítica pode determinar a distância entre dois ou mais pontos por meio de coordenadas no plano.

Além dos matemáticos, os topógrafos usam a Geometria para medir, calcular e posteriormente mapear os ângulos, as alturas, os desníveis e a distância entre pontos de uma determinada porção da superfície terrestre. Nesse tipo de trabalho, o levantamento topográfico é fundamental para a elaboração e a execução de diversos projetos, principalmente os da construção civil.

Os topógrafos podem atuar em projetos públicos, participando de estudos para a construção de avenidas, viadutos, túneis, usinas hidrelétricas etc. Já em projetos privados, seus estudos podem favorecer a construção de moradias, de estabelecimentos comerciais, de indústrias, entre outras possibilidades.

IRENE MILLER/SHUTTERSTOCK



Profissional fazendo levantamento topográfico para execução de um projeto em construção civil.

Observação

Para se tornar um topógrafo, é necessário realizar um curso técnico específico ou graduar-se em cursos superiores como Engenharia Civil e Engenharia de Agrimensura e, posteriormente, cursar uma pós-graduação na área, além de estar registrado no Conselho de Engenharia, Arquitetura e Agronomia (CREA).

2. Resposta pessoal. Incentive a participação de todos os estudantes, pedindo-lhes que considerem as possibilidades de trabalho do topógrafo tratadas na seção para identificar em qual delas atuariam. Oriente-os também a relacionar o trabalho do topógrafo com a Geometria analítica, citando, por exemplo, o cálculo da distância entre dois pontos, a medição da altura de determinado elemento, a identificação de desníveis no terreno etc.

É recomendável que, além de conhecimentos matemáticos, o topógrafo tenha habilidades para usar instrumentos tecnológicos e *softwares* de processamento de dados, já que seus equipamentos de trabalho exigem o domínio de ferramentas de alta tecnologia.

OBJETO DIGITAL ***Infográfico clicável*:** Como funciona o teodolito óptico-mecânico

Atividades

Anote as respostas no caderno.

Oriente os estudantes a escrever as respostas no caderno.

1. Você já conhecia o trabalho de um topógrafo ou em algum momento presenciou um levantamento topográfico? O que você achou dessa profissão?

2. Se você fosse um topógrafo, em qual tipo de projeto você atuaria? Conte aos colegas explicando o porquê da sua escolha.

3. Junte-se a um colega e pesquisem em livros ou na internet outras três profissões que aplicam a Geometria analítica. Anotem os nomes e escrevam qual é a finalidade em cada uma delas. Depois, apresentem o resultado da pesquisa para os demais colegas. Resposta pessoal. Entre as profissões, os estudantes podem pesquisar, por exemplo, os engenheiros civis, que usam a Geometria analítica para calcular a estrutura das obras; os geógrafos, que a usam para produzir mapas; e os arquitetos, que a usam para planejar o tamanho dos ambientes.

1. Resposta pessoal. Oriente a participação de todos os estudantes e incentive-os a relatar o que observaram no trabalho do topógrafo caso já tenham visto. Por fim, peça-lhes que comentem o que acharam mais interessante em relação à profissão, independentemente de já terem conhecimento preliminar ou de já terem presenciado pessoalmente o trabalho.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Anote as respostas no caderno.

9. Calcule a distância entre os pontos indicados em cada item.

a) $A(1, 9)$ e $B(2, 8)$. Resposta: $\sqrt{2}$

b) $C(-3, 5)$ e $D(-3, 12)$. Resposta: 7

c) $P(-5, 4)$ e $Q(-2, 7)$. Resposta: $3\sqrt{2}$

d) $M(0, 12)$ e $N(9, 0)$. Resposta: 15

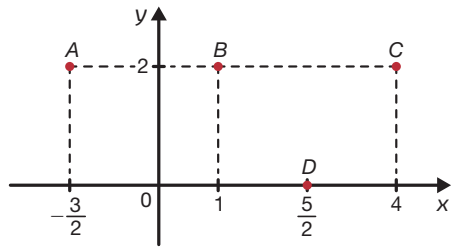
e) $E(2, 3)$ e $F(5, 4)$. Resposta: $\sqrt{10}$

f) $G(-2, 4)$ e $H(-4, 2)$. Resposta: $\sqrt{8}$

g) $R(4, 6)$ e $S(1, 3)$. Resposta: $3\sqrt{2}$

h) $T(-6, 8)$ e $U(-6, 12)$. Resposta: 4

10. De acordo com os pontos indicados no plano cartesiano, resolva as questões.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

a) Quantos triângulos podem ser formados? Resposta: 3 triângulos.

b) Nomeie e classifique cada triângulo em escaleno, em isósceles ou em equilátero.
Resposta: $\triangle ABD$: isósceles; $\triangle ACD$: escaleno; $\triangle BCD$: isósceles.

11. Sabendo que $Q(1, x)$ é um ponto do 4º quadrante e que a distância de Q ao ponto $P(0, 4)$ é $5\sqrt{2}$, calcule o valor de x. Resposta: $x = -3$

12. Calcule o comprimento dos lados dos triângulos cujos vértices são: Resposta no final do **Livro do Estudante**.

a) $A(0, -1)$, $B(12, 4)$ e $C\left(0, \frac{3}{2}\right)$.

b) $F\left(2, 3\sqrt{3}\right)$, $G(5, 0)$ e $H(-1, 0)$.

c) $L(4, 6)$, $M(3, 1)$ e $N(9, 2)$.

d) $P(1, 3)$, $Q(5, 6)$ e $R(5, 0)$.

e) $S(3, 4)$, $T(6, 7)$ e $U(8, 10)$.

f) $V(0, 1)$, $X(2, 3)$ e $Z(4, 6)$.

13. Calcule o perímetro e a área de uma região determinada pelo triângulo cujos vértices são:

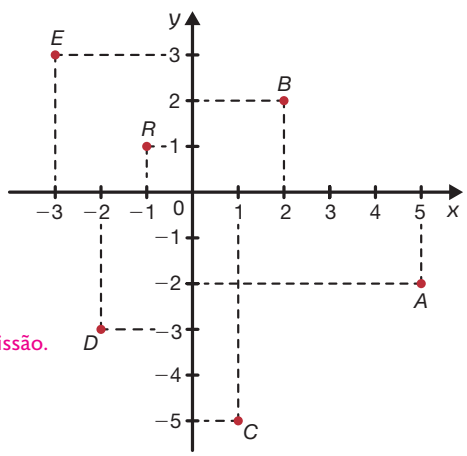
a) $A(-1, 2)$, $B(2, 6)$ e $C(5, 2)$. Resposta: Perímetro: 16 u.c.; área: 12 u.a.

b) $D(2, 4)$, $E(6, 1)$ e $F(2, 1)$. Resposta: Perímetro: 12 u.c.; área: 6 u.a.

c) $G(-2, 1)$, $H(-2, 4)$ e $I(-6, 1)$. Resposta: Perímetro: 12 u.c.; área: 6 u.a.

d) $J(0, 3)$, $K(-4, 0)$ e $L(4, 0)$. Resposta: Perímetro: 18 u.c.; área: 12 u.a.

14. O esquema representa a localização das cidades A, B, C, D e E e de uma antena de transmissão de sinal de rádio, R.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

O raio de transmissão dessa antena é 220 km e cada unidade representada no esquema corresponde a 50 km.

a) Quais cidades recebem o sinal transmitido? E quais cidades não recebem o sinal?
Resposta: Recebem o sinal: B, D e E; não recebem o sinal: A e C.

b) Se uma cidade estivesse localizada no ponto F de coordenadas $F(3, 1)$, ela receberia o sinal transmitido? Justifique sua resposta. Resposta: Sim, pois o ponto F está localizado no raio de transmissão.

c) Escreva as coordenadas do ponto H, que representa, nesse esquema, a localização de uma cidade que não receberia o sinal transmitido. Sugestão de resposta: $H(0, -4)$

15. Considerando o triângulo de vértices $A(4, 5)$, $B(4, 2)$ e $C(1, 5)$ e o retângulo em A, calcule sua área.
Resposta: 4,5 u.a.

16. Dados os pontos $A(0, 3)$, $B(2, 0)$ e $C(-7, -6)$, determine as coordenadas do ponto D, para que esses pontos sejam vértices de um retângulo.
Resposta: $D(-9, -3)$

17. Determine as coordenadas de $P(x, y)$, considerando sua equidistância em relação aos pontos indicados em cada item.

a) $M(3, 6)$, $N(4, 3)$ e $O(0, 0)$. Resposta: $P\left(\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right)$

b) $A(2, 4)$, $B(5, 3)$ e $C(0, 0)$. Resposta: $P\left(\frac{19}{7}, \frac{8}{7}\right)$

c) $Q(4, 0)$, $R(0, 3)$ e $S(0, 0)$. Resposta: $P\left(2, \frac{3}{2}\right)$

d) $T(1, 5)$, $U(1, 2)$ e $V(0, 0)$. Resposta: $P\left(-\frac{9}{2}, \frac{7}{2}\right)$

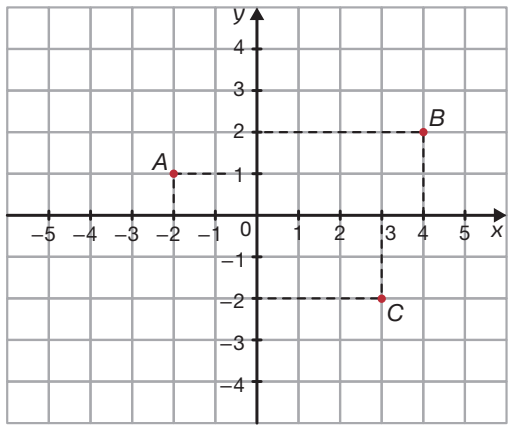
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

18. Para realizar certo trabalho, o colaborador de uma empresa foi direcionado para uma sala que tinha três mesas. Nessa situação, vamos supor que os centros das mesas sejam representados pelos pontos P, Q e R, cujas coordenadas são $(5, 4)$, $(3, 7)$ e $(1, 2)$, respectivamente, e considerar como origem o canto da sala. De acordo com essas informações, responda às questões.

a) Esboce uma figura que represente a disposição das mesas dessa sala. Resposta no final do **Livro do Estudante**.

b) Sabendo que nessa situação cada unidade corresponde a um metro, quais são as distâncias entre cada mesa, em metros? Resposta: A distância entre as mesas P e Q é de aproximadamente 3,6 m, a distância entre as mesas Q e R é de aproximadamente 5,4 m e a distância entre as mesas P e R é de aproximadamente 4,5 m.

19. Na figura a seguir, estão representados alguns pontos no plano cartesiano.



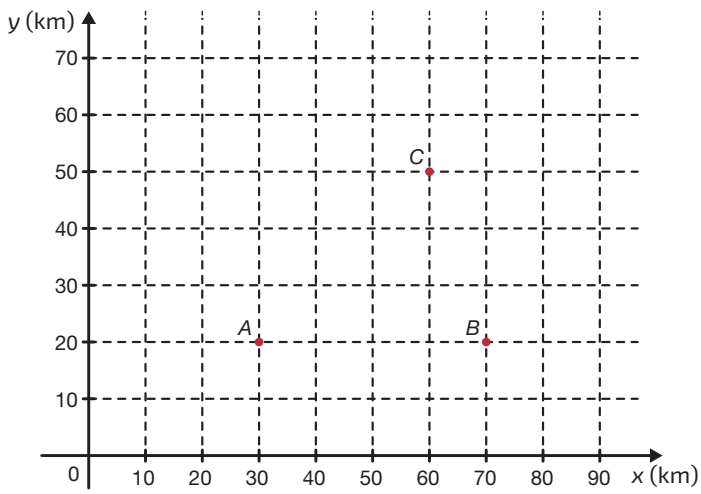
KEITHY MOSTACHI/ARQUIVO DA EDITORA

19. a) Resposta: A menor distância entre os pontos representados nesse plano é de aproximadamente 4,1 u.c.

a) Calcule a menor distância, em u.c., entre os pontos representados nesse plano.

b) Calcule o perímetro e a área da região determinada pela figura geométrica, cujos vértices são esses pontos. Resposta: O perímetro é 16 u.c. e a área é aproximadamente 5,75 u.a.

20. (Enem, 2013) Nos últimos anos, a televisão tem passado por uma verdadeira revolução em termos de qualidade de imagem, som e interatividade com o telespectador. Essa transformação se deve à conversão do sinal analógico para o sinal digital. Entretanto, muitas cidades ainda não contam com essa nova tecnologia. Buscando levar esses benefícios a três cidades, uma emissora de televisão pretende construir uma nova torre de transmissão, que envie sinal às antenas A, B e C, já existentes nessas cidades. As localizações das antenas estão representadas no plano cartesiano:



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA/ENEM 2013

A torre deve estar situada em um local equidistante das três antenas.

O local adequado para a construção dessa torre corresponde ao ponto de coordenadas:

Resposta: Alternativa **e**.

a) $(65; 35)$

b) $(53; 30)$

c) $(45; 35)$

d) $(50; 20)$

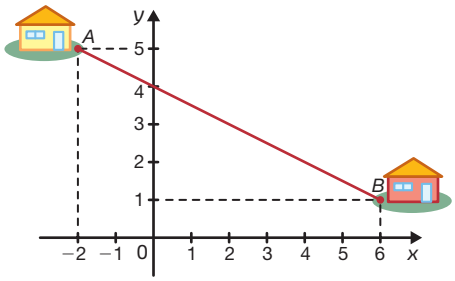
e) $(50; 30)$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Coordenadas do ponto médio de um segmento

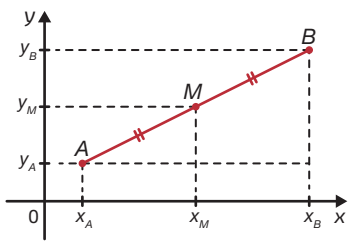
No plano cartesiano, os pontos A e B representam duas casas de uma propriedade rural. Deseja-se perfurar um poço equidistante às casas, de maneira que essa distância seja a menor possível. Quais devem ser as coordenadas do ponto M onde o poço deve ser construído?

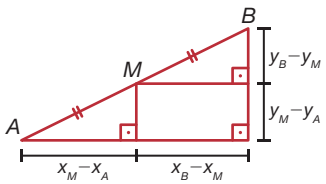
Imagem com elementos sem proporção entre si.



Para resolver esse problema, devemos determinar o ponto médio de $\overline{AB}$.

Vamos deduzir as coordenadas do ponto médio $M(x_M, y_M)$ de $\overline{AB}$, sendo $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$.





Por semelhança de triângulos, temos:

- $\frac{AM}{MB} = \frac{x_M - x_A}{x_B - x_M} \Rightarrow 1 = \frac{x_M - x_A}{x_B - x_M} \Rightarrow x_B - x_M = x_M - x_A \Rightarrow x_M = \frac{x_A + x_B}{2}$

- $\frac{AM}{MB} = \frac{y_M - y_A}{y_B - y_M} \Rightarrow 1 = \frac{y_M - y_A}{y_B - y_M} \Rightarrow y_B - y_M = y_M - y_A \Rightarrow y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$

Observação

As coordenadas do ponto médio de um segmento $\overline{AB}$ correspondem à média aritmética das correspondentes coordenadas de A e B.

Portanto, o ponto médio M de $\overline{AB}$, em que $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$, é $M\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right)$.

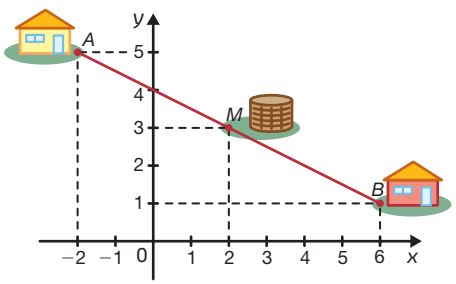
Em relação ao problema apresentado, as coordenadas do ponto em que o poço deve ser perfurado são dadas por:

- $x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{-2 + 6}{2} = 2$

- $y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{5 + 1}{2} = 3$

Assim, o poço deve ser construído no ponto $M(2, 3)$.

Imagem com elementos sem proporção entre si.



Questão A. Escreva um algoritmo que possibilite determinar as coordenadas do ponto médio de um segmento, dadas as coordenadas dos seus extremos. Em seguida, organize-o em um fluxograma.

Resposta no final do **Livro do Estudante**.

Questão B. Codifique o algoritmo escrito por você na questão anterior para a linguagem Scratch. Resposta pessoal.

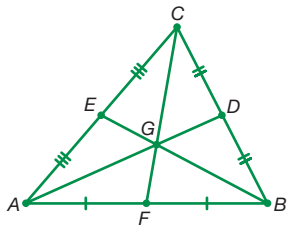
Professor, professora: Avalie a necessidade de relembrar as noções básicas dos comandos de um algoritmo, apresentadas na seção **Acessando tecnologias** do capítulo **1** deste volume, a fim de auxiliar na resolução da questão **B**.

ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Baricentro de um triângulo

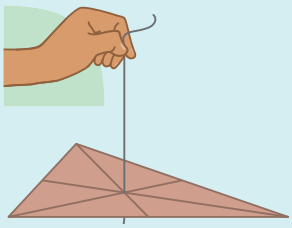
Em um triângulo, as medianas correspondem aos segmentos de reta cujas extremidades são o ponto médio de um dos lados e o vértice oposto a esse lado. As três medianas do triângulo se cruzam em um único ponto denominado **baricentro**. O baricentro divide cada mediana em dois segmentos. O segmento cujas extremidades são o vértice do triângulo e o baricentro tem o dobro do comprimento do segmento cujas extremidades são o baricentro e o ponto médio do lado oposto ao vértice considerado. No exemplo apresentado, $AG = 2 \cdot GD$, $BG = 2 \cdot GE$ e $CG = 2 \cdot GF$.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

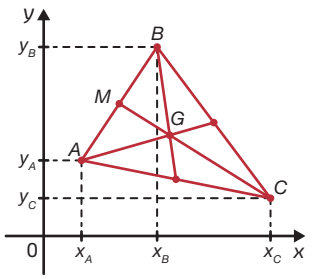
Observação

O baricentro é o centro de equilíbrio de um triângulo. Ao desenharmos um triângulo em uma cartolina e determinarmos seu baricentro, podemos recortá-lo e passar um barbante através do baricentro, como mostra a figura. Ao suspender o triângulo pelo baricentro, ele se manterá em equilíbrio.



SERGIO L. FILHO/ARQUIVO DA EDITORA

Dados três pontos não colineares $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ e $C(x_C, y_C)$, determinaremos as coordenadas do baricentro G do triângulo ABC.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Se M é o ponto médio de $\overline{AB}$, temos $M\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right)$, ou seja, $x_M = \frac{x_A + x_B}{2}$ e $y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$. Além disso, da propriedade apresentada, temos $CG = 2 \cdot GM$. Consequentemente, pelo Teorema de Tales:

- $x_C - x_G = 2 \cdot (x_G - x_M)$
- $y_C - y_G = 2 \cdot (y_G - y_M)$

Assim, segue que:

- $x_C - x_G = 2 \cdot (x_G - x_M) \Rightarrow x_C - x_G = 2x_G - 2x_M \Rightarrow 3x_G = 2x_M + x_C \Rightarrow$

$$\Rightarrow 3x_G = 2 \cdot \frac{x_A + x_B}{2} + x_C \Rightarrow x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}$$

- $y_C - y_G = 2 \cdot (y_G - y_M) \Rightarrow y_C - y_G = 2y_G - 2y_M \Rightarrow 3y_G = 2y_M + y_C \Rightarrow$

$$\Rightarrow 3y_G = 2 \cdot \frac{y_A + y_B}{2} + y_C \Rightarrow y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}$$

Portanto, o baricentro G do triângulo ABC, em que $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ e $C(x_C, y_C)$, é $G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3}\right)$.

Exemplo

Vamos determinar o baricentro G do triângulo de vértices $A(7, -2)$, $B(-1, 5)$ e $C(9, -4)$.

- $x_G = \frac{7 + (-1) + 9}{3} = \frac{15}{3} = 5$
- $y_G = \frac{-2 + 5 + (-4)}{3} = -\frac{1}{3}$

Portanto, o baricentro do triângulo ABC é $G\left(5, -\frac{1}{3}\right)$.

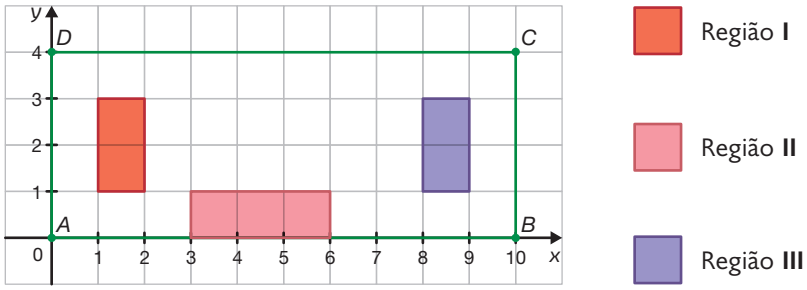
Observação

Note que as coordenadas do baricentro de um triângulo ABC correspondem à média aritmética das correspondentes coordenadas de A, B e C.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Resolvendo por etapas

Em uma gincana, alguns objetos serão escondidos em diferentes lugares. A figura a seguir apresenta um modelo matemático do local onde a gincana será realizada, com algumas regiões retangulares nas quais serão escondidos os objetos destacados.



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

A organização da gincana esconderá os objetos de acordo com as seguintes orientações.

- Cada objeto deve pertencer a apenas uma das regiões destacadas no modelo.
- A localização do objeto da região **I** deve ser equidistante dos pontos A e D.
- A localização do objeto da região **II** deve ser equidistante dos pontos A e B.
- A localização do objeto da região **III** deve ser equidistante dos pontos B e C.

Usando as coordenadas do plano cartesiano do modelo matemático, determine um possível ponto em que o objeto será escondido em cada uma das regiões.

A. Compreendendo o problema

1. O que se pede no problema?
Uma possível localização do objeto que será escondido em cada uma das regiões.

2. Quais são os dados apresentados no problema?
A representação de um modelo matemático indicando o local onde a gincana está sendo realizada em um plano cartesiano; a delimitação das regiões **I**, **II** e **III**; a informação de que os objetos escondidos nas regiões **I**, **II** e **III** devem ser equidistantes, respectivamente, dos pontos A e D, A e B, B e C.

B. Organizando as ideias e elaborando um plano

1. Registrando um possível plano.
Inicialmente, determinamos um ponto no interior da região **I** que seja equidistante dos pontos A e D. Para isso, traçamos a mediatriz de $\overline{AD}$ e, em seguida, escolhemos um ponto da mediatriz que pertença à região **I** e indicamos suas coordenadas. De maneira semelhante, determinamos os pontos pertencentes às regiões **II** e **III** equidistantes dos pontos A e B, B e C, respectivamente, e indicamos suas coordenadas.

2. Escolhendo as notações.

- S_1: possível ponto em que o objeto será escondido na região **I**.
- S_2: possível ponto em que o objeto será escondido na região **II**.
- S_3: possível ponto em que o objeto será escondido na região **III**.
- $M_1(x_1, y_1)$: ponto médio do segmento $\overline{AD}$.
- $M_2(x_2, y_2)$: ponto médio do segmento $\overline{AB}$.
- $M_3(x_3, y_3)$: ponto médio do segmento $\overline{BC}$.
- r_1: mediatriz do segmento $\overline{AD}$.
- r_2: mediatriz do segmento $\overline{AB}$.
- r_3: mediatriz do segmento $\overline{BC}$.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

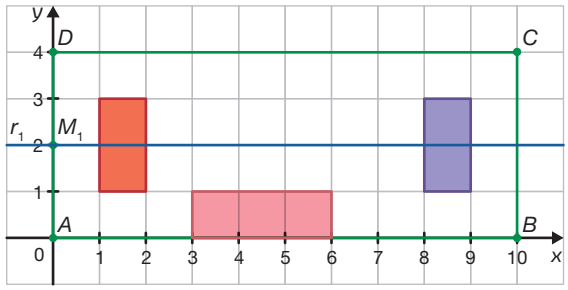
C. Executando o plano

Passo 1

Inicialmente, determinamos as coordenadas de M_1. Como $A(0, 0)$ e $D(0, 4)$, então:

$$x_{M_1} = \frac{0 + 0}{2} = 0 \qquad y_{M_1} = \frac{0 + 4}{2} = 2$$

Assim, $M_1(0, 2)$.



Agora, traçamos a r_1 e escolhemos um ponto pertencente a ela e à região **I**.

Note que a ordenada de um possível ponto em que o objeto será escondido é 2 e que a abscissa deve ser maior ou igual a 1 e menor ou igual a 2. Desse modo, um possível ponto é $S_1(1{,}5;\ 2)$.

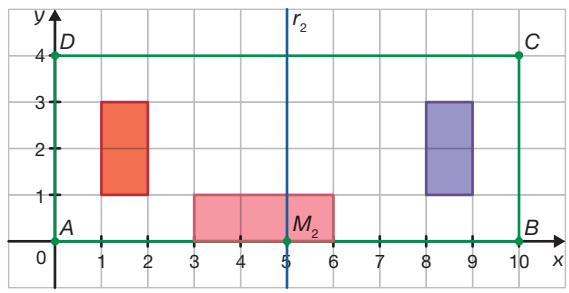
Passo 2

Determinamos as coordenadas de M_2. Como $A(0, 0)$ e $B(10, 0)$, então:

$$x_{M_2} = \frac{0 + 10}{2} = 5 \qquad y_{M_2} = \frac{0 + 0}{2} = 0$$

Assim, $M_2(5, 0)$.

Na sequência, traçamos a r_2 e escolhemos um ponto pertencente a ela e à região **II**.



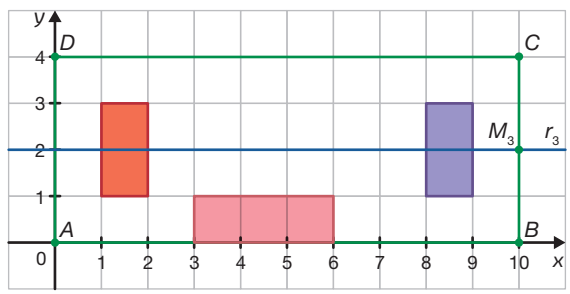
Note que a abscissa de um possível ponto em que o objeto será escondido é 5 e que a ordenada deve ser maior ou igual a 0 e menor ou igual a 1. Desse modo, um possível ponto é $S_2(5;\ 0{,}75)$.

Determinamos as coordenadas de M_3. Como $B(10, 0)$ e $C(10, 4)$, então:

$$x_{M_3} = \frac{10 + 10}{2} = 10 \qquad y_{M_3} = \frac{0 + 4}{2} = 2$$

Assim, $M_3(10, 2)$.

Por fim, traçamos a r_3 e escolhemos um ponto pertencente a ela e à região **III**.



Note que a ordenada de um possível ponto em que o objeto será escondido é 2 e que a abscissa deve ser maior ou igual a 8 e menor ou igual a 9. Desse modo, um possível ponto é $S_3(8{,}1\ ;\ 2)$.

Professor, professora: Oriente os estudantes a verificar se é possível utilizar, com algumas adequações, o plano apresentado na seção **Resolvendo por etapas** para obter a solução de algumas tarefas semelhantes propostas na seção **Exercícios e problemas** deste tópico.

Portanto, um possível ponto em que o objeto será escondido na região **I** é $S_1(1{,}5\ ;\ 2)$, na região **II** é $S_2(5;\ 0{,}75)$ e na região **III** é $S_3(8{,}1;\ 2)$.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Exercícios e problemas resolvidos

R5. Dados os pontos $A(3, 4)$ e $C(15, 20)$, determine as coordenadas do ponto B que divide $\overline{AC}$ na proporção $\frac{AB}{BC} = \frac{1}{3}$.

Resolução

Calculando a abscissa do ponto B, temos:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{x_B - x_A}{x_C - x_B} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{x_B - 3}{15 - x_B} = \frac{1}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x_B - 9 = 15 - x_B \Rightarrow 4x_B = 24 \Rightarrow x_B = 6$$

A ordenada do ponto B é dada por:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{y_B - y_A}{y_C - y_B} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{y_B - 4}{20 - y_B} = \frac{1}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3y_B - 12 = 20 - y_B \Rightarrow 4y_B = 32 \Rightarrow y_B = 8$$

Portanto, $B(6, 8)$.

R6. Qual é o comprimento de cada mediana do triângulo de vértices $A(-4, 4)$, $B(6, -2)$ e $C(8, 8)$?

Resolução

Sejam $M_{\overline{AB}}$, $M_{\overline{AC}}$ e $M_{\overline{BC}}$ os pontos médios dos lados $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$, respectivamente. Logo:

- coordenadas de $M_{\overline{AB}}$:

$$x_{M_{\overline{AB}}} = \frac{-4 + 6}{2} = 1 \qquad y_{M_{\overline{AB}}} = \frac{4 + (-2)}{2} = 1$$

- coordenadas de $M_{\overline{AC}}$:

$$x_{M_{\overline{AC}}} = \frac{-4 + 8}{2} = 2 \qquad y_{M_{\overline{AC}}} = \frac{4 + 8}{2} = 6$$

- coordenadas de $M_{\overline{BC}}$:

$$x_{M_{\overline{BC}}} = \frac{6 + 8}{2} = 7 \qquad y_{M_{\overline{BC}}} = \frac{-2 + 8}{2} = 3$$

Ou seja, $M_{\overline{AB}}(1, 1)$, $M_{\overline{AC}}(2, 6)$ e $M_{\overline{BC}}(7, 3)$.

Por fim, calculando o comprimento de cada mediana, temos:

- mediana $\overline{CM}_{\overline{AB}}$:

$$CM_{\overline{AB}} = \sqrt{(1 - 8)^2 + (1 - 8)^2} = \sqrt{(-7)^2 + (-7)^2} = 7\sqrt{2}$$

- mediana $\overline{BM}_{\overline{AC}}$:

$$BM_{\overline{AC}} = \sqrt{(2 - 6)^2 + [6 - (-2)]^2} = \sqrt{(-4)^2 + 8^2} = 4\sqrt{5}$$

- mediana $\overline{AM}_{\overline{BC}}$:

$$AM_{\overline{BC}} = \sqrt{[7 - (-4)]^2 + (3 - 4)^2} = \sqrt{11^2 + (-1)^2} = \sqrt{122}$$

R7. Determine as coordenadas do vértice B do triângulo ABC, em que $A(4, 9)$ e $C(-2, 6)$, sabendo que $G(2, 3)$ é o baricentro do triângulo.

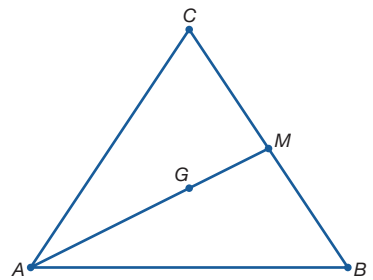
Resolução

Como G é o baricentro do triângulo ABC, temos:

- $x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \Rightarrow 2 = \frac{4 + x_B + (-2)}{3} \Rightarrow$
  $\Rightarrow 2 + x_B = 6 \Rightarrow x_B = 4$
- $y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \Rightarrow 3 = \frac{9 + y_B + 6}{3} \Rightarrow$
  $\Rightarrow 15 + y_B = 9 \Rightarrow y_B = -6$

Portanto, $B(4, -6)$.

R8. No triângulo ABC, M é o ponto médio do lado $\overline{BC}$ e G é o baricentro do triângulo. Sabendo que as coordenadas dos pontos B, G e M são, respectivamente, $(5, 1)$, $(3, 2)$ e $\left(4, \frac{5}{2}\right)$, determine as coordenadas dos vértices A e C.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Resolução

Como M é o ponto médio do lado $\overline{BC}$, temos:

- $x_M = \frac{x_B + x_C}{2} \Rightarrow 4 = \frac{5 + x_C}{2} \Rightarrow$
  $\Rightarrow 5 + x_C = 8 \Rightarrow x_C = 3$
- $y_M = \frac{y_B + y_C}{2} \Rightarrow \frac{5}{2} = \frac{1 + y_C}{2} \Rightarrow$
  $\Rightarrow 2 + 2y_C = 10 \Rightarrow y_C = 4$

Como G é o baricentro do triângulo ABC, temos:

- $x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \Rightarrow 3 = \frac{x_A + 5 + 3}{3} \Rightarrow$
  $\Rightarrow x_A + 8 = 9 \Rightarrow x_A = 1$
- $y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \Rightarrow 2 = \frac{y_A + 1 + 4}{3} \Rightarrow$
  $\Rightarrow y_A + 5 = 6 \Rightarrow y_A = 1$

Portanto, $A(1, 1)$ e $C(3, 4)$.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Anote as respostas no caderno.

21. Dados os pontos A e B, para cada item, determine as coordenadas do ponto médio de $\overline{AB}$.

a) $A(4, 3)$ e $B(1, 7)$. Resposta: $\left(\frac{5}{2}, 5\right)$

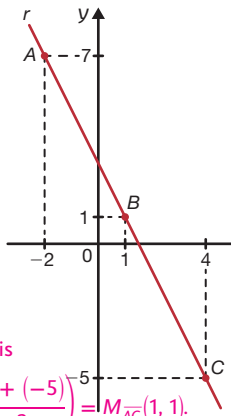
b) $A(2, -1)$ e $B(-4, 5)$. Resposta: $(-1, 2)$

c) $A(-7, -9)$ e $B(-2, 0)$. Resposta: $\left(-\frac{9}{2}, -\frac{9}{2}\right)$

d) $A(15, 6)$ e $B(-7, 8)$. Resposta: $(4, 7)$

22. Sabendo que $P(0, 1)$, $Q(4, -3)$ e $R(5, 3)$ são vértices de um triângulo, determine o comprimento da mediana em relação ao lado $\overline{PQ}$. Resposta: 5 u.c.

23. Dada a reta r em um plano cartesiano, resolva as questões.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

a) Resposta: Sim, pois $M_{\overline{AC}} = \left(\frac{-2+4}{2}, \frac{7+(-5)}{2}\right) = M_{\overline{AC}}(1, 1)$.

a) O ponto B é o ponto médio de $\overline{AC}$? Justifique sua resposta.

b) Determine as coordenadas do ponto médio de:

- $\overline{AB}$. Resposta: $M_{\overline{AB}}\left(-\frac{1}{2}, 4\right)$
- $\overline{BC}$. Resposta: $M_{\overline{BC}}\left(\frac{5}{2}, -2\right)$

24. O esquema a seguir representa parte da rota de um ônibus. Entre os pontos de parada A e B, deseja-se instalar outros dois pontos, C e D, tal que a distância entre os pontos adjacentes seja a mesma.

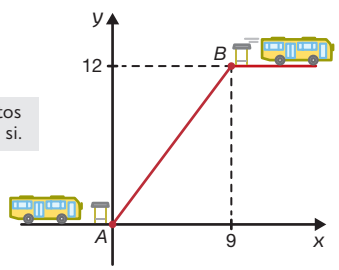


Imagem com elementos sem proporção entre si.

RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

a) Determine as coordenadas dos pontos C e D. Resposta: $C(3, 4)$; $D(6, 8)$

b) Considerando cada unidade do esquema representada por 120 m, qual é a distância, em metros, entre os pontos A e B? Resposta: 1800 m

25. Seja $M(3, 4)$ o ponto médio de $\overline{AB}$. Sabendo que A está sobre o eixo das abscissas, e B, sobre o eixo das ordenadas, determine as coordenadas de A e B. Resposta: $A(6, 0)$; $B(0, 8)$

26. Determine x e y, sabendo que $M(-3, -2)$ é o ponto médio do segmento com extremidades $A(-6, y)$ e $B(x, -8)$. Resposta: $x = 0$; $y = 4$

27. Sabendo que $G(2, -4)$ é o baricentro do triângulo de vértices $P(-2, 1)$, $Q(5, -6)$ e $R(x, y)$, calcule x e y. Resposta: $x = 3$; $y = -7$

28. Obtenha as coordenadas do ponto Q que divide o segmento de extremos $P(-3, 5)$ e $R(1, 3)$ na proporção $\frac{PQ}{QR} = \frac{2}{5}$. Resposta: $Q\left(-\frac{13}{7}, \frac{31}{7}\right)$

29. Dado o triângulo de vértices $A(0, -1)$, $B(-5, -5)$ e $C(-3, 1)$, determine: Respostas no final do **Livro do Estudante**.

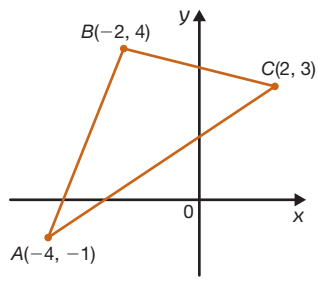
a) o comprimento das medianas.

b) as coordenadas do baricentro.

30. Seja $A(-5, 2)$ um dos vértices do triângulo ABC. Sabendo que $M(2, 3)$ e $N\left(\frac{3}{2}, 1\right)$ são, respectivamente, os pontos médios dos lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$, determine as coordenadas de B e C.

Resposta: $B(9, 4)$; $C(8, 0)$

31. A imagem a seguir mostra o triângulo ABC em um plano cartesiano.

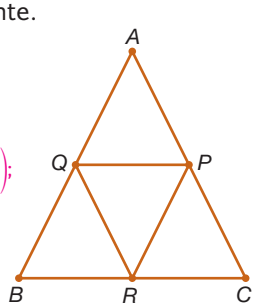


RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

a) Determine as coordenadas do baricentro desse triângulo. Resposta: $\left(-\frac{4}{3}, 2\right)$

b) Calcule a distância entre o baricentro e C. Resposta: $\frac{\sqrt{109}}{3}$

32. No triângulo ABC, de vértices $A(4, 10)$, $B(1, 4)$ e $C(7, 4)$, foi inscrito o triângulo PQR, tal que P, Q e R são os pontos médios de $\overline{AC}$, $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$, respectivamente.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

32. a) Resposta: $P\left(\frac{11}{2}, 7\right)$; $Q\left(\frac{5}{2}, 7\right)$; $R(4, 4)$

a) Quais são as coordenadas dos pontos P, Q e R?

b) Determine as coordenadas do ponto G, baricentro do triângulo ABC, e do ponto H, baricentro do triângulo PQR. Resposta: $G(4, 6)$; $H(4, 6)$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

33. Imagine que estamos em uma ilha do Caribe e descobrimos um documento representado a seguir, escrito pelo pirata Barba Negra. Esse documento descreve a localização de um tesouro que está enterrado.

Qualquer um que desembarque nesta ilha verá imediatamente um morro pontiagudo na face noroeste, que chamarei de *M*, uma grande palmeira, que chamarei de *P*, e duas grandes pedras em formato de tartaruga, que chamarei de *T*. Eu enterrei o tesouro em um ponto *X* que pode ser encontrado da seguinte maneira:

- caminhe de *P* para *M*, em linha reta, no sentido da montanha, contando seus passos;
- chegando a *M*, vire para a esquerda e ande exatamente a mesma quantidade de passos para chegar ao ponto *A*;
- volte ao ponto *P*, caminhe de *P* para *T*, em linha reta, no sentido da pedra, contando seus passos;
- chegando a *T*, vire para a direita e ande exatamente a mesma quantidade de passos para chegar ao ponto *B*;
- o ponto *X* fica na reta que liga *A* e *B* e está à mesma distância desses dois pontos.

KEITHY MOSTACHI/ARQUIVO DA EDITORA

Imagem com elementos sem proporção entre si.



ILUSTRAÇÃO DE BÁRBARA SARZI/ARQUIVO DA EDITORA. FOTOS: BAU; FER GREGORY/SHUTTERSTOCK; MONTANHA: LUCAS SIQUEIRA/SHUTTERSTOCK; PERGAMINHO: ANDREY KUZMIN/SHUTTERSTOCK; COQUEIRO: PHOTO ON GRAPHY/SHUTTERSTOCK; PEDRA: NASIDA STUDIO/SHUTTERSTOCK; BARCO: E7LENA/SHUTTERSTOCK

Observação

Esse problema foi adaptado do livro *A matemática do ensino médio*, dos autores Elon Lages Lima, Paulo Cezar Pinto Carvalho, Eduardo Wagner e Augusto César Morgado, publicado em 1998 pela Sociedade Brasileira de Matemática.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Depois de tantos anos, o morro pontiagudo (*M*) e as grandes pedras em formato de tartaruga (*T*) lá estavam, mas a palmeira (*P*) já tinha desaparecido completamente. Ainda assim, conseguiríamos encontrar o tesouro considerando as informações presentes no documento e no esquema do mapa?

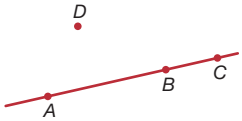
A resposta é sim! Por meio de conhecimentos da Geometria analítica, podemos resolver esse problema sem conhecer, necessariamente, a posição da palmeira (*P*). Uma maneira de fazer isso é usando coordenadas no plano e a distância entre dois pontos. Nesse caso, considerando o ponto *A* na origem e contando os passos em linha reta entre os pontos *M* e *T*, supondo que seja de 80 passos, pode-se aplicar as conexões entre a Geometria e a Álgebra para mostrar que é preciso caminhar 40 passos na direção de *M* para *T* e depois virar à direita e caminhar mais 40 passos para encontrar o tesouro. A localização do tesouro se torna independente da palmeira. Professor, professora: Se julgar necessário, oriente os estudantes a estabelecer um sistema de coordenadas com origem em *M* e com o ponto *T* no eixo *x*.

a) Supondo que, em linha reta, a distância entre os pontos *M* e *T* seja de 80 passos, mostre que é possível encontrar o tesouro executando as instruções descritas no enunciado da atividade. Resposta no final do **Livro do Estudante**.

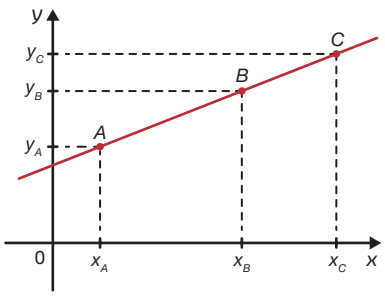
b) Elabore um texto que descreva a localização de um tesouro cuja referência sejam alguns elementos da sala de aula. Em seguida, troque seu texto com o de um colega e elabore o mapa do tesouro com base nas descrições presentes nele. Ao final, troque ideias com seu colega a respeito da validade dos mapas construídos e das dificuldades enfrentadas nesse processo.
Resposta pessoal. Orientações sobre este item no **Suplemento para o professor**.

Condição de alinhamento de três pontos

Quando três ou mais pontos estão alinhados, ou seja, quando é possível construir uma reta passando por eles, dizemos que esses pontos são **colineares**. Na figura a seguir, os pontos A, B e C são colineares. Já os pontos A, B e D, por exemplo, não são colineares.



Por meio das coordenadas de três pontos, é possível verificar se eles são colineares. Para isso, considere os pontos $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ e $C(x_C, y_C)$, representados no plano cartesiano.



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Se os pontos A, B e C são colineares, temos, pelo Teorema de Tales:

- $\frac{AB}{AC} = \frac{x_B - x_A}{x_C - x_A}$
- $\frac{AB}{AC} = \frac{y_B - y_A}{y_C - y_A}$

Observação

De acordo com o Teorema de Tales, se duas retas transversais são cortadas por um feixe de retas paralelas, então a razão entre quaisquer dois segmentos determinados em uma das transversais é igual à razão entre os segmentos correspondentes da outra transversal.

Assim, segue que:

$$\frac{x_B - x_A}{x_C - x_A} = \frac{y_B - y_A}{y_C - y_A} \Rightarrow (x_B - x_A)(y_C - y_A) = (x_C - x_A)(y_B - y_A) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x_B y_C - x_B y_A - x_A y_C + x_A y_A = x_C y_B - x_C y_A - x_A y_B + x_A y_A \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x_B y_C - x_B y_A - x_A y_C - x_C y_B + x_C y_A + x_A y_B = 0$$

O 1º membro dessa igualdade corresponde ao determinante $D = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}$.

Portanto, se três pontos, $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ e $C(x_C, y_C)$, são colineares, obtemos:

abscissas dos pontos

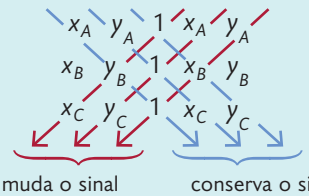
$$D = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}$$

ordenadas dos pontos

Se realizarmos o processo inverso, verificaremos que, se $D = 0$, então $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ e $C(x_C, y_C)$ são colineares.

Observação

Lembre-se de que



$$D = -x_C y_B - x_A y_C - x_B y_A + x_A y_B + x_C y_A + x_B y_C =$$
$$= x_B y_C - x_B y_A - x_A y_C - x_C y_B + x_C y_A + x_A y_B$$

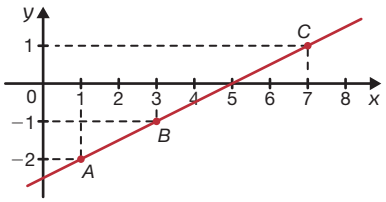
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Exemplo

Vamos verificar se os pontos $A(1, -2)$, $B(3, -1)$ e $C(7, 1)$ estão alinhados.

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 7 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 7 - 1 + 6 - 1 - 14 + 3 = 0$$

Portanto, os pontos A, B e C estão alinhados.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Exercícios e problemas resolvidos

R9. Sejam $P(a, 2)$, $Q(4, -3)$ e $R(b, -6)$ pontos de uma mesma reta. Determine a e b, sabendo que $a + b = 10$.

Resolução

Os pontos P, Q e R são colineares, logo:

$$D = \begin{vmatrix} x_P & y_P & 1 \\ x_Q & y_Q & 1 \\ x_R & y_R & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} a & 2 & 1 \\ 4 & -3 & 1 \\ b & -6 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3b + 6a - 8 - 3a + 2b - 24 = 0 \Rightarrow 3a + 5b = 32$$

Como $a + b = 10$, podemos escrever o seguinte sistema:

$$\begin{cases} a + b = 10 \\ 3a + 5b = 32 \end{cases}$$

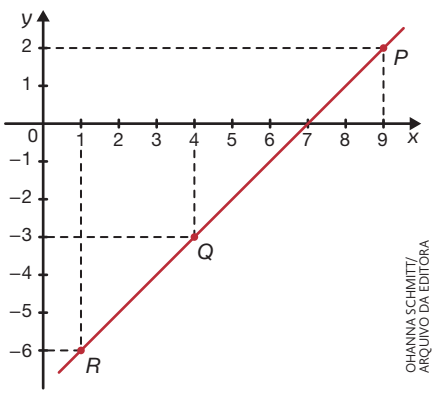
$$\begin{cases} a + b = 10 \cdot (-3) \\ 3a + 5b = 32 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3a - 3b = -30 \\ 3a + 5b = 32 \end{cases}$$

$$2b = 2 \Rightarrow b = 1$$

$a + b = 10 \Rightarrow a + 1 = 10 \Rightarrow a = 9$

Portanto, $a = 9$ e $b = 1$.

Representando esses pontos em um plano cartesiano, obtemos a imagem apresentada.



OHANNA SCHMITT/ARQUIVO DA EDITORA

Exercícios e problemas

Anote as respostas no caderno.

34. Verifique em quais itens os pontos estão alinhados. Resposta: Alternativas **a**, **c**, **d** e **f**.

a) $A(1, 5)$, $B(-3, -7)$ e $C(-1, -1)$.

b) $D(5, 9)$, $E(4, 7)$ e $F(3, 6)$.

c) $P(4, 6)$, $Q(-2, 3)$ e $R(-8, 0)$.

d) $S(5, 2)$, $T(12, 9)$ e $U(7, 4)$.

e) $G(2, 6)$, $H(-4, -8)$ e $I(-2, -2)$.

f) $J(0, 0)$, $K(1, 2)$ e $L(2, 4)$.

g) $M(3, 1)$, $N(5, 4)$ e $O(6, 3)$.

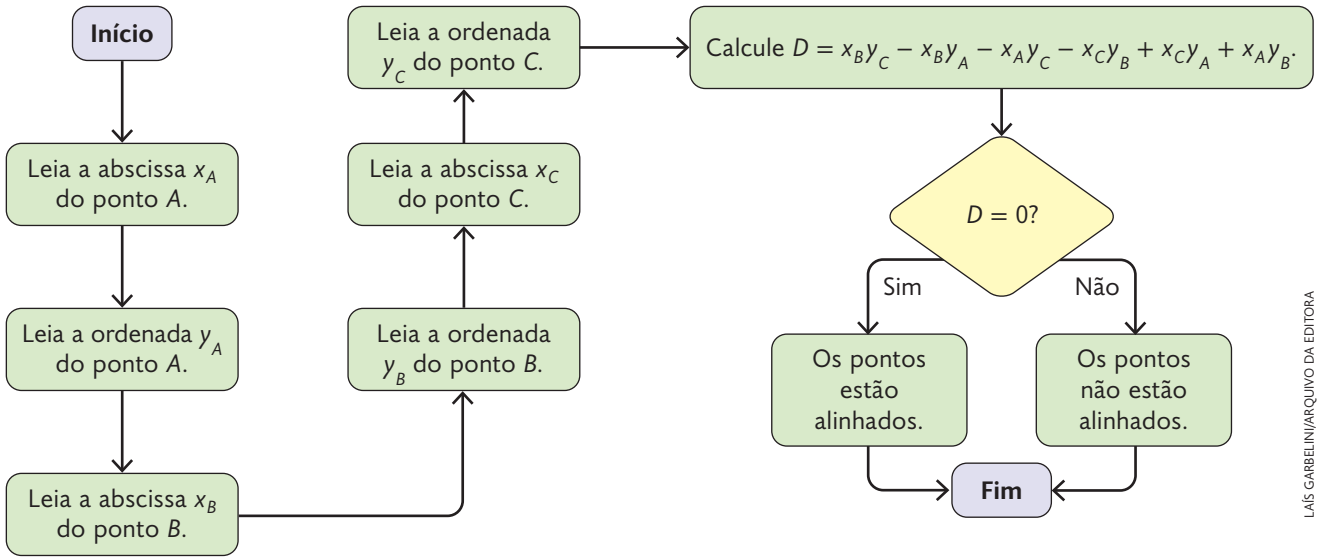
h) $V(6, 3)$, $X(7, 4)$ e $Z(5, 5)$.

35. Sabendo que os pontos $A(4, -1)$, $B(1, 7)$ e $C(7, r)$ são colineares, determine o valor de r. Resposta: $r = -9$

36. Dados os pontos $A(-3, -2)$, $B(-1, 2)$, $C(0, 3)$ e $D(2, 1)$, determine as coordenadas do ponto $E(x, y)$ de modo que não seja possível construir os triângulos ABE e CDE. Resposta: $E\left(-\frac{1}{3}, \frac{10}{3}\right)$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

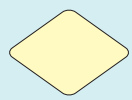
37. O professor de Matemática escreveu, com a ajuda da turma, um algoritmo para determinar se os pontos A, B e C estão alinhados, dadas as coordenadas de cada um deles. Depois, ele solicitou que os estudantes organizassem esse algoritmo em um fluxograma. O resultado de um deles está apresentado a seguir.



LAÍS GARBELINI/ARQUIVO DA EDITORA

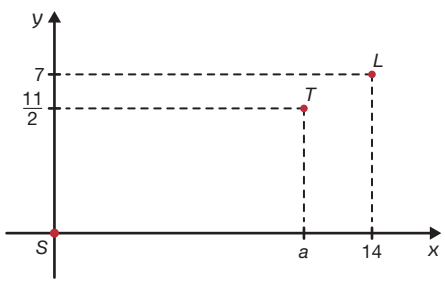
Observação

Nesse fluxograma, utilizamos a figura apresentada. Ela indica o ponto de decisão do fluxograma.

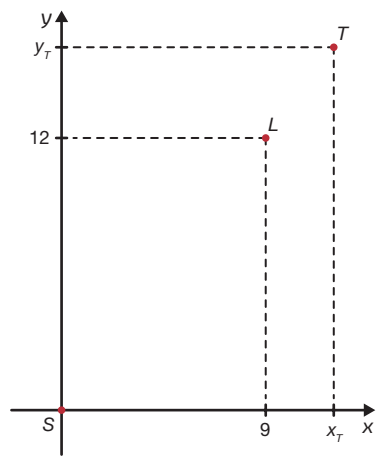


Organize em um fluxograma o algoritmo que determina se os pontos A, B e C estão alinhados, dadas as coordenadas de cada um deles. Caso não estejam, calcule a área da região determinada pelo triângulo de vértices A, B e C. Resposta no final do **Livro do Estudante**.

38. Considerando a posição do Sol (S) como origem, foram construídos dois planos cartesianos, **I** e **II**, que representam as posições da Lua (L) e da Terra (T) em dois momentos.



plano cartesiano **I**



plano cartesiano **II**

ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

De acordo com o que foi estudado na página de abertura deste capítulo sobre eclipses solares e lunares, resolva as questões.

a) Considerando que o plano cartesiano **I** representa a posição dos astros durante um eclipse lunar, calcule o valor da abscissa a da posição da Terra. Resposta: $a = 11$

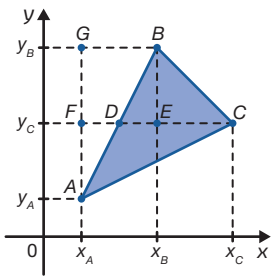
b) Sabendo que, no plano cartesiano **II**, a distância entre o Sol e a Terra é 20 unidades de comprimento, determine as coordenadas da posição da Terra para que os astros estejam alinhados. Nesse caso, há a ocorrência de um eclipse? Se sim, de qual tipo? Resposta: $T(12, 16)$; sim; eclipse solar.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Área da região determinada por um triângulo

Dadas as coordenadas de três pontos não colineares, é possível calcular a área da região determinada pelo triângulo cujos vértices são esses pontos.

Para verificar como realizar esse cálculo, considere a região determinada pelo triângulo *ABC* a seguir, em que $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ e $C(x_C, y_C)$.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

A área dessa região é igual à soma das áreas das regiões determinadas pelos triângulos *ACD* e *BCD*.

Inicialmente, determinaremos a abscissa x_D do ponto *D* em função das coordenadas de *A*, *B* e *C*. Como os triângulos *ABG* e *ADF* são semelhantes, temos:

$$\frac{BG}{DF} = \frac{AG}{AF} \Rightarrow \frac{x_B - x_A}{x_D - x_A} = \frac{y_B - y_A}{y_C - y_A} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_D = x_A + \frac{(x_B - x_A)(y_C - y_A)}{y_B - y_A}$$

Com isso, determinamos *CD*:

$$CD = |x_C - x_D| = \left| x_C - x_A - \frac{(x_B - x_A)(y_C - y_A)}{y_B - y_A} \right| =$$

$$= \left| \frac{(x_C - x_A)(y_B - y_A) - (x_B - x_A)(y_C - y_A)}{y_B - y_A} \right|$$

Por fim, calculamos a área da região determinada pelo triângulo *ABC*.

$$S_{ABC} = S_{ACD} + S_{BCD} = \frac{1}{2} \cdot CD \cdot AF + \frac{1}{2} \cdot CD \cdot FG = \frac{1}{2} \cdot CD \cdot (\overbrace{AF + FG}^{AG}) = \frac{1}{2} \cdot CD \cdot AG =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left| \frac{(x_C - x_A)(y_B - y_A) - (x_B - x_A)(y_C - y_A)}{y_B - y_A} \right| \cdot |y_B - y_A| =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left| (x_C - x_A)(y_B - y_A) - (x_B - x_A)(y_C - y_A) \right| =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left| -(x_A y_B + x_C y_A + x_B y_C - x_C y_B - x_B y_A - x_A y_C) \right| =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot |x_A y_B + x_C y_A + x_B y_C - x_C y_B - x_B y_A - x_A y_C|$$

Note que $x_A y_B + x_C y_A + x_B y_C - x_C y_B - x_B y_A - x_A y_C$ corresponde a $D = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}$.

Portanto, a área da região determinada pelo triângulo *ABC* é dada por $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot |D|$.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Exemplo

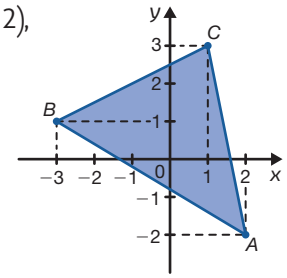
Para calcular a área da região determinada pelo triângulo ABC, em que $A(2, -2)$, $B(-3, 1)$ e $C(1, 3)$, calculamos inicialmente a determinante D.

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -1 - 6 - 6 + 2 - 9 - 2 = -22$$

Segue que:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot |-22| = \frac{1}{2} \cdot 22 = 11$$

Portanto, a área do triângulo ABC é 11 u.a. (unidades de área).



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Exercícios e problemas resolvidos

R10. Determine os valores de m de modo que os pontos $A(m^2 - 3, -1)$, $B(1, 2)$ e $C(5, 6)$ sejam vértices de um triângulo.

Resolução

Para que A, B e C sejam vértices de um triângulo, eles não podem ser colineares, ou seja:

$$\begin{vmatrix} m^2 - 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 5 & 6 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

Assim:

$$-10 - 6m^2 + 18 + 1 + 2m^2 - 6 - 5 + 6 \neq 0 \Rightarrow -4m^2 + 4 \neq 0 \Rightarrow m^2 \neq 1$$

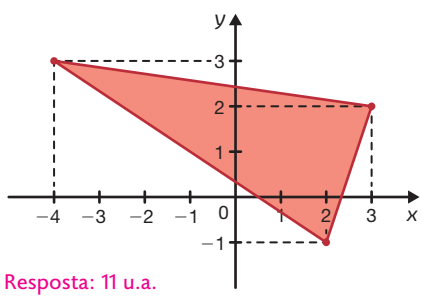
Portanto, para m real, tal que $m \neq 1$ ou $m \neq -1$, os pontos A, B e C são vértices de um triângulo.

Exercícios e problemas

Anote as respostas no caderno.

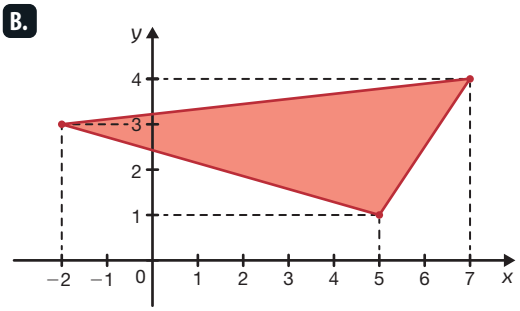
39. Em cada item, calcule a área das regiões triangulares.

A.



Resposta: 11 u.a.

B.



Resposta: $\frac{25}{2}$ u.a.

40. Calcule a área da região determinada pelo quadrilátero $ABCD$, cujas coordenadas dos vértices são $A(3, 5)$, $B(-1, 2)$, $C(5, 3)$ e $D(7, 4)$.

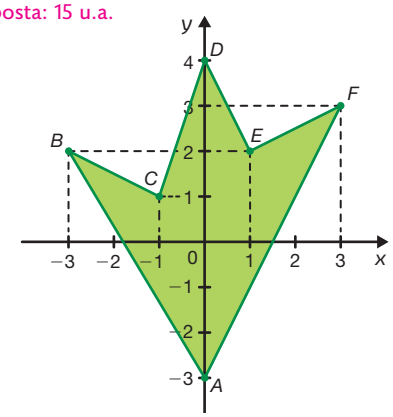
Resposta: 10 u.a.

41. Sejam $M_1 = (1, 2)$, $M_2 = (3, 4)$ e $M_3 = (1, -1)$ os pontos médios dos lados de um triângulo, calcule a área da região determinada por esse triângulo.

Resposta: 12 u.a.

42. Calcule a área da figura.

Resposta: 15 u.a.



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Equação da reta

No estudo da Geometria analítica, é possível associar a cada reta uma equação, denominada **equação da reta**. Neste tópico, estudaremos a equação geral da reta.

Equação geral da reta

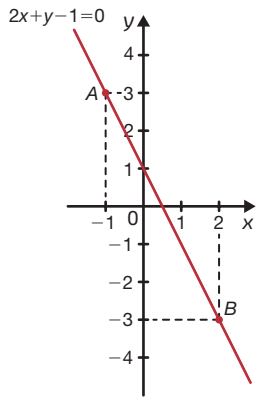
Podemos escrever para qualquer reta uma equação na forma $ax + by + c = 0$, em que a, b e c são os coeficientes, sendo a e b não nulos simultaneamente. Chamamos essa equação de **equação geral da reta**.

Uma maneira de determinar a equação geral da reta, considerando dois de seus pontos, é por meio da verificação do alinhamento de três pontos.

Considere, por exemplo, três pontos colineares: $P(x, y)$, $A(-1, 3)$ e $B(2, -3)$. Como esses pontos estão alinhados, temos:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 3x + 2y + 3 - 6 + 3x + y = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3(2x + y - 1) = 0 \Rightarrow 2x + y - 1 = 0$$



Dados dois pontos distintos, $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$, podemos determinar a equação geral da reta que passa por A e B por meio de $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{vmatrix} = 0$.

Exercícios e problemas resolvidos

R11. Dada a reta de equação $y = -2x + 5$, determine as coordenadas do ponto:

a) em que a reta intersecta o eixo y.

b) em que a reta intersecta o eixo x.

c) de abscissa 6.

d) de ordenada 3.

Observação

Note que, nesse problema, a equação geral da reta foi reescrita na forma $y = ax + c$.

Resolução

a) A reta intersecta o eixo y no ponto em que $x = 0$, ou seja:

$$y = -2 \cdot 0 + 5 \Rightarrow y = 5$$

Logo, as coordenadas do ponto são $(0, 5)$.

b) A reta intersecta o eixo x no ponto em que $y = 0$, ou seja:

$$0 = -2x + 5 \Rightarrow -2x = -5 \Rightarrow x = \frac{5}{2}$$

Logo, as coordenadas do ponto são $\left(\frac{5}{2}, 0\right)$.

c) Substituindo $x = 6$ na equação da reta, temos:

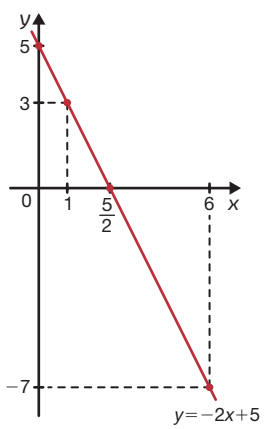
$$y = -2 \cdot 6 + 5 \Rightarrow y = -7$$

Logo, as coordenadas do ponto são $(6, -7)$.

d) Substituindo $y = 3$ na equação da reta, temos:

$$3 = -2x + 5 \Rightarrow -2x = -2 \Rightarrow x = 1$$

Logo, as coordenadas do ponto são $(1, 3)$.



Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

R12. Determine a equação geral da reta que passa pelos pontos $A(3, -2)$ e $B(5, 4)$.

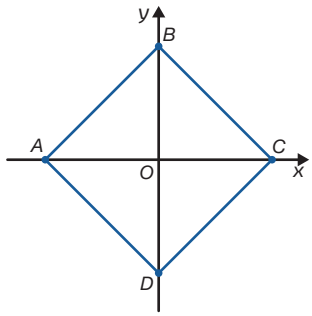
Resolução

Alinhando os pontos A e B a um ponto genérico $P(x, y)$ pelo determinante a seguir:

$$D = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 5 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -2x + 5y + 12 + 10 - 4x - 3y = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2(-3x + y + 11) = 0 \Rightarrow \boxed{-3x + y + 11 = 0}$$

R13. Na figura a seguir, $ABCD$ é um quadrado de lado $3\sqrt{2}$ e centro em $O(0, 0)$. Escreva a equação geral das retas que contêm cada lado do quadrado.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Resolução

Como $ABCD$ é um quadrado com centro em O, a distância de cada vértice em relação à origem é a mesma, ou seja, $OA = OB = OC = OD$. Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo AOB, temos:

$$(AB)^2 = (OA)^2 + (\underbrace{OB}_{OA})^2 \Rightarrow \left(3\sqrt{2}\right)^2 = (OA)^2 + (OA)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 18 = 2(OA)^2 \Rightarrow (OA)^2 = 9 \Rightarrow OA = 3$$

Assim, a distância de cada vértice em relação à origem O é 3. Logo, as coordenadas dos vértices desse quadrado são $A(-3, 0)$, $B(0, 3)$, $C(3, 0)$ e $D(0, -3)$.

Segue que:

- Equação geral da reta que contém o lado $\overline{AB}$.

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -0 + 3y - 3x + 0 + 0 - 9 = 0 \Rightarrow 3y - 3x - 9 = 0 \Rightarrow \boxed{-x + y - 3 = 0}$$

- Equação geral da reta que contém o lado $\overline{BC}$.

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -9 - 0 - 0 + 3x + 3y + 0 = 0 \Rightarrow 3y + 3x - 9 = 0 \Rightarrow \boxed{x + y - 3 = 0}$$

- Equação geral da reta que contém o lado $\overline{CD}$.

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -0 - 3y + 3x + 0 + 0 - 9 = 0 \Rightarrow 3y + 3x - 9 = 0 \Rightarrow \boxed{x - y - 3 = 0}$$

- Equação geral da reta que contém o lado $\overline{AD}$.

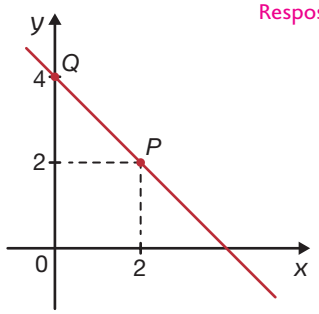
$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -3 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -0 + 3y + 3x + 0 + 0 + 9 = 0 \Rightarrow 3y + 3x + 9 = 0 \Rightarrow \boxed{x + y + 3 = 0}$$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Anote as respostas no caderno.

43. Escreva a equação geral da reta apresentada em cada item.

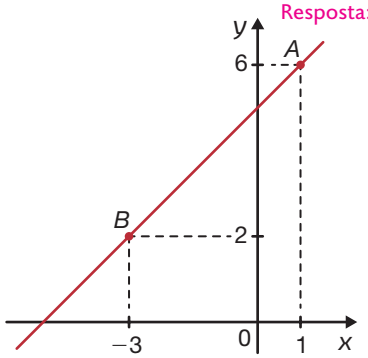
A.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Resposta: $x + y - 4 = 0$

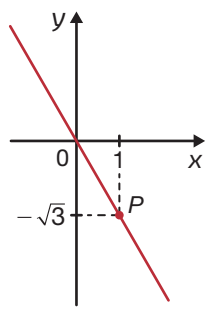
B.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Resposta: $y - x - 5 = 0$

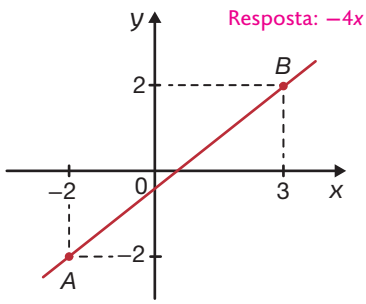
C.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Resposta: $\sqrt{3}x + y = 0$

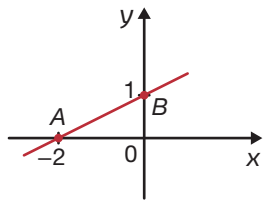
D.



KEITHY MOSTACHI/ARQUIVO DA EDITORA

Resposta: $-4x + 5y + 2 = 0$

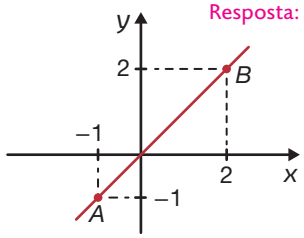
E.



KEITHY MOSTACHI/ARQUIVO DA EDITORA

Resposta: $-x + 2y - 2 = 0$

F.



KEITHY MOSTACHI/ARQUIVO DA EDITORA

Resposta: $-x + y = 0$

44. Qual é a equação geral da reta que: 44. a) Resposta: $5x - y + 6 = 0$

a) passa pelos pontos $D(0, 6)$ e $E(-3, -9)$?

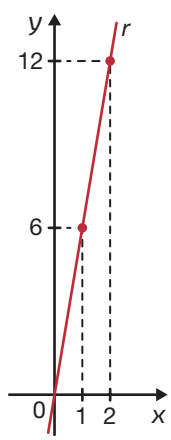
b) passa pela origem e pelo ponto $F(5, -3)$? Resposta: $3x + 5y = 0$

c) passa pelo ponto $A(3, 2)$ e é paralela ao eixo das abscissas? Resposta: $y - 2 = 0$

d) passa pelo ponto $C(12, 4)$ e é perpendicular ao eixo das abscissas? Resposta: $x - 12 = 0$

45. Para qual valor de p o ponto $M(p, 2p + 1)$ pertence à reta que passa pelos pontos $N(1, 6)$ e $Q\left(0, \frac{22}{5}\right)$? Resposta: $p = \frac{17}{2}$

46. Considere a reta r indicada a seguir.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

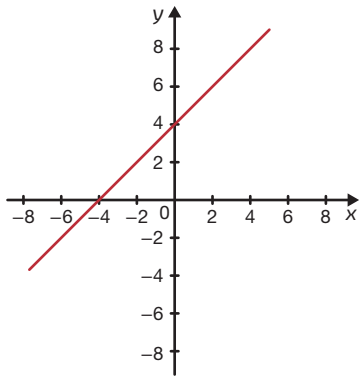
a) Escreva a equação da reta r. Resposta: $y = 6x$

b) Dados os pontos $A(3, y_1)$ e $B(-2, y_2)$ pertencentes a r, determine os valores de y_1 e y_2. Resposta: $y_1 = 18$; $y_2 = -12$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

47. Em um plano de coordenadas cartesianas, foi representado o planejamento de certo bairro de uma cidade, com ruas paralelas e perpendiculares, delimitando quadras de mesmo tamanho em uma região plana. Nessa representação, as distâncias nos eixos são dadas em quilômetros e o bairro está localizado no segundo quadrante.

A reta de equação $y = x + 4$ representa o planejamento do percurso da linha do metrô subterrâneo que atravessará o bairro e outras regiões da cidade.



OHANNA SCHMITT/ARQUIVO DA EDITORA

A comunidade solicitou ao comitê de planejamento que fosse prevista uma estação do metrô de modo que sua distância, medida em linha reta, até o hospital público localizado no ponto $P = (-5, 5)$, não fosse maior do que 5 km.

Atendendo ao pedido da comunidade, o comitê argumentou corretamente que isso seria automaticamente satisfeito, pois já estava prevista a construção de uma estação no ponto: Resposta: Alternativa **e**.

a) $(0, 4)$
b) $(-5, 0)$
c) $(-2, 1)$
d) $(2, 6)$
e) $(-3, 1)$

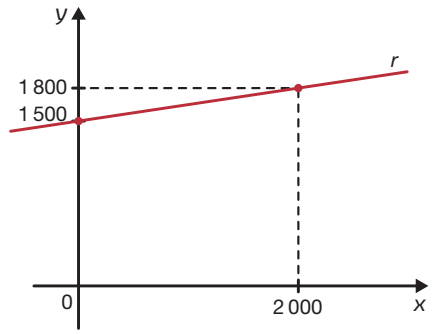
48. Escreva a equação geral da reta que passa pelos pontos: Respostas no final do **Livro do Estudante**.

a) $A(5, 2)$ e $B(-1, 3)$.
b) $C(0, -4)$ e $D(1, 6)$.
c) $E(-12, -7)$ e $F(-5, 2)$.
d) $G(8, -3)$ e $H(-4, -6)$.
e) $I(6, 3)$ e $J(-2, 4)$.
f) $K(0, -3)$ e $L(2, 6)$.

49. Se os pontos $A(5, -39)$ e $B(-3, 9)$ pertencem à reta r, então a equação de r é: Resposta: Alternativa **d**.

a) $y = 9x + 6$
b) $y = -9x - 6$
c) $y = 6x - 9$
d) $y = -6x - 9$
e) $y = -2x - 3$
f) $y = 2x + 3$

50. A figura a seguir representa a reta r em um plano cartesiano.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

a) Escreva a equação da reta r. Resposta: $y = 0{,}15x + 1500$
b) Dados os pontos $A(1500,\ y_1)$ e $B(2800,\ y_2)$ pertencentes à r, determine os valores de y_1 e y_2. Resposta: $y_1 = 1725$; $y_2 = 1920$
c) Determine o valor de x para $y = 2500$. Resposta: $\frac{20000}{3}$

51. Represente cada reta indicada em um plano cartesiano. Respostas no final do **Livro do Estudante**.

a) $y = 3x - 4$
b) $y = 2 - x$
c) $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + 1$
d) $y = \frac{1}{2}x + 2$
e) $y = 2x - 1$
f) $y = x - 2$

52. (Enem, 2018) Para apagar os focos A e B de um incêndio, que estavam a uma distância de 30 m um do outro, os bombeiros de um quartel decidiram se posicionar de modo que a distância de um bombeiro ao foco A, de temperatura mais elevada, fosse sempre o dobro da distância desse bombeiro ao foco B de temperatura menos elevada.

Nestas condições, a maior distância, em metro, que dois bombeiros poderiam ter entre eles é: Resposta: Alternativa **b**.

a) 30
b) 40
c) 45
d) 60
e) 68

53. Considere a reta r representada pela equação geral $4x - 3y + 12 = 0$ e os pontos A e B, pertencentes a ela.

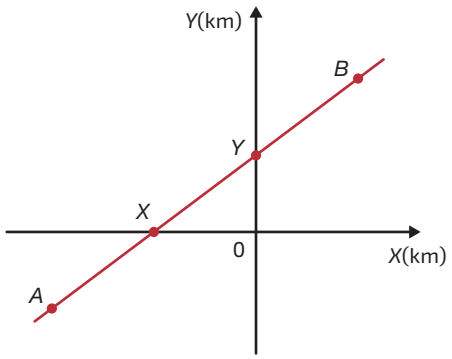
a) Determine as coordenadas dos pontos A e B, sabendo que A é o ponto de interseção de r com o eixo x e B é o ponto de interseção de r com o eixo y. Resposta: $A(-3, 0)$ e $B(0, 4)$.

b) Calcule a distância entre A e B. Resposta: 5

c) Determine as coordenadas do ponto M, pertencente à reta r, sabendo que esse ponto é equidistante de A e de B. Resposta: $M\left(-\frac{3}{2}, 2\right)$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

54. A trajetória de um táxi foi representada em um sistema de eixos cartesianos ortogonais. Nessa representação, a trajetória descrita parte de um bairro *A* para um bairro *B*, passando pelos bairros *X* e *Y*, nessa ordem.



OHANNA SCHMITT/ARQUIVO DA EDITORA

Sabendo que, nessa representação, os pontos *A*, *X*, *Y* e *B* pertencem à reta de equação $3x - 4y + 120 = 0$ e que as distâncias entre os pontos *A* e *X*; *X* e *Y*; *Y* e *B* são iguais entre si, então, nessas condições, as coordenadas dos pontos *A* e *B* devem ser, respectivamente:

Resposta: Alternativa **b**.

a) $(-40, -30)$ e $(60, 40)$

b) $(-80, -30)$ e $(40, 60)$

c) $(-30, -20)$ e $(20, 30)$

d) $(-30, -40)$ e $(40, 30)$

e) $(-80, -30)$ e $(40, 50)$

55. Resposta:
$r: 15x + 17y + 104 = 0$;:
$s: 6x + 35y - 184 = 0$;
$t: -x + 2y + 15 = 0$;
$u: -3x - 18y + 96 = 0$.

55. Considere as retas *r*, *s*, *t* e *u* distintas. Determine as equações gerais de cada uma delas, de acordo com as condições dadas em cada item a respeito de alguns de seus pontos.

KEITHY MOSTACHI/ARQUIVO DA EDITORA

- O ponto $L(-16, 8)$ pertence às retas *r*, *s* e *u*.
- O ponto $K(1, -7)$ pertence às retas *r* e *t*.
- O ponto $M(19, 2)$ pertence às retas *s* e *t*.
- O ponto $N(2, 5)$ pertence às retas *s* e *u*.

56. Escreva a equação geral das retas que passam pelos vértices opostos de um quadrado localizado acima do eixo das abscissas e cujos pontos $A(0, 0)$ e $B(-1, 3)$ são vértices consecutivos.

Resposta: $2x - y = 0$; $x + 2y - 5 = 0$

57. Considerando a reta *r*, cuja equação geral é $2y - 6x + 3 = 0$, determine:

57. c) Resposta no final do **Livro do Estudante**.

a) o ponto em que a reta intersecta o eixo *x*.

b) o ponto em que a reta intersecta o eixo *y*.

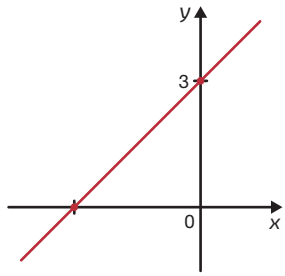
c) três pontos que pertencem à reta *r*.

57. a) Resposta: $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ 57. b) Resposta: $\left(0, -\frac{3}{2}\right)$

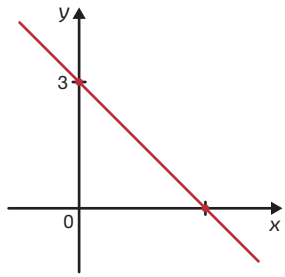
58. Considere a reta de equação $kx - 5y + 4 = 0$. Sabendo que o ponto $(7, 5)$ pertence a essa reta, determine o valor de *k*. Resposta: $k = 3$

59. Qual alternativa apresenta a reta de equação $x + y - 3 = 0$? Resposta: Alternativa **B**.

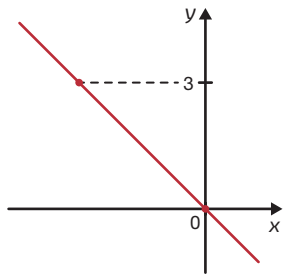
A.



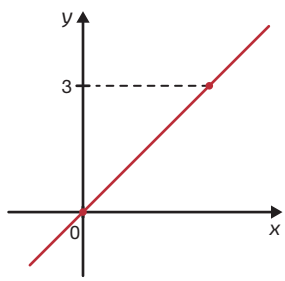
B.



C.



D.



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

60. Sabendo que os pontos $A(2, 24)$ e $B(5, 60)$ pertencem à reta *r*, determine:

a) a equação geral da reta *r*. Resposta: $-12x + y = 0$

b) se o ponto $C(9, 110)$ pertence à *r*. Resposta: Não.

c) o valor de *y* para $x = 8$. Resposta: 96

d) o valor de *x* para $y = 156$. Resposta: 13

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

9. Resposta: O baricentro corresponde ao ponto em que se cruzam as três medianas de um triângulo. Esse ponto representa o centro de equilíbrio de um triângulo.

Anote as respostas no caderno.

SÍNTESE DO CAPÍTULO

Neste capítulo, estudamos alguns conceitos relacionados à Geometria analítica, como o plano cartesiano e a equação da reta. Agora, chegou a hora de refletir sobre seus conhecimentos! Como estratégia de estudos, sugerimos que você faça uma autoavaliação, revise conceitos e sintetize o que foi estudado. Para isso, resolva as questões propostas.

6. Sugestão de resposta: Por meio da fórmula $CD = \sqrt{(x_C - x_D)^2 + (y_C - y_D)^2}$.

1. Você conhecia algum dos conteúdos estudados neste capítulo? Cite-os. Resposta pessoal. Orientações sobre esta questão no **Suplemento para o professor**.

2. Dos tópicos apresentados a seguir, em quais deles você teve dificuldades ou ficou com dúvidas? Reflita sobre eles e, se necessário, retome o que foi estudado.

- Coordenadas na reta
- Coordenadas no plano
- Distância entre dois pontos
- Coordenadas do ponto médio de um segmento
- Baricentro de um triângulo
- Condição de alinhamento de três pontos
- Área da região determinada por um triângulo
- Equação da reta
- Equação geral da reta

3. Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes respondam que um plano cartesiano consiste em dois eixos graduados e perpendiculares entre si, que dividem o plano em quatro regiões. O eixo horizontal x é denominado eixo das **abscissas**, e o vertical y, eixo das **ordenadas**. O ponto em que esses eixos se cruzam é denominado **origem**. As **coordenadas cartesianas consistem** em um par ordenado $P(a, b)$, em que a é a abscissa, e b, a ordenada do ponto, ambos números reais.

5. Resposta: Uma reta é dita orientada quando sobre ela referenciamos um sentido de percurso, chamado positivo. O sentido inverso ao positivo é chamado negativo.

Você teve dificuldades em algum deles? Não recorda de algum desses conceitos? Ficou com dúvidas? Reflita sobre esses questionamentos e, se necessário, retome o que foi estudado. Resposta pessoal. Orientações sobre esta questão no **Suplemento para o professor**.

3. Explique com suas palavras o que caracteriza o plano cartesiano e as coordenadas cartesianas.

4. Para quais valores reais de m o ponto $P(5, m)$:

- está localizado no 1º quadrante? Resposta: $m > 0$
- está localizado no 4º quadrante? Resposta: $m < 0$
- pertence ao eixo x? Resposta: $m = 0$
- pertence ao eixo y? Resposta: O ponto P não pertence ao eixo y para qualquer valor real de m.

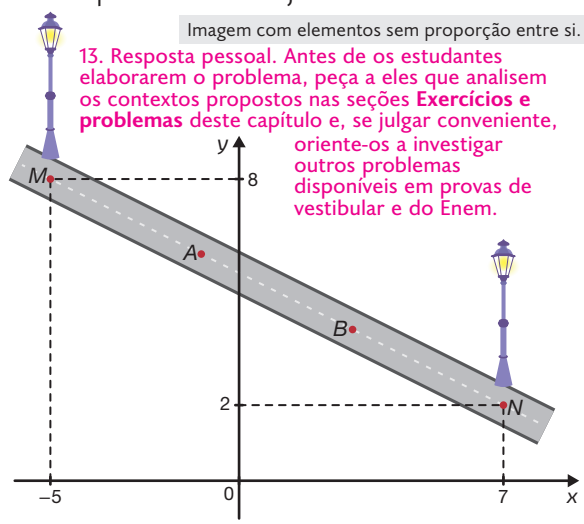
5. Como definimos uma reta orientada?

6. Como podemos determinar a distância entre os pontos $C(x_C, y_C)$ e $D(x_D, y_D)$?

7. O que caracteriza o ponto médio de um segmento de reta? Resposta: É o ponto que separa o segmento de reta em duas partes com comprimentos iguais.

8. O esquema a seguir representa parte de uma rua cujos extremos são os postes de luz M e N. Entre eles, serão instalados outros dois nos pontos A e B, de maneira que a distância entre um poste e outro seja a mesma.

Imagem com elementos sem proporção entre si.



OHANNA SCHMITT/ARQUIVO DA EDITORA

13. Resposta pessoal. Antes de os estudantes elaborarem o problema, peça a eles que analisem os contextos propostos nas seções **Exercícios e problemas** deste capítulo e, se julgar conveniente, oriente-os a investigar outros problemas disponíveis em provas de vestibular e do Enem.

Quais são as coordenadas dos pontos A e B? Resposta: $A(-1, 6)$ e $B(3, 4)$

9. O que representa o baricentro de um triângulo?

10. O que caracteriza o circuncentro de um triângulo? Resposta: O circuncentro corresponde ao centro de uma circunferência que passa pelos vértices de um triângulo.

11. Cite pelo menos uma situação do cotidiano em que utilizamos Geometria analítica.

Sugestão de resposta: Na computação gráfica e na construção civil.

12. Como podemos escrever a equação geral da reta?

13. Escolha um dos conteúdos estudados deste capítulo e elabore um problema que o envolva. Depois, entregue o problema para um colega resolver. Por fim, verifique se a resposta obtida por ele está correta.

14. Faça uma síntese do que foi estudado neste capítulo e dê exemplos. Resposta pessoal. Orientações sobre esta questão no **Suplemento para o professor**.

12. Resposta: Podemos escrever na forma $ax + by + c = 0$, em que a, b e c são os coeficientes, sendo a e b não nulos simultaneamente.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

CAPÍTULO

7

TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS



HELGA Q/SHUTTERSTOCK

Brócolis romanesco.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

O que o brócolis romanesco e a samambaia têm em comum? Ao tomar partes menores da folha da samambaia ou da flor do brócolis romanesco, podemos verificar um padrão que é semelhante ao desenho completo. Essa é uma característica dos **fractais**.

O termo **fractal** – originado da palavra latina *fractus*, adjetivo relacionado ao verbo *frangere*, que significa quebrar, gerar fragmentos irregulares – designa algo que pode ser dividido em partes que tenham semelhança com o objeto inicial, sendo esse fato conhecido como **autossimilaridade**.

Os fractais podem ser observados nos estudos relativos a outras ciências, como: as características de algumas plantas na Biologia; a estrutura do pulmão humano e as ramificações dos neurônios na Medicina; a elaboração de figuras e a produção de músicas na Arte; os dobramentos de camadas de rochas que formam o solo na Geografia e o comportamento da bolsa de valores na Economia.

A Geometria Fractal, que se refere ao estudo dos fractais, permite descrever aproximações para formatos irregulares, além de estudar suas propriedades. Analise a seguir as primeiras repetições do processo que descreve o Triângulo de Sierpiński, fractal proposto pelo matemático Waclaw Sierpiński (1882-1969).



ILUSTRAÇÕES: CARLOS BORIN/ARQUIVO DA EDITORA

Professor, professora: Oriente os estudantes a escrever as respostas no caderno.

Neste capítulo, você vai estudar:

- reflexão;
- rotação;
- translação;
- composição de transformações geométricas;
- homotetia.

1. Você conhece outros tipos de fractais? Em caso positivo, mencione alguns deles.
2. Pesquise sobre o Tapete de Sierpiński e descreva o procedimento para obtê-lo.
3. Pesquise uma imagem do Cubo de Sierpiński. Cada face desse fractal é semelhante a qual outro fractal?

1. Resposta pessoal. Orientações sobre essa questão no **Suplemento para o professor**.

2. Resposta: De maneira sucessiva, divide-se cada quadrado em nove quadrados congruentes e remove-se o quadrado central.

3. Resposta: Cada face do Cubo de Sierpiński é semelhante a um Tapete de Sierpiński.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Estudando transformações geométricas

A noção de transformações geométricas está presente em vários elementos da natureza, como nas asas de algumas borboletas, e em produções humanas, como em algumas peças da cerâmica marajoara, considerada a arte em cerâmica mais antiga do Brasil.



JIL LANG/SHUTTERSTOCK

Borboleta.



RICARDO 1943/SHUTTERSTOCK

Cerâmica marajoara.

Imagens sem proporção entre si.

Professor, professora: Se julgar conveniente, durante os estudos relacionados a cada transformação geométrica, apresente aos estudantes exemplos da realidade que possam ser associados às diferentes transformações, como obras de arte e obras arquitetônicas. Outra opção é solicitar que façam uma pesquisa, em casa, como preparação para a aula, ou no laboratório de informática, a fim de que todos possam analisar as características das figuras ou fotos pesquisadas, comparando-as com as definições das transformações geométricas em estudo ou por meio da composição entre transformações.

PARA EXPANDIR

Que tal conhecer mais sobre a cerâmica marajoara? Para isso, leia a publicação *Cerâmica marajoara*: a comunicação do silêncio, de Lilian Bayma de Amorim, disponibilizada pelo Museu Paraense Emílio Goeldi. Disponível em: https://repositorio.museu-goeldi.br/bitstream/mgoeldi/1506/1/catalogo-ceramica-marajoara.pdf. Acesso em: 13 set. 2024.

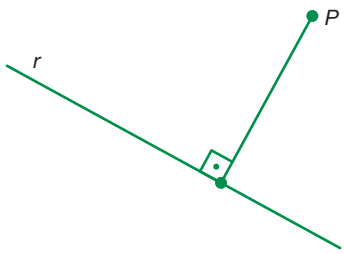
Questão A. Realize uma pesquisa sobre a cerâmica marajoara a fim de obter exemplos de transformações geométricas diferentes da apresentada nesta página. Depois, apresente aos colegas e o professor.

Questão B. Segundo alguns pesquisadores, o acesso ao conhecimento científico pode despertar e promover o reconhecimento das realizações culturais de diversos povos. Em sua opinião, qual é a importância desse reconhecimento?

Neste capítulo, estudaremos a **reflexão**, a **rotação** e a **translação**, que são transformações isométricas, isto é, que preservam as distâncias entre pontos e a amplitude dos ângulos. Também trabalharemos a transformação denominada **homotetia**.

Antes de iniciarmos nossos estudos sobre transformações geométricas, vamos definir a distância entre ponto e reta.

A distância de um ponto P a uma reta r, a qual denotaremos por $d(P, r)$, é igual ao comprimento do segmento perpendicular à r que tem extremidades em P e em um ponto de r.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Observação

É possível demonstrar que, em uma transformação isométrica, a figura inicial e seu "transformado" são congruentes.

Questão A. Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes compreendam que a disseminação do conhecimento científico em diversos contextos sociais proporciona oportunidades para a compreensão e integração social do conhecimento, promovendo a formação de cidadãos engajados com a realidade em que vivem e comprometidos com o futuro da humanidade.

Questão B. Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes percebam que esse reconhecimento enriquece a diversidade cultural global, fortalece o respeito entre diferentes comunidades, promove a inclusão social e combate estereótipos e preconceitos. Além disso, preserva e perpetua tradições, conhecimentos e práticas fundamentais para a identidade e o bem-estar das comunidades ao redor do mundo.

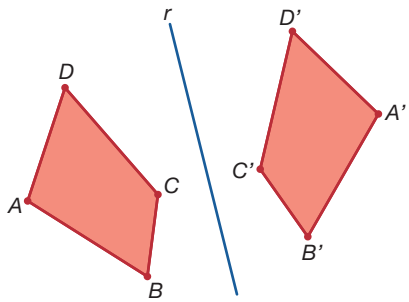
Reflexão

Dada uma reta r, dizemos que o ponto X' é o simétrico do ponto X em relação à r, quando $\overline{XX'}$ é perpendicular à r e $d(X, r) = d(X', r)$.

No plano, a **reflexão** em torno de uma reta r é uma transformação geométrica que a cada ponto X faz corresponder um ponto X', simétrico a X em relação à reta r.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Na imagem apresentada, a figura *A'B'C'D'* foi obtida por reflexão da figura *ABCD* em torno da reta *r*.



Observação

Quando *X* pertencer à reta *r*, diremos que seu simétrico em relação à reta *r* é ele próprio.

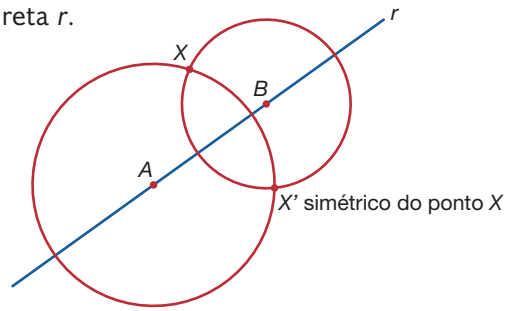
A figura *A'B'C'D'* é denominada **imagem** da figura *ABCD* por reflexão em torno da reta *r*.

Questão C. As figuras *ABCD* e *A'B'C'D'* são congruentes? Justifique sua resposta.

Resposta: Sim, pois a figura *A'B'C'D'* é a imagem da figura *ABCD* por reflexão em torno de *r* e a transformação de reflexão é isométrica.

Utilizando régua e compasso, podemos construir o simétrico de *X* em relação a uma reta *r*, realizando os seguintes procedimentos.

1. Marque o ponto *X* e, com o auxílio da régua, trace a reta *r*.
2. Marque dois pontos quaisquer *A* e *B* sobre a reta *r*.
3. Com o compasso, construa uma circunferência de centro *A* passando por *X* e uma segunda circunferência de centro *B* passando por *X*. O ponto em que essas circunferências se intersectam, além de *X*, é o simétrico do ponto *X* em relação à reta *r*, o qual indicaremos por *X'*.



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

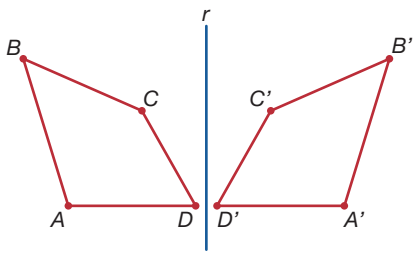
Professor, professora: Durante o uso em sala de aula, oriente os estudantes no manuseio cuidadoso do compasso, pois sua ponta afiada pode causar arranhões e cortes caso fique exposta e seja manipulada inadvertidamente.

Exercícios e problemas

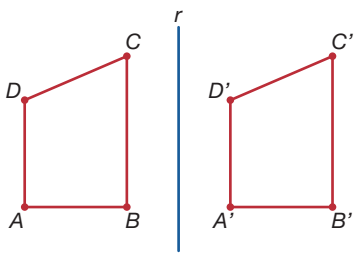
Anote as respostas no caderno.

1. Determine em qual alternativa a figura *A'B'C'D'* é a imagem da figura *ABCD* por reflexão em torno da reta *r*. Resposta: Alternativa **A**.

A.

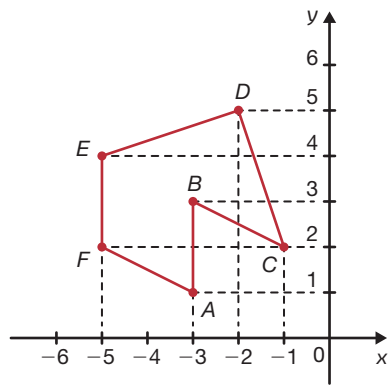


B.



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

2. Considere o polígono *ABCDEF* representado no plano cartesiano.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

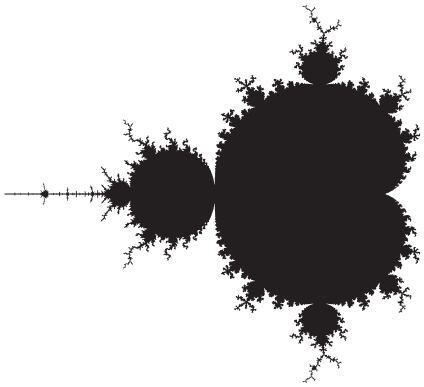
a) Quais são as coordenadas dos vértices do polígono *ABCDEF*? Resposta: *A*(−3, 1), *B*(−3, 3), *C*(−1, 2), *D*(−2, 5), *E*(−5, 4) e *F*(−5, 2).

b) Determine as coordenadas dos vértices da imagem do polígono *ABCDEF* por reflexão em torno do:

- eixo das abscissas. Resposta: *A''*(−3, −1), *B''*(−3, −3), *C''*(−1, −2), *D''*(−2, −5), *E''*(−5, −4) e *F''*(−5, −2)
- eixo das ordenadas. Resposta: *A'*(3, 1), *B'*(3, 3), *C'*(1, 2), *D'*(2, 5), *E'*(5, 4) e *F'*(5, 2).

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

3. Vimos, anteriormente, algumas informações sobre a geometria dos fractais. A seguir, é apresentado o conjunto de Mandelbrot.



Qual das alternativas a seguir possibilita obter o conjunto de Mandelbrot apresentado, aplicando uma transformação de reflexão em torno da reta *r*? Resposta: Alternativa **B**.

A.



B.



C.



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Professor, professora: Durante o uso para resolver as tarefas **4** e **5**, oriente os estudantes no manuseio cuidadoso do compasso, pois sua ponta afiada pode causar arranhões e cortes caso fique exposta e seja manipulada inadvertidamente.

4. Com o auxílio de uma régua, construa um pentágono *ABCDE* qualquer e trace uma reta *r*. Em seguida, utilizando régua e compasso, construa a imagem do pentágono *ABCDE* por reflexão em torno da reta *r*. Resposta pessoal. Orientações sobre essa tarefa no **Suplemento para o professor**.

5. Utilizando uma régua, construa as retas concorrentes *r* e *s*. Em seguida, utilizando régua, compasso e seus conhecimentos sobre transformação de reflexão, construa o triângulo *ABC* de maneira que o ponto de interseção entre $\overline{AB}$ e a reta *r* seja ponto médio de $\overline{AB}$ e a interseção entre $\overline{AC}$ e a reta *s* seja ponto médio de $\overline{AC}$.
Resposta no final do **Livro do Estudante**.

6. A imagem a seguir é uma das obras de Rubem Valentim (1922-1991), escultor, pintor e professor brasileiro.



PINACOTECA DO ESTADO DE SÃO PAULO

VALENTIM, Rubem. *Emblema 5*. 1969. Óleo sobre duratex, 120 cm × 73 cm. Pinacoteca do Estado. São Paulo-SP.

a) Você já conhecia alguma obra do artista Rubem Valentim? Faça uma pesquisa para conhecer outras obras desse artista e converse com os colegas sobre o que nelas mais chama a sua atenção. Resposta pessoal. Orientações sobre esta questão no **Suplemento para o professor**.

b) É possível identificar transformação de reflexão nessa obra? Em caso afirmativo, descreva a localização da reta *r* que possibilita essa reflexão. Resposta: Sim. A reta *r* é vertical, passando pelo centro da imagem.

7. Localizado na Índia, o Taj Mahal é um dos monumentos mais famosos do país.



MICHAEL MELFORD/DESIGN PICS EDITORIAL/UNIVERSAL IMAGES GROUP/GETTY IMAGES

Vista da fachada do Taj Mahal, em Agra, na Índia, em 2022.

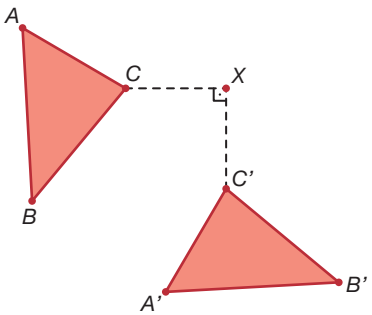
Na fachada desse monumento é possível identificar transformação de reflexão? Converse com os colegas e o professor sobre o assunto.
Resposta: Sim. Caso os estudantes apresentem dificuldades para identificar a reflexão, oriente-os a construir um esboço dessa fachada.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Rotação

No plano, uma rotação de centro A e ângulo α é uma transformação geométrica que a cada ponto X faz corresponder um ponto X' tal que $AX = AX'$ e $X\hat{A}X' = \alpha$.

Na imagem a seguir, a figura $A'B'C'$ foi obtida por rotação de 90° da figura ABC em torno do ponto X, no sentido anti-horário.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

A figura $A'B'C'$ é denominada **imagem** da figura ABC por rotação de centro X.

Questão D. As figuras ABC e $A'B'C'$ são congruentes? Resposta: Sim, pois a figura $A'B'C'$ é a imagem da figura ABC por rotação de centro X e a transformação de rotação é isométrica.

Observação

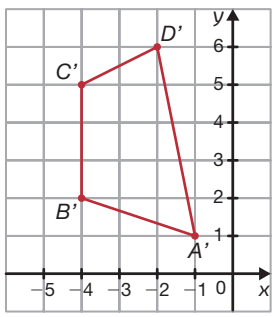
- Uma rotação pode ser no sentido horário ou anti-horário.
- Indicaremos um ângulo e sua medida utilizando o mesmo símbolo.

Exercícios e problemas

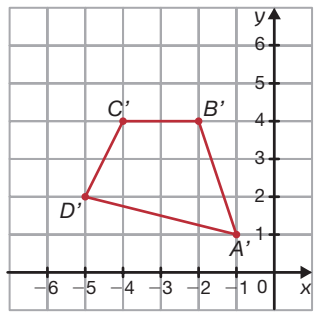
Anote as respostas no caderno.

8. Considere o polígono $ABCD$, cujas coordenadas dos vértices são $A(1, 1)$, $B(4, 2)$, $C(4, 4)$ e $D(2, 5)$. Qual das alternativas a seguir apresenta a imagem de $ABCD$ por rotação de 90° em torno do ponto $(0, 0)$, no sentido anti-horário? Resposta: Alternativa **B**.

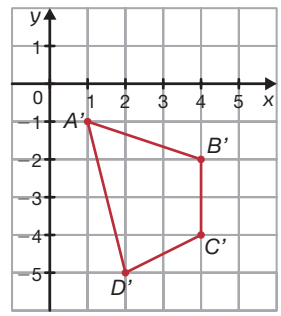
A.



B.

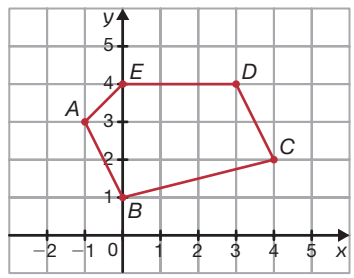


C.



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

9. Considere o polígono $ABCDE$, representado no plano cartesiano.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

a) Quais são as coordenadas dos vértices do polígono $ABCDE$? Resposta: $A(-1, 3)$, $B(0, 1)$, $C(4, 2)$, $D(3, 4)$ e $E(0, 4)$.

b) Quais são as coordenadas dos vértices da imagem de $ABCDE$ por rotação de 180° em torno da origem do plano cartesiano no sentido anti-horário? Resposta: $A'(1, -3)$, $B'(0, -1)$, $C'(-4, -2)$, $D'(-3, -4)$ e $E'(0, -4)$.

c) Construa a imagem de $ABCDE$ por rotação de 180° em torno da origem do plano cartesiano no sentido anti-horário. Resposta no final do **Livro do Estudante**.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

10. As mandalas são figuras encontradas em diversas culturas. Em muitas delas, podemos identificar a aplicação de transformações geométricas.



a) Quais transformações geométricas estudadas até o momento podemos identificar na mandala apresentada?
Resposta: Transformação de reflexão e de rotação.

b) Considere as figuras a seguir.



Figura **A**.

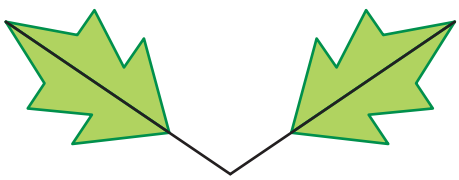


Figura **B**.

ILUSTRAÇÕES: HELOÍSA PINTARELLI/ARQUIVO DA EDITORA

Aplicando transformações de rotação em apenas uma dessas figuras, é possível reconstruir a mandala apresentada? Em caso afirmativo, em qual figura? Resposta: Sim. Na figura **A**.

11. Analise a imagem construída por Flávia.



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

É possível que Flávia tenha construído essa imagem aplicando, sobre a figura apresentada a seguir, apenas transformações de rotação? Converse com os colegas e o professor sobre essa construção.



Resposta: Não. Espera-se que os estudantes percebam que para obter essa imagem aplicando transformações sobre a figura apresentada é necessário aplicar, além da transformação de rotação, a transformação de reflexão.

12. A Catedral de Notre-Dame, localizada em Paris, na França, é um monumento histórico rico em detalhes, alguns dos quais, mesmo após o incêndio ocorrido em abril de 2019, permaneceram intactos. Nela, podemos verificar a presença de rosáceas, nas quais existem alguns padrões que se repetem.

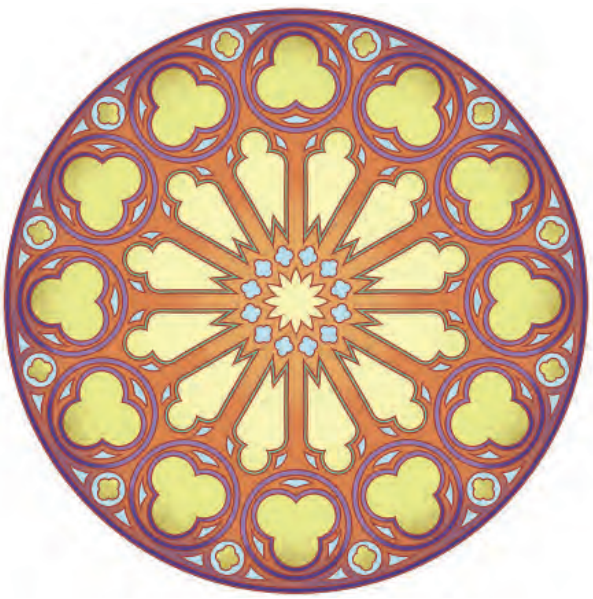


JORISVO/SHUTTERSTOCK

Rosácea presente na fachada da Catedral de Notre-Dame em Paris, na França, em 2019.

Essa rosácea corresponde a uma região circular que pode ser decomposta em partes, semelhantes entre si, o que nos permite interpretar seu processo de construção como a repetição de um desenho, por meio de rotação, em torno do ponto central.

Para um trabalho artístico, Marina construiu, utilizando um *software* de Geometria dinâmica e transformações geométricas, a seguinte rosácea.



HELOÍSA PINTARELLI/ARQUIVO DA EDITORA

Desenhe um esboço da menor figura que possibilite a construção da rosácea feita por Marina utilizando transformações de rotação.
Resposta no final do **Livro do Estudante**.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

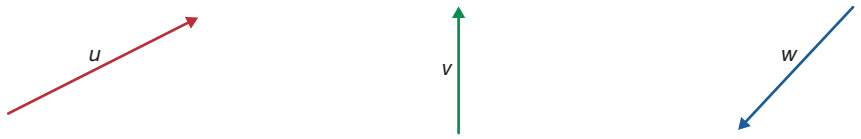
Translação

Antes de iniciarmos o estudo sobre translação, vamos apresentar alguns conceitos importantes.

Um segmento de reta é dito **orientado** quando é estipulado qual de suas extremidades é a inicial. Nesse caso, a outra extremidade é a final. Quando dissermos "o segmento de reta orientado $\overrightarrow{AB}$", fica subentendido que A é o ponto inicial e B, o final.

Um **vetor** é um segmento de reta orientado que tem comprimento, direção e sentido.

Exemplos



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

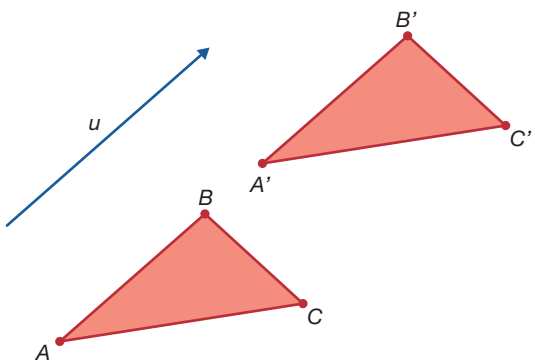
A noção de translação está intimamente relacionada ao conceito de vetor (do latim ***vehere***, que significa transportar).

No plano, a **translação** associada ao vetor v, indicada por T_v, faz corresponder a cada ponto P um ponto P' tal que $v = \overrightarrow{PP'}$.

Observação

Quando dois segmentos orientados $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ são paralelos ou colineares, têm o mesmo comprimento e o mesmo sentido, dizemos que eles representam o mesmo vetor v. Nesse caso, escrevemos $v = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

Na imagem a seguir, a figura $A'B'C'$ foi obtida aplicando T_u na figura ABC.



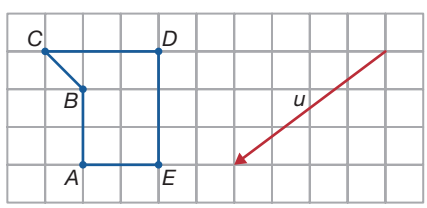
RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

A figura $A'B'C'$ é denominada **imagem** da figura ABC por translação associada ao vetor u.

Questão E. As figuras ABC e $A'B'C'$ são congruentes? Resposta: Sim, pois a figura $A'B'C'$ é a imagem da figura ABC por translação associada ao vetor u, e a transformação de translação é isométrica.

Exercícios e problemas resolvidos

R1. Construa a imagem do polígono $ABCDE$ por T_u.



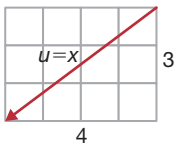
RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Resolução

Para construir a imagem de *ABCDE* por T_u, inicialmente, determinamos o comprimento do vetor *u*. Para isso, indicamos por *x* o comprimento de *u* e aplicamos o Teorema de Pitágoras.

$x^2 = 3^2 + 4^2 \Rightarrow x^2 = 25 \Rightarrow x = 5$



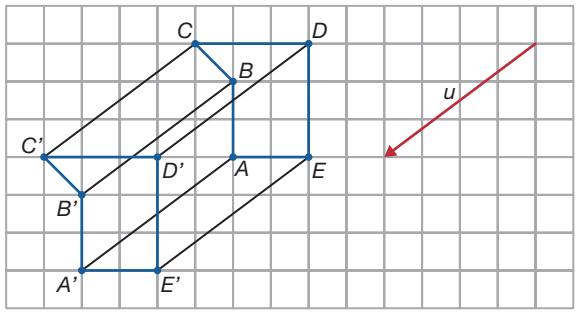
Dica

Note que $x = 5$, pois $x > 0$.

Assim, o comprimento do vetor *u* é 5 u.c. (unidades de comprimento). Com isso, construímos $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$, $\overline{DD'}$ e $\overline{EE'}$, com:

$$AA' = BB' = CC' = DD' = EE' = 5 \text{ u.c.}$$

Por fim, traçamos $\overline{A'B'}$, $\overline{B'C'}$, $\overline{C'D'}$, $\overline{D'E'}$ e $\overline{A'E'}$, obtendo, assim, o polígono $A'B'C'D'E'$, que é a imagem de *ABCDE* pela translação associada ao vetor *u*.



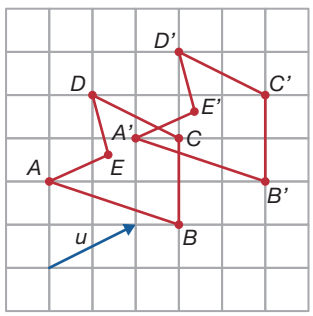
ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Exercícios e problemas

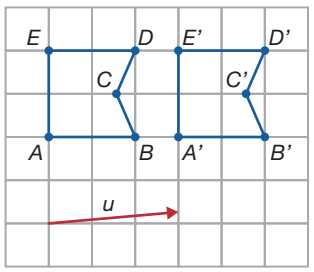
Anote as respostas no caderno.

13. Em qual alternativa o polígono $A'B'C'D'E'$ é a imagem do polígono *ABCDE* pela translação associada ao vetor *u*? Resposta: Alternativa **A**.

A.

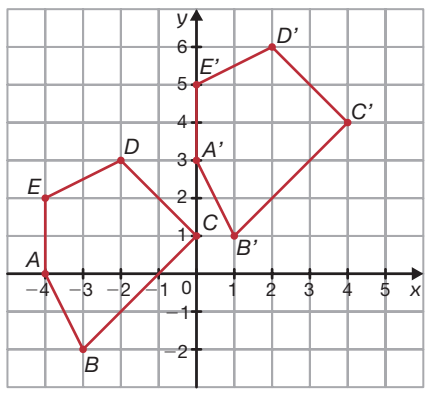


B.



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

14. A figura $A'B'C'D'E'$ é a imagem da figura *ABCDE* por translação.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Qual é o comprimento do vetor associado a essa transformação geométrica? Resposta: 5 u.c.

15. Em um plano cartesiano, construa o triângulo *ABC* cujas coordenadas dos vértices são $A(1, 2)$, $B(3, 2)$ e $C(4, 5)$. Em seguida, construa a imagem de *ABC* pela translação associada ao vetor $v = \overrightarrow{AB}$.
Resposta no final do **Livro do Estudante**.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Reflexão, rotação e translação

Nesta seção, com auxílio de um *software* de Geometria dinâmica, vamos obter a imagem de uma figura por reflexão em torno de uma reta, por rotação em torno de um ponto e pela translação associada a um vetor.

Transformação de reflexão

Vamos obter a imagem de um hexágono regular por reflexão em torno de uma reta.

A. Selecione a ferramenta **Ponto** e marque o ponto A.

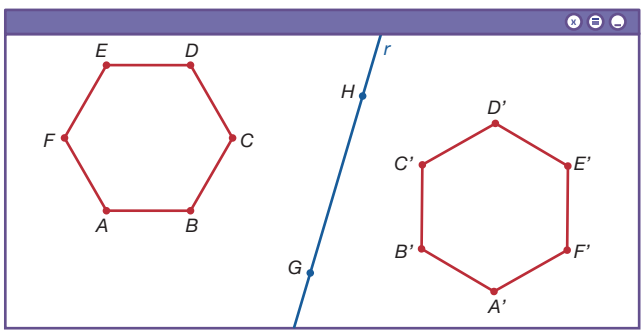
B. Com a ferramenta **Segmento com Comprimento Fixo**, construa o segmento $\overline{AB}$ com, por exemplo, $AB = 2$. Para isso, clique sobre o ponto A e, na janela **Segmento com Comprimento Fixo**, digite o comprimento do segmento, nesse caso, 2.

C. Selecione a ferramenta **Polígono Regular** e construa o hexágono regular $ABCDEF$. Para isso, selecione a ferramenta **Polígono Regular** e clique sobre os pontos A e B. Na janela, digite a quantidade de vértices do polígono, nesse caso, 6.

D. Construa a reta r. Para isso, selecione a ferramenta **Reta** e marque dois pontos.

E. Selecione a ferramenta **Reflexão em Relação a uma Reta**, clique sobre o hexágono e sobre a reta r, nessa ordem.

A seguir, é apresentado o polígono $ABCDEF$ e sua imagem por reflexão em torno da reta r.



SERGIO L. FILHO/ARQUIVO DA EDITORA

Transformação de rotação

A imagem de uma figura por rotação em torno de um ponto pode ser obtida da seguinte maneira.

A. Selecione a ferramenta **Polígono** e construa um polígono qualquer.

B. Com a ferramenta **Ponto**, marque um ponto X, externo ao polígono.

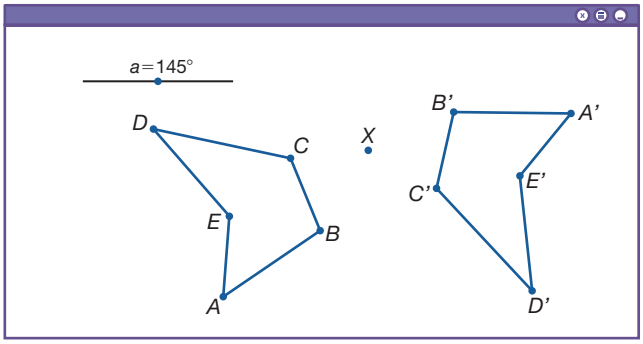
C. Crie o controle deslizante com variação entre 0° e 360°. Para isso, selecione a ferramenta **Controle Deslizante** e escolha uma posição na **Janela de Visualização**. Em seguida, na janela **Controle Deslizante**, selecione o formato ângulo, nomeie o controle por a e defina os valores máximo e mínimo, nesse caso, 360° e 0°, respectivamente.

D. Selecione a ferramenta **Rotação em Torno de um Ponto**, clique sobre o polígono e sobre o ponto X, nessa ordem. Na janela **Rotação em Torno de um Ponto**, defina o ângulo como a, mantendo o sentido da rotação como anti-horário.

E. Altere o valor de a no controle deslizante e perceba que o polígono sofrerá uma rotação em torno do ponto X segundo a medida assumida por a.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

A seguir, é apresentado o polígono *ABCDE* e sua imagem por rotação de 145° em torno do ponto *X* no sentido anti-horário.



Transformação de translação

Podemos obter a imagem de um polígono pela translação associada a um vetor, executando os seguintes procedimentos.

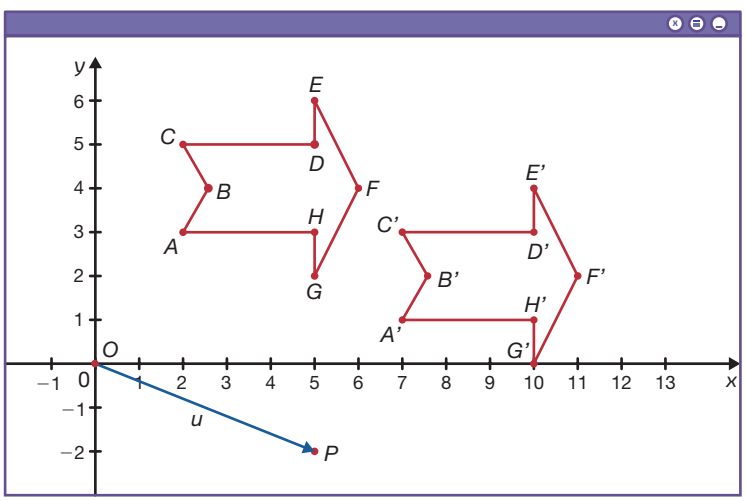
A. Com a ferramenta **Ponto**, construa os pontos $O(0, 0)$ e $P(5, -2)$.

B. Selecione a ferramenta **Vetor** e, em seguida, clique nos pontos *O* e *P*, nessa ordem.

C. Com a ferramenta **Polígono**, construa um polígono qualquer.

D. Selecione a ferramenta **Translação por um Vetor**, clique sobre o polígono e, em seguida, sobre o vetor $\overrightarrow{OP}$.

A seguir, é apresentado o polígono *ABCDEFGH* e sua imagem por translação associada ao vetor $u = \overrightarrow{OP}$.



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Agora é sua vez!

Dica

Para as construções propostas a seguir, aplique o que você aprendeu na seção, usando um *software* de Geometria dinâmica.

1. Construa, usando um *software* de Geometria dinâmica, um pentágono regular de lado 5. Em seguida, obtenha a imagem desse pentágono por reflexão em torno do eixo das abscissas. Se não for possível o acesso ao *software*, construa-o no caderno.

Resposta no final do **Livro do Estudante**.

2. Construa um quadrado *ABCD* cujas coordenadas dos vértices sejam $A(1, 4)$, $B(3, 2)$, $C(5, 4)$ e $D(3, 6)$ e uma reta *r* que passe pelos pontos $E(5, 3)$ e $F(7, -1)$. Em seguida, obtenha a imagem do quadrado *ABCD* por reflexão em torno da reta *r*. Se não for possível o acesso ao *software*, construa-o no caderno.

Resposta no final do **Livro do Estudante**.

Dica

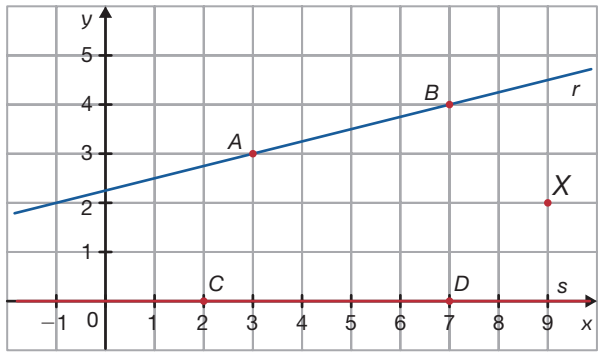
Para marcar o ponto *A*, por exemplo, digite, no campo **Entrada...**, $A = (1, 4)$.

3. Construa um hexágono regular *ABCDEF* e um ponto *X*, externo ao hexágono. Em seguida, obtenha a imagem desse hexágono por rotação de centro *X* e ângulo de: Respostas no final do **Livro do Estudante**.

- 30° no sentido anti-horário.
- 60° no sentido horário.
- 270° no sentido anti-horário.

4. Construa o ponto $X(1, 2)$ e o triângulo *ABC* cujas coordenadas dos vértices são $A(-1, 7)$, $B(3, 2)$ e $C(-5, -4)$. Em seguida, obtenha a imagem desse triângulo por rotação de 72° em torno do ponto *X*, no sentido horário. Resposta no final do **Livro do Estudante**.

5. Na imagem estão representados o ponto *X* e as retas *r* e *s*.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

a) Quais são as coordenadas do ponto *X*? Resposta: (9, 2)

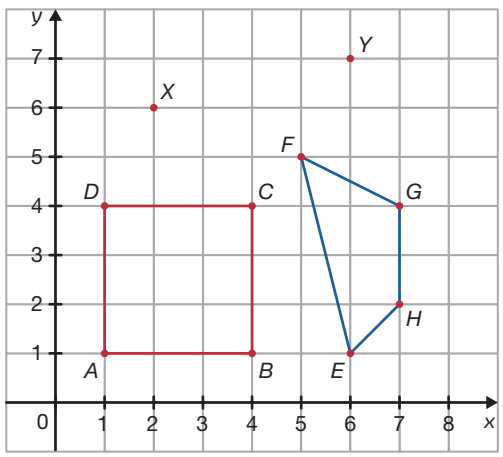
b) Quais são as coordenadas dos pontos *A* e *B* pertencentes à reta *r*? E dos pontos *C* e *D* pertencentes à reta *s*? Resposta: $A(3, 3)$ e $B(7, 4)$; $C(2, 0)$ e $D(7, 0)$

c) Construa o ponto *X* e as retas *r* e *s*, com auxílio do *software* de Geometria dinâmica. Em seguida, utilizando seus conhecimentos sobre transformação de rotação, construa um quadrado *XYZW*, de maneira que *Y* pertença a *r* e *Z* pertença a *s*.
Resposta no final do **Livro do Estudante**.

6. Construa um pentágono regular *ABCDE* de lado 3. Em seguida, obtenha a imagem do pentágono *ABCDE* pela translação associada ao vetor $v = \overrightarrow{OP}$, com $O(5, 0)$ e $P(2, -2)$.
Resposta no final do **Livro do Estudante**.

7. Construa o quadrilátero *ABCD* cujas coordenadas dos vértices são $A(2, 0)$, $B(4, 3)$, $C(3, 7)$ e $D(-1, 5)$. Obtenha a imagem *A'B'C'D'* do quadrilátero *ABCD* por translação de modo que um de seus vértices coincida com o ponto $X(-3, 1)$. Resposta no final do **Livro do Estudante**.

8. Com base em seus conhecimentos sobre transformação de translação, construa um paralelogramo *XYZW*, de maneira que *Z* esteja sobre um dos lados do quadrado *ABCD* e *W* sobre um dos lados do quadrilátero *EFGH*.
Resposta no final do **Livro do Estudante**.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Composição de transformações

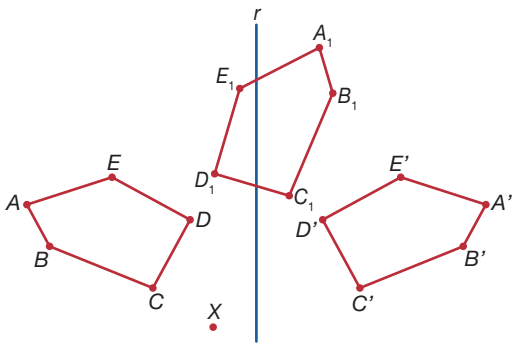
Estudamos as transformações de reflexão, rotação e translação. Agora, vamos analisar algumas combinações dessas transformações.

Observação

Perceba que a composição de transformações isométricas é também uma transformação isométrica.

Reflexão e rotação

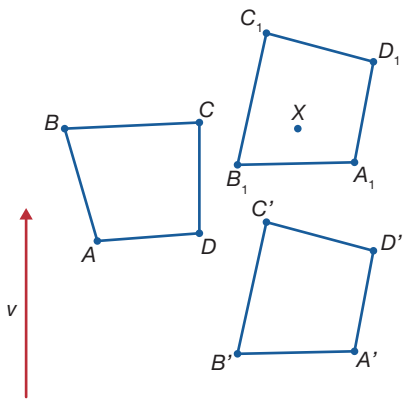
Seja o polígono *ABCDE*, a reta *r* e o ponto *X*. Ao aplicarmos, no polígono *ABCDE*, uma reflexão em torno da reta *r* seguida de uma rotação de 45° em torno do ponto *X* no sentido anti-horário, obtemos o polígono $A_1B_1C_1D_1E_1$.



Aplicando ao polígono *ABCDE* a reflexão em torno da reta *r*, obtemos o polígono $A'B'C'D'E'$ e, aplicando a este polígono uma rotação de centro *X*, obtemos o polígono $A_1B_1C_1D_1E_1$.

Rotação e translação

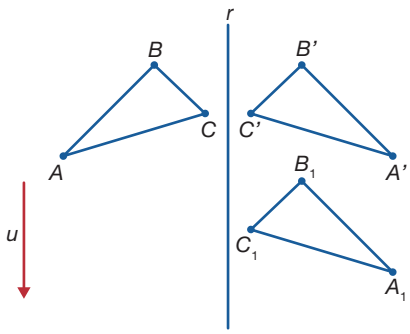
Seja o polígono *ABCD*, o ponto *X* e o vetor *v*. Ao aplicarmos, no polígono *ABCD*, uma rotação de 75° em torno do ponto *X*, no sentido anti-horário, seguida de uma translação associada ao vetor *v*, obtemos o polígono $A_1B_1C_1D_1$.



Aplicando ao polígono *ABCD* a rotação de centro *X*, obtemos o polígono $A'B'C'D'$ e, aplicando a este polígono uma translação associada ao vetor *v*, obtemos o polígono $A_1B_1C_1D_1$.

Reflexão e translação

Seja o polígono *ABC*, a reta *r* e o vetor *u*. Ao aplicarmos, no polígono *ABC*, uma transformação de reflexão em torno da reta *r* seguida de uma translação associada ao vetor *u*, obtemos o polígono $A_1B_1C_1$.



Aplicando ao polígono *ABC* a reflexão em torno da reta *r*, obtemos o polígono $A'B'C'$ e, aplicando a este polígono uma translação associada ao vetor *u*, obtemos o polígono $A_1B_1C_1$.

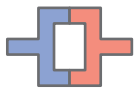
ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

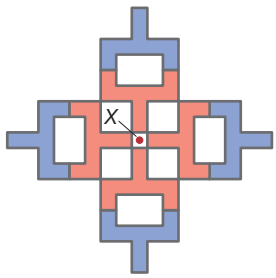
Com uma composição de transformações de reflexão, rotação e translação, podemos construir figuras. Analise, por exemplo, a figura construída usando uma composição de transformações.

Nessa construção, foram realizados os seguintes procedimentos.

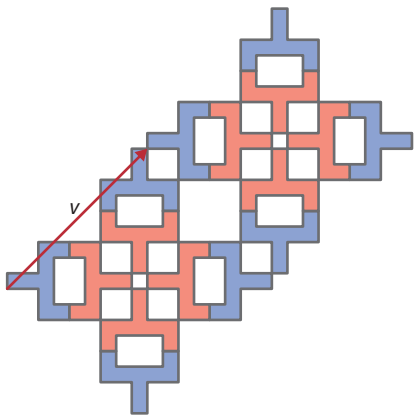
1. Construiu-se a seguinte figura.



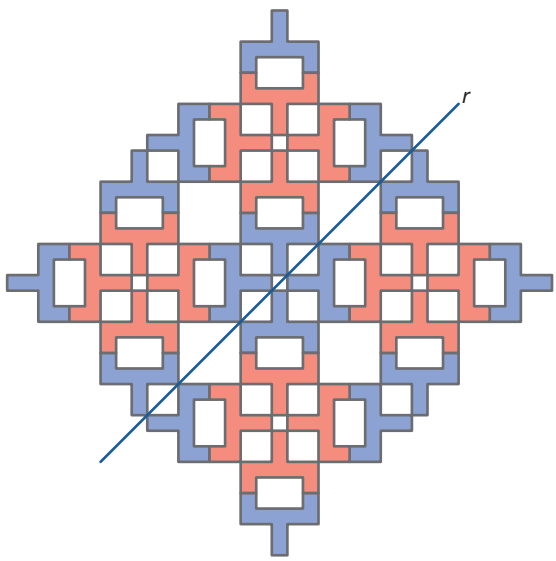
2. Em seguida, foram aplicadas, nessa figura, três transformações de rotação em torno do ponto *X*: uma de 90°, uma de 180° e uma de 270°, todas no sentido anti-horário.



3. Na sequência, aplicou-se, na figura obtida no passo **2**, uma transformação de translação associada ao vetor *v*.



4. Por fim, aplicou-se, na figura obtida no passo **3**, uma transformação de reflexão em torno da reta *r*.



Observação

Em geral, trocando a ordem das transformações, o resultado é diferente.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

TRABALHO E JUVENTUDES

O trabalho do artista plástico

As transformações geométricas podem ser utilizadas por diferentes profissionais, como é o caso dos artistas plásticos. Esse profissional pode trabalhar com a pintura de telas ou gravuras, além da produção de esculturas, desenvolvendo objetos de cerâmica, porcelana ou madeira, e de instalações de diferentes dimensões, com o objetivo de expressar sua concepção artística e provocar diferentes sensações e reflexões por meio da linguagem visual.

SEVENTY FOUR/SHUTTERSTOCK



Artista plástico trabalhando, em momento criativo.

PARA EXPANDIR

Que tal conhecer o local de trabalho de um artista plástico ou visitar alguma galeria, feira ou museu de arte da região?

Para isso, informe-se nos canais adequados e busque eventos que valorizem artistas nacionais, a fim de adquirir mais conhecimento sobre nossa cultura e expressão artística.

Observação

É possível se tornar um artista plástico cursando graduação em Artes Plásticas. O curso é ofertado em universidades públicas e privadas do Brasil, nas habilitações de licenciatura e de bacharelado, e dura em média quatro anos.

Suas obras costumam ser expostas em museus, galerias e eventos artísticos de diversas cidades do mundo e comercializadas nesses espaços ou em *sites* da internet. Além disso, o artista plástico, em parceria com outros profissionais, como os artistas visuais, pode atuar em empresas de comunicação visual, criando desenhos para *sites*, revistas, jornais e livros. Já no setor educacional, ele pode ministrar aulas e cursos de Arte para estudantes de diferentes níveis de ensino.

Existem também artistas plásticos que se especializam na restauração de obras de arte. Outros transformam espaços da cidade, como muros, edifícios e viadutos, em arte urbana, por meio da técnica do grafite ou do **muralismo**, por exemplo.

Muralismo: movimento artístico caracterizado pela execução de grandes pinturas em painéis e paredes com a representação de temas populares, de problemas sociais, de figuras históricas etc.

1. Resposta: Os artistas plásticos criam obras de arte de autoria própria, como telas e esculturas. Também trabalham com a criação de desenhos artísticos para empresas de comunicação visual, atuam em escolas e universidades, além de trabalhar com a restauração de peças e com pinturas e desenhos de arte urbana. Incentive os estudantes que demonstrarem interesse pela profissão a comentar para os colegas os principais motivos que os levaram a ter interesse em seguir a carreira. Pergunte-lhes também de que maneira gostariam de trabalhar nessa profissão.

Atividades

Anote as respostas no caderno.

1. De acordo com as informações da seção, quais trabalhos são realizados pelos artistas plásticos? Você se identificou com essa profissão? Em caso afirmativo, como você atuaria nela? Conte para os colegas.

2. Reúna-se com mais quatro colegas e realizem uma entrevista com um artista plástico do município onde moram. Para isso, utilizem o seguinte roteiro.

- Nome do artista.
- Tipo de trabalho.
- Técnicas utilizadas.
- Principais obras criadas.
- Artistas que são referência para ele nesse trabalho.
- Importância do seu trabalho para a sociedade.

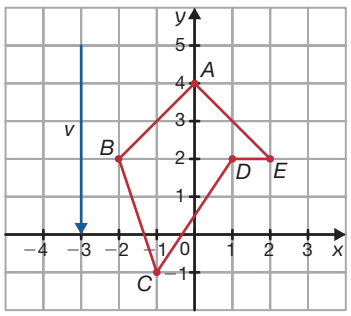
Para finalizar, apresentem em sala de aula o resumo da entrevista.

Resposta pessoal. Auxilie os estudantes na organização das entrevistas. Explique que a atividade pode ser realizada com artistas plásticos de diferentes áreas, como pintores, escultores, desenhistas, ceramistas etc. Se porventura não houver artistas disponíveis para todos os grupos entrevistarem, solicite-lhes que façam uma pesquisa na internet em vez de entrevistas, seguindo as mesmas informações sugeridas no roteiro.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Anote as respostas no caderno.

16. Considere o polígono *ABCDE* e o vetor *v*.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Dica

Para facilitar a resolução, você pode construir o polígono *ABCDE* em um plano cartesiano e depois aplicar as transformações indicadas.

Ao aplicarmos uma reflexão em torno do eixo *y* seguida de uma translação associada ao vetor *v*, obtemos o polígono *A'B'C'D'E'*. Quais são as coordenadas dos vértices desse polígono?

Resposta: $A'(0, -1)$, $B'(2, -3)$, $C'(1, -6)$, $D'(-1, -3)$ e $E'(-2, -3)$.

17. Em um plano cartesiano, construa um pentágono regular com um dos vértices sendo $O(0, 0)$. Em seguida, obtenha a imagem desse pentágono aplicando, sobre ele, uma rotação de 90° em torno da origem do plano cartesiano, no sentido anti-horário, seguida de uma translação associada ao vetor $v = \overrightarrow{AB}$, com $A(7, 3)$ e $B(4, 2)$.

Resposta no final do **Livro do Estudante**.

18. Vimos, anteriormente, que é possível identificar transformações geométricas na arte marajoara, que se caracteriza por padrões decorativos que se repetem com traços gráficos simétricos e cores da decoração marajoara. Podemos verificar alguns desses padrões nas cerâmicas apresentadas a seguir.



CASSANDRA CURY/PULSAR IMAGENS

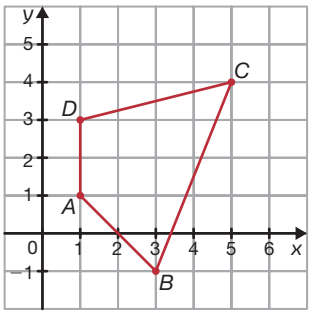
Vasos em cerâmica marajoara expostos no mercado, em Campo Grande, Mato Grosso do Sul, em 2015.

a) Que transformações geométricas (reflexão, rotação ou translação) você identifica nas cerâmicas apresentadas? Resposta: Reflexão, rotação e translação.

b) Com o auxílio de instrumentos de geometria e uma malha quadriculada, crie um desenho baseando-se na arte marajoara. Resposta pessoal.

Orientações sobre este item no **Suplemento para o professor**.

19. Considere o polígono *ABCD*.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

a) Em um plano cartesiano, construa o polígono *ABCD*. Em seguida, obtenha a imagem *A'B'C'D'* desse polígono aplicando, sobre ele, uma rotação de 180° seguida de uma reflexão em torno do eixo *x*. Resposta no final do **Livro do Estudante**.

b) É possível obter a figura *A'B'C'D'* aplicando, sobre o polígono *ABCD*, uma transformação ou composição de transformações diferente da descrita no item **a**? Resposta no final do **Livro do Estudante**.

20. Maurits Cornelis Escher (1898-1972), mais conhecido como M. C. Escher, foi um dos mais famosos artistas gráficos do mundo. Em algumas de suas obras, foi aplicado o conceito de transformações geométricas.



© 2024 THE M.C. ESCHER COMPANY-THE NETHERLANDS. ALL RIGHTS RESERVED

ESCHER, Maurits Cornelis. *Desenho simétrico (E59)*. 1942. Aquarela, 237 mm × 224 mm. Coleção particular.

OBJETO DIGITAL ***Vídeo:*** A tesselação de Escher

a) Escreva quais transformações (reflexão, rotação ou translação) ou composições podem ser identificadas na obra de arte de Escher.

b) Com o auxílio de um *software* de Geometria dinâmica, construa uma imagem por meio de transformações geométricas. Resposta pessoal.

Orientações sobre este item no **Suplemento para o professor**.

20. a) Resposta: Transformação de rotação, transformação de translação, transformação de reflexão seguida de translação.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Homotetia

A prática de compartilhar informações e imagens nas redes sociais vem ganhando espaço na comunicação entre as pessoas. Com isso, a busca por profissionais que atuem na área de edição de fotos e imagens tem obtido destaque. Por consequência, o trabalho com o uso de *softwares* e aplicativos que editam imagens tem aumentado. Neste tópico, vamos aprender algumas maneiras de ampliar ou reduzir uma imagem evitando distorções.

Uma maneira de reduzir ou ampliar uma foto mantendo as proporções da imagem, evitando distorções, é aplicar sobre ela uma transformação geométrica denominada homotetia.

Uma **homotetia** de centro O e razão k é a transformação que a cada ponto P faz corresponder o ponto P' tal que:

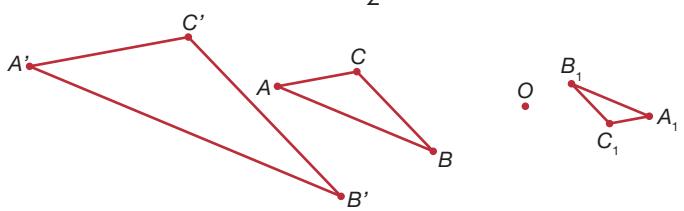
$$\overrightarrow{OP'} = k \cdot \overrightarrow{OP}$$

Se $k > 0$, então $OP' = k \cdot OP$ e os segmentos orientados $\overrightarrow{OP}$ e $\overrightarrow{OP'}$ têm o mesmo sentido. Se $k < 0$, então $OP' = |k| \cdot OP$ e os segmentos orientados $\overrightarrow{OP}$ e $\overrightarrow{OP'}$ têm sentidos opostos.

Observação

É possível demonstrar que a homotetia transforma qualquer figura F em uma figura F' semelhante a F.

A seguir são apresentadas as imagens de um triângulo ABC pelas homotetias de centro O e razão 2 e de centro O e razão $-\frac{1}{2}$.



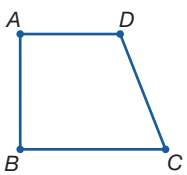
O triângulo $A'B'C'$ é a imagem do triângulo ABC pela homotetia de centro O e razão 2. Já o triângulo $A_1B_1C_1$ é a imagem do triângulo ABC pela homotetia de centro O e razão $-\frac{1}{2}$.

RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Exercícios e problemas resolvidos

R2. Usando régua e compasso, construa uma ampliação do polígono $ABCD$ com razão de proporcionalidade 2.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Observação

O quociente comum entre o comprimento dos lados correspondentes do polígono original e sua imagem é denominado **razão de proporcionalidade**.

Resolução

Professor, professora: Durante o uso em sala de aula, oriente os estudantes no manuseio cuidadoso do compasso, pois sua ponta afiada pode causar arranhões e cortes caso fique exposta e seja manipulada inadvertidamente.

Para essa construção, vamos realizar os seguintes procedimentos.

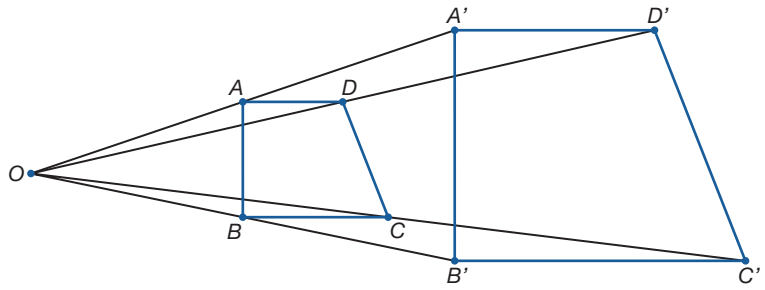
A. Dado o polígono $ABCD$, marque o ponto O exterior a esse polígono.

B. Com o auxílio da régua, trace as semirretas $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ e $\overrightarrow{OD}$.

C. Usando o compasso, marque sobre a semirreta $\overrightarrow{OA}$ o ponto A', com $OA' = 2 \cdot OA$. Para isso, com a abertura do compasso igual a OA e com a ponta-seca em A, marque o ponto A', de maneira que os segmentos orientados $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{AA'}$ tenham o mesmo sentido.

D. De maneira semelhante à apresentada no passo **C**, marque, sobre as semirretas $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ e $\overrightarrow{OD}$, respectivamente, os pontos B', C' e D', com $OB' = 2 \cdot OB$, $OC' = 2 \cdot OC$ e $OD' = 2 \cdot OD$.

E. Por fim, construa o polígono $A'B'C'D'$, que é a imagem de $ABCD$ pela homotetia de centro O e razão 2.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

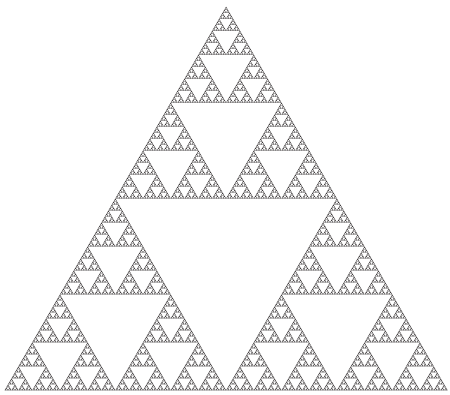
Exercícios e problemas

Anote as respostas no caderno.

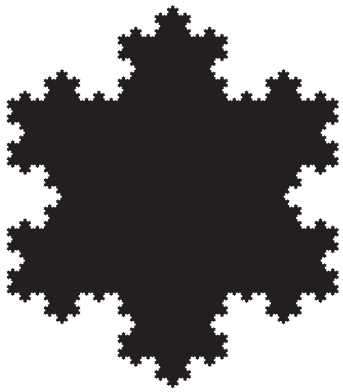
21. Construa um triângulo ABC com $AB = 5$ cm, $BC = 4$ cm e $AC = 3$ cm. Em seguida, utilizando régua e compasso, construa uma ampliação desse triângulo cuja razão de proporcionalidade é 3.

Resposta no final do **Livro do Estudante**.

22. Analise os fractais a seguir.



Triângulo de Sierpiński.



Floco de neve de Koch.

a) É possível identificar transformações geométricas nesses fractais? Em caso afirmativo, quais?

Resposta: Sim. Sugestões de resposta: homotetia, rotação, translação e reflexão.

b) É possível construir as figuras **1a** e **1b** aplicando transformações geométricas na figura **1**? Converse com os colegas e o professor sobre essas construções.

Resposta: Sim. Espera-se que os estudantes percebam que para construir a figura **1a** é possível aplicar, por exemplo, uma homotetia seguida por reflexões ou translações. Já no caso da figura **1b**, é possível, por exemplo, aplicar uma rotação.

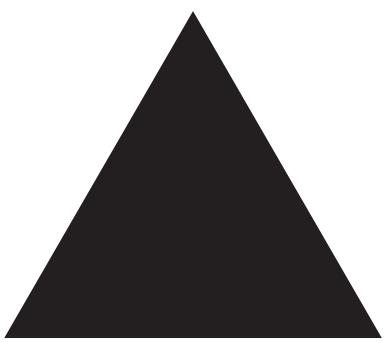


Figura **1.**

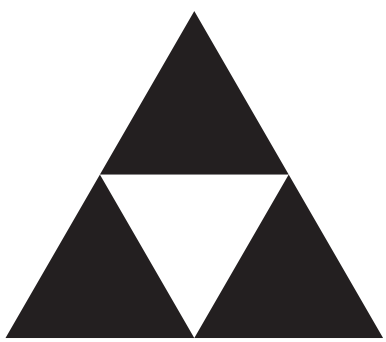


Figura **1a.**

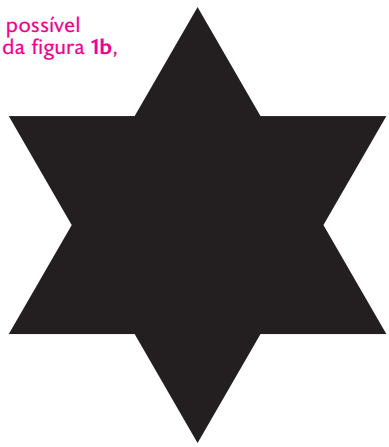


Figura **1b.**

ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Ampliando e reduzindo figuras

Nesta seção, com auxílio de um *software* de Geometria dinâmica, vamos ampliar e reduzir um polígono utilizando homotetia.

A. Selecione a ferramenta **Polígono** e construa um polígono qualquer.

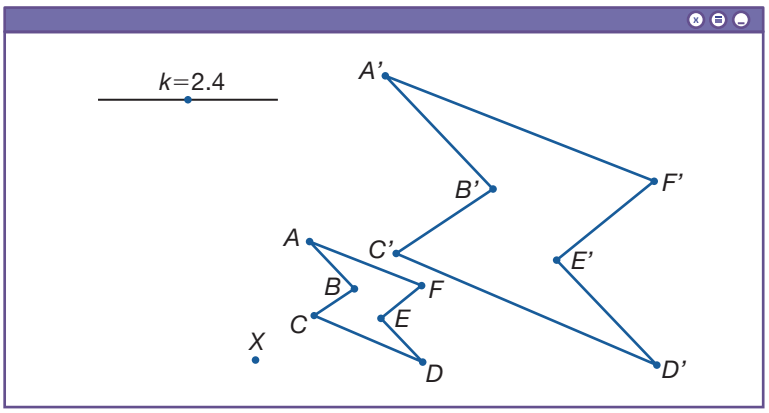
B. Crie o controle deslizante k. Para isso, com a ferramenta **Controle Deslizante**, selecione uma posição na **Janela de Visualização**. Em seguida, na janela **Controle Deslizante**, nomeie o controle por k, selecione o formato **número** e defina os valores máximo e mínimo, por exemplo, 10 e -10, respectivamente.

C. Com a ferramenta **Ponto**, marque um ponto X. Esse ponto será o centro da homotetia.

D. Selecione a ferramenta **Homotetia**, clique sobre o polígono e sobre o ponto X. Em seguida, na janela **Homotetia**, defina o fator como k.

E. Para ampliar, reduzir ou reproduzir $(k = 1)$, altere o valor de k no controle deslizante.

A seguir, é apresentada a imagem do polígono $ABCDEF$ pela homotetia de centro X e razão 2,4.



SERGIO L. FILHO/ARQUIVO DA EDITORA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Agora é sua vez!

Dica

Para as construções propostas a seguir, aplique o que você aprendeu na seção, usando um *software* de Geometria dinâmica.

Respostas no final do **Livro do Estudante**.

1. Construa um quadrado $ABCD$ de lado 5, com $A(2, 3)$. Em seguida, obtenha uma:

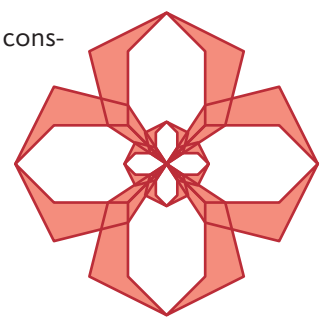
- ampliação do quadrado $ABCD$ com razão de proporcionalidade 2.
- redução do quadrado $ABCD$ com razão de proporcionalidade $\frac{1}{4}$.

2. Construa um hexágono regular de lado 3 e o ponto $A(1, 1)$. Em seguida, construa a imagem desse hexágono pela homotetia e centro A e razão -2.

3. Junte-se a um colega e conversem sobre possíveis procedimentos para construir, com transformações geométricas, a imagem apresentada. Em seguida, construa-a.

Dica

Uma possibilidade é construir, inicialmente, o polígono $ABCDEF$, com $A(7, 10)$, $B(4, 8)$, $C(3, 5)$, $D(7, 3)$, $E(5, 5)$ e $F(5, 8)$.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

6. Sugestão de resposta: Inicialmente, determino o comprimento c do vetor. Em seguida, construo os segmentos $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$ e $\overline{DD'}$, tais que $AA' = BB' = CC' = DD' = c$. Por fim, traço os segmentos $\overline{A'B'}$, $\overline{B'C'}$, $\overline{C'D'}$ e $\overline{A'D'}$.

Anote as respostas no caderno.

SÍNTESE DO CAPÍTULO

4. c) Resposta: Falsa. Sugestão de correção: Um vetor é um segmento de reta orientado que tem comprimento, direção e sentido.

Neste capítulo, estudamos reflexão, rotação, translação e homotetia. Agora, chegou a hora de refletir sobre o que você aprendeu! Como estratégia, sugerimos que você faça uma autoavaliação, revise conceitos e sintetize o que foi estudado. Para isso, resolva as questões propostas. 7. Resposta: Sim, pois é possível traçar uma reta r vertical de tal maneira que o polígono $OPQRSTU$ seja imagem do polígono $CDEFGHI$ por reflexão em torno da reta r.

1. Você conhecia algum dos conteúdos estudados neste capítulo? Cite-os. Resposta pessoal. Orientações sobre esta questão no **Suplemento para o professor**.

2. Reflita sobre os questionamentos apresentados a seguir e, se necessário, retome o que foi estudado.

- Compreendi os conceitos trabalhados envolvendo reflexão, rotação e translação?
- Identifico a imagem de uma figura por reflexão em torno de uma reta?
- Reconheço a imagem de uma figura por rotação em torno de um ponto?
- Identifico vetores e suas características?
- Construo a imagem de um polígono por translação associado a um dado vetor?
- Efetuo cálculos para obter a razão de proporcionalidade em situação de ampliação?
- Uso um *software* de Geometria dinâmica para construir imagens de figuras por reflexão, rotação e translação?
- Tive dificuldades em algum dos conceitos estudados neste capítulo? 2. Resposta pessoal. Orientações sobre esta questão no **Suplemento para o professor**.
- Fiquei com dúvidas?

3. Cite duas situações em que podemos identificar transformações geométricas.
Sugestão de resposta: Obras de arte e fachadas de prédios.

4. Classifique cada uma das afirmações apresentadas a seguir em verdadeira ou falsa. Depois, reescreva as falsas, em seu caderno, tornando-as verdadeiras.

a) No plano, a reflexão em torno de uma reta r é uma transformação geométrica que a cada ponto X faz corresponder um ponto X', simétrico a X em relação à r. Resposta: Verdadeira.

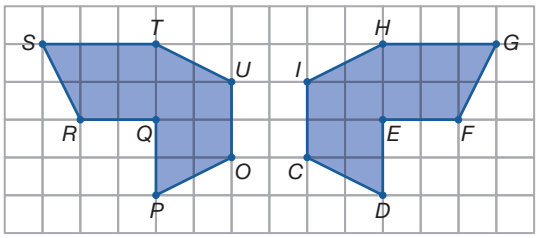
b) No plano, uma translação de centro A e ângulo α é uma transformação geométrica que a cada ponto X faz corresponder um ponto X' tal que $AX \neq AX'$ e $X\hat{A}X' = \alpha$.

c) Um vetor é um segmento de reta orientado que tem apenas comprimento e direção.

5. Escreva um passo a passo que possibilite construir o simétrico de um ponto X em relação a uma reta r usando régua e compasso.

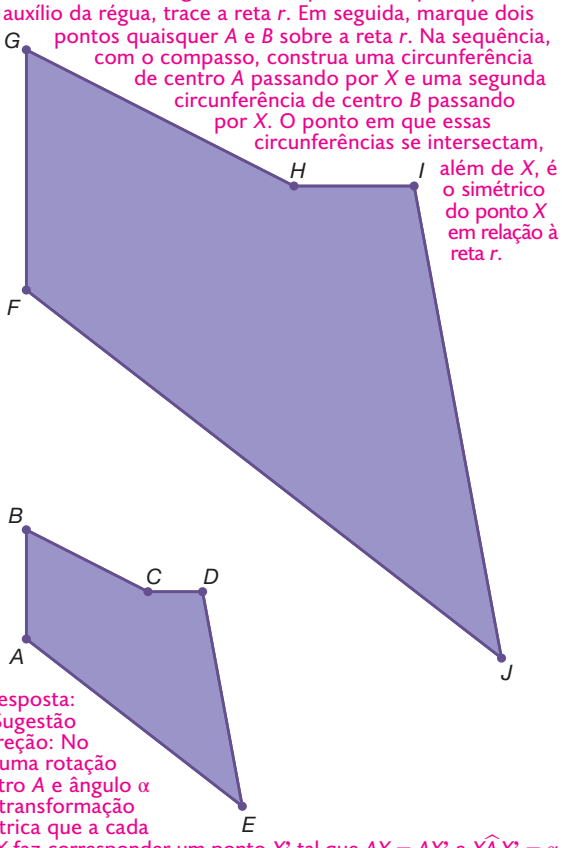
6. Explique para um colega como você faria para construir a imagem $A'B'C'D'$ do polígono $ABCD$ por translação associada a um vetor.

7. Os polígonos apresentados na malha quadriculada são congruentes? Justifique sua resposta.



OHANNA SCHMITT/ARQUIVO DA EDITORA

8. O polígono $FGHIJ$ é uma ampliação do polígono $ABCDE$. 5. Sugestão de resposta: Marque o ponto X e, com auxílio da régua, trace a reta r. Em seguida, marque dois pontos quaisquer A e B sobre a reta r. Na sequência, com o compasso, construa uma circunferência de centro A passando por X e uma segunda circunferência de centro B passando por X. O ponto em que essas circunferências se intersectam, além de X, é o simétrico do ponto X em relação à reta r.



OHANNA SCHMITT/ARQUIVO DA EDITORA

4. b) Resposta: Falsa. Sugestão de correção: No plano, uma rotação de centro A e ângulo α é uma transformação geométrica que a cada ponto X faz corresponder um ponto X' tal que $AX = AX'$ e $X\hat{A}X' = \alpha$.

Sabendo que $AE = 5$ e que $FJ = 11$, determine a razão de proporcionalidade dessa ampliação.
Resposta: 2,2

9. Escolha um dos conteúdos estudados neste capítulo e elabore um problema envolvendo-o. Depois, troque com um colega para que ele o resolva. Por fim, verifique se a resposta obtida por ele está correta. 10. Resposta pessoal. Orientações sobre esta questão no **Suplemento para o professor**.

10. Faça uma síntese do que foi estudado neste capítulo. Nela, use desenhos e dê exemplos.

9. Resposta pessoal. Antes de os estudantes elaborarem o problema, peça a eles que analisem os contextos propostos nas seções **Exercícios e problemas** deste capítulo e, se julgar conveniente, oriente-os a investigar outros problemas disponíveis em provas de vestibular e Enem.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Ação e participação

Esta seção propõe um trabalho articulado com outros componentes curriculares envolvendo objetivos comuns, além da proposta de trabalho em grupo cujo objetivo principal é favorecer o desenvolvimento de habilidades e a compreensão relacionada a alguns assuntos específicos. Por ser um trabalho em grupo, vocês podem pensar em vários questionamentos durante a execução do projeto, organizar as ideias e fazer anotações no caderno. Nesse momento de surgimento de ideias e de planejamentos, é necessária a participação de todos, além de um registro escrito coletivo com as anotações que considerarem mais relevantes.

Um projeto constitui-se em uma proposta de trabalho temporária e única, ou seja, não repetitiva, caracterizada por ter início, meio e fim bem definidos e com objetivo claro e viável.

Professor, professora: A elaboração e a execução bem-sucedida de um projeto interdisciplinar requerem um trabalho devidamente programado entre professores de diversos componentes curriculares e estudantes. Por esse motivo, é importante combinar os momentos de orientação e acompanhamento individual e coletivo com os demais professores envolvidos.



O **tema** para ser trabalhado em um projeto pode surgir de diversas ideias, como a constatação de uma necessidade da comunidade escolar e da comunidade do bairro onde a escola está localizada ou até mesmo um tema de interesse da turma. Dependendo do tema escolhido, vocês precisam estudar mais sobre o assunto antes de seguir com as outras etapas.

Com um tema definido, é o momento de estabelecer os **objetivos** com metas claras que possam ser verificadas ao longo da execução do projeto.

A próxima etapa é o **planejamento**, no qual se define quem vai participar e qual será a responsabilidade de cada um. Todas essas informações devem estar anotadas e ter prazos definidos.

Com base no planejamento, é elaborado um cronograma de acompanhamento, e, em determinadas datas, será necessário verificar se os objetivos estão sendo atingidos até ali e se é preciso alterar algo, fazendo uma correção de rota ou novos alinhamentos.



ILUSTRAÇÕES: FABIO EIJI SIRASUMA/ARQUIVO DA EDITORA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.



Na etapa de planejamento, pode-se tratar também da coleta de informações sobre o tema por meio da consulta de diversas fontes, como preenchimento de formulário, enquete em aplicativo ou o método de entrevistas.

O planejamento precisa prever também como será a apresentação do trabalho, determinando os recursos e as estratégias de apresentação, como *slides*, cartazes, esquemas e até as falas de cada participante, no caso de apresentação presencial ou virtual.

Em seguida, ocorre a etapa de **desenvolvimento**, também denominada implementação ou execução, que é a realização do trabalho seguindo a organização do planejamento. Geralmente, nessa etapa, são necessários alguns ajustes, definidos em momentos de avaliação, a fim de verificar se os objetivos estabelecidos estão sendo alcançados. A data para esses momentos de avaliação já deve estar definida no cronograma de acompanhamento.

Na etapa de desenvolvimento, o recurso definido no planejamento como estratégia de apresentação deve ser detalhado e produzido, e todas as possíveis falas de cada participante devem ser redigidas.

Depois disso, ocorre a **divulgação** do trabalho, na qual se torna público o resultado de todo o projeto. Dependendo do que foi planejado, essa divulgação é feita para a comunidade escolar, mostrando os resultados obtidos, ou nas mídias da escola e em outras plataformas. Por isso, é importante guardar os registros pesquisados e outros de momentos do desenvolvimento, como fotos, vídeos, textos e anotações por escrito.





ILUSTRAÇÕES: FABIO EIJI SIRASUMA/ARQUIVO DA EDITORA

Todo projeto deve finalizar com a etapa de **avaliação**, na qual são analisados os resultados do trabalho. Nesse momento, seria adequado fazer uma autoavaliação sobre a participação individual, além de uma avaliação coletiva, para verificação do desempenho e da evolução das aprendizagens do conteúdo, inclusive dos diferentes componentes curriculares envolvidos, se houver. Por fim, é importante o professor também apresentar uma avaliação do grupo considerando o convívio social, a participação, a colaboração e o cumprimento de prazos e das metas estabelecidas.

Neste volume, vamos apresentar duas sugestões de projetos com os temas já definidos. Estamos propondo a vocês a realização de cada um deles. Bom trabalho!

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Professor, professora: Os objetivos desta seção são: reconhecer o grafite como arte e diferenciá-lo da pichação; conhecer estilos de letras usadas na arte do grafite; conhecer trabalhos de grafiteiros brasileiros que se destacam no Brasil e no mundo; elaborar em grupo uma representação de um grafite para posterior apresentação em murais; reconhecer a abordagem temática de reflexão social do grafite.

Projeto A - Grafite na escola

Início de conversa

Professor, professora: Para a execução deste projeto, será necessário prever no mínimo 12 aulas.

As imagens mostram exemplos de uma arte conhecida como grafite ou grafíti, que é retratada em espaços urbanos por meio da pintura com tinta em *spray* na composição.



RONALDO_SILVA/SHUTTERSTOCK

Grafites de autoria de diversos artistas, no Beco do Batman, Vila Madalena, na cidade de São Paulo, em 2024.



ARAVANI ART PROJECT AND ST/INDIA FOUNDATION/KANDARP/SHUTTERSTOCK

Grafites em murais do distrito artístico de Lodhi, em Nova Délhi, Índia, em 2024.

Analisando essas imagens, responda às questões.

a) Você já verificou pessoalmente uma arte semelhante à retratada nessas fotos?

b) Qual é a principal mensagem que essas imagens transmitem para você?

c) Em sua opinião, qual é a diferença entre essa arte e a pichação?

d) Pesquise uma arte em grafite e descreva a reflexão abordada, o autor e onde está localizada essa arte.

a) Resposta pessoal. Possivelmente, os estudantes já verificaram a arte do grafite em alguns muros ou em imagens da internet ou da televisão. Caso eles não tenham verificado, apresente a eles imagens de outros grafites.

b) Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes mencionem que a diversidade de cores e desenhos deixa as ruas mais alegres e bonitas. Na imagem da Índia, é possível que eles identifiquem elementos da diversidade cultural desse país.

c) Resposta pessoal. Com relação às linguagens, é possível que os estudantes mencionem que pichações geralmente são palavras ou mensagens escritas, muitas vezes com caracteres estilizados. Já o grafite também pode conter desenhos, que costumam ser mais coloridos. É possível que a turma mencione a diferença de aceitação social entre essas expressões visuais, pois as pichações costumam danificar patrimônios, são feitas sem autorização e são consideradas crime ambiental, enquanto o grafite é mais aceito socialmente: em geral, é feito com autorização e revitaliza lugares urbanos por meio da arte.

d) Resposta pessoal. Possivelmente, os estudantes escolherão temas que chamem a atenção deles. Liste na lousa os nomes dos artistas e das fotos dos grafites produzidos por eles, além da reflexão que eles favorecem. Depois, oriente a turma a apresentar o resultado da pesquisa em sala de aula.

Em ação

O grafite é uma manifestação artística em muros e paredes do espaço urbano. Essa arte pode propor críticas e reflexões sobre diversos temas, como meio ambiente, igualdade de gênero e desigualdade social.

Neste projeto, você e os colegas deverão criar uma arte inspirada no grafite e apresentá-la à turma. Essa apresentação será feita em um mural de desenhos em papel *kraft*. As produções deverão ser coladas em um muro ou uma parede da escola. Solicitem à coordenação para, se possível, reservar um espaço para expor os grafites que vocês vão criar.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Professor, professora: Explique aos estudantes que a palavra **grafite**, no idioma grego, vem de ***graphéin***, que significa "escrever". A palavra ***graffito*** significa, em latim e italiano, "escritas feitas em paredes" ou "escritas feitas com carvão".

Reúnam-se em grupos e decidam o tema que querem abordar, as cores, os traços e as imagens que pretendem utilizar na elaboração da arte. Se possível, solicitem auxílio e orientação do professor de **Arte**.

Pesquisando mais sobre o tema

Na década de 1970, nas periferias de Nova York, o grafite, como conhecemos hoje, surgiu como uma crítica aos padrões estabelecidos do fazer arte. O grafite se une à cultura do *Hip-Hop* que também inclui, música (*rap*) e dança (*break*), traduzindo uma expressão artística de vivência de rua representada por meio de cores, traços e formas nos muros e nas paredes do ambiente urbano.

Entre os materiais utilizados nessa arte estão o látex e a tinta em *spray*. Confira a seguir alguns estilos e técnicas do grafite.

Professor, professora: De acordo com as competências específicas e as habilidades de Matemática e suas Tecnologias no Ensino Médio, o desenvolvimento deste projeto trabalha a **Competência específica 1**, que trata de utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e das Ciências Humanas, além das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgadas por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.



MEHANIQ/SHUTTERSTOCK

O grafite estilo *Throw up* é usado em pinturas rápidas, com letras engraçadas ou deformadas, de formato arredondado.

Exemplo de grafite *Throw up*.

Professor, professora: Enfatize para os estudantes que tanto o grafite quanto a pichação são expressões visuais populares que intervêm no espaço urbano e podem levar a reflexões sociais sobre a ocupação do espaço público. Porém, a pichação costuma estar ligada à disputa territorial entre grupos no espaço urbano, como manifestação complexa e polêmica, cujas mensagens e assinaturas costumam danificar fachadas de patrimônios públicos e privados, muitas vezes interferindo em construções históricas, e são consideradas poluição visual. Já o grafite busca ocupar muros e fachadas a fim de transformar a paisagem manifestando o imaginário dos artistas ou as reflexões sobre diferentes temas sociais.



VECSTER/SHUTTERSTOCK

O grafite *Wildstyle* apresenta estilo sem definição, com bastante cor e letras entrelaçadas e distorcidas, nem sempre legíveis.

Exemplo de grafite *Wildstyle*.

Artistas reconhecidos na arte do grafite

O grafiteiro e artista plástico Artur Bordalo, mais conhecido como Bordalo II, nasceu em 1987 em Lisboa, Portugal. Sua arte está baseada no uso de resíduos urbanos, como objetos provenientes de obras e ruínas de edifícios e fábricas, tomando como ponto de partida o grafite. O uso desses materiais confere relevos a vários grafites, fugindo dos limites planos, mais comuns a esse tipo de arte, e assumindo uma visualidade tridimensional. Com isso, o grafiteiro busca promover uma arte sustentável ao mesmo tempo que denuncia os problemas do consumismo.

Bordalo II tem obras espalhadas pelo mundo e utiliza esse nome artístico por ser neto do também artista plástico português Artur Real Chaves Bordalo da Silva (1925-2017), conhecido como Real Bordalo.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.



EMILY MARIE WILSON/SHUTTERSTOCK

Escultura "Lobo", do artista português Bordalo II, em Lisboa, Portugal, em 2022.



GYCA E CAROL/SHUTTERSTOCK

Escultura "Raposa de Lixo", do artista português Bordalo II, em Lisboa, Portugal, em 2018.

Outro artista de destaque internacional, conhecido pelo pseudônimo Banksy, compõe seu grafite usando uma distinta técnica de **estêncil**, que combina principalmente elementos divertidos e reflexões sociais. Esse artista, é mundialmente famoso por sua arte urbana de linguagem única, envolvendo críticas sociais, humor e provocações diretas e indiretas a vários governos e organizações.

Estêncil: técnica de grafite usada para aplicar um desenho em uma superfície, por meio do uso de tinta em *spray* e de um molde ou placa perfurada, por onde passará a tinta.



CORTESIA DE PEST CONTROL OFFICE, BANKSY. FOTO: JUSTIN TALLIS/AFP

Grafite "A Great British Spraycation", produzido pelo artista Banksy, em Great Yarmouth, Reino Unido, em 2021.

Há diversas maneiras de produzir grafites. Muitos artistas optam por desenhar diretamente nos muros e nas paredes, criando suas artes de maneira mais livre. Outros, no entanto, optam por pensar na imagem, desenhá-la em um papel e depois ampliá-la para o muro ou a parede.

Após definir o tema e o desenho do grafite, uma das maneiras de reproduzi-lo é fazer o desenho em papel A3 e depois quadricular o desenho em uma malha. Em seguida, o desenho é transferido para uma parede (interna ou externa) ou em um painel de papel *kraft*. Os materiais utilizados podem ser tinta em *spray*, tinta látex, tinta guache, lápis ou caneta.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Planejamento

Organizem-se em grupos e, com o auxílio do professor de **Arte**, listem as tarefas necessárias para a realização da atividade.

Cada grupo deve definir um tema diferente para abordar e decidir quem vai desenhar, traçar ou escrever. É importante definir o estilo do grafite a ser produzido as cores e o tipo de material que será utilizado nessa representação. Podem ser feitos um ou mais desenhos por grupo, a depender da decisão da turma. A execução dos croquis deve ser orientada pelo professor, conforme a técnica escolhida pelos grupos e a necessidade de traços e ampliações com ferramentas de desenho.

Cada grupo deve se organizar entre as tarefas e definir as funções de cada integrante. Em seguida, todos devem planejar e executar sua parte no trabalho proposto, como providenciar os materiais, pesquisar referências de imagens que abordem o tema do grupo e tipos de letras para compor a arte, desenhar no papel, fazer os cálculos e as marcações no papel *kraft* e ampliar o desenho. Todas as decisões devem ser tomadas em conjunto.

Registrem as atividades desenvolvidas pelo grupo por meio de fotos e vídeos dos encontros e das tarefas em cada etapa da execução.

Professor, professora: Ao elaborar uma representação de grafite, os estudantes podem desenvolver a habilidade **EM13MAT105**, que envolve as noções de transformações isométricas (translação, reflexão, rotação e composições destas) e de transformações homotéticas para construir figuras e executar diferentes produções humanas.

Desenvolvimento

Depois de tudo decidido, é o momento de cada grupo desenvolver seu trabalho. Todos os estudantes do grupo devem se envolver no trabalho, ser responsáveis por uma parte do que é necessário para a execução dele e participar de alguma forma das outras etapas.

O grupo deve se lembrar de assinar o grafite produzido com um nome específico criado para todos ou com os nomes dos integrantes. Ao finalizar, fixem os papéis *kraft* de maneira sequencial na parede reservada previamente pela coordenação da escola.

Divulgação

Se possível, solicitem aos responsáveis pela escola um momento de abertura da exposição, podendo incluir a presença de outras turmas e de funcionários da escola. Cada grupo deve escolher um representante para apresentar o trabalho e explicar os motivos de terem escolhido o tema e a mensagem que querem passar.

Pode ser definido um dia para que os familiares ou a comunidade escolar visitem a exposição desses trabalhos. Divulguem fotos dos trabalhos nas mídias sociais da escola, assim como da produção do grafite.



MAURICE JOSEPH/ALAMY/FOTOARENA

Estudantes grafitando em uma parede da escola.

Avaliação e reflexão

Com os colegas do seu grupo de trabalho, reflitam sobre o processo de elaboração da atividade, avaliando os pontos positivos e negativos, o que foi aprendido em cada etapa e o que pode ser melhorado. Para essa conversa, vocês podem seguir os tópicos.

- Dedicação na realização de cada etapa do trabalho.
- Participação no planejamento e na execução de tarefas individuais e coletivas.
- Cumprimento de tarefas e prazos.
- Pontos positivos e negativos do processo de execução do trabalho.
- O que pode ser melhorado para futuras atividades semelhantes.
- Análise dos resultados obtidos para verificar se foram satisfatórios.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Professor, professora: Ao iniciar o trabalho com esse projeto, verifique se estudantes destacam os seus principais objetivos, que são: conhecer alguns dados sobre a história do som; conhecer a definição de som e o monocórdio; identificar os diferentes tipos de instrumentos de corda, sopro e percussão; e produzir vídeos curtos com informações sobre os tipos de instrumentos musicais.

Projeto B – Matemática na música

Professor, professora: O trabalho com esse projeto permite desenvolver a habilidade **EM13MAT306**, que trata da resolução e da elaboração de problemas em contextos que envolvem fenômenos periódicos reais (ondas sonoras, fases da lua, movimentos cíclicos, entre outros) e da comparação de suas representações com as funções seno e cosseno, no plano cartesiano, com ou sem apoio de aplicativos de Álgebra e Geometria.

Início de conversa

Analise as imagens e responda às questões.

Professor, professora: Para a execução deste projeto, será necessário prever 10 aulas.

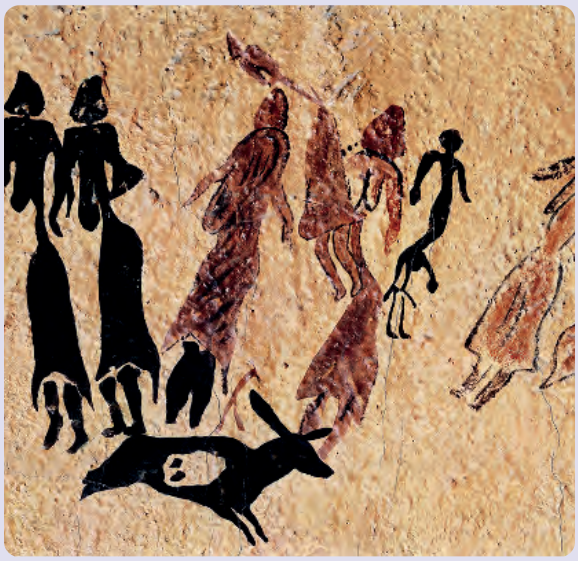


PHOTO AISA/EASY MEDIABANK

Pintura rupestre de pessoas dançando.

Acredita-se que a música exista desde o início da humanidade, conforme retrata essa pintura rupestre encontrada na Espanha, com pessoas dançando.



BRIDGEMAN IMAGES/EASY MEDIABANK

Músicos da 18ª Dinastia Egípcia, no Egito (c. 1567-1320 a.C.).

Parte de um papiro egípcio, obra de arte da Antiguidade, com músicos e seus instrumentos.

a) Confira as imagens. Quais elementos retratados nelas remetem à música?

b) Como você imagina que era a música na Antiguidade?

c) Converse com seus avós, bisavós ou uma pessoa mais velha sobre como eram os estilos musicais e os locais em que ouviam música na infância deles. Anote no caderno o que eles responderem.

Em ação

b) Resposta pessoal. Permita aos estudantes que expressem a criatividade. Leve-os a atentar aos instrumentos da imagem egípcia e pergunte-lhes se eles se parecem com os instrumentos atuais.

Pesquisadores acreditam que as linguagens artísticas são muito antigas e já se manifestavam desde o período que conhecemos como Pré-História. Alguns vestígios levam a acreditar que as expressões artísticas desenvolvidas por esses povos se manifestavam em rituais de milhares de anos atrás. Esses rituais tinham como função pedir proteção a divindades, homenagear antepassados, manifestar luto e comemorar caçadas. Com o passar do tempo, o ser humano foi aprimorando suas formas de manifestar sonoridade, iniciando a história da música, que envolve a harmonia entre os sons, o ritmo, a melodia e a voz.

a) Resposta pessoal. Sugestão de respostas: Na imagem pré-histórica, estão representadas pessoas que parecem estar dançando; já na imagem egípcia, são representadas três pessoas com objetos que parecem instrumentos musicais.

Neste projeto, você e os colegas deverão criar, sob a orientação do professor, um canal em uma plataforma de vídeos no qual publicarão vídeos curtos a respeito de suas pesquisas sobre temas relacionados à música. Conversem sobre as opções de plataformas e ferramentas que podem auxiliar nesse trabalho e definam em conjunto qual delas utilizarão.

Resposta pessoal. Caso algum estudante não tenha referências de pessoas mais velhas próximas, o trabalho pode ser feito em duplas. A intenção é que percebam as diferenças e semelhanças entre ritmos, estilos e instrumentos ao longo do tempo.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

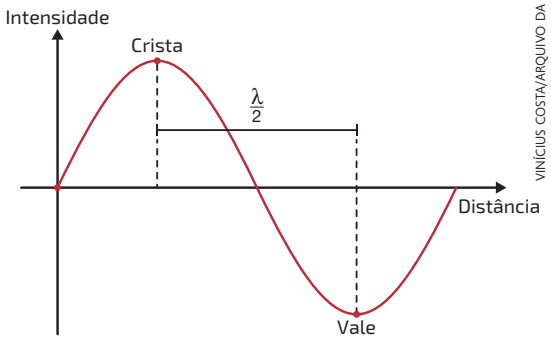
Professor, professora: Aproveite as questões do boxe **Início de conversa** para verificar o conhecimento prévio dos estudantes acerca do tema **Som e música**, que será abordado nesta seção. Incentive a participação de todos, permitindo que exponham suas ideias, opiniões e possíveis dúvidas, e, se julgar necessário, comente que essas e outras questões serão retomadas durante o desenvolvimento da atividade.

Pesquisando mais sobre o tema

O som é uma vibração na forma de onda, que se propaga pelo ar ou por outros meios. Essas ondas são produzidas pela vibração de um corpo. Na Física, a definição de som é uma onda longitudinal e mecânica que precisa de um meio para se propagar.

A onda é dita longitudinal, ou seja, quando a direção da vibração coincide com a direção de propagação da onda.

Ondas mecânicas são ondas que precisam de um meio físico, ar, água ou metais para se propagarem. O som, o ultrassom e os terremotos são exemplos de ondas mecânicas.



VINÍCIUS COSTA/ARQUIVO DA EDITORA

Professor, professora: Verifique a possibilidade de preparar uma aula com o professor de Física com o objetivo de orientar os estudantes na compreensão do conceito de som acerca do componente curricular de **Física**.


ROYAL ACADEMY OF MUCIS/BRIDGEMAN IMAGES/EASY MEDIABANK

Monocórdio.

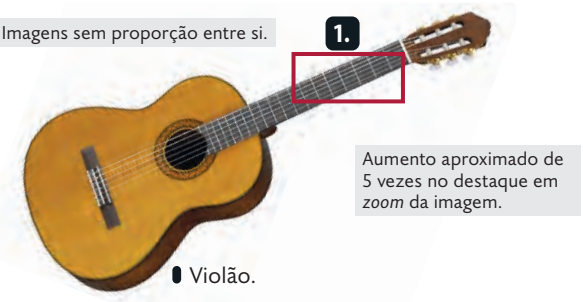
Um filósofo e matemático grego chamado Pitágoras fez estudos e cálculos sobre as alterações do som em um antigo instrumento musical chamado monocórdio, formado por uma caixa de ressonância com uma única corda esticada. Em seus estudos, Pitágoras percebeu que, ao segurar a corda do monocórdio em diferentes pontos, o som alterava do mais grave para o mais agudo. Então, ele dividiu a corda ao meio; depois, em um quarto; em um oitavo, e assim por diante.

A conexão entre música e Matemática nem sempre é evidente, apesar de a música estar em nosso cotidiano.

Professor, professora: Ao desenvolver este projeto com os estudantes, é possível estabelecer uma relação entre os componentes curriculares de **Matemática**, **Física** e **Arte**. No componente curricular de **Física**, a relação ocorre por meio da exploração de conceitos ligados à propagação do som. A relação com o componente curricular de **Arte** ocorre ao abordar a história do som, da música e do monocórdio.

Confira, com os colegas, os espaçamentos dos **trastes** de um violão e analisem a espessura e o comprimento das cordas, evidenciando que existe algum padrão de proporcionalidade entre elas. Comparem essas observações com o monocórdio e pensem em outros instrumentos musicais que têm esses padrões.

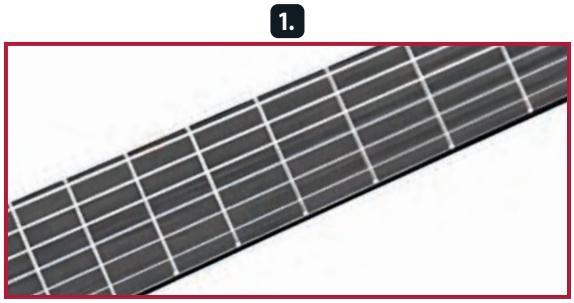
Imagens sem proporção entre si.



REFOX PHOTOS/SHUTTERSTOCK

Aumento aproximado de 5 vezes no destaque em *zoom* da imagem.

Violão.



Trastes do braço de um violão, mostrando as separações de metal entre as casas, que são os espaços compreendidos entre elas.


PETER VORONOV/SHUTTERSTOCK

Harpa irlandesa celta.

trastes: são pequenas separações de metal, localizadas no braço de alguns instrumentos de cordas como: guitarra, violão, viola, etc.

Além do violão, são instrumentos de corda: cavaquinho, bandolim, guitarra, contrabaixo, viola, banjo, violino, harpa e piano. As cordas desses instrumentos emitem sons distintos.

A harpa é um dos mais antigos instrumentos de corda. A harpa moderna tem 47 cordas e é um instrumento bastante complexo que compõe a orquestra.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Outros tipos de instrumentos são os de sopro, em que o som é produzido pela vibração do ar dentro da estrutura do instrumento. Alguns exemplos desse tipo de instrumento são: flauta, saxofone, trompete, trombone e clarinete. Existem também instrumentos de sopro de madeira e de metal.

Imagens sem proporção entre si.



TIMMARY/SHUTTERSTOCK

Flauta doce.

A flauta doce é constituída por um bocal e um tubo com orifícios.



SHUTTER GLOW/SHUTTERSTOCK

Saxofone.

Há vários tipos de saxofone: o sax alto, que é o mais popular, e o sax tenor, que é um dos instrumentos mais utilizados no *jazz*.

Os instrumentos de percussão são os que produzem som por meio do impacto, da agitação ou da raspagem. O impacto pode ser com ou sem o auxílio de baquetas. Alguns exemplos de instrumentos de percussão por agitação são: caxixi, ganzá, maraca e chocalho; por atrito: reco-reco, cuíca, xequerê e afoxé; além dos instrumentos de percussão propriamente ditos: com baquetas, bateria, gongos ou vibrafones; com martelos, carrilhões; e com as mãos, o bongô.



HAMONIZA/SHUTTERSTOCK

Chocalho enfeitado.

Os chocalhos são instrumentos de percussão por agitação e são constituídos por um recipiente oco com objetos no interior que emitem um som rítmico quando agitado.



ALEKSANDAR GROZDANOVSKI/SHUTTERSTOCK

Bateria.

A bateria é um conjunto de instrumentos de percussão, tambores de diversos tamanhos e pratos. O baterista utiliza um par de baquetas para percutir o som da bateria.

Planejamento

Organizem-se em quatro grupos. Cada grupo ficará responsável por um dos temas a seguir.

- Grupo 1: Instrumentos antigos
- Grupo 2: Instrumentos de cordas
- Grupo 3: Instrumentos de sopro
- Grupo 4: Instrumentos de percussão

Assim como os outros, o grupo que produzir conteúdos sobre instrumentos antigos poderá escolher em conjunto as abordagens de dois vídeos. As outras três abordagens deverão contemplar:

- Instrumentos de cordas antigos: citar exemplos, apresentar imagens e contextualizar a época e as situações nas quais eram utilizados.
- Instrumentos de sopro antigos: citar exemplos, apresentar imagens e contextualizar a época e as situações nas quais eram utilizados.
- Instrumentos de percussão antigos: citar exemplos, apresentar imagens e contextualizar a época e as situações nas quais eram utilizados.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Devem ser produzidos cinco vídeos por tema, e cada vídeo deve ter no mínimo 1 minuto e 30 segundos e no máximo 3 minutos. As abordagens de dois vídeos poderão ser escolhidas em conjunto pelos grupos, desde que se encaixem em seus temas. As outras três abordagens para os grupos de tipos de instrumentos deverão contemplar:

- Características sonoras e ritmos nos quais são mais utilizados.
- Instrumentos mais conhecidos que compõem esse tipo.
- Entrevista com alguém que toque ou estude um instrumento desse ritmo (pode ser *on-line*).

Organizem os integrantes do grupo para se dedicarem às tarefas realizadas. Definam se alguém vai aparecer no vídeo apresentando o assunto ou se cobrirão os conteúdos com imagens. Além disso, para a produção dos vídeos, é importante considerar as seguintes etapas: pesquisa, elaboração de roteiro, produção ou pesquisa das imagens a serem utilizadas, gravação (se necessário), edição de roteiro, edição do vídeo e publicação.

Em turma, definam o nome do canal e a arte que será utilizada para apresentá-lo.

Desenvolvimento

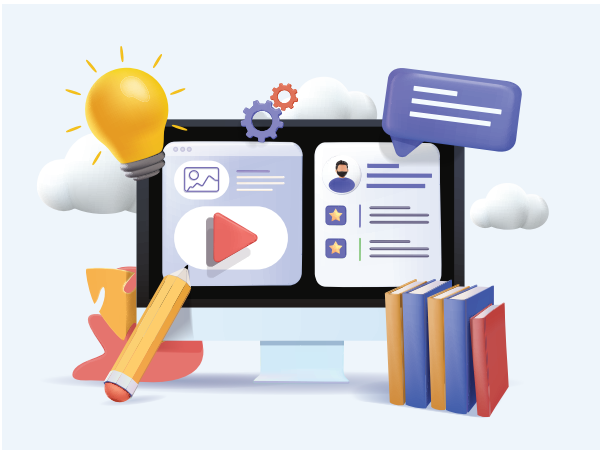
Com o planejamento definido, se organizem para a produção. É importante que as funções estejam definidas e que cada um faça a sua parte. Elaborem e sigam um cronograma para as tarefas. Utilizem fontes confiáveis para pesquisar os conteúdos e, se necessário, tirem dúvidas com os professores de **Arte** ou **História**.

Não esqueçam de agendar antecipadamente e evitem atrasar entrevistas e eventuais gravações que envolvam outras pessoas. Vocês podem utilizar câmeras filmadoras ou celulares para realizar as gravações.

Divulgação

Organizem uma agenda para publicar os vídeos no canal da turma. É importante que os vídeos de cada grupo sejam intercalados. A turma pode decidir em conjunto a frequência de postagem e quem ficará responsável pelas publicações.

Para divulgar o trabalho, vocês podem publicar *links* dos vídeos e convites para que o público assista para postar nas redes sociais da escola. Se possível, façam visitas às outras turmas, divulgando o canal e convidando outros estudantes a segui-lo.



RED VECTOR/SHUTTERSTOCK

Imagem esquemática, representando computador com páginas abertas em uma plataforma.

Professor, professora: Reforce a importância de aproveitar esse momento para verificar: se os objetivos propostos foram alcançados; se as estratégias adotadas e as decisões tomadas pelo grupo foram as mais adequadas; e quais mudanças podem ser feitas para obter melhor resultado em novos projetos.

Avaliação e reflexão

Com os professores e os colegas, reflitam sobre o processo de elaboração dos vídeos, avaliando os pontos positivos e negativos, o que foi aprendido em cada etapa e o que pode ser melhorado. Para essa conversa, vocês podem seguir esses tópicos.

- Dedicação na realização da preparação e apresentação do vídeo.
- Participação no planejamento e na execução de tarefas propostas pelos professores.
- Cumprimento de tarefas e prazos.
- Pontos positivos e negativos do processo.
- O que pode ser melhorado para futuras atividades semelhantes.
- Análise dos resultados obtidos para verificar se foram satisfatórios.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

AMPLIANDO SEUS CONHECIMENTOS

Nesta seção, apresentamos as referências complementares com sugestões de materiais que propiciam a melhor compreensão dos conceitos trabalhados em sala de aula. Esses recursos envolvem conteúdos que, de maneira geral, abordam a Matemática e suas Tecnologias de forma lúdica, curiosa e interessante.

21 teoremas matemáticos que revolucionaram o mundo

SOUZA, Maria Helena. *21 teoremas matemáticos que revolucionaram o mundo*. São Paulo: Planeta, 2018.

O livro explora a importância de diversos teoremas matemáticos ao longo da história, destacando seu impacto na Ciência, Tecnologia e sociedade.

50 ideias de matemática que você precisa conhecer

CRILLY, Tony. *50 ideias de matemática que você precisa conhecer*. 2. ed. São Paulo: Planeta de Livros Brasil, 2022.

No livro, cada ideia é explicada de maneira clara e acompanhada de exemplos práticos, mostrando como a Matemática está presente em diversos aspectos da vida cotidiana.

Almanaque das curiosidades matemáticas

STEWART, Ian. *Almanaque das curiosidades matemáticas*. Tradução: Diego Alfaro. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 2009.

Nesse livro, o autor usa casos notáveis e curiosos da Matemática para simplificar temas complexos, abordando-os de maneira divertida e transformando-os em deliciosas narrativas, com genialidade e bom humor.

A matemática das coisas

CRATO, Nuno. *A matemática das coisas*. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

O livro enfatiza a importância da Matemática na vida do ser humano, como o funcionamento do Sistema de Posicionamento Global (GPS) e a relação da Matemática com outras áreas do conhecimento.

A matemática no divã

A MATEMÁTICA no divã. *Rádio 95,3 UFSCar*. Disponível em: http://radio.ufscar.br/vPodcast/a-matematica-no-diva. Acesso em: 12 ago. 2024.

O *podcast* "A Matemática no divã" visa transformar a maneira como o público percebe a Matemática, tornando seus conceitos mais acessíveis e relacionando-os a situações do dia a dia.

A origem africana da matemática

TODÃO, Jefferson dos Santos. *A origem africana da matemática*. Ilustrações: Felipe Domingos. São Paulo: Ananse, 2024.

O autor desse livro convida o leitor a conhecer aspectos da História da Matemática e a desvendar os caminhos de racismo científico camuflados nos tradicionais ensinamentos históricos. Por meio de sua narrativa, ele explora a influência fundamental das civilizações africanas no desenvolvimento do conhecimento humano e a rica herança científica e cultural de países como África do Sul, República Democrática do Congo, Mali, Líbia e, principalmente, da região de Kemet, no Egito.

A rainha das ciências: um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da matemática

GARBI, Gilberto G. *A rainha das ciências*: um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da matemática. 4. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

Nesse livro, há o relato de quatro milênios da história da Matemática, apresentado de maneira simples e compreensível.

Artes da matemática: pensamento computacional e mídias

ROCHA, Luiz Felipe. *Artes da matemática*: pensamento computacional e mídias. Belo Horizonte: Editora da UFMG, 2021.

Esse livro explora as conexões entre Matemática, Pensamento computacional e Mídias digitais. Por meio de exemplos práticos e teóricos, o autor discute como a Matemática pode ser aplicada de forma criativa na era digital, incentivando o desenvolvimento de habilidades analíticas e computacionais.

Desbravadores da matemática: da alavanca de Arquimedes aos fractais de Mandelbrot

STEWART, Ian. *Desbravadores da matemática*: da alavanca de Arquimedes aos fractais de Mandelbrot. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 2012.

O livro destaca as descobertas e inovações que moldaram a Matemática como a conhecemos nos dias atuais, desde os princípios básicos até conceitos mais complexos.

Domínio Público

DOMÍNIO Público. Disponível em: http://www.dominiopublico.gov.br/pesquisa/PesquisaObraForm.jsp. Acesso em: 12 ago. 2024.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Esse *site* consiste em uma biblioteca digital, na qual é possível pesquisar textos, imagens, sons e vídeos de domínio público (acesso livre e gratuito) referentes a diversas áreas.

Do zero ao infinito (e além): tudo o que você sempre quis saber sobre matemática e tinha vergonha de perguntar

GOLDSMITH, Mike. *Do zero ao infinito*: tudo o que você sempre quis saber sobre matemática e tinha vergonha de perguntar. Tradução: Fabio Storino. São Paulo: Benvirá, 2016.

Nesse livro, o autor apresenta aplicações práticas para a Matemática e revela como essa ciência afeta tudo ao nosso redor, do comportamento dos animais até a maneira como escutamos música. Entre os assuntos, estão a importância do zero nas operações matemáticas; o que é googol; como funcionam os números binários; como música, Matemática e espaço estão conectados; e o formato hexagonal nas colmeias.

Edumatec

EDUCAÇÃO matemática e tecnologia informática. Disponível em: http://www.mat.ufrgs.br/~edumatec/. Acesso em: 12 ago. 2024.

Esse *site* apresenta e disponibiliza material que relaciona Matemática e informática. Na seção *softwares*, são disponibilizados diferentes programas computacionais que permitem, por exemplo, a construção de gráficos ou de figuras geométricas.

#EsquentaEnem

#ESQUENTAENEM: Dicas de conteúdo e estratégia para o Enem | EP 01. *Canal Educação*. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=Zv7ss93VQ7Q. Acesso em: 15 out. 2024.

Esse episódio é o primeiro de uma sequência de entrevistas com professores e estudantes, trazendo dicas de estudo e informações relevantes para prestar o Exame Nacional do Ensino Médio.

Etnomatemática: arte, *design* e matrizes cíclicas

LOPES, João. *Etnomatemática*: arte, *design* e matrizes cíclicas. São Paulo: Autêntica, 2011.

Explorando a interseção entre cultura, arte e Matemática, esse livro introduz o conceito de Etnomatemática ao discutir como padrões cíclicos são usados em várias culturas para criar artefatos e *designs*.

GeoGebra

GEOGEBRA. Disponível em: https://www.geogebra.org. Acesso em: 12 ago. 2024.

GeoGebra é uma plataforma educacional interativa que permite aos usuários explorar diversos conceitos matemáticos por meio de gráficos, geometria, álgebra e cálculo, facilitando a visualização e a compreensão de temas complexos.

Geometria dos trançados bora da Amazônia peruana

DANTAS, Sidney Ferreira. *Geometria dos trançados bora da Amazônia peruana*. São Paulo: Editora da USP, 2011.

Esse livro apresenta uma investigação sobre os padrões geométricos utilizados pelos indígenas Bora da Amazônia peruana, principalmente em seus artesanatos trançados, por meio de uma abordagem que combina Antropologia e Matemática.

História da matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas

ROQUE, Tatiana Marins. *História da matemática*: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 2012.

Esse livro explora a história da Matemática de modo crítico, desfazendo mitos e apresentando desenvolvimentos significativos desde a Mesopotâmia até a modernidade, com uma abordagem acessível e enriquecida por ilustrações.

Mania de Matemática: diversão e jogos de lógica e matemática

STEWART, Ian. *Mania de matemática*: diversão e jogos de lógica e matemática. Tradução: Maria Luiza X de A. Borges. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 2005.

Esse livro é indicado para quem procura desafios matemáticos interessantes e curiosos, apresentados em relatos ficcionais surpreendentes e divertidos. Usando linguagem comum e acessível, o autor explora brincadeiras e jogos que despertam o raciocínio e tornam a Matemática mais acessível, podendo motivar até quem não gosta dela.

Matemática essencial

MATEMÁTICA essencial. Disponível em: http://www.uel.br/projetos/matessencial. Acesso em: 12 ago. 2024.

Esse *site* apresenta definições e conceitos matemáticos de diversos níveis de ensino, exemplos resolvidos e exercícios com respostas, sendo algumas delas justificadas, e as resoluções, detalhadas.

Mosaicos *by* José Ezequiel Soto Sánchez

JOSÉ Ezequiel Soto Sánchez. Disponível em: https://chequesoto.info/tiling.html. Acesso em: 25 set. 2024.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Esse *site*, desenvolvido por José Ezequiel Soto Sánchez e colaboradores, explora a representação de ladrilhos periódicos com polígonos regulares, permitindo aos usuários que explorem e construam ladrilhos de maneira interativa, promovendo uma compreensão profunda dos padrões matemáticos e suas aplicações visuais.

O homem que calculava

TAHAN, Malba. *O homem que calculava*. Reedição. Rio de Janeiro: Record, 2018.

Esse livro clássico, escrito sob o pseudônimo Malba Tahan por Júlio César de Mello e Souza, é conhecido por simplificar conceitos matemáticos complexos com um estilo leve e humorístico, tornando a Matemática divertida e acessível a um público amplo.

O instinto matemático

DEVLIN, Keith. *O instinto matemático*. Tradução: Michelle Dysman. Rio de Janeiro: Record, 2009.

O autor defende a ideia de haver dois "tipos" de Matemática: a simbólica, exclusiva do ser humano; e a natural, que pertence a qualquer animal e corresponde a habilidades matemáticas relacionadas à sobrevivência, senso de direção e captura de presas.

O jogo da imitação

O JOGO da imitação, de Morten Tyldum. Estados Unidos/Reino Unido: Black Bear\Pictures\Bristol Automotive, 2014 (114 min).

Esse filme, dirigido por Morten Tyldum, narra a história do matemático britânico Alan Turing que, durante a Segunda Guerra Mundial, lidera um grupo de cientistas e criptógrafos que decifram o código da máquina nazista chamada Enigma, que foi crucial para a vitória dos Aliados.

O poder do pensamento matemático: a ciência de como não estar errado

ELLENBERG, Jordan. *O poder do pensamento matemático*: a ciência de como não estar errado. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 2015.

O autor destaca a importância da Matemática como uma maneira de pensar que pode beneficiar diversos aspectos da vida e nos ajudar a compreender o mundo ao nosso redor.

O que é e para que serve a matemática

SILVA, Jairo José da. *O que é e para que serve a matemática*. São Paulo: Editora Unesp 2022.

O autor destaca a importância da Matemática como uma ferramenta essencial para compreender e solucionar problemas do mundo real, tornando-a interessante para todos os leitores.

Os elementos de Euclides: uma história da geometria

EUCLIDES. *Os elementos de Euclides*: uma história da geometria. Tradução: Irineu Bicudo. São Paulo: Zahar, 2018.

Esse livro é uma tradução atualizada de "Os elementos", uma das obras mais influentes na história da Matemática, escrita por Euclides. O texto aborda os fundamentos da Geometria de maneira sistemática, estabelecendo axiomas e teoremas que formam a base do que conhecemos como Geometria atualmente.

O universo e a xícara de chá

COLE, K. C. *O universo e a xícara de chá*. Tradução: Elizabeth Leal. Rio de Janeiro: Record, 2006.

O livro mostra como a Matemática transcende os números e está presente em muitas situações do dia a dia. Mostra, ainda, como enxergar a lógica nessas situações cuja compreensão nos torna mais aptos a tomar decisões e permite o melhor entendimento do mundo em que vivemos.

Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas

OBMEP. Disponível em: http://www.obmep.org.br. Acesso em: 12 ago. 2024.

Nesse *site*, é possível obter diversas informações relacionadas à Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP), como efetuar a inscrição, verificar a data das provas e acessar as provas aplicadas em anos anteriores.

Planolândia: um romance de muitas dimensões

ABBOTT, Edwin A. *Planolândia*: um romance de muitas dimensões. São Paulo: Tordesilhas, 2021.

"Planolândia" é um clássico da literatura que explora conceitos matemáticos e dimensionais de maneira inovadora. Por meio de personagens e cenários que desafiam nossas percepções habituais, a obra oferece uma crítica social sutil e encoraja o leitor a explorar a Matemática de maneira imaginativa e acessível.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

RESPOSTAS

Professor, professora: Esta seção apresenta respostas esperadas às atividades de cálculo constantes nos capítulos do volume, incluindo questões das páginas de abertura e de teoria, atividades de seções especiais e tarefas da seção **Exercícios e problemas**. Além disso, constam nesta seção as respostas indicadas para o final do **Livro do Estudante** nas notas ao professor. Não constam aqui respostas pessoais nem respostas abertas, como elaboração de problemas e resultado de pesquisas.

CAPÍTULO 1 TRIGONOMETRIA NO TRIÂNGULO E NA CIRCUNFERÊNCIA

Abertura do capítulo

1. Para estabelecer unidades-padrão de medida, entre elas o metro.

2. Sugestões de respostas: Na construção civil, na Astronomia, na navegação, na agrimensura e na topografia.

Questões

A. • Analisando os triângulos ABC e ABH separadamente, podemos notar que $B\hat{A}C = A\hat{H}B$, pois ambos são retos, e que $A\hat{B}C = H\hat{B}A$, pois é comum aos dois triângulos. Portanto, pelo caso de semelhança **AA**, os triângulos ABC e ABH são semelhantes.

• Analogamente, analisando os triângulos ABH e ACH separadamente, podemos notar que $B\hat{H}A = C\hat{H}A$, pois ambos são retos. Além disso:

$$B\hat{A}H = 180° - 90° - \hat{B} = A\hat{C}H$$

Portanto, pelo caso de semelhança **AA**, os triângulos ABH e ACH são semelhantes.

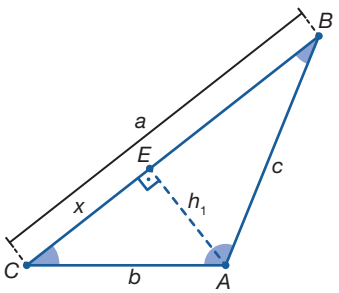
B. Da semelhança de triângulos ABC e ABH, temos:

• $\frac{a}{c} = \frac{c}{m} \Rightarrow c^2 = a \cdot m$ • $\frac{h}{n} = \frac{m}{h} \Rightarrow h^2 = m \cdot n$

• $\frac{c}{b} = \frac{m}{h} \Rightarrow c \cdot h = b \cdot m$

C. Caso de semelhança **AA**.

D.



$b^2 = h_1^2 + x^2$ (I)

$h_1^2 = b^2 - x^2$ (II)

$\cos\hat{C} = \frac{x}{b} \Rightarrow x = b \cdot \cos\hat{C}$ (III)

$c^2 = h_1^2 + (a - x)^2$ (IV)

$h_1^2 = c^2 - a^2 + 2ax - x^2$ (V)

$\cos\hat{B} = \frac{a - x}{c} \Rightarrow x = -c \cdot \cos\hat{B} + a$ (VI)

Substituindo (V) em (I), temos:

$b^2 = h_1^2 + x^2 \Rightarrow b^2 = c^2 - a^2 + 2ax$ (VII)

Substituindo (VI) em (VII), segue que:

$b^2 = c^2 - a^2 + 2ax \Rightarrow b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\hat{B}$

Substituindo (II) em (IV), temos:

$c^2 = h_1^2 + (a - x)^2 \Rightarrow c^2 = b^2 + a^2 - 2ax$ (VIII)

Substituindo (III) em (VIII), segue que:

$c^2 = b^2 + a^2 - 2ax \Rightarrow c^2 = b^2 + a^2 - 2ab \cdot \cos\hat{C}$

Portanto, $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\hat{B}$ e $c^2 = b^2 + a^2 - 2ab \cdot \cos\hat{C}$.

Exercícios e problemas

1. A. $x = 3$ B. $x = 6$ C. $x = 8$ D. $x = 20$

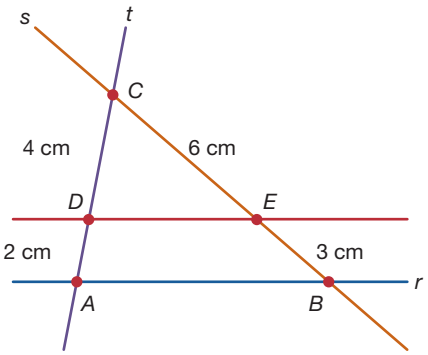
2. A. 45 cm B. 39 cm C. 47 cm D. 52,5 cm

3. **a)** 300 m **b)** 240 m

4. 50 m

6. Paralela, pois a razão entre os comprimentos dos segmentos correspondentes é a mesma, ou seja, em um triângulo ABC, se D e E são os pontos médios dos lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$, respectivamente, temos $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} = 1$.

7. **a)**



b) 6 cm

c) Sugestão de resposta: Traçamos, em um triângulo ABC qualquer, duas retas r e s, uma contendo $\overline{AB}$ e outra contendo $\overline{AC}$, respectivamente. Em r, marcamos um ponto D tal que B esteja entre A e D. Em seguida, medimos o comprimento de $\overline{AB}$, $\overline{BD}$ e $\overline{AC}$ e calculamos $d = AC \cdot \frac{BD}{AB}$. Depois, marcamos em s um ponto E, tal que C esteja entre A e E e $CE = d$. Por fim, traçamos a reta que passa por D e E, que é paralela ao lado $\overline{BC}$ do triângulo.

8. $x = 7$

9. Supondo que a semelhança entre os triângulos ABC e FGH seja estabelecida pela correspondência entre A e F, B e G, C e H e que a razão de proporcionalidade entre eles seja k, podemos escrever:

$$\frac{AB}{FG} = \frac{AC}{FH} = \frac{BC}{GH} = k$$

Consequentemente, $AB = k \cdot FG$, $AC = k \cdot FH$ e $BC = k \cdot GH$. Assim:

$$\frac{AB + AC + BC}{FG + FH + GH} = \frac{k \cdot FG + k \cdot FH + k \cdot GH}{FG + FH + GH} = k$$

10. 130 cm **11.** 48 cm **12.** $\frac{256}{13}$ cm

13. 92 cm

14. Não, pois os lados correspondentes não são proporcionais.

15. **a)** Sim. Caso de semelhança: **LLL**, pois $\frac{AC}{EG} = \frac{AB}{GF} = \frac{BC}{EF}$.
b) 94°

16. 4 m **17.** Alternativa **c**.

19. A. $x = 15$ cm
B. $x = 8\sqrt{5}$ cm
C. $x = 25$ cm
D. $x = 12$ cm

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

20. Projeção do cateto $\overline{AB}$: 5,4 cm; projeção do cateto $\overline{AC}$: 9,6 cm.

21. 60 m; 64 m

22. **a)** Aproximadamente 4,21 cm.

23. A. $x = 5$ B. $x = 12$

24. $h = \frac{c\sqrt{3}}{2}$; $4\sqrt{3}$

25. 35 cm

26. Alternativa **a**.

27. **a)** 8 cúbitos. **b)** 5 e 12 cúbitos.

28. 28 tubos.

29. **a)** • 29": dimensões 25,3" por 14,2";
• 32": dimensões 27,9" por 15,7";
• 42": dimensões 36,6" por 20,6".
b) 50"

30. **a)** Porque $1^2 = 0{,}6^2 + 0{,}8^2$, e se em um triângulo qualquer o quadrado do comprimento do lado maior for igual à soma dos quadrados dos comprimentos dos outros lados, então o triângulo é retângulo.
b) Os triângulos *ABC* e *MNO*.
c) 21 m

31. $\text{sen}\beta = \frac{\sqrt{5}}{3}$; $\cos\beta = \frac{2}{3}$; $\text{tg}\beta = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

32. **a)** $\frac{\sqrt{10}}{10}$ **c)** $\frac{1}{3}$ **e)** $\frac{\sqrt{10}}{10}$
b) $\frac{3\sqrt{10}}{10}$ **d)** $\frac{3\sqrt{10}}{10}$ **f)** 3

33. $\text{tg}\alpha = \frac{8}{9}$

34. $\text{tg}\alpha = \frac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\cos\beta}{\text{sen}\beta} = \frac{1}{\text{sen}\beta} \cdot \frac{1}{\frac{1}{\cos\beta}} = \frac{1}{\frac{\text{sen}\beta}{\cos\beta}} = \frac{1}{\text{tg}\beta}$

35. $\cos\hat{C} = \frac{7}{8}$; $\cos\hat{E} = \frac{4}{5}$; $\cos\hat{G} = \frac{4\sqrt{41}}{41}$.

36. **a)** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **b)** $\frac{\sqrt{3}}{3}$ **c)** 10 m **d)** 5 m

37. $\text{sen}\beta = \frac{3\sqrt{13}}{13}$

38. A. $x = 13$ cm C. $x = 11\sqrt{2}$ cm
B. $x = 16\sqrt{3}$ cm D. $x = \frac{27}{2}$ cm

39. A. 30° B. 60° C. 45°

40. 10 cm

41. Alternativa **a**.

42. **a)** 10 m **b)** $5\sqrt{3}$ m

43. $CE = \sqrt{3}$ cm e $AD = 2$ cm.

44. 17,3 cm

45. **a)** 3 **b)** $\frac{1}{2}$ **c)** $\sqrt{3}$

46. $\alpha = 30°$, $\beta = 90°$ e $\gamma = 60°$.

47. **a)** sen78° = 0,978; cos78° = 0,208; tg78° = 4,705
b) sen5° = 0,087; cos5° = 0,996; tg5° = 0,087
c) sen52° = 0,788; cos52° = 0,616; tg52° = 1,280

48. **a)** 12° **b)** 76° **c)** 41°

49. Torre: 57 m; pessoa: 1,73 m.

50. **b)** 600 cm ou 6 m. **c)** Entre 4° e 5°.

52. A. $x \simeq 25$ cm B. $x \simeq 17$ cm C. $x \simeq 13$ cm

54. **a)** Aproximadamente 18°.
b) Aproximadamente 13°.
c) Não, pois o maior ângulo possível para acertar um gol é de aproximadamente 22°, atingido quando a bola é chutada em direção ao canto superior esquerdo ou direito.

55. **a)** 41 cm **b)** 26,9 cm **c)** 32,3 cm

56. Alternativa **b**.

57. Aproximadamente 32 m.

58. **a)** 5 989 km **b)** Aproximadamente 391 km.

59. **a)** sen95° = 0,996; cos95° = −0,087
b) sen110° = 0,940; cos110° = −0,342
c) sen125° = 0,819; cos125° = −0,574
d) sen168° = 0,208; cos168° = −0,978
e) sen174° = 0,105; cos174° = −0,995

60. A. $x \simeq 105$ m e $y \simeq 91{,}6$ m.
B. $x \simeq 112{,}3$ m e $y \simeq 120{,}7$ m.
C. $x \simeq 44{,}4$ m e $y \simeq 93{,}2$ m.
D. $x \simeq 53$ m e $y \simeq 124{,}3$ m.
E. $x \simeq 97{,}3$ m e $y \simeq 119{,}4$ m.
F. $x \simeq 87$ m e $y \simeq 54{,}8$ m.

61. 50 cm, 34,2 cm e 34,2 cm; sen94° ≃ 0,998.

62. 75 cm, 47,6 cm e 47,6 cm; sen38° ≃ 0,616.

63. A. $a \simeq 6{,}6$ m e $b \simeq 5{,}8$ m.
B. $a \simeq 4{,}83$ m e $b \simeq 5{,}4$ m.
C. $a \simeq 11{,}8$m e $b \simeq 9{,}9$ m.

64. $x = 10$

65. **a)** *A*: 419 m; *B*: 654 m **b)** 23 s **c)** 28 m/s

66. Aproximadamente 18,7 km.

67. No $\triangle BCD$, temos: $\text{sen}\left(180° - \hat{B}\right) = \frac{CD}{BC} \Rightarrow$

$\Rightarrow CD = a \cdot \underbrace{\text{sen}\left(180° - \hat{B}\right)}_{\text{sen}\hat{B}} \Rightarrow CD = a \cdot \text{sen}\hat{B}$ (I)

No $\triangle ACD$, temos: $\text{sen}\hat{A} = \frac{CD}{AC} \Rightarrow CD = b \cdot \text{sen}\hat{A}$ (II)

De (I) e (II), segue que:

$$a \cdot \text{sen}\hat{B} = b \cdot \text{sen}\hat{A} \Rightarrow \frac{a}{\text{sen}\hat{A}} = \frac{b}{\text{sen}\hat{B}} \quad \text{(III)}$$

No $\triangle BCE$, temos: $\text{sen}\hat{C} = \frac{BE}{BC} \Rightarrow BE = a \cdot \text{sen}\hat{C}$ (IV)

No $\triangle ABE$, temos: $\text{sen}\hat{A} = \frac{BE}{AB} \Rightarrow BE = c \cdot \text{sen}\hat{A}$ (V)

De (IV) e (V), segue que:

$$a \cdot \text{sen}\hat{C} = c \cdot \text{sen}\hat{A} \Rightarrow \frac{a}{\text{sen}\hat{A}} = \frac{b}{\text{sen}\hat{C}} \quad \text{(VI)}$$

Portanto, de (III) e (VI), obtemos a lei dos senos:

$$\frac{a}{\text{sen}\hat{A}} = \frac{b}{\text{sen}\hat{B}} = \frac{c}{\text{sen}\hat{C}}$$

68. **a)** Navio *B*. **c)** 32 km/h
b) Navio *A*: 3 h; navio *B*: 3 h.

70. A. 54,3 m C. 65,9 m E. 53,1 m
B. 61,2 m D. 48,1 m F. 65 m

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

71. Aproximadamente 183,4 cm e 89,2 cm.

72. 56,8 cm

73. A. $\alpha \simeq 53°$ B. $\alpha \simeq 51°$ C. $\alpha \simeq 142°$ D. $\alpha \simeq 121°$

74. Não; 10 cm, $\sqrt{76}$ cm e 6 cm; 10 cm, $\sqrt{76}$ cm e 4 cm.

75. $F_r \simeq 22$ N

76. Aproximadamente 98,7 m.

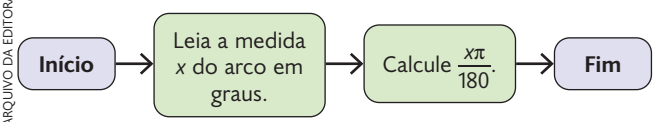
77. Aproximadamente 504,5 m. **78.** Alternativa **d**.

80. A. Aproximadamente 5,76 cm; 110°.
B. Aproximadamente 3,14 cm; 90°.
C. Aproximadamente 7,85 cm; 180°.
D. Aproximadamente 2,75 cm; 45°.

81. A. $110° = \frac{11\pi}{18}$ rad C. $180° = \pi$ rad
B. $90° = \frac{\pi}{2}$ rad D. $45° = \frac{\pi}{4}$ rad

82.

Início
1. Leia a medida x do arco em graus.
2. Calcule $\frac{x\pi}{180}$.
Fim



LAÍS GARBELINI/ARQUIVO DA EDITORA

83. a) 50° b) 140° c) 260° d) 320°

84. a) 25 voltas. b) 6 min

85. 471 m

86. a) $r_1 \simeq 15$ cm; $r_2 \simeq 12$ cm
b) Aproximadamente 31,4 cm.
c) Sim, pois esses arcos são determinados pelo mesmo ângulo; no caso dos arcos menores, pelo ângulo $\frac{2\pi}{3}$ rad.

87. 82,5°

88. a) Voleibol: 16 estudantes. b) 32 estudantes. c) 12 estudantes.

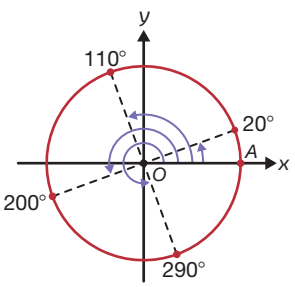
89. Aproximadamente 51,81 unidades de comprimento.

90. Alternativa **d**.

91. a) 20° b) 180° c) $\frac{3\pi}{4}$

92. A. $45° + k \cdot 360°$, em que k é um número inteiro.
B. $210° + k \cdot 360°$, em que k é um número inteiro.
C. $\frac{5\pi}{3} + k \cdot 2\pi$, em que k é um número inteiro.
D. $\frac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi$, em que k é um número inteiro.

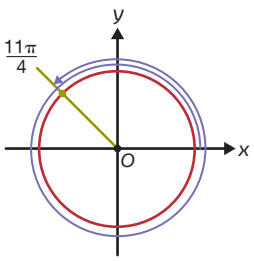
93.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

94. a) 80° ou $\frac{4\pi}{9}$.
b) $k \cdot 40°$ ou $\frac{k \cdot 2\pi}{9}$, em que k é um número inteiro.

95. a) Não, pois o arco representado por ele é côngruo ao arco de $\frac{5\pi}{6}$ e não ao arco de $\frac{3\pi}{4}$. A resposta correta seria um arco da expressão geral $\frac{3\pi}{4} + 2k\pi$, sendo k um número inteiro.
b) Sugestão de resposta:



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

96. a) 2º ou 3º. b) 1º ou 2º. c) 1º ou 3º. d) 3º ou 4º. e) 2º ou 4º. f) 1º ou 4º.

97. a) Negativo. b) Positivo. c) Negativo. d) Positivo.

98. a) 2º b) 2º c) 1º d) 4º e) 3º

99. a) $A = \text{sen}40° \cdot \cos 40°$; $A > 0$
b) $A = -\cos\frac{\pi}{3} \cdot \left(-\text{tg}\frac{\pi}{6}\right)$; $A > 0$
c) $A = \text{tg}85° \cdot (-\text{sen}5°)$; $A < 0$
d) $A = -\cos\frac{2\pi}{5} \cdot \text{sen}80°$; $A < 0$

100. a) 1º: $-225°$; 2º: 90°; 3º: 180°; 4º: $-135°$
b) 270°
c) $\text{sen}270° = -1$; $\cos 270° = 0$.

101. a) 1125° c) $\text{sen}45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e $\cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
b) 45° d) Quatro voltas.

102. a) 150°
b) $\text{sen}150° = \frac{1}{2}$; $\cos 150° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

103. a) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{1}{2}$ e) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$
b) 1 d) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ f) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

104. a) $\text{sen}\alpha = -\frac{12}{13}$; $\text{tg}\alpha = -\frac{12}{5}$
b) $\text{sen}\alpha = -\frac{8}{17}$; $\text{tg}\alpha = \frac{8}{15}$

105. Sugestão de resposta: 150°; $\frac{5\pi}{6}$; $\frac{20\pi}{3}$.

106. Sim, pois para qualquer valor de k os arcos serão 150°, 300° e 225° ou arcos côngruos a eles. Assim, sendo k um número inteiro, temos:

$$\frac{\text{sen}(150° + 2k\pi) + \cos(300° + 2k\pi)}{\text{tg}(225° + 2k\pi)} =$$

$$= \frac{\text{sen}(30°) + \cos(60°)}{\text{tg}(45°)} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}{1} = 1$$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Educação midiática (páginas 28 e 29)

2. De acordo com o texto, essas relações podem gerar problemas quando os seguidores se encantam com rotinas, hábitos e padrões físicos que transmitem uma ideia enganosa de perfeição e passam a comparar suas vidas com a dos influenciadores.

Acessando tecnologias (páginas 35 e 36)

1. O comprimento da hipotenusa desse triângulo é 5.

2. Resposta na página **301**.

Síntese do capítulo (página 77)

3. **AA**, **LAL** e **LLL**.

4. Sim, pelos casos de semelhança **AA** ou **LLL**.

5. **a)** Afirmação falsa, pois $6^2 \neq 4^2 + 5^2$.

b) Afirmação verdadeira, pois o triângulo *DEF* é retângulo em *D*. Logo, obtemos:

$$h \cdot EF = DE \cdot DF \Rightarrow h = \frac{5 \cdot 12}{13} = \frac{60}{13}.$$

6. Sugestão de resposta: $h^2 = m \cdot n$ e $a \cdot h = b \cdot c$.

7. Quando o ângulo oposto ao lado desconhecido medir 90°. Considerando um triângulo retângulo *ABC* retângulo em *A* e comprimento da hipotenusa e dos catetos iguais a *a*, *b* e *c*, respectivamente, temos:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos 90° \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2$$

8. A. Sugestão de resposta: Sabendo que o triângulo *ABC* é retângulo, utilizaria a razão trigonométrica $\text{sen}23° = \frac{x}{39}$ e, para obter o valor do sen23°, consultaria a tabela trigonométrica.

B. Sugestão de resposta: Sabendo que o triângulo *DEF* não é retângulo, aplicaria a lei dos senos e, para obter o valor do seno de cada ângulo, consultaria a tabela trigonométrica.

9. Sugestão de resposta: Suponha, por absurdo, que exista $\text{tg}\frac{\pi}{2}$. Então, temos: $\text{tg}\frac{\pi}{2} = \frac{\text{sen}\frac{\pi}{2}}{\cos\frac{\pi}{2}}$. Sabendo que $\text{sen}\frac{\pi}{2} = 1$ e $\cos\frac{\pi}{2} = 0$, então $\text{tg}\frac{\pi}{2} = \frac{1}{0}$, que é uma indefinição. Por consequência, $\text{tg}\frac{\pi}{2}$ não está definida.

10. Alternativa **d**.

11. Sugestão de resposta: Utilizaria a relação trigonométrica fundamental $\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

CAPÍTULO 2 FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Abertura do capítulo

1. Sugestão de resposta: As marés são variações periódicas do nível do mar causadas pela atração gravitacional do Sol e da Lua e pela inclinação do eixo de rotação da Terra.

2. Função trigonométrica.

Questões

A. a) 7 b) 6 c) 14 d) 8

Exercícios e problemas

1. **a)** $x = \frac{7\pi}{4}$ ou $x = \frac{9\pi}{4}$.

b) $x = \frac{19\pi}{6}$

c) $x = 150°$ ou $x = 210°$ ou $x = 510°$.

d) $x = \frac{17\pi}{4}$

e) $x = 600°$ ou $x = 660°$.

f) $x = 420°$

2. **a)** $2 < m < 3$ **c)** $-\frac{2}{3} < m < \frac{2}{3}$

b) $-1 < m < -\frac{1}{2}$ **d)** $3 < m < 4$

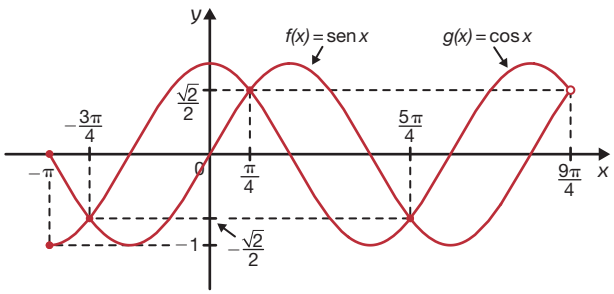
3. **a)** $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$, ambos com $k \in \mathbb{Z}$.

b) $\frac{1}{4}$

4. **a)** $\frac{\pi}{2}$

b) $\left(-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ e $\left(\frac{5\pi}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

c)



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

5. **a)** $Im(f) = [-1, 1]$ e $Im(g) = [-1, 5]$

A constante *a* desloca o gráfico para cima e a constante *b* amplia o gráfico verticalmente.

b) Sugestão de resposta: $a = 2$, $b = 3$, $c = 2$, $d = \pi$; $g(x) = 2 + 3\text{sen}(2x + \pi)$

6. **a)** 4 **b)** $\frac{1}{2}$ **c)** 2 **d)** 8

7. **a)** 45°

b) Não, pois a distância percorrida é diretamente proporcional a $\text{sen}2\varphi_0$ e a tacada já foi realizada com $\varphi = 45°$.

8. **a)** Sugestão de resposta: $h(t) = 8 \cdot \text{sen}\left(\frac{5\pi}{31}t\right)$

b) 8 m; −8 m

9. **a)** As funções *g* e *h*, pois, se considerarmos as funções na forma $m(x) = a + b \cdot \cos(cx + d)$, os coeficientes *b* em *g* e em *h* são opostos e os demais coeficientes são iguais, ou seja, $g(x) = -h(x)$.

b) $Im(f) = [-1, 1]$, $Im(g) = [-2, 2]$ e $Im(h) = [-2, 2]$.

c) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$.

10. **a)** 20 clientes.

b) 12 horas; 35 clientes.

c) 24 horas; 5 clientes.

11. Alternativa **d**.

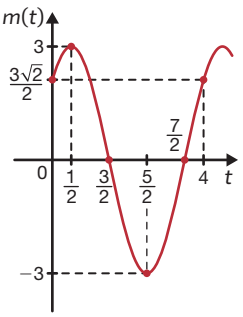
12. **a)** $T(\theta) = \pi\sqrt{\cos\theta}$ **b)** $D(T) = \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

13. a) $t = \frac{1}{2} + 4k$, com $k \in \mathbb{Z}_+$.

b) $t = \frac{3}{2} + 2k$, com $k \in \mathbb{Z}_+$.

c)



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

15. a) No equinócio de outono e no equinócio de primavera. Isso ocorre porque, nesses episódios, o dia e a noite têm a mesma duração: 12 horas cada.

b) 21/6/2023

c) 365. No contexto apresentado, esse período significa que a quantidade de horas de duração do dia em São Paulo (SP) se repete a cada 365 dias.

d) $A = 12{,}13$; $B = 1{,}45$; $h(x) = 12{,}13 + 1{,}45 \cdot \cos\left(\frac{2\pi \cdot x}{365}\right)$.

Trabalho e juventudes (página 89)

1. O engenheiro de som pode trabalhar com processamento e criação de áudios. Ele utiliza diferentes equipamentos de gravação e manipulação, de transmissão ou de emissão de áudio para capturar, mixar e masterizar o som. Ele pode trabalhar na indústria de cinema, televisão, rádio, música e *games*.

Síntese do capítulo (página 93)

3. Alternativa **C**.

4. Alternativas **b** e **c**.

5. Gráfico **I**. Sugestão de resposta: Como as marés são variações periódicas, o gráfico **I** é o que melhor representa essa variação, pois seus valores se repetem periodicamente.

6. Maior do que zero, pois, quando comparado com o gráfico da função cosseno, o gráfico da função f foi transladado $|a|$ unidades para cima.

CAPÍTULO 3 FÓRMULAS DE TRANSFORMAÇÃO, RELAÇÕES E EQUAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Abertura do capítulo

1. Porque, após esse período, a Terra estará do outro lado em relação à sua órbita em torno do Sol.

2. $9{,}46 \cdot 10^{12}$ km

3. Dado um triângulo ABC qualquer, a medida do comprimento dos lados é proporcional ao seno dos ângulos opostos correspondentes.

Questões

A. Não, pois $\text{sen}45° + \text{sen}30° = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \simeq 1{,}21$.

B. Não, pois $\text{sen}45° - \text{sen}30° = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \simeq 0{,}21$.

Exercícios e problemas

1. a) $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$ c) $\frac{-\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$ e) $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$

b) $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ d) $2 + \sqrt{3}$ f) $\frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$

2. Não, pois, da maneira como a escada foi posicionada, o topo atingiu uma altura de aproximadamente 5,14 m.

3. Alternativa **b**.

4. Aproximadamente 0,65 m.

5. $\frac{\sqrt{6}}{2}$

6. Aproximadamente 62 km.

7. $\frac{\sqrt{39}}{8}$ **8.** $x = 30°$ **9.** $\text{sen}\alpha = -\frac{4}{5}$

10. a) $-\frac{1}{3}$ b) $\frac{3\sqrt{2}}{4}$ c) $-\frac{\sqrt{2}}{4}$

11. 82,5 m **12.** $\frac{3}{2}$

13. a) $\sqrt{2}$ b) $\sqrt{2} - \sqrt{6}$ c) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

14. Alternativa **a**.

15. $\cos^4\beta - \text{sen}^4\beta =$

$= \underbrace{(\cos^2\beta + \text{sen}^2\beta)}_{1}\underbrace{(\cos^2\beta - \text{sen}^2\beta)}_{\cos 2\beta} = \cos 2\beta$

16. Alternativa **b**. **17.** 10,8 m

18. a) 11 808 pés.

b) Aproximadamente 9 476 m.

19. a) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x = \frac{5\pi}{3} + k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$.

b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x = \frac{11\pi}{12} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{17\pi}{12} + 2k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$.

c) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x = \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{4}, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$.

d) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x = 2k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$.

e) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x = \frac{\pi}{8} + k\pi \text{ ou } x = \frac{3\pi}{8} + k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$.

f) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x = \frac{\pi}{12} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{19\pi}{12} + 2k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$.

20. $\alpha = 15°$

21. $\alpha = \frac{2\pi}{15}$ ou $\alpha = \frac{7\pi}{15}$.

22. a) Aproximadamente 2,55 m; aproximadamente 2,90 m.

b) Aproximadamente 1 h 2 min.

23. $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ ou $x = \frac{7\pi}{12} + k\pi$ para $k \in \mathbb{Z}$.

24. $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$.

Resolvendo por etapas (páginas 101 e 102)

2. Sim, é possível resolver o problema utilizando o plano apresentado com algumas adequações. Janeiro e maio.

Desenvolvimento sustentável (páginas 106 e 107)

2. • 70 mmHg • 0,4 s

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Síntese do capítulo (página 109)

3. Sugestões de resposta: Variações das marés, balanço de pêndulos, vibrações na música e trajetória de corpos celestes.

4. Alternativas **d** e **f**.

5. **a)** $\operatorname{sen}2\alpha = \operatorname{sen}(\alpha + \alpha) =$
$= \operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\alpha = 2 \cdot \operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\alpha$.
Portanto, $\operatorname{sen}2\alpha = 2 \cdot \operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\alpha$.

b) $\operatorname{tg}2\alpha = \operatorname{tg}(\alpha + \alpha) = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\alpha} = \dfrac{2 \cdot \operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}$.

Portanto, $\operatorname{tg}2\alpha = \dfrac{2 \cdot \operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}$, com $\alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ e $\alpha \neq \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2}$, em que $k \in \mathbb{Z}$.

9. Sugestão de resposta: $\cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\operatorname{sen}\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{2}$ e $2 \cdot \cos^2 x - 5 \cdot \cos x$.

10. Alternativa **c**.

CAPÍTULO 4 LADRILHAMENTO E ÁREA DE FIGURAS PLANAS

Abertura do capítulo

1. Pelo chiado do som, pela estética dos encartes e pela necessidade de dedicar um tempo especial para ouvir um bom disco.

3. Sugestão de resposta: Observando as áreas das faixas de gravação (que lembram coroas circulares), pois, quanto maior o tempo de duração da música, maior será sua área.

Questões

A. Utilizando as peças com formato de triângulo equilátero, é possível obter um ladrilhamento regular, assim como ao usar as peças com formato de hexágono regular.

C. Não é possível obter ladrilhamentos regulares com esses polígonos.

D. $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 90° + \dfrac{(6-2)\cdot 180°}{6} + \dfrac{(12-2)\cdot 180°}{12} = 360°$

E. Seja m a quantidade de polígonos ao redor de um vértice comum, tem-se, evidentemente, $m \geq 3$. Como a menor medida do ângulo interno de um polígono regular é 60°, segue que $3 \leq m \leq 6$, pois $\dfrac{360°}{60°} = 6$.

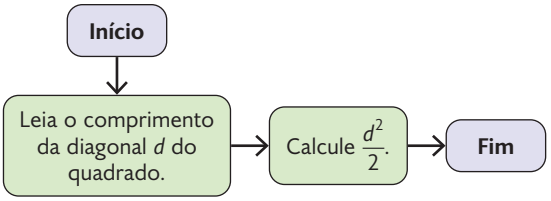
F. (3, 7, 42), (3, 8, 24), (3, 9, 18), (3, 10, 15), (3, 12, 12), (4, 5, 20), (4, 6, 12), (4, 8, 8) e (5, 5, 10).

G. Uma combinação de três polígonos envolvendo um triângulo equilátero ladrilha o plano apenas se os outros dois polígonos forem congruentes.

H. $A = \dfrac{d^2}{2}$

I.

Início
1. Leia o comprimento da diagonal d do quadrado.
2. Calcule $\dfrac{d^2}{2}$.
Fim



LAÍS GARBELINI/ARQUIVO DA EDITORA

J. O quadrado cujo comprimento do lado é 3,7 cm.

K. 10 cm

L. 4,2 m

M. Ao traçarmos as diagonais D e d, obtemos quatro triângulos, que, pelo caso de congruência **LLL**, são congruentes. Assim, ao reconfigurarmos o losango, obtemos um retângulo de dimensões D e $\dfrac{d}{2}$ e área A_R igual à área do losango. Assim, a área A do losango é:

$$A = A_R = D \cdot \frac{d}{2} = \frac{D \cdot d}{2}$$

N. Seja um triângulo equilátero ABC de lado a e altura h. Sendo assim:

$$a^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + h^2 \Rightarrow h = \sqrt{\frac{3a^2}{4}} \Rightarrow h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

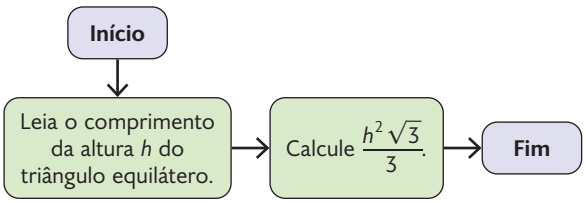
Logo, a área A desse triângulo é:

$$A = \frac{a \cdot h}{2} = \frac{a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

Portanto, a altura h e a área A de um triângulo equilátero, em função do comprimento a do lado, podem ser expressas, respectivamente, por $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ e $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

O.

Início
1. Leia o comprimento da altura h do triângulo equilátero.
2. Calcule $\dfrac{h^2\sqrt{3}}{3}$.
Fim



LAÍS GARBELINI/ARQUIVO DA EDITORA

P. Seja o trapézio de base maior B, base menor b e altura h. Com outro trapézio congruente a esse, podemos compor um paralelogramo cuja altura é h e o comprimento da base é $(B + b)$. A área A_p desse paralelogramo é $A_p = (B + b) \cdot h$. Logo, a área A do trapézio é:

$$A = \frac{A_p}{2} \Rightarrow A = \frac{(B + b) \cdot h}{2}$$

Q. $A_c = \pi R^2 - \pi r^2 \Rightarrow A_c = \pi(R^2 - r^2)$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

R.

Início

1. Leia o comprimento do raio da circunferência de raio maior.

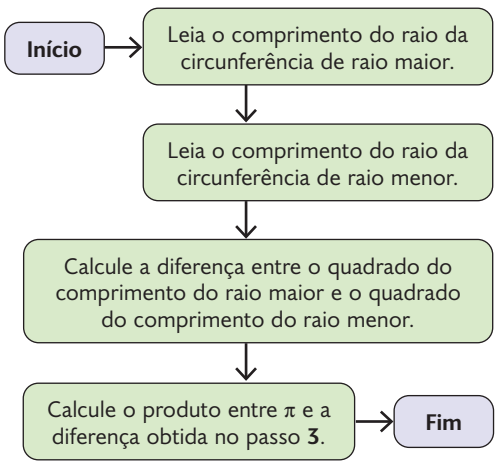
2. Leia o comprimento do raio da circunferência de raio menor.

3. Calcule a diferença entre o quadrado do comprimento do raio maior e o quadrado do comprimento do raio menor.

4. Calcule o produto entre π e a diferença obtida no passo **3**.

Fim

Finalmente, organizamos um fluxograma.

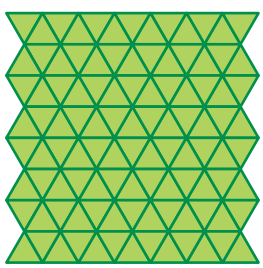


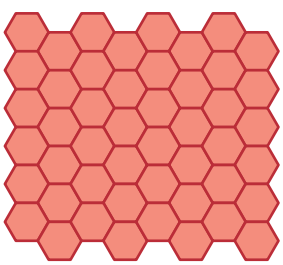
LAÍS GARBELINI/ARQUIVO DA EDITORA

Exercícios e problemas

1. Alternativas **B** e **D**.

2. **a)** Sugestão de resposta: **b)** Sugestão de resposta:





ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

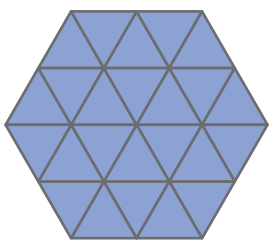
3. **a)** (3, 3, 6, 6), (3, 6, 3, 6), (3, 4, 6, 4), (3, 4, 4, 6)
b) (3, 6, 3, 6) e (3, 4, 6, 4).

4. **a)** Falsa. **b)** Falsa. **c)** Verdadeira.

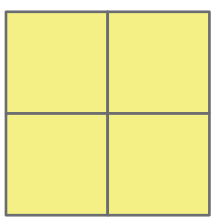
5. Triângulo equilátero; hexágono regular; quadrado.

6. (3, 3, 3, 3, 3, 3), (4, 4, 4, 4), (6, 6, 6), (3, 12, 12), (4, 6, 12), (4, 8, 8), (3, 6, 3, 6), (3, 4, 6, 4), (3, 3, 3, 3, 6), (3, 3, 3, 4, 4) e (3, 3, 4, 3, 4).

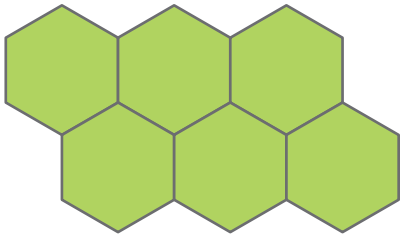
ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA



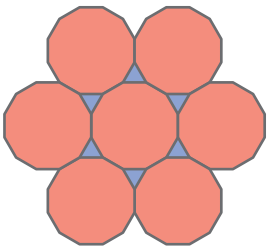
(3, 3, 3, 3, 3, 3)



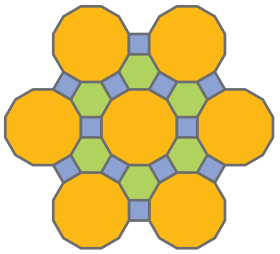
(4, 4, 4, 4)



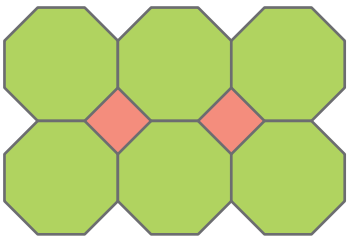
(6, 6, 6)



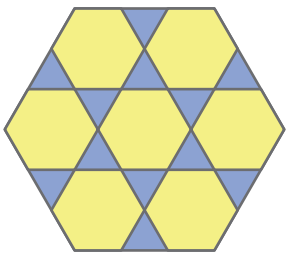
(3, 12, 12)



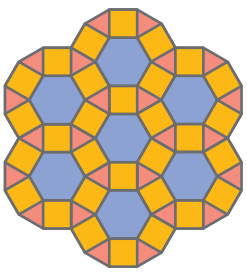
(4, 6, 12)



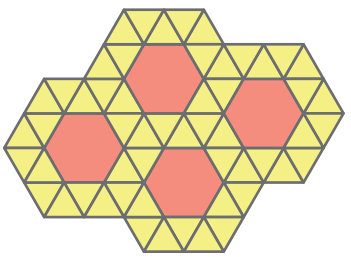
(4, 8, 8)



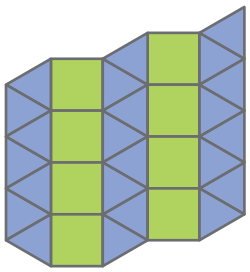
(3, 6, 3, 6)



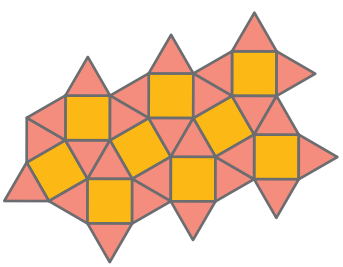
(3, 4, 6, 4)



(3, 3, 3, 3, 6)



(3, 3, 3, 4, 4)



(3, 3, 4, 3, 4)

ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

7. $14\sqrt{93}$ cm²

8. R$ 320,25

9. A. 16 cm² B. $20\sqrt{6}$ cm²

10. A. 18 cm² B. 15 cm²

11. **a)** Tinta azul: 16 L; tinta amarela: 9 L.
b) R$ 236,00

12. 152 cm² **13.** 608 cm²

14. **a)** 714 m² **b)** 1870 m²

15. 9095098 campos de futebol.

16. 144 cm² **17.** 36 cm²

18. A. 8 u² B. 24 u²

19. 88128 km²

20. 10 cm²

21. **a)** 5387888 km²
b) Aproximadamente 1,2%.

22. A. Aproximadamente 136,8 dm².
B. 96 dm²
C. 150 dm²

23. **a)** 84,8 m² **b)** 167,3 m²

24. A. $4\sqrt{6}$ m² C. $\frac{3\sqrt{15}}{4}$ km²
B. 54 dm² D. $40\sqrt{3}$ cm²

25. $\sqrt{5}$ cm; $\frac{\sqrt{15}}{2}$ cm²

26. $3\sqrt{3}$ cm **27.** $60\sqrt{3}$ dm²

28. Verdadeira. Os triângulos *ABC* e *AFC* têm a mesma área, pois têm base $\overline{AC}$ comum e altura com mesmo comprimento. O mesmo ocorre com os triângulos *AED* e *AGD*. Já o triângulo *ACD* é comum ao triângulo *AFG* e ao pentágono *ABCDE*. Dessa maneira, como o triângulo *AFG* e o pentágono *ABCDE* são formados por triângulos com áreas equivalentes, eles têm a mesma área.

29. 80 cm² **30.** 19 cm²

31. A. 20 cm² B. 40 cm² C. 16 cm²

32. 7080 pessoas.

33. $x = 50\sqrt{2}$ m e $y = 150\sqrt{2}$ m.

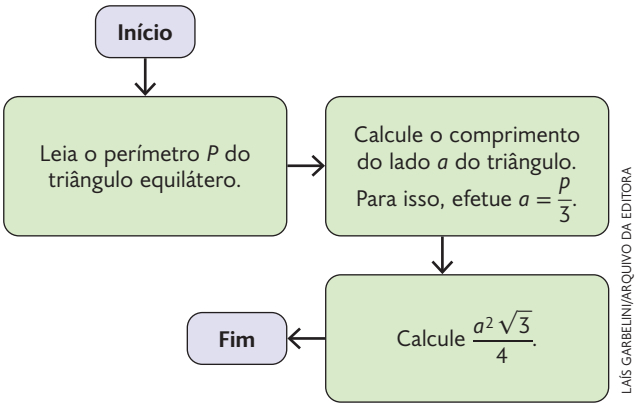
34. 0,5 cm²

35. **a)** O quadrilátero *ABCD* foi decomposto em dois triângulos: *ABC* e *ADC*. O cálculo da área desses triângulos foi obtido por meio da fórmula de Herão.
b) 250000 m²

36. Alternativa **e**. **37.** 1 cm²

38.

Início
1. Leia o perímetro *P* do triângulo equilátero.
2. Calcule o comprimento do lado *a* do triângulo. Para isso, efetue $a = \frac{P}{3}$.
3. Calcule $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.
Fim



LAÍS GARBELINI/ARQUIVO DA EDITORA

40. Alternativa **c**. **41.** 10,5 cm²

42. A. 1575 cm² B. 1501,1 cm² C. 1891,2 cm²

43. **a)** Aproximadamente 684,9 cm².
b) Aproximadamente 2762,1 cm².

44. 18,9 m e 45,8 m. **45.** Aproximadamente 120°.

46. $\frac{b}{a} = \sqrt{3}$

47. Aproximadamente 1072 m; aproximadamente 3384 m².

48. A. 8435 cm²
B. Aproximadamente 12222 cm².
C. 5408 cm²

49. Hexágonos regulares: 2250 m²; triângulos equiláteros: 750 m².

50. A. 196,5 m² B. 160,7 m²

51. Alternativa **c**. **52.** 9

53. Razão de proporcionalidade: $\sqrt{7}$; razão entre as áreas: 7.

54. Aproximadamente 93,3.

55. **a)** Aproximadamente 0,5 m².
b) Aproximadamente 1,5 m².

56. **a)** 25π cm² **b)** 9π cm² **c)** 18π cm²

57. A. $\frac{200\pi}{3}$ cm² C. 175π cm²
B. $19{,}2\pi$ cm² D. $156{,}8\pi$ cm²

58. 12π **59.** Alternativa **c**.

60. Alternativa **a**. **61.** 50 m

62. Aproximadamente 1285 cm². **63.** $\frac{50\pi - 75\sqrt{3}}{12}$ cm²

64. **a)** 31400 cm²
b) $n = 3$: 12990 cm²; $n = 4$: 20006,04 cm²; $n = 5$: 23777 cm²; $n = 10$: 29405 cm².
c) Sugestão de resposta: A área do polígono inscrito se aproxima da área do círculo circunscrito.

65. Aproximadamente 9,10 cm².

66. 64π cm²

67. A. 50π cm² B. $100(\pi - 2)$ m² C. $\frac{64}{3}(4\pi - 3\sqrt{3})$ m²

68. 50 cm²

69. Aproximadamente 273,5 cm².

70. **a)** $\pi \simeq \frac{256}{81} \simeq 3{,}1605$ **b)** $a = \frac{8}{9}d$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

71. a) Faixa **1**: 81,6714 cm²; faixa **2**: 87,135 cm².
b) Faixa **2**, pois sua área é maior do que a da faixa **1**.

Desenvolvimento sustentável (páginas 130 e 131)

2. 25 vagas; 320,25 m².

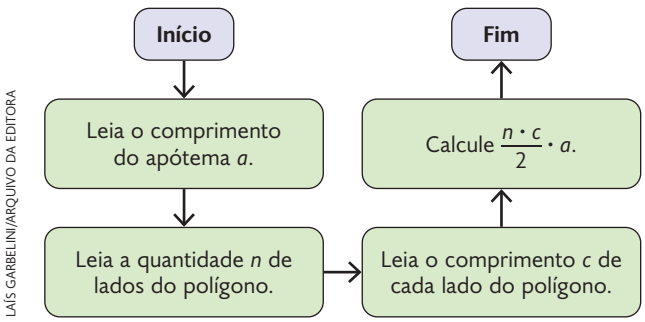
Acessando tecnologias (página 146)

1. • Aproximadamente 15,59 cm².
• Aproximadamente 10,39 m².
• Aproximadamente 84,3 dm².
• Aproximadamente 11,2 mm².

2. A área do triângulo é aproximadamente 254,61 cm² e a do pentágono é aproximadamente 32,69 dm².

3.

Início
1. Leia o comprimento do apótema a.
2. Leia a quantidade n de lados do polígono.
3. Leia o comprimento c de cada lado do polígono.
4. Calcule $\frac{n \cdot c}{2} \cdot a$.
Fim



LAÍS GARBELINI/ARQUIVO DA EDITORA

4. Resposta na página **301**.

Trabalho e juventudes (página 152)

1. Sugestão de resposta: A Matemática é importante para executar diversas etapas de seu trabalho, como calcular a área a fim de saber a quantidade de materiais necessários para a construção, estimar orçamentos, delimitar as medições do terreno, aplicar os conhecimentos relacionados às medidas de comprimento, aplicar noções de Geometria para erguer alicerces, calcular volume e porcentagem, entre outras funções.

Síntese do capítulo (página 157)

3. Ladrilhamento **II**.

4. Triângulos equiláteros, quadrados e hexágonos regulares.

5. Sugestão de resposta: 1. Decomponha o hexágono regular em seis triângulos equiláteros; 2. Calcule a área de cada triângulo aplicando a fórmula $A = \frac{l^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$; 3. Multiplique o resultado obtido no passo **2** por 6.

6. a) Verdadeiro. Sugestão de resposta: Como todo quadrado é um losango, segue que sua área é igual à metade do produto de suas diagonais.
b) Falso. Sugestão de resposta: Os pontos médios dos lados de um retângulo de área R determinam um paralelogramo de área $\frac{R}{2}$.
c) Verdadeiro. Sugestão de resposta: Como em um triângulo equilátero o ângulo entre dois de seus lados mede 60°, sua área A é dada por:

$$A = \frac{l \cdot l \cdot \text{sen}60°}{2} = \frac{l^2 \cdot \text{sen}60°}{2}$$

7. Não, pois a área A_V do setor circular vermelho é igual a $A_V = \frac{\alpha \cdot \pi \cdot r^2}{360°}$. Já a área A_A do setor circular azul é:

$$A_A = \frac{\alpha \cdot \pi \cdot (2r)^2}{360°} = \frac{\alpha \cdot \pi \cdot 4r^2}{360°} = 4\frac{(\alpha \cdot \pi \cdot r^2)}{360°} = 4A_V$$

Portanto, a área do setor circular vermelho é igual a um quarto da área do setor circular azul.

CAPÍTULO 5 MATRIZES, DETERMINANTE E SISTEMAS LINEARES

Abertura do capítulo

1. Multiplicar o número de linhas pelo número de colunas.

3. 8 294 400 *pixels* no total $(3\,840 \times 2\,160)$.

Questões

B. Não, pois A e B são matrizes não nulas e $A - B = C$, então $B - A = -C$.

D. $(-1, 3, 4)$

Exercícios e problemas

1. a) 2×2 b) 5×3 c) 1×4 d) 2×4

2. a) 7 períodos; 18 grupos.
b) 8 elementos; 18 elementos.
c) • C • Au • I
d) • Período 4, grupo 12. • Período 7, grupo 5.
• Período 3, grupo 17.

3. a) $\begin{bmatrix} 7 & 24 \\ 57 & 14 \\ 97 & 213 \\ 161 & 251 \end{bmatrix}$

b) • O total de títulos do cinema brasileiro lançados em 2023 e o total de títulos do cinema estrangeiro lançados em 2023.
• As quantidades de títulos do cinema brasileiro lançados por gênero em 2023 e seu total.
• A quantidade de títulos de ficção do cinema brasileiro lançados em 2023.

4. a) 0 b) 5,7 c) π d) $\sqrt{7}$

5. a) $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ b) $B = \begin{bmatrix} 4 & 9 & 16 \\ 9 & 16 & 25 \end{bmatrix}$ c) $C = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$

6. a) 1×7 ou 7×1.
b) 1×20, 20×1, 2×10, 10×2, 4×5 ou 5×4.

7. $A = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ **8.** 0

9. a) Linha.
b) Nula.
c) Quadrada.
d) Quadrada e triangular.
e) Quadrada, triangular, diagonal e identidade.
f) Coluna.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

10. • -4 • 7 • $12{,}4$ • -4

11. Sugestão de resposta: $\begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{bmatrix}$

12. **a)** Verdadeira. **b)** Verdadeira. **c)** Falsa. **d)** Falsa. **e)** Verdadeira.

13. Alternativa **a**.

14. **a)** $x = 3$; $y = 7$ **b)** $x = 2$; $y = 1$

15. **a)** Roraima, Amazonas, Acre, Rondônia e Mato Grosso.
b) Roraima.
c) Aproximadamente 1149 km.
d) Guiana e Venezuela.
e) $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$
f) Não; não.
g) 0

16. **a)** $A^t = \begin{bmatrix} -4 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -8 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & -6 \\ 1 & 5 & -6 & 7 \end{bmatrix}$ **b)** $B^t = \begin{bmatrix} 1 & -2 & \frac{5}{2} \\ -2 & 0 & 6 \\ \frac{5}{2} & 6 & 13 \end{bmatrix}$

17. B

18. **a)** $A = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 4 & -8 \end{bmatrix}$ **b)** $B = \begin{bmatrix} 17 & 18 \\ -21 & 19 \end{bmatrix}$ **c)** $C = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -9 \\ -6 & -6 & 11 \\ 4 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ **d)** $D = \begin{bmatrix} 9 & -14 \\ 7 & -3 \end{bmatrix}$

19. $X = \begin{bmatrix} -2 & 13 \\ 2 & -9 \\ -15 & 3 \end{bmatrix}$ e $Y = \begin{bmatrix} -2 & 12 & -8 \\ 12 & 5 & 2{,}4 \\ 0 & 5{,}5 & -3 \end{bmatrix}$.

21. **a)** $T = \begin{bmatrix} 55 & 74 & 64 & 67 \\ 65 & 57 & 63 & 63 \end{bmatrix}$ **b)** Bairro **B**; bairro **A**.

22. **a)** $-A = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -5 & 0 \end{bmatrix}$ **b)** $-B = \begin{bmatrix} -3 & \pi \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$ **c)** $-C = \begin{bmatrix} -1 & 0{,}5 & 1 \\ -\sqrt[3]{-6} & -2 & -10 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ **d)** $-D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ **e)** $-E = \begin{bmatrix} 4 & -2{,}4 & -3 \\ 0 & 9{,}1 & -44 \end{bmatrix}$ **f)** $-F = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & -2 \\ -5{,}2 & 4 \\ -\frac{2}{3} & \frac{4}{7} \end{bmatrix}$

23. **a)** $B + B = \begin{bmatrix} 16 & -4 \\ -10 & 2 \end{bmatrix}$ **b)** $B + A = \begin{bmatrix} 9 & -2 \\ -7 & 5 \end{bmatrix}$ **c)** $A + A^t = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 8 \end{bmatrix}$ **d)** $A - B = \begin{bmatrix} -7 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$

24. **a)** $M = \begin{bmatrix} 19 & 18 & 18 & 18 & 18 \\ 22 & 24 & 23 & 22 & 22 \\ 25 & 25 & 25 & 25 & 24 \\ 21 & 20 & 21 & 21 & 20 \end{bmatrix}$ $N = \begin{bmatrix} 28 & 29 & 28 & 29 & 29 \\ 35 & 34 & 32 & 31 & 30 \\ 34 & 34 & 34 & 33 & 31 \\ 33 & 32 & 33 & 33 & 32 \end{bmatrix}$
b) Matriz B. **c)** $B = N - M = \begin{bmatrix} 9 & 11 & 10 & 11 & 11 \\ 13 & 10 & 9 & 9 & 8 \\ 9 & 9 & 9 & 8 & 7 \\ 12 & 12 & 12 & 12 & 12 \end{bmatrix}$
d) Goiânia; Cuiabá. **e)** Dia 1.

25. $A = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 2 \\ 0 & -8 & 8 \\ -1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

27. **a)** $\begin{bmatrix} 3 & -3\pi & -\frac{1}{2} \\ 0 & 12 & -6 \end{bmatrix}$ **b)** $\begin{bmatrix} -4 & 2x \\ 0 & \frac{2}{3} \\ 6x^2 & -\frac{4}{3} \end{bmatrix}$

28. Resposta na página **302**.

29. $x = \frac{7}{4}$; $y = 4$; $z = -3$

30. $18 \cdot C = \begin{bmatrix} 16{,}2 & 14{,}4 & 19{,}8 \\ 90 & 126 & 144 \end{bmatrix}$

31. **a)** $\begin{bmatrix} 4 & 10 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$ **b)** $\begin{bmatrix} -1 & 8 & -3 \\ 0 & 12 & 4 \end{bmatrix}$ **c)** $\begin{bmatrix} -5 & 8 & 18 \\ 8 & -94 & -36 \\ 18 & -36 & -82 \end{bmatrix}$ **d)** $[9]$ **e)** $\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -5 \end{bmatrix}$ **f)** $\begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 0 & 0 \\ 8 & 12 \\ 14 & 21 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ **g)** $\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ **h)** $\begin{bmatrix} 10 & 5 \\ 6 & 6 \\ 5 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$

32. **a)** $m = 2$ **b)** 3×4

33. • $A \cdot B = \begin{bmatrix} 22 & -29 \\ 11 & -\frac{23}{2} \end{bmatrix}$ • $B \cdot A = \begin{bmatrix} -\frac{7}{2} & -\frac{11}{2} \\ 23 & 19 \end{bmatrix}$

35. **a)** $C = \begin{bmatrix} 70 \\ 68 \\ 66 \\ 66 \\ 64 \end{bmatrix}$ **b)** 70 pontos; 66 pontos.

36. **a)** -12 **b)** 19 **c)** 8

37. **a)** $A \cdot B = \begin{bmatrix} 10 & 9 & 45 \\ 18 & -19 & -18 \end{bmatrix}$
b) $A^t \cdot C = \begin{bmatrix} 10 & -4 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$
c) $C \cdot B = \begin{bmatrix} -8 & 12 & 18 \\ 20 & -14 & 0 \end{bmatrix}$
d) $(A + C) \cdot B = \begin{bmatrix} 2 & 21 & 63 \\ 38 & -33 & -18 \end{bmatrix}$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

38. $x = -3$; $y = \frac{1}{2}$

39. $p = 5$; $q = 3$; $r = 4$; $s = 3$

40. a) $\begin{bmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{10} & \frac{3}{10} \end{bmatrix}$ c) Não existe C^{-1}.

b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{8} \end{bmatrix}$

41. 7

42. a) $C = \begin{bmatrix} 383 & 277 & 79 & 451 & 141 & 577 & 273 \\ 305 & 211 & 61 & 355 & 109 & 451 & 218 \end{bmatrix}$

b) $A^{-1} \cdot C = A^{-1} \cdot (A \cdot B) = (A^{-1} \cdot A) \cdot B = I_2 \cdot B = B$

c) Números primos são os números naturais que têm somente dois divisores distintos: o 1 e o próprio número.

d) A mensagem é "missão fracassada".

43. a) $X = \begin{bmatrix} 18 & 6 \\ 27 & -3 \\ 8 & 3 \end{bmatrix}$ b) $X = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -5 \\ -6 & 0 & 9 \end{bmatrix}$

44. $X = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & 1 \\ \frac{19}{5} & 3 \end{bmatrix}$

45. a) $X = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{19}{2} \\ 2 & -\frac{9}{2} \end{bmatrix}$; $Y = \begin{bmatrix} \frac{7}{2} & \frac{5}{2} \\ 6 & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$

b) $X = \begin{bmatrix} 1 & \frac{10}{3} & 4 \end{bmatrix}$; $Y = \begin{bmatrix} 2 & \frac{5}{3} & -2 \end{bmatrix}$

46. $X = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{9}{2} \end{bmatrix}$

47. a) Trabalho **1**: peso 20%; trabalho **2**: peso 30%; prova: peso 50%.

b) 8,1

c) Sugestões de resposta: No trabalho **1**: 8, no trabalho **2**: 8 e na prova: 10; no trabalho **1**: 9, no trabalho **2**: 9 e na prova: 9.

48. a) -12 b) 144

49. $x = 2$; $y = 9$

50. a) $A^t = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \Rightarrow \det A^t = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = \underbrace{ad - bc}_{\det A}$

b) $k \cdot A = \begin{bmatrix} ka & kc \\ kb & kd \end{bmatrix} \Rightarrow \det(k \cdot A) = \begin{vmatrix} ka & kc \\ kb & kd \end{vmatrix} =$

$= ka \cdot kd - kb \cdot kc = k^2 \cdot a \cdot d - k^2 \cdot b \cdot c = k^2 \underbrace{(ad - bc)}_{\det A}$

51. a) 125 b) 250 c) 1000 d) 1000

52. $x = 0$ ou $x = \frac{9}{4}$.

53. 5

54. $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ou $x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

55. Sugestão de resposta: $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -5 & 7 \\ 0 & 6 & 8 \end{bmatrix}$

56. a) 1

b) Resposta na página **302**.

57. a) -4 b) 51 c) 918 d) -72

58. a) Coeficientes: 4 e -12; termo independente: 17.

b) Coeficientes: 1 e $-\sqrt{3}$; termo independente: 0.

c) Coeficientes: -1 e -5; termo independente: 2.

d) Coeficientes: 1 e 2; termo independente: -1.

e) Coeficientes: -3 e 1; termo independente: 0,5.

f) Coeficientes: $\frac{3}{2}$ e -4; termo independente: 4.

g) Coeficientes: $\frac{1}{4}$ e 1; termo independente: $\frac{1}{4}$.

h) Coeficientes: -2, 1 e -1; termo independente: -1.

59. a) Linear.
b) Não linear.
c) Linear.
d) Não linear.
e) Linear.
f) Não linear.
g) Não linear.
h) Linear.

60. Alternativa **b**.

61. a) Sugestão de resposta: $(4, 2)$ e $\left(6, \frac{19}{6}\right)$.

b) Sugestão de resposta: $(0, 0, 0)$ e $(1, 1, 4)$.

c) Sugestão de resposta: $(1, 0)$ e $(5, 1)$.

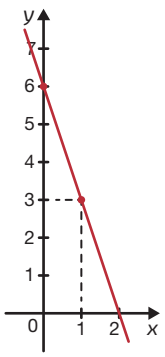
d) Sugestão de resposta: $(-1, -1)$ e $(-3, 1)$.

e) Sugestão de resposta: $(3, 0)$ e $(-1, -4)$.

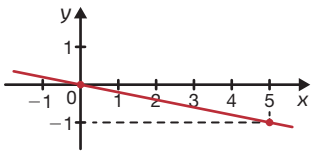
f) Sugestão de resposta: $(1, 7, -13)$ e $(-4, -1, 0)$.

62. $\alpha = -2$

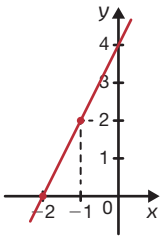
63. a) Duas possíveis soluções reais: $(0, 6)$ e $(1, 3)$.



b) Duas possíveis soluções reais: $(0, 0)$ e $(5, -1)$.



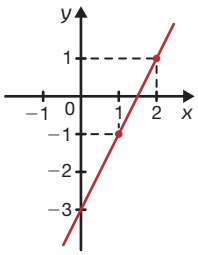
c) Duas possíveis soluções reais: $(-1, 2)$ e $(0, 4)$.



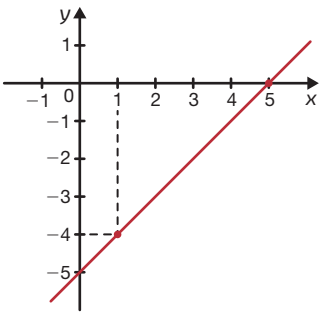
ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

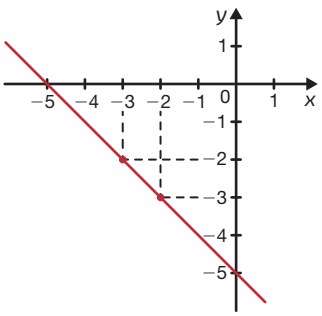
d) Duas possíveis soluções reais: $(1, -1)$ e $(2, 1)$.



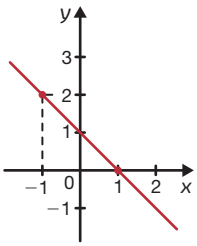
e) Duas possíveis soluções reais: $(1, -4)$ e $(5, 0)$.



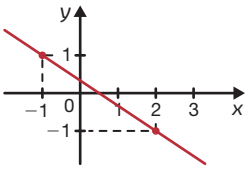
f) Duas possíveis soluções reais: $(-3, -2)$ e $(-2, -3)$.



g) Duas possíveis soluções reais: $(-1, 2)$ e $(1, 0)$.



h) Duas possíveis soluções reais: $(-1, 1)$ e $(2, -1)$.



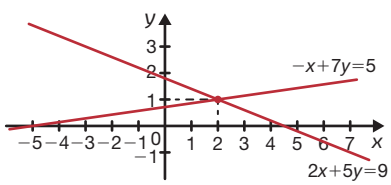
ILUSTRAÇÕES: KEITHY MOSTACHI/ ARQUIVO DA EDITORA

64. a) As ternas $(0, 0, 0)$ e $(1, -2, -3)$ são soluções do sistema e ele é homogêneo.

b) As ternas $(-1, 1, -1)$ e $(0, 0, 0)$ são soluções do sistema e ele é homogêneo.

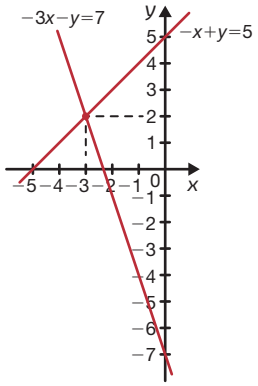
c) A terna $\left(\frac{1}{16}, \frac{21}{16}, \frac{9}{16}\right)$ é solução do sistema e ele é não homogêneo.

65. a) $(2, 1)$

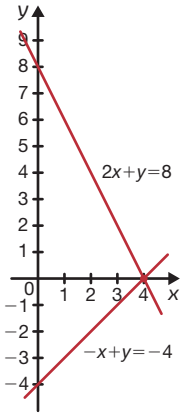


RONALDO INÁCIO/ ARQUIVO DA EDITORA

b) $(-3, 2)$

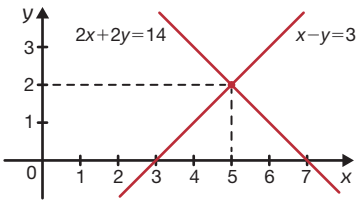


c) $(4, 0)$

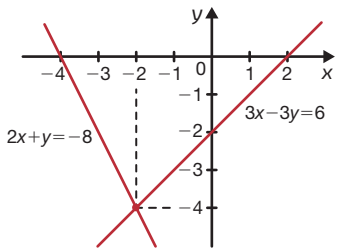


ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

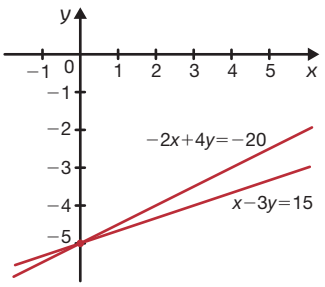
d) $(5, 2)$



e) $(-2, -4)$



f) $(0, -5)$



ILUSTRAÇÕES: KEITHY MOSTACHI/ARQUIVO DA EDITORA

66. Alternativa **d**.

67. Blusa: R$ 20,00; calça: R$ 40,00; par de sapatos: R$ 60,00; bolsa: R$ 80,00.

68. R$ 197,50

69. a) Compartilhamento de fotos: 20 MB; vídeos: 100 MB.
b) 66 fotos; 50 minutos.

70. a) $\begin{cases} x + y = 2\,000 \\ x = y + 688 \end{cases}$

b) 1344 curtidas e 656 compartilhamentos.

71. Alternativa **c**.

72. Alternativa **d**.

73. a) Alternativa **II**.
b) 150 mL de leite e 200 g de salada de frutas.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

74. a) $\begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 4 & -4 & 7 \\ -0{,}5 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}$

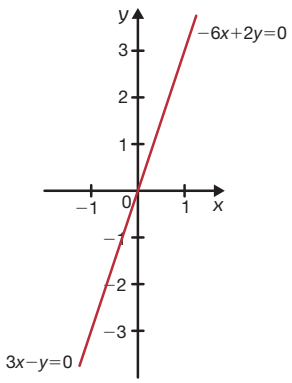
c) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}$

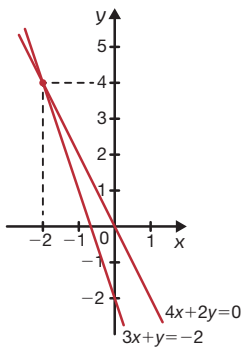
e) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 & -1 \\ 1 & \sqrt{7} & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ \sqrt{7} \end{bmatrix}$

f) $\begin{bmatrix} -1 & 0 & -3{,}5 \\ 0 & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$

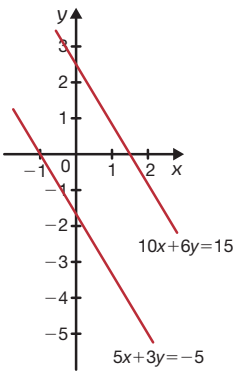
75. a) SPI



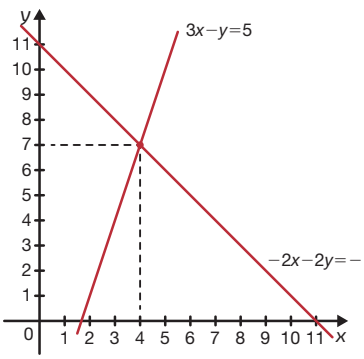
b) SPD



c) SI

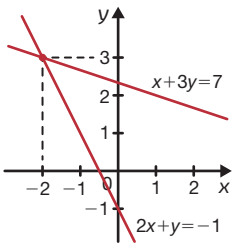


d) SPD

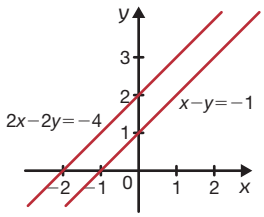


ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

e) SPD



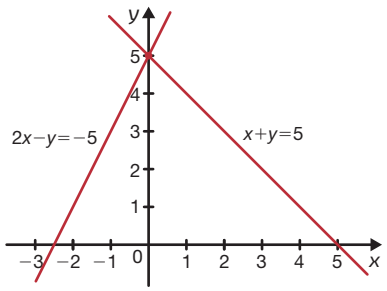
f) SI



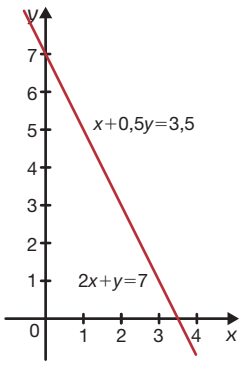
RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

KEITHY MOSTACHI/ARQUIVO DA EDITORA

g) SPD



h) SPI



ILUSTRAÇÕES: KEITHY MOSTACHI/ARQUIVO DA EDITORA

76. 8 vitórias; 3 empates; 4 derrotas.

77. $\alpha = -2$

78. a) Uma solução; $(-2, 5)$.

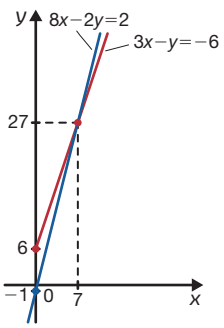
b) Não tem solução.

c) Uma solução; $(2, 1)$.

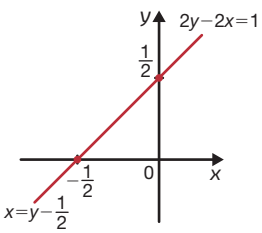
d) Infinitas soluções; algumas soluções são: $(-2, 5)$; $(0, 3)$; $(2, 1)$; $(3, 0)$.

e) Uma solução; $(-2, 5)$.

79. a) $(7, 27)$



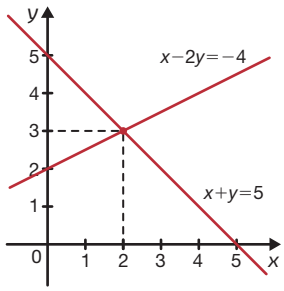
b)



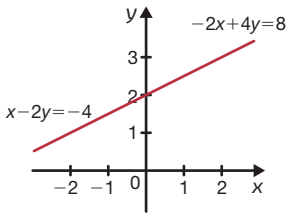
ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

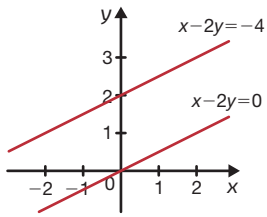
c) (2, 3)



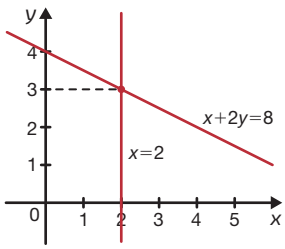
d)



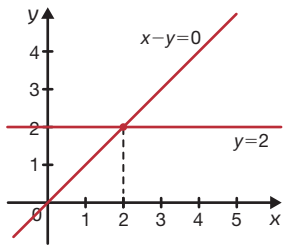
e)



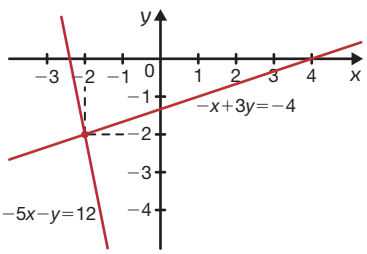
f) (2, 3)



g) (2, 2)



h) (−2, −2)



ILUSTRAÇÕES: KEITHY MOSTACHI/ARQUIVO DA EDITORA

80. **a)** $\begin{cases} 8A + 12B = 324 \\ A + B = 33 \end{cases}$
b) SPD
c) Frango: 18 unidades; vegetariano: 15 unidades.

81. **a)** $a = 3$; $b = 2$ **b)** $a \neq 3$; $b \in \mathbb{R}$ **c)** $a = 3$; $b \neq 2$

82. **a)** Não existe solução.
b) $x = \frac{6}{19}$ e $y = \frac{23}{19}$.
c) $x = -\frac{12}{5}$ e $y = \frac{4}{5}$.
d) $x = \frac{20}{3}$ e $y = \frac{8}{3}$.
e) Não existe solução.
f) $x = \frac{7}{10}$ e $y = \frac{13}{10}$.
g) $x = \frac{436}{59}$ e $y = \frac{2\,353}{1\,062}$.
h) Não existe solução.

83. Etanol: 30 L; gasolina: 10 L.

84. **a**-**IV**; **b**-**I**; **c**-**III**; **d**-**II**

85. Alternativa **d**.

86. $x = 3$; $y = -2$; $z = -1$

87. $\begin{cases} 2{,}5L + 1{,}6P = 26{,}70 \\ 4L + 3{,}5P = 54{,}00 \end{cases}$; L = R$ 3,00; P = R$ 12,00

88. **a)** SI
b) SPD; solução: $(7{,}62; 3{,}92)$.
c) SPD; solução: $(-134, 48)$.
d) SPI
e) SPD; solução: $(3, 0)$.
f) SI

89. **a)** Carbono: 12 u; hidrogênio: 1 u.
b) Não.

90. **a**-**d**; **b**-**f**; **c**-**e**

91. Alternativas **b** e **d**.

92. **a)** • $A \neq 1$ • $B = 0$ • $C \neq 0$ • $D = 0$ • $E = -1$
b) • $A \neq B$ • $B = 1 \Rightarrow A \neq 1$ • $C \neq 0$ • $D = 0$ • $E = 0$ • $C \neq 2$

93. **a)** SPI; solução geral: $\left(\frac{7}{2} - k, 3 - k, k\right)$, com k real.
b) SPD; $(1, -2, 4)$
c) SPI; solução geral: $(4, 5 + 2k, -5 - k, k)$, com k real.

94. Gil: 9 gols; João: 3 gols.

95. **a)** $x = 2$; $y = 3$; $z = 1$ **b)** $x = 3$; $y = -1$; $z = 2$

96. Alternativa **d**.

97. 50 s

99. A mãe utilizou quatro caixas amarelas, uma verde e duas azuis.

100. 106,848 cm^3

101. **a)** $i_1 = \frac{9}{28}$, $i_2 = \frac{1}{7}$ e $i_3 = \frac{5}{28}$.
b) Sugestões de resposta: Fontes de energia elétrica: pilhas, baterias e usinas; condutores: cobre e ouro; dispositivos: aparelhos eletrônicos, eletrodomésticos, lâmpadas e motores.

102. **a)** SPD: $a \neq 2$; SPI: $a = 2$
b) SPD: $a \neq 0$ e $a \neq -1$; SI: $a = 0$ ou $a = -1$.

103. $k_2 \neq -2k_1$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

104. $a \neq 0$; Sugestão de resposta: $a = 1$ e $(21, 4, 16)$.

105. SPD: $a \neq -\frac{1}{2}$; SPI: $a = -\frac{1}{2}$ e $b = 4$; SI: $a = -\frac{1}{2}$ e $b \neq 4$.

106. $a \neq \frac{10}{3}$

107. SPD

Educação midiática (páginas 180 e 181)

2. A matriz inversa pode ajudar na criptografia de informações. Em geral, sistemas e ferramentas de segurança digital, como os protocolos de HTTPS e aplicativos de mensagem instantânea, utilizam criptografia para proteger informações e dados pessoais dos usuários de internet.

Desenvolvimento sustentável (páginas 184 e 185)

1. Sugestão de resposta: O controle da quantidade de sódio evita doenças relacionadas à pressão arterial, contribuindo, assim, para a manutenção da saúde do corpo.

2. Pão francês: 100 g; leite: 255 g.

3. 1220 mg.

Síntese do capítulo (página 215)

3. Matriz B.

4. Uma matriz simétrica é uma matriz quadrada que é igual à sua transposta. Sugestão de resposta: $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 3 \\ 5 & 3 & 3 \end{bmatrix}$.

5. Alternativa **b**.

6. **a)** Verdadeira.

b) Falsa. Sugestão de correção: Uma matriz quadrada é dita matriz diagonal quando os elementos acima ou abaixo da diagonal principal são nulos.

c) Falsa. Sugestão de correção: A propriedade comutativa não é válida para a subtração de matrizes.

d) Verdadeira.

7. Não, pois existindo $A \cdot B$, temos as seguintes possibilidades: $A \cdot B \neq B \cdot A$; $A \cdot B = B \cdot A$; não existe $B \cdot A$.

8. Resposta na página **302**.

9. SPD, pois as retas que representam as equações do sistema se cruzam em um único ponto.

10. Trocar a ordem das equações do sistema; substituir uma equação do sistema por outra equação, resultante de sua adição com outra equação do mesmo sistema multiplicada por um número diferente de zero; e multiplicar qualquer equação por um número diferente de zero.

CAPÍTULO 6 GEOMETRIA ANALÍTICA

Abertura do capítulo

1. Durante a fase nova, ocorre o eclipse solar; durante a fase cheia, o eclipse lunar.

2. Porque a órbita da Lua tem uma inclinação em relação à orbita da Terra ao redor do Sol.

3. A resposta depende do ano vigente.

Questões

A.

Início

1. Leia as abscissas x_A e x_B dos pontos A e B.

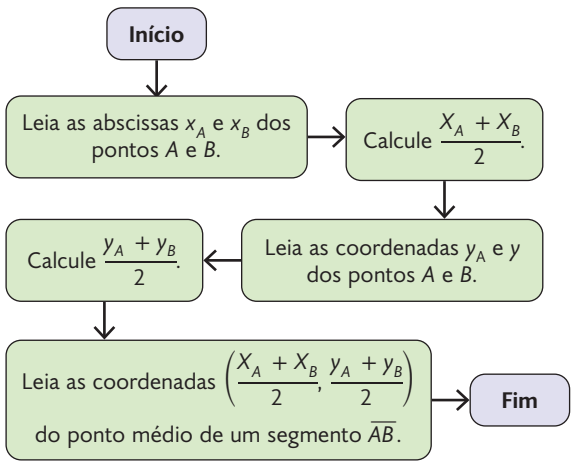
2. Calcule $\frac{X_A + X_B}{2}$.

3. Leia as coordenadas y_A e y dos pontos A e B.

4. Calcule $\frac{y_A + y_B}{2}$.

5. Leia as coordenadas $\left(\frac{X_A + X_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right)$ do ponto médio de um segmento $\overline{AB}$.

Fim



LAÍS GARBELINI/ARQUIVO DA EDITORA

Exercícios e problemas

1. $A(3, 2)$, $B(-6, 0)$, $C(-1, -5)$, $D(4, -4)$, $E(-3, 3)$, $F(5, 6)$ e $G(-5, -6)$.

2. **a)** 1º e 4º quadrantes. **c)** 2º quadrante.
b) 3º e 4º quadrantes. **d)** 4º quadrante.

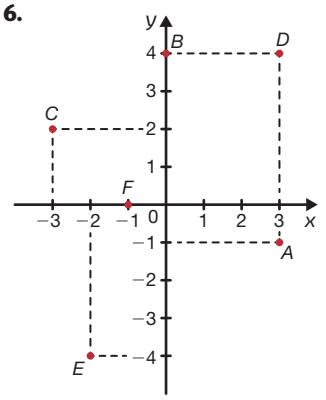
3. $A(-6, 8)$, $B(-3, -1)$ e $C(3, -1)$.

4. **a)** $A(1, 3)$, $B(2, -2)$, e $C(5, 2)$ e $D(6, -1)$.

b) Sugestão de resposta: $(3, 1)$, $(4, 1)$ e $(5, 1)$.

c) $A'(-1, 3)$, $B'(-2, -2)$, $C'(-5, 2)$ e $D'(-6, -1)$.

6.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

7. **a)** • 20°
• 40°
• $F(60°, -40°)$; $E(-40°, -40°)$

b) O ponto B, pois sua longitude é $-100°$ e a sua latitude é 0°.

c) G; $G(20°, -20°)$

8. **a)** • $A(-2, -2)$ • $C(3, 3)$ • $E(1, -1)$
• $B(1, 1)$ • $D(-1, 1)$ • $F(2, -2)$

b) $x = -9$; $y = 7$

9. **a)** $\sqrt{2}$ **c)** $3\sqrt{2}$ **e)** $\sqrt{10}$ **g)** $3\sqrt{2}$
b) 7 **d)** 15 **f)** $\sqrt{8}$ **h)** 4

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

10. **a)** 3 triângulos.
b) $\triangle ABD$: isósceles; $\triangle ACD$: escaleno; $\triangle BCD$: isósceles.

11. $x = -3$

12. **a)** $AB = 13$ u.c.; $AC = \frac{5}{2}$ u.c.; $BC = \frac{10\sqrt{7}}{2}$ u.c.
b) $FG = 6$ u.c.; $FH = 6$ u.c.; $GH = 6$ u.c.
c) $LM = \sqrt{26}$ u.c.; $LN = \sqrt{41}$ u.c.; $MN = \sqrt{37}$ u.c.
d) $PQ = 5$ u.c.; $PR = 5$ u.c.; $QR = 6$ u.c.
e) $ST = 3\sqrt{2}$ u.c.; $SU = \sqrt{61}$ u.c.; $TU = \sqrt{13}$ u.c.
f) $VX = 2\sqrt{2}$ u.c.; $VZ = \sqrt{41}$ u.c.; $XZ = \sqrt{13}$ u.c.

13. **a)** Perímetro: 16 u.c.; área: 12 u.a.
b) Perímetro: 12 u.c.; área: 6 u.a.
c) Perímetro: 12 u.c.; área: 6 u.a.
d) Perímetro: 18 u.c.; área: 12 u.a.

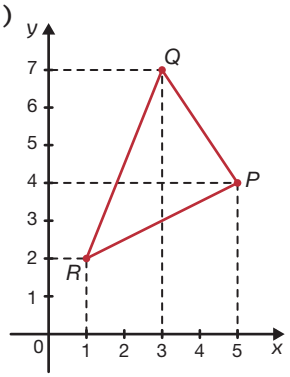
14. **a)** Recebem o sinal: *B*, *D* e *E*; não recebem o sinal: *A* e *C*.
b) Sim, pois *F* está localizado no raio de transmissão.
c) Sugestão de resposta: $H(0, -4)$

15. 4,5 u.a.

16. $D(-9, -3)$

17. **a)** $P\left(\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right)$ **b)** $P\left(\frac{19}{7}, \frac{8}{7}\right)$ **c)** $P\left(2, \frac{3}{2}\right)$ **d)** $P\left(-\frac{9}{2}, \frac{7}{2}\right)$

18. **a)**



TATIANE GALHEIRO/ARQUIVO DA EDITORA

b) A distância entre as mesas *P* e *Q* é de aproximadamente 3,6 m, a distância entre as mesas *Q* e *R* é de aproximadamente 5,4 m e a distância entre as mesas *P* e *R* é de aproximadamente 4,5 m.

19. **a)** A menor distância entre os pontos representados nesse plano é de aproximadamente 4,1 u.c.
b) O perímetro é 16 u.c. e a área é aproximadamente 5,75 u.a.

20. Alternativa **e**.

21. **a)** $\left(\frac{5}{2}, 5\right)$ **b)** $(-1, 2)$ **c)** $\left(-\frac{9}{2}, -\frac{9}{2}\right)$ **d)** $(4, 7)$

22. 5 u.c.

23. **a)** Sim, pois $M_{\overline{AC}}\left(\frac{-2+4}{2}, \frac{7+(-5)}{2}\right) = M_{\overline{AC}}(1, 1)$.
b) • $M_{\overline{AB}}\left(-\frac{1}{2}, 4\right)$ • $M_{\overline{BC}}\left(\frac{5}{2}, -2\right)$

24. **a)** $C(3, 4)$; $D(6, 8)$ **b)** 1800 m

25. $A(6, 0)$; $B(0, 8)$

26. $x = 0$; $y = 4$

27. $x = 3$; $y = -7$

28. $Q\left(-\frac{13}{7}, \frac{31}{7}\right)$

29. **a)** $AM_{\overline{BC}} = \sqrt{17}$; $BM_{\overline{AC}} = \frac{\sqrt{149}}{2}$; $CM_{\overline{AB}} = \frac{\sqrt{65}}{2}$
b) $G\left(-\frac{8}{3}, -\frac{5}{3}\right)$

30. $B(9, 4)$; $C(8, 0)$

31. **a)** $\left(-\frac{4}{3}, 2\right)$ **b)** $\frac{\sqrt{109}}{3}$

32. **a)** $P\left(\frac{11}{2}, 7\right)$; $Q\left(\frac{5}{2}, 7\right)$; $R(4, 4)$ **b)** $G(4, 6)$; $H(4, 6)$

33. **a)** Usando coordenadas no plano e distância entre dois pontos, sabendo que a distância de *MT* é 80 passos, ao caminhar 40 passos, temos a metade dessa distância. Assim, ao virar à direita e caminhar mais 40 passos, sabe-se que está caminhando em direção ao ponto *A*, ou seja, em direção ao tesouro.

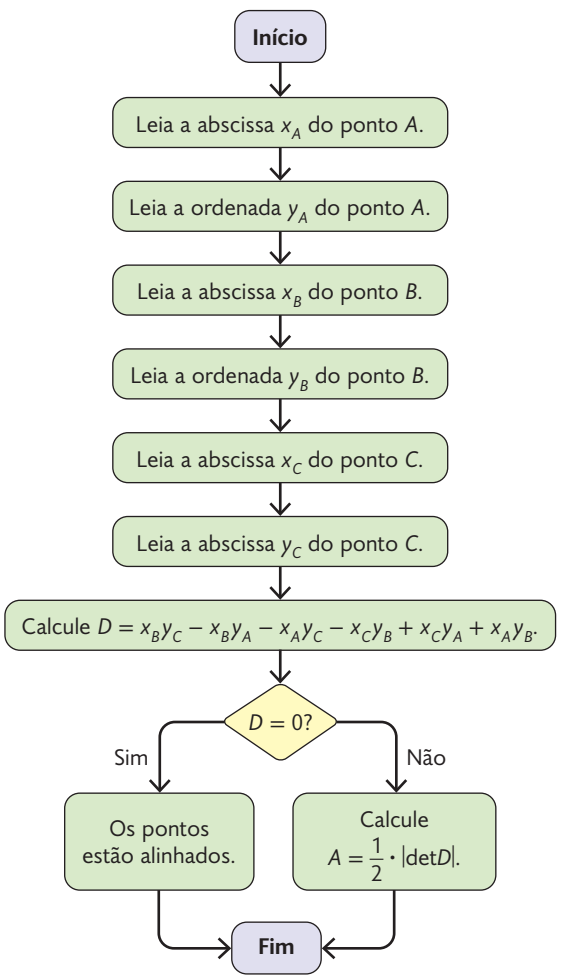
34. Alternativas **a**, **c**, **d** e **f**.

35. $r = -9$

36. $E\left(-\frac{1}{3}, \frac{10}{3}\right)$

37.

Início
1. Leia a abscissa x_A do ponto *A*.
2. Leia a ordenada y_A do ponto *A*.
3. Leia a abscissa x_B do ponto *B*.
4. Leia a ordenada y_B do ponto *B*.
5. Leia a abscissa x_C do ponto *C*.
6. Leia a ordenada y_C do ponto *C*.
7. Calcule $D = x_By_C - x_By_A - x_Ay_C - x_Cy_B + x_Cy_A + x_Ay_B$.
8. Se $D = 0$, os pontos estão alinhados. Se não, calcule $A = \frac{1}{2} \cdot |\det D|$.
Fim



LAÍS GARBELINI/ARQUIVO DA EDITORA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

38. a) $a = 11$

b) $T(12, 16)$; sim; eclipse solar.

39. A. 11 u.a. B. $\frac{25}{2}$ u.a.

40. 10 u.a.

41. 12 u.a.

42. 15 u.a.

43. A. $x + y - 4 = 0$ D. $-4x + 5y + 2 = 0$

B. $y - x - 5 = 0$ E. $-x + 2y - 2 = 0$

C. $\sqrt{3}x + y = 0$ F. $-x + y = 0$

44. a) $5x - y + 6 = 0$ c) $y - 2 = 0$

b) $3x + 5y = 0$ d) $x - 12 = 0$

45. $p = \frac{17}{2}$

46. a) $y = 6x$ b) $y_1 = 18$; $y_2 = -12$

47. Alternativa **e**.

48. a) $-x - 6y + 17 = 0$ d) $x - 4y - 20 = 0$

b) $-10x + y + 4 = 0$ e) $-x - 8y + 30 = 0$

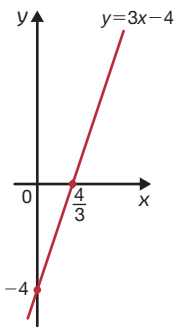
c) $-9x + 7y - 59 = 0$ f) $-9x + 2y + 6 = 0$

49. Alternativa **d**.

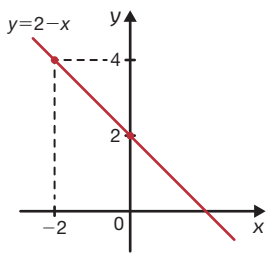
50. a) $y = 0{,}15x + 1500$ c) $\frac{20\,000}{3}$

b) $y_1 = 1725$; $y_2 = 1920$

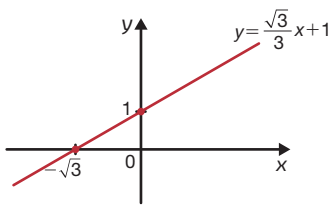
51. a)



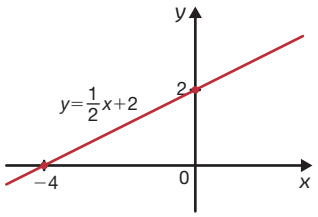
b)



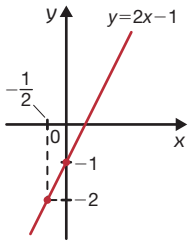
c)



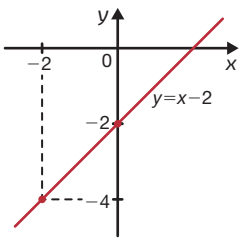
d)



e)



f)



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

52. Alternativa **b**.

53. a) $A(-3, 0)$ e $B(0, 4)$. c) $M\left(-\frac{3}{2}, 2\right)$

b) 5

54. Alternativa **b**.

55. r: $15x + 17y + 104 = 0$;
s: $6x + 35y - 184 = 0$;
t: $-x + 2y + 15 = 0$;
u: $-3x - 18y + 96 = 0$.

56. $2x - y = 0$; $x + 2y - 5 = 0$

57. a) $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$

b) $\left(0, -\frac{3}{2}\right)$

c) Possível resposta: $\left(1, \frac{3}{2}\right)$, $\left(-2, -\frac{15}{2}\right)$ e $\left(-\frac{1}{3}, -\frac{5}{2}\right)$.

58. $k = 3$

59. Alternativa **B**.

60. a) $-12x + y = 0$ c) 96

b) Não. d) 13

Síntese do capítulo (página 247)

4. • $m > 0$ • $m < 0$ • $m = 0$

• O ponto P não pertence ao eixo y para qualquer valor real de m.

5. Uma reta é dita orientada quando sobre ela referenciamos um sentido de percurso, chamado positivo. O sentido inverso ao positivo é chamado de negativo.

6. Sugestão de resposta: Por meio da fórmula $CD = \sqrt{(x_C - x_D)^2 + (y_C - y_D)^2}$.

ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

7. É o ponto que separa o segmento de reta em duas partes com comprimentos iguais.

8. $A(-1, 6)$ e $B(3, 4)$.

9. O baricentro corresponde ao ponto em que se cruzam as três medianas de um triângulo. Esse ponto representa o centro de equilíbrio de um triângulo.

10. O circuncentro corresponde ao centro de uma circunferência que passa pelos vértices de um triângulo.

11. Sugestão de resposta: Na computação gráfica e na construção civil.

12. Podemos escrever na forma $ax + by + c = 0$, em que a, b e c são os coeficientes, sendo a e b não nulos simultaneamente.

CAPÍTULO 7 TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS

Abertura do capítulo

2. De maneira sucessiva, divide-se cada quadrado em nove quadrados congruentes e remove-se o quadrado central.

3. Cada face do Cubo de Sierpiński é semelhante a um Tapete de Sierpiński.

Questões

C. Sim, pois a figura $A'B'C'D'$ é a imagem da figura $ABCD$ por reflexão em torno de r e a transformação de reflexão é isométrica.

D. Sim, pois a figura $A'B'C'$ é a imagem da figura ABC por rotação de centro X e a transformação de rotação é isométrica.

E. Sim, pois a figura $A'B'C'$ é a imagem da figura ABC por translação associada ao vetor u e a transformação de translação é isométrica.

Exercícios e problemas

1. Alternativa **A**.

2. **a)** $A(-3, 1)$, $B(-3, 3)$, $C(-1, 2)$, $D(-2, 5)$, $E(-5, 4)$ e $F(-5, 2)$.

b) • $A''(-3, -1)$, $B''(-3, -3)$, $C''(-1, -2)$, $D''(-2, -5)$, $E''(-5, -4)$ e $F''(-5, -2)$.

• $A'(3, 1)$, $B'(3, 3)$, $C'(1, 2)$, $D'(2, 5)$, $E'(5, 4)$ e $F'(5, 2)$.

3. Alternativa **B**.

5. Inicialmente, trace as retas r e s. Em seguida, marque os pontos X e Y sobre a reta r. Construa uma circunferência de centro X e uma de centro Y, de maneira que elas se intersectem. Os pontos de interseção dessas circunferências são A e B. Agora, marque os pontos W e Z sobre a reta s. Depois, construa uma circunferência de centro em W e raio WA e uma circunferência de centro em Z e raio ZA. Essas circunferências se intersectam em dois pontos: um deles é o A, e o outro, C.

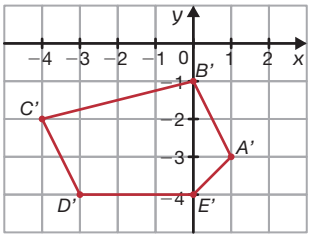
6. **b)** Sim. A reta r é vertical, passando pelo centro da imagem.

7. Sim. **8.** Alternativa **B**.

9. **a)** $A(-1, 3)$, $B(0, 1)$, $C(4, 2)$, $D(3, 4)$ e $E(0, 4)$.

b) $A'(1, -3)$, $B'(0, -1)$, $C'(-4, -2)$, $D'(-3, -4)$ e $E'(0, -4)$.

c)



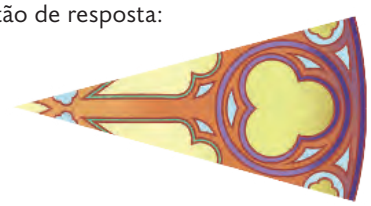
ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

10. **a)** Transformação de reflexão e de rotação.

b) Sim. Na figura **A**.

11. Não.

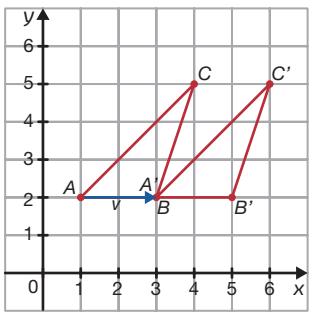
12. Sugestão de resposta:



HELOÍSA PINTARELLI/ARQUIVO DA EDITORA

13. Alternativa **A**. **14.** 5 u.c.

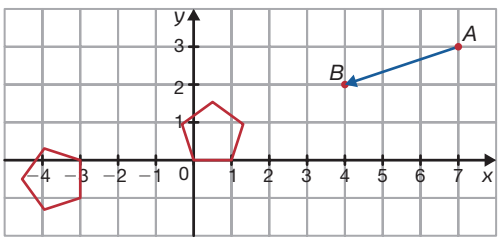
15.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

16. $A'(0, -1)$, $B'(2, -3)$, $C'(1, -6)$, $D'(-1, -3)$ e $E'(-2, -3)$.

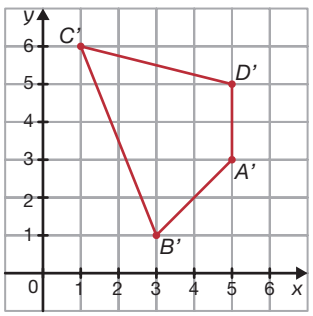
17. Sugestão de resposta:



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

18. **a)** Reflexão, rotação e translação.

19. **a)**



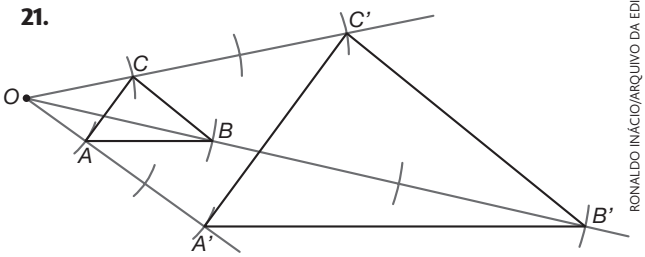
RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

b) Outra possibilidade para obter o polígono $A'B'C'D'$ é aplicar sobre $ABCD$ uma reflexão em torno do eixo y seguida de uma translação associada ao vetor $v = \overrightarrow{XY}$, tal que $X = (-3, -1)$ e $Y = (3, 1)$.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

20. a) Transformação de rotação, transformação de translação, transformação de reflexão seguida de translação.

21.



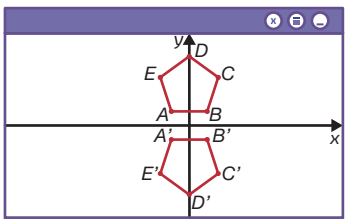
RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

22. a) Sim. Sugestão de resposta: Homotetia, rotação, translação e reflexão.

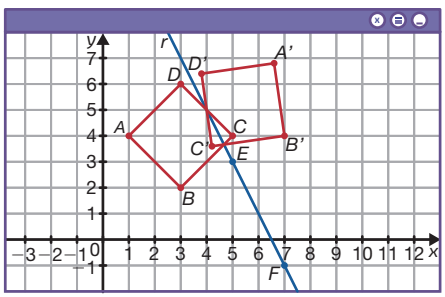
b) Sim.

Acessando tecnologias (páginas 257 a 259)

1. Sugestão de resposta:



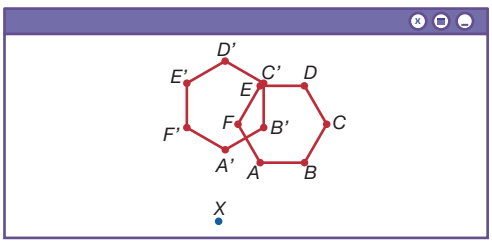
2.



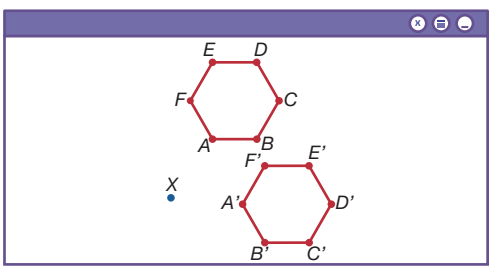
SERGIO L. FILHO/ARQUIVO DA EDITORA

3. Sugestão de resposta:

• Rotação de 30°

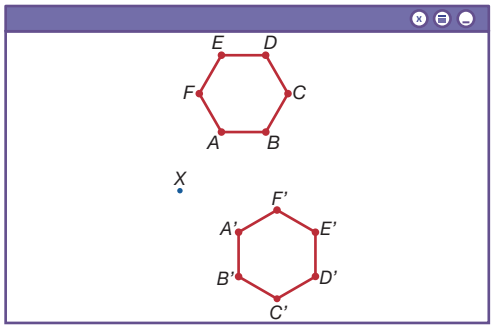


• Rotação de 60°



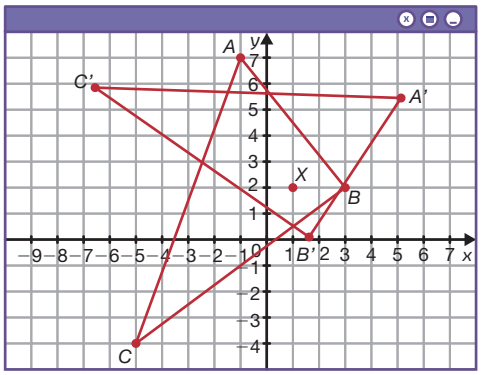
ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO E SERGIO L. FILHO/ARQUIVO DA EDITORA

• Rotação de 270°



RONALDO INÁCIO E SERGIO L. FILHO/ARQUIVO DA EDITORA

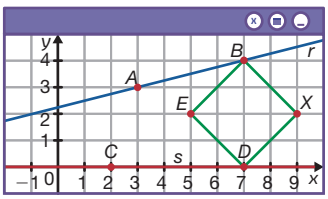
4.



SERGIO L. FILHO/ARQUIVO DA EDITORA

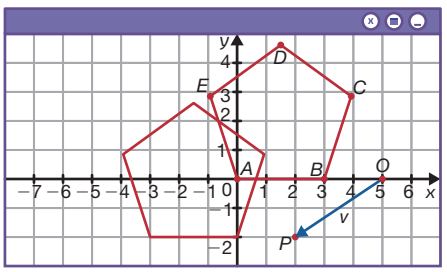
5. a) (9, 2) b) $A(3, 3)$ e $B(7, 4)$; $C(2, 0)$ e $D(7, 0)$.

c)



SERGIO L. FILHO/ARQUIVO DA EDITORA

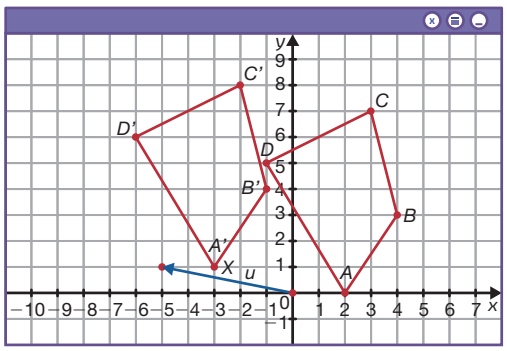
6. Sugestão de resposta:



SERGIO L. FILHO/ARQUIVO DA EDITORA

7. São quatro possibilidades de vetores:

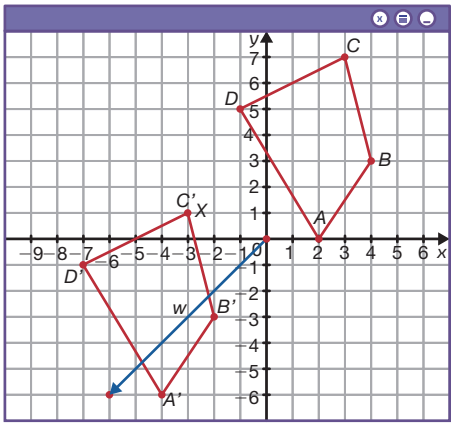
1ª) $u = \overrightarrow{OU}$, tal que $O(0, 0)$ e $U(-5, 1)$.



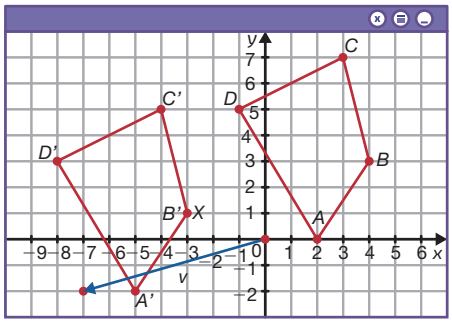
SERGIO L. FILHO/ARQUIVO DA EDITORA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

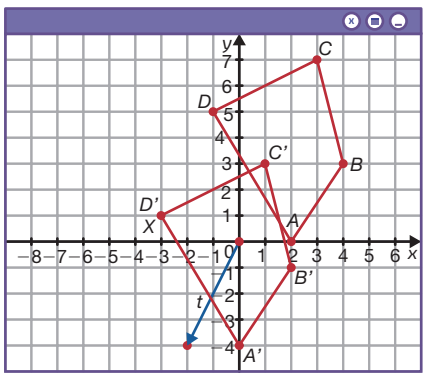
2ª) $w = \overrightarrow{OW}$, tal que $O(0, 0)$ e $W(-6, -6)$.



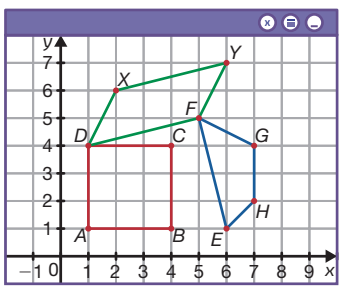
3ª) $v = \overrightarrow{OV}$, tal que $O(0, 0)$ e $V(-7, -2)$.



4ª) $t = \overrightarrow{OT}$, tal que $O(0, 0)$ e $T(-2, -4)$.



8. Sugestão de resposta:



ILUSTRAÇÕES: SERGIO L. FILHO/ARQUIVO DA EDITORA

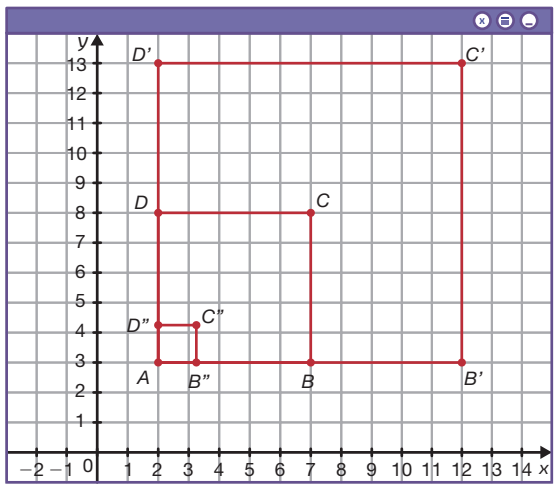
RONALDO INÁCIO E SERGIO L. FILHO/ARQUIVO DA EDITORA

Trabalho e juventudes (página 262)

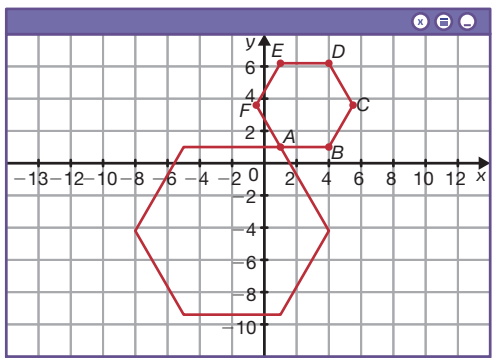
1. Os artistas plásticos criam obras de arte de autoria própria, como telas e esculturas. Também trabalham com a criação de desenhos artísticos para empresas de comunicação visual, atuam em escolas e universidades, além de trabalhar com a restauração de peças e com pinturas e desenhos de arte urbana.

Acessando tecnologias (página 266)

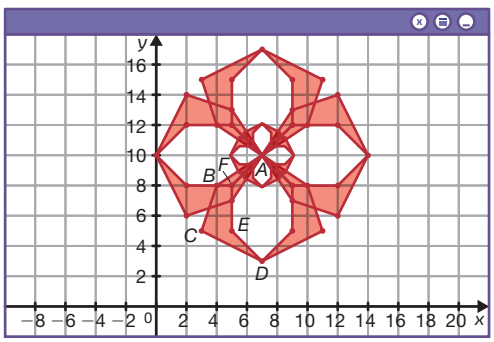
1. Sugestão de resposta:



2. Sugestão de resposta:



3. Sugestão de resposta:



RONALDO INÁCIO E SERGIO L. FILHO/ARQUIVO DA EDITORA

RONALDO INÁCIO E SERGIO L. FILHO/ARQUIVO DA EDITORA

RONALDO INÁCIO E SERGIO L. FILHO/ARQUIVO DA EDITORA

Síntese do capítulo (página 267)

3. Sugestão de resposta: Obras de arte e fachadas de prédios.

4. a) Verdadeira.

b) Falsa. Sugestão de correção: No plano, uma rotação de centro A e ângulo α é uma transformação geométrica que a cada ponto X faz corresponder um ponto X', tal que $AX = AX'$ e $X\hat{A}X' = \alpha$.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

c) Falsa. Sugestão de correção: Um vetor é um segmento de reta orientado que tem comprimento, direção e sentido.

5. Sugestão de resposta: Marque um ponto X e, com auxílio de uma régua, trace a reta r. Em seguida, marque dois pontos quaisquer A e B sobre a reta r. Com o compasso, construa uma circunferência de centro A passando por X e uma segunda circunferência de centro B passando por X. O ponto em que essas circunferências se intersectam, além de X, é o simétrico do ponto X em relação à reta r.

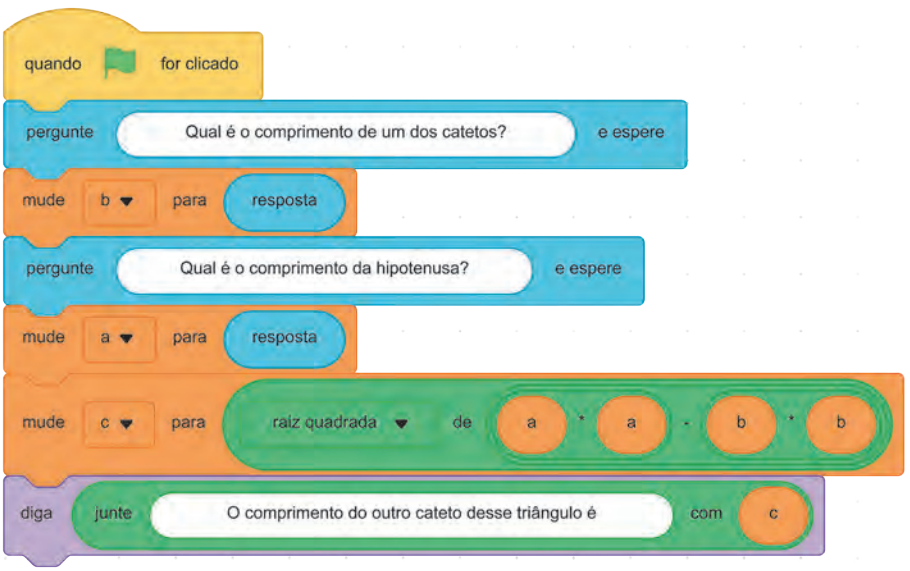
6. Sugestão de resposta: Inicialmente, determino o comprimento c do vetor. Em seguida, construo os segmentos $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$ e $\overline{DD'}$, tais que $AA' = BB' = CC' = DD' = c$. Por fim, traço os segmentos $\overline{A'B'}$, $\overline{B'C'}$, $\overline{C'D'}$ e $\overline{A'D'}$.

7. Sim, pois é possível traçar uma reta r vertical de tal maneira que o polígono $OPQRSTU$ seja imagem do polígono $CDEFGHI$ por reflexão em torno da reta r.

8. 2,2

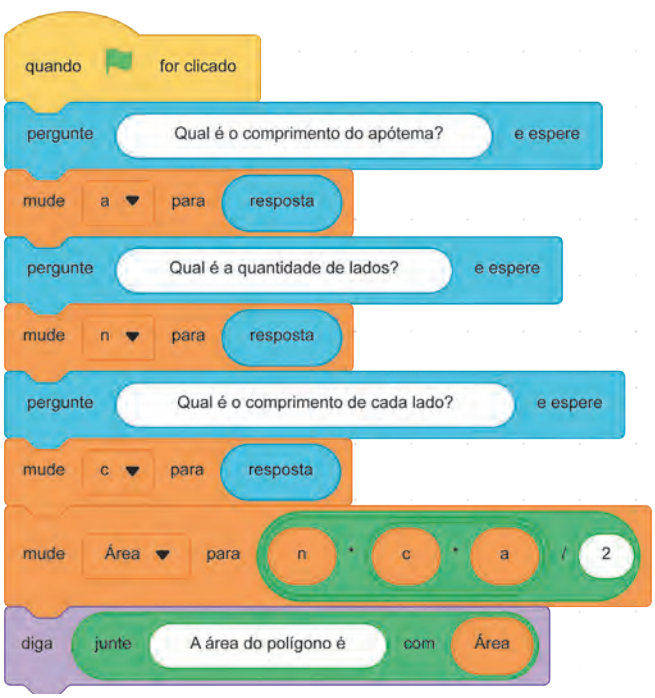
Resposta referente ao capítulo **1** - **Acessando tecnologias (páginas 35 e 36)**

2. Sugestão de resposta:



Resposta referente ao capítulo **4** - **Acessando tecnologias (página 146)**

4. Um possível algoritmo é:



Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

REPRODUÇÃO/SCRATCH

REPRODUÇÃO/SCRATCH

Respostas referentes ao capítulo **5**

28. a) $\alpha \cdot (A + B) = \alpha \cdot \left(\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix} \right) = \alpha \cdot \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix} =$

$$= \begin{bmatrix} \alpha \cdot (a_{11} + b_{11}) & \cdots & \alpha \cdot (a_{1n} + b_{1n}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha \cdot (a_{m1} + b_{m1}) & \cdots & \alpha \cdot (a_{mn} + b_{mn}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \cdot a_{11} + \alpha \cdot b_{11} & \cdots & \alpha \cdot a_{1n} + \alpha \cdot b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha \cdot a_{m1} + \alpha \cdot b_{m1} & \cdots & \alpha \cdot a_{mn} + \alpha \cdot b_{mn} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha \cdot a_{11} & \cdots & \alpha \cdot a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha \cdot a_{m1} & \cdots & \alpha \cdot a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha \cdot b_{11} & \cdots & \alpha \cdot b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha \cdot b_{m1} & \cdots & \alpha \cdot b_{mn} \end{bmatrix} =$$

$$= \alpha \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} + \alpha \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

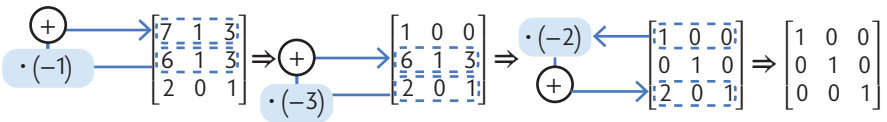
Portanto, $\alpha \cdot (A + B) = \alpha \cdot A + \alpha \cdot B$.

b) $(\alpha \cdot A)^t = \left(\alpha \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \right)^t = \left(\begin{bmatrix} \alpha \cdot a_{11} & \cdots & \alpha \cdot a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha \cdot a_{m1} & \cdots & \alpha \cdot a_{mn} \end{bmatrix} \right)^t =$

$$= \begin{bmatrix} \alpha \cdot a_{11} & \cdots & \alpha \cdot a_{m1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha \cdot a_{1n} & \cdots & \alpha \cdot a_{mn} \end{bmatrix} = \alpha \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{m1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Logo, $(\alpha \cdot A)^t = \alpha \cdot A^t$.

56. b)



Síntese do capítulo (página 215)

8. Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$, segue que:

$\det(A \cdot B) = \det\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \right)$

$\det(A \cdot B) = \det\left(\begin{bmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{bmatrix} \right)$

$\det(A \cdot B) = (ae + bg)(cf + dh) - (af + bh)(ce + dg)$

$\det(A \cdot B) = aecf + aedh + bgcf + bgdh - afce - afdg - bhce - bhdg$

$\det(A \cdot B) = aedh + bgcf - afdg - bhce$

$\det(A \cdot B) = aedh - afdg - bhce + bgcf$

$\det(A \cdot B) = (ad - cb)(eh - gf)$

$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS COMENTADAS

ALRO, Helle; SKOVSMOSE, Ole. *Diálogo e aprendizagem em educação matemática*. 3. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2021.

Nessa obra, os autores discutem como um diálogo efetivo pode melhorar significativamente a qualidade da educação, contribuindo para a maior retenção do conhecimento pelos estudantes.

BARRETO, Márcio. *Trama matemática*: princípios e novas práticas no ensino médio. Campinas: Papirus, 2013.

Esse livro oferece uma abordagem acessível e envolvente aos fundamentos matemáticos para estudantes do Ensino Médio, explorando temas, como teoria dos conjuntos, funções, álgebra e geometria.

BORBA, Marcelo C.; XAVIER, José Fábio; SCHUNEMANN, Tiele Aquino (org.). *Educação matemática*: múltiplas visões sobre tecnologias digitais. São Paulo: Livraria da Física, 2023.

Esse livro aborda a interseção entre educação matemática e tecnologias digitais, oferecendo uma plataforma rica para a discussão de como esses elementos podem enriquecer o processo de ensino-aprendizagem.

BOYER, Carl B.; MERZBACH, Uta C. *História da matemática*. 3. ed. Tradução: Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher, 2012.

A história da Matemática é abordada nesse livro desde as origens primitivas até o século XX, passando por informações relacionadas ao último Teorema de Fermat e à conjectura de Poincaré, chegando aos avanços recentes na teoria dos grupos finitos e demonstrações que contam com o auxílio do computador.

BRASIL. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*. Versão final. Brasília: MEC, 2018. Disponível em: https://www.gov.br/mec/pt-br/escola-em-tempo-integral/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal.pdf. Acesso em: 29 fev. 2024.

A BNCC é o documento que norteia os currículos dos sistemas e redes de ensino das Unidades Federativas e as propostas pedagógicas das escolas públicas e privadas, estabelecendo os principais conhecimentos, competências e habilidades que os estudantes devem desenvolver em cada etapa da Educação Básica.

BRASIL. Ministério da Educação. *Orientações curriculares para o Ensino Médio*. Brasília, 2006. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/book_volume_02_internet.pdf. Acesso em: 29 fev. 2024.

O objetivo das Orientações Curriculares para o Ensino Médio é contribuir com o diálogo entre professor e escola sobre a prática docente.

BRASIL. Ministério da Educação. *Orientações educacionais complementares aos parâmetros curriculares nacionais (Ensino Médio)*. Brasília. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf. Acesso em: 29 fev. 2024.

Esse documento discute a condução do aprendizado nos diferentes contextos e condições de trabalho das escolas brasileiras, de modo a responder às transformações sociais e culturais da sociedade contemporânea, levando em conta as leis e diretrizes que redirecionam a Educação Básica.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. *Parâmetros curriculares nacionais (Ensino Médio)*. Brasília, 2000. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/expansao-da-rede-federal/195-secretarias-112877938/seb-educacao-basica-2007048997/12598-publicacoes-sp-265002211. Acesso em: 29 fev. 2024.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio auxiliam as equipes escolares na execução de seus trabalhos, servindo de estímulo e apoio à reflexão sobre a prática pedagógica, ao planejamento de aulas e, sobretudo, ao desenvolvimento do currículo da escola.

BRASIL. Ministério da Justiça. Lei nº 10.741, de 1º de outubro de 2003. Disponível em: https://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/2003/l10.741.htm. Acesso em: 30 set. 2024.

Esse documento regula os direitos assegurados às pessoas idosas, ou seja, com idade igual ou superior a 60 anos.

D'AMBROSIO, Ubiratan. *Educação matemática*: da teoria à prática. 23. ed. Campinas: Papirus, 2019.

Nessa obra, o autor propõe a adoção de uma nova abordagem do sistema de ensino e aprendizagem, tecendo considerações a respeito de aspectos relacionados à cognição, à natureza da Matemática e às questões teóricas da educação, além de discutir temas ligados à sala de aula e às inovações na prática docente.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

EVES, Howard. *Introdução à história da matemática*. Tradução: Hygino H. Domingues. Campinas: Editora da Unicamp, 2007.

O livro é dividido em duas partes: antes do século XVII e depois do século XVII. Além de contar a história da Matemática, ele apresenta, ao longo do texto, tarefas de cunho matemático, com respostas e sugestões para sua resolução.

IEZZI, Gelson. *Fundamentos de matemática elementar*: geometria analítica. 6. ed. São Paulo: Atual, 2013. v. 7.

Esse volume é composto de teorias e exercícios de aplicação sobre Geometria analítica, com testes de vestibular selecionados criteriosamente e ordenados por grau de dificuldade, acompanhados das respostas correspondentes.

IEZZI, Gelson; HAZZAN, Samuel. *Fundamentos de matemática elementar*: sequências, matrizes, determinantes, sistemas. 8. ed. São Paulo: Atual, 2013. v. 4.

Esse volume é composto de teorias e exercícios de aplicação sobre sequências, matrizes, determinantes, sistemas de equações, contendo testes de vestibulares selecionados criteriosamente e ordenados por grau de dificuldade, acompanhados das respostas correspondentes.

KNIJNIK, Gelsa *et al*. *Etnomatemática em movimento*. 4. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2019. (Tendências em Educação Matemática).

O livro apresenta textos, discussões e reflexões acerca da trajetória e dos rumos dos estudos e das pesquisas no âmbito da Etnomatemática, tendo como principal referência o professor Ubiratan D'Ambrosio.

LIMA, Diana Maia de; GONZALEZ, Luis Eduardo Fernandes. *Matemática aplicada à informática*. Porto Alegre: Grupo A/Bookman, 2015.

O livro apresenta de maneira clara e objetiva os fundamentos da Matemática aplicada à Informática. Os autores exploram conteúdos essenciais, como lógica matemática, teoria dos conjuntos, relações, funções, matrizes, frações, análise combinatória e probabilidade, demonstrando a aplicação prática desses conceitos na resolução de problemas e na otimização de processos computacionais.

LIMA, Elon Lages; CARVALHO, Paulo Cezar P.; WAGNER, Eduardo; MORGADO, Augusto César. *A matemática do Ensino Médio*. 7. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2016. (Coleção do Professor de Matemática).

O livro aborda a introdução às coordenadas no espaço, oferecendo um método para resolver problemas geométricos com recursos de álgebra, além de possibilitar o contato com uma interpretação geométrica valiosa para questões de natureza algébrica. Os autores exploram conteúdos do Ensino Médio, como Geometria analítica – plana e espacial, matrizes, determinantes, sistemas de equações lineares, polinômios e equações algébricas.

LIMA, Elon Lages; CARVALHO, Paulo Cezar P.; GUIMARÃES FILHO, Florêncio F. *Coordenadas no plano*: com as soluções dos exercícios. 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013. (Coleção do Professor de Matemática).

O livro aborda o uso de coordenadas como método para estudar Geometria plana. A primeira parte contém uma simplificação da Geometria analítica plana; a segunda, uma introdução aos vetores; e, na terceira parte, as coordenadas e os vetores são utilizados com a finalidade de estudar as transformações geométricas simples.

LIMA, Elon Lages; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; WAGNER, Eduardo; MORGADO, Augusto César. *Temas e problemas*. 4. ed. São Paulo: SBM, 2022.

Essa obra abrange uma ampla gama de temas matemáticos, desde trigonometria até funções exponenciais, logarítmicas e quadráticas.

Lista de siglas

Enem: Exame Nacional do Ensino Médio
Fatec-SP: Faculdade de Tecnologia do Estado de São Paulo
Fuvest-SP: Fundação Universitária para o Vestibular
UEL-PR: Universidade Estadual de Londrina
Uerj: Universidade do Estado do Rio de Janeiro
UFJF-MG: Universidade Federal de Juiz de Fora
UFRGS-RS: Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Unesp-SP: Universidade Estadual Paulista
Unifesp-SP: Universidade Federal de São Paulo
Unicamp-SP: Universidade Estadual de Campinas

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

SUPLEMENTO PARA O PROFESSOR

APRESENTAÇÃO

Um meio de inclusão e democratização de oportunidades é a educação. O Ensino Médio representa um momento decisivo na vida de qualquer indivíduo. Assim, cabe ao livro didático auxiliar professores e estudantes nessa fase, oferecendo-lhes ferramentas úteis no processo de ensino e aprendizagem. Pensando nisso, esta coleção procurou tratar a Matemática e suas Tecnologias como parte integrante do cotidiano dos estudantes, além de estabelecer associação com outros componentes curriculares e com outras áreas do conhecimento.

Tomando diversos documentos oficiais como diretrizes e levando em conta as particularidades das diferentes culturas juvenis, esta coleção contempla os conteúdos essenciais para esse nível de ensino, apresentando-os de maneira contextualizada e empregando uma linguagem clara e objetiva, em uma sequência que favorece a aprendizagem.

O objetivo dessa proposta é possibilitar aos estudantes o desenvolvimento das competências gerais, competências específicas e habilidades listadas na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), referentes ao Ensino Médio. Porém, é importante que o professor tenha autonomia e consciência de que pode selecionar os conteúdos a serem abordados em sala de aula adotando uma ordem diferente da sugerida no **Livro do Estudante**, de acordo com a proposta didático-pedagógica da escola.

Este **Suplemento para o professor** busca oferecer aos docentes subsídios teórico-metodológicos de maneira a auxiliar seu trabalho no uso desta coleção em sala de aula e em suas demais atribuições.

SUMÁRIO

Estrutura da coleção MP003

O Livro do Estudante MP003

Suplemento para o professor MP004

O Ensino Médio MP005

Organização do espaço e recepção dos estudantes MP005

O estudante do Ensino Médio MP007

O professor MP007

O combate à violência e a promoção da saúde mental dos estudantes MP009

O convívio social em sala da aula MP009

A Base Nacional Comum Curricular na etapa do Ensino Médio MP011

As áreas do conhecimento MP011

Competências gerais, competências específicas e habilidades MP011

Temas contemporâneos transversais MP013

Orientações didáticas e metodológicas MP014

Tendências no ensino de Matemática nesta coleção MP014

O computador e o ensino da Matemática MP016

Interdisciplinaridade MP017

Pensamento computacional MP018

O estudante no centro do processo de aprendizagem MP019

A avaliação MP020

A BNCC e a coleção MP023

Sugestão de cronograma MP023

Panorama do volume MP024

Quadro de conteúdos MP024

Orientações, comentários e sugestões MP026

Capítulo 1 – Trigonometria no triângulo e na circunferência MP026

Capítulo 2 – Funções trigonométricas MP032

Capítulo 3 – Fórmulas de transformação, relações e equações trigonométricas MP034

Capítulo 4 – Ladrilhamento e área de figuras planas MP037

Capítulo 5 – Matrizes, determinante e sistemas lineares MP040

Capítulo 6 – Geometria analítica MP045

Capítulo 7 – Transformações geométricas MP048

Resoluções MP052

Referências bibliográficas comentadas MP094

Referências bibliográficas complementares comentadas MP096

ESTRUTURA DA COLEÇÃO

Esta coleção de Matemática e suas Tecnologias, destinada ao Ensino Médio, é composta de três volumes impressos do **Livro do Estudante**, cada um deles com seu respectivo **Suplemento para o professor**. Além do livro impresso, é disponibilizado o livro digital de cada volume, tanto para o estudante quanto para o professor, que tem como objetivo atender, de forma acessível, todos os estudantes e apresentar recursos digitais, como *podcasts*, vídeos, carrosséis de imagens, infográficos clicáveis e mapas clicáveis.

O Livro do Estudante

Cada volume desta coleção está dividido em sete capítulos, organizados em tópicos, subtópicos e seções. Essa estrutura auxilia o professor em seu planejamento diário e permite ao estudante tornar-se protagonista de seu processo de aprendizagem. Os tópicos e os conteúdos são adequados à essa etapa de ensino e foram selecionados de acordo com as habilidades, as competências gerais e as competências específicas, elencadas na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), assim como os temas contemporâneos transversais.

A seguir, são apresentados os elementos que compõem a organização do **Livro do Estudante** desta coleção.

Abertura do capítulo

As páginas de abertura apresentam uma temática cujas características permitem estabelecer relações com os conteúdos que serão trabalhados no capítulo. Nessas páginas, há uma imagem representativa, que faz uma conexão do cotidiano com o conteúdo que será abordado; algumas questões, que servem como estratégias de estudos para explorar o conhecimento prévio dos estudantes e promover uma reflexão inicial sobre o conteúdo; e a indicação dos conteúdos que serão desenvolvidos no capítulo.

Desenvolvimento da teoria

A parte teórica, relacionada ao ensinamento de conteúdos e conceitos, é apresentada por meio de tópicos e subtópicos. No desenvolvimento do conteúdo, sempre que possível, são apresentadas situações relacionadas ao cotidiano. Em alguns momentos também é possível notar informações referentes à história da Matemática.

Questão de intervenção

Essas questões, que podem apresentar cunho matemático ou caráter pessoal, estão localizadas na parte teórica e têm o objetivo de levar os estudantes a refletir a respeito das aplicações práticas que envolvem o conteúdo apresentado.

Exercícios e problemas resolvidos

Essa seção tem como objetivo complementar a teoria abordada e os exemplos apresentados no decorrer do capítulo. Ela contribui para o desenvolvimento de tarefas, apresentando resoluções de maneira detalhada, que facilitam a compreensão da aplicação prática do conteúdo em questão. Além disso, ela auxilia os estudantes a exercitar suas habilidades e estratégias na resolução de tarefas que são propostas em outras seções, aperfeiçoando, assim, sua autonomia.

Resolvendo por etapas

Essa seção apresenta aos estudantes diferentes maneiras de organizar o pensamento para solucionar um problema.

Exercícios e problemas

Nessa seção, são apresentadas tarefas relacionadas ao conteúdo estudado no capítulo, organizadas em nível gradual de complexidade, que podem ser exploradas, em sua maioria, em sala de aula. Ela tem como objetivo contribuir para a consolidação do aprendizado e para a recuperação de defasagens dos estudantes.

Acessando tecnologias

Essa seção apresenta propostas de tarefas cujos contextos permitem desenvolver os conceitos estudados com o auxílio de recursos tecnológicos, complementando as estratégias apresentadas. O principal objetivo dessa seção é motivar o uso de ferramentas tecnológicas computacionais, como *softwares* de geometria dinâmica, planilhas eletrônicas e linguagem de programação, as quais permitem aprofundar diversos conteúdos matemáticos. Os recursos sugeridos são disponibilizados gratuitamente na internet, contribuindo, portanto, para a execução das tarefas realizadas por todos.

Educação midiática

Essa seção tem como principal objetivo desenvolver a educação midiática de maneira transversal. Nela, são propostas reflexões a respeito dos conceitos de mídia e informação, promovendo o uso responsável, democrático, ético e crítico dos meios digitais, seja na interpretação, no compartilhamento ou na produção de conteúdo.

Desenvolvimento sustentável

Essa seção desenvolve um trabalho com os **Objetivos de Desenvolvimento Sustentável** (ODS). Ela tem como principal objetivo explicitar o alinhamento deles com a **Agenda 2030** e ajudar os jovens a reconhecê-los como parte de uma ação global, com desdobramentos práticos em diferentes contextos.

Trabalho e juventudes

Essa seção aborda assuntos do mundo do trabalho que permitem aos estudantes compreender e valorizar diferentes profissões, mapeando possibilidades de inserção profissional. O contexto desenvolvido pode abordar a cultura jovem e apresentar perspectivas profissionais, tanto aquelas relacionadas ao ensino superior, quanto as de caráter técnico, levando os estudantes a refletir sobre a importância de cada profissão.

Síntese do capítulo

Essa seção, proposta como uma estratégia de estudo, apresenta questões analíticas e críticas, com o objetivo de

avaliar o conhecimento, o desempenho e as habilidades relacionadas ao conteúdo abordado no capítulo, levando o estudante a aprimorar a compreensão do que foi estudado.

Ação e participação

Essa seção desenvolve um trabalho interdisciplinar que pode integrar conteúdos de diferentes componentes curriculares e de outras áreas do conhecimento, visando desenvolver nos estudantes habilidades como pensamento crítico, autonomia, criatividade, argumentação, cooperação, cidadania, entre outras.

Para fixar

Esse boxe, proposto como uma estratégia de estudo, apresenta informações complementares sobre o conteúdo matemático trabalhado.

Para expandir

Esse boxe, proposto como uma estratégia de estudo, apresenta sugestões de livros, textos ou vídeos com informações complementares ao contexto relacionado. Em diversas situações, os recursos sugeridos podem ser usados como fomentadores de discussão.

Vocabulário

Informa o significado de algumas palavras que estão indicadas em destaque no texto e são geralmente pouco utilizadas ou desconhecidas por parte dos estudantes, a fim de auxiliar na compreensão do contexto ou teoria apresentado.

Dica

Boxe que traz informações para auxiliar na resolução de exercícios e problemas propostos aos estudantes.

Observação

Nesse boxe, estão apresentadas informações complementares àquelas presentes na parte teórica, nas tarefas ou em seções.

Ser consciente

Ícone utilizado para destacar as tarefas que desenvolvem a formação cidadã, propondo reflexões a respeito de diferentes assuntos, como ética, educação financeira, saúde e cidadania.

Desafio

Ícone utilizado para destacar as tarefas com caráter desafiador, possibilitando o desenvolvimento de estratégias próprias de resolução.

Objetivos de Desenvolvimento Sustentável

Ícones que identificam que o assunto trabalhado tem relação com os **Objetivos de Desenvolvimento Sustentável** (ODS). Cada ícone é composto pela sigla ODS, o número e o símbolo correspondente ao ODS.

Objeto digital

Ícone que identifica o momento em que é possível acessar um objeto digital relacionado à tarefa ou ao conteúdo.

Ampliando seus conhecimentos

Essa seção apresenta para os estudantes sugestões de livros, filmes, *sites* e *podcasts* para complementar o estudo dos conteúdos trabalhados no volume.

Respostas

Essa seção apresenta respostas de tarefas, atividades e questões presentes no volume.

Referências bibliográficas comentadas

Nessa seção são apresentadas as principais referências teóricas que foram utilizadas como base para a elaboração do livro, com um breve comentário sobre cada uma delas.

Lista de siglas

Essa seção esclarece o significado das siglas de vestibulares e exames de larga escala usadas no volume.

Suplemento para o professor

O **Suplemento para o professor** é constituído de uma parte com orientações gerais, uma parte com orientações específicas para o desenvolvimento dos capítulos e uma seção de resoluções dos exercícios e problemas, finalizando com referências bibliográficas comentadas e referências bibliográficas complementares comentadas. A parte com orientações gerais é composta por: pressupostos teórico-metodológicos que fundamentam a coleção; orientações didático-pedagógicas; relações feitas com a BNCC; quadro de distribuição dos conteúdos do volume; propostas de cronogramas. Já a específica, desenvolvida no tópico **Orientações, comentários e sugestões**, apresenta as principais orientações para o desenvolvimento dos conteúdos, das tarefas e das seções, com comentários sobre o uso de diferentes estratégias de aprendizagem, o desenvolvimento do pensamento computacional, da argumentação e da inferência no decorrer do ano letivo.

A seguir, são apresentados os elementos que compõem a organização do **Suplemento para o professor** desta coleção.

Objetivos

Apresenta os principais objetivos que se almeja atingir no trabalho com os conteúdos do capítulo.

Justificativas

Apresenta as justificativas dos objetivos e dos conteúdos trabalhados em cada capítulo.

BNCC

Destaca e comenta as principais relações entre o que está sendo abordado no Livro do Estudante e o que é proposto na Base Nacional Comum Curricular (BNCC).

Sugestão de avaliação

Apresenta sugestões de avaliação para que o professor acompanhe a aprendizagem dos estudantes em momentos oportunos.

Tarefa extra

Apresenta sugestões de tarefas extras com o objetivo de complementar o trabalho com o conteúdo e auxiliar na consolidação da aprendizagem.

Educação midiática

Apresenta orientações para o desenvolvimento do trabalho com a seção **Educação midiática** do **Livro do Estudante**.

Desenvolvimento sustentável

Apresenta orientações para o desenvolvimento do trabalho com a seção **Desenvolvimento sustentável** do **Livro do Estudante**.

Trabalho e juventudes

Apresenta orientações para o desenvolvimento do trabalho com a seção **Trabalho e juventudes** do **Livro do Estudante**.

Informação

Apresenta informações que auxiliam ou complementam as orientações apresentadas.

Resoluções

Nessa seção são apresentadas as resoluções de questões, atividades e tarefas propostas no **Livro do Estudante**.

Referências bibliográficas comentadas

Nessa seção são apresentadas as referências teóricas que foram utilizadas como base para a elaboração do **Suplemento para o professor**, com um breve comentário sobre cada uma delas.

Referências bibliográficas complementares comentadas

Nessa seção são apresentadas sugestões de livros, revistas, artigos, *podcasts*, filmes e *sites* para pesquisas e consultas que podem ser complementares aos assuntos tratados no volume e ser usadas como subsídios teórico-metodológicos para o trabalho em sala de aula.

O ENSINO MÉDIO

O Ensino Médio, última etapa da Educação Básica, deve ser compreendido como uma etapa de grande importância política e social, aspecto que supera o conceito de apenas ser uma fase passageira na vida dos jovens. Na verdade, constitui-se como um momento fundamental de protagonismo e de desenvolvimento pessoal. É nessa fase que os estudantes ampliam suas perspectivas culturais, convivendo em um espaço de ampla diversidade de ideias e de opiniões. Também desenvolvem suas capacidades de tomada de decisão, cujo maior desafio é aprender a fazer escolhas coerentes e alinhadas com seu projeto de vida.

Assim, é fundamental que a escola do Ensino Médio desenvolva uma atitude acolhedora das juventudes, estando preparada para os desafios que essa fase exige, principalmente no que se refere à formação profissional e à construção da cidadania. Isso requer condutas que priorizem a construção da autonomia dos estudantes, que em breve atuarão na vida pública sem o acompanhamento de adultos. Desse modo, como podemos preparar os jovens para participar da sociedade de modo responsável?

> [...]
>
> A experiência participativa representa uma das formas de os jovens vivenciarem processos de construção de pautas, projetos e ações coletivas. Além disso, a experiência participativa também é importante por permitir a vivência de valores, como os da solidariedade e da democracia, e o aprendizado da alteridade. O que significa, em última instância, aprender a respeitar, perceber e reconhecer o outro e suas diferenças. [...]
>
> BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. *Formação de professores do ensino médio, etapa I – caderno II*: o jovem como sujeito do ensino médio. Organização: Paulo Carrano, Juarez Dayrell. Curitiba: UFPR/Setor de Educação, 2013. p. 46.

É no Ensino Médio também que ocorre a preparação mais intensa e aprofundada dos estudantes para os vestibulares e os exames de larga escala, como o Exame Nacional do Ensino Médio (Enem). Esses exames têm como objetivo verificar o desempenho e avaliar o preparo dos jovens para os desafios da vida adulta, seja no âmbito profissional, seja no social. Além disso, as avaliações em larga escala contribuem para monitorar as redes de ensino de modo a oferecer soluções educacionais viáveis por meio de políticas públicas.

Esta coleção apresenta diversos subsídios para auxiliar os estudantes na preparação para esses exames, entre eles o Enem. Nas seções **Exercícios e problemas resolvidos** e **Exercícios e problemas**, por exemplo, sempre que possível, apresentamos questões extraídas diretamente do Enem e de vestibulares para que os estudantes possam se familiarizar com o formato das provas fornecidas por essas instituições. Além disso, há propostas de elaboração de problemas e articulações interdisciplinares e transdisciplinares, com abordagens que podem contribuir para o desempenho dos estudantes em futuras avaliações.

Organização do espaço e recepção dos estudantes

Muitas vezes, o Ensino Médio representa um momento decisivo na vida dos estudantes, que convivem com uma diversidade de sentimentos, expectativas e incertezas. É nessa etapa que eles começam a definir suas trajetórias acadêmicas e profissionais, enfrentando desafios pessoais e explorando novas oportunidades de construção de conhecimento.

Nesse sentido, o acolhimento no ambiente escolar é fundamental para o desenvolvimento emocional e acadêmico e para a formação integral desses estudantes. Cabe ao professor

legitimar as diferenças, escutar ativamente e criar um ambiente seguro, buscando que todos se sintam confortáveis para expressar seus sentimentos e suas necessidades. Perguntar aos estudantes a maneira como eles podem se sentir mais à vontade e como acreditam que podem aprender melhor e incentivá-los a compartilhar experiências de aprendizagem prévias e marcantes são práticas que ajudam nesse processo, promovendo uma relação de confiança e colaboração que favorece o desenvolvimento de habilidades e competências e o crescimento pessoal.

Para acolher os estudantes do Ensino Médio, é importante criar momentos em que eles possam se conhecer e compartilhar práticas e vivências. Atividades como rodas de conversa, produções em que falem sobre si mesmos, sobre o que gostam e o que sabem fazer e a elaboração de um contrato de convivência, mesmo que informal, são estratégias que podem ser mobilizadas. Propor que escrevam uma carta para si mesmos expressando as expectativas para o futuro pode ser uma maneira de autorreflexão. Além disso, abrir espaço para a comunicação, a cooperação e a empatia dentro e fora da sala de aula é determinante para construir um ambiente seguro, de respeito e apoio mútuo.

A forma como o professor age desempenha um papel crucial para ajustar distâncias culturais, sociais e de aprendizagem e para legitimar diferenças, valorizando a diversidade dentro da sala de aula com base no desenvolvimento de atitudes e valores. Ao assumir esse papel, o professor torna-se um facilitador na promoção de um ambiente inclusivo e acolhedor. Isso envolve não apenas reconhecer as múltiplas identidades e experiências de estudantes de diferentes perfis, mas também refletir sobre como esses elementos influenciam o cotidiano educacional. Ao adaptar suas práticas pedagógicas e pensar modos de organização do espaço escolar para melhor atender às necessidades individuais e coletivas dos estudantes, o professor enriquece o ambiente de aprendizagem, fortalece os laços comunitários e promove um senso de pertencimento entre todos os envolvidos na educação escolar.

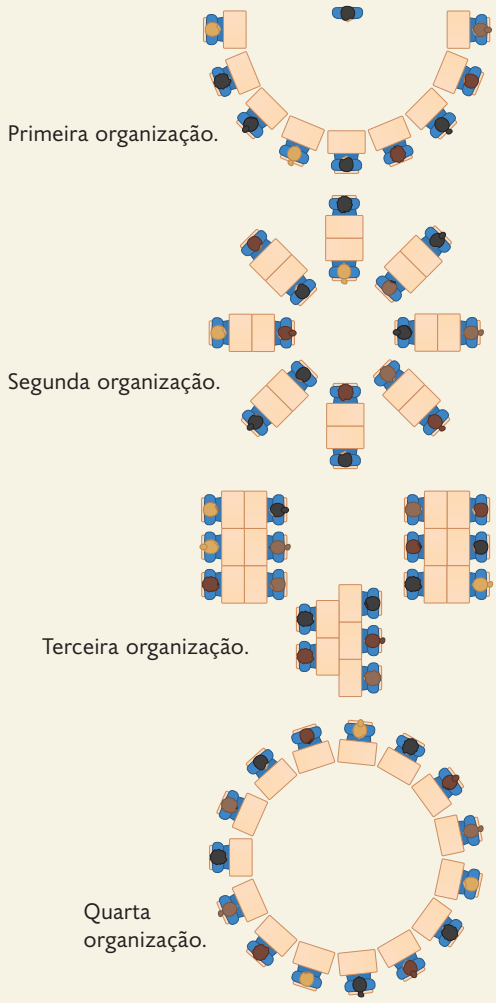
Nesse sentido, a sala de aula deve ser vista como um espaço de encontro e inclusão entre estudantes e professor, no qual a organização é um elemento crucial para potencializá-lo. A formação de um grupo por meio do diálogo, da produção em equipe e do direito à voz deve ser priorizada. É importante considerar o que a sala de aula comunica, criando e organizando um ambiente que promova a interação e o aprendizado. Essa organização passa, segundo Reis, Daros e Tomelin (2023), pelas dimensões física (objetos, materiais e recursos do ambiente), funcional (forma como o ambiente é utilizado), temporal (modo como o tempo é organizado e distribuído) e relacional (relações estabelecidas durante o desenvolvimento das atividades).

[...]

> A sala de aula organizada em fileiras, voltadas para frente, pode ser adequada para as explicações do professor sobre determinado assunto ou para o trabalho individual silencioso, mas é, sem dúvida, pouco interessante para o trabalho colaborativo e comunicativo entre os estudantes.
>
> É importante ter em mente que precisamos mudar a configuração das salas de aula não somente para atender alguma atividade específica, a intencionalidade do trabalho pedagógico, mas também para provocar a aproximação dos estudantes, mudar o seu ponto de vista, promover o contato visual, trazer respiro e vida para a sala de aula, mantendo aceso o interesse e a motivação por aprender.
>
> [...]

REIS, Ana Valéria Sampaio de Almeida; DAROS, Thuinie; TOMELIN, Karina Nones. Layouts *criativos para aulas inovadoras*. Maringá, PR: B42, 2023. p. 22.

As imagens apresentadas a seguir são exemplos de *layouts* para organização da sala de aula.



ILUSTRAÇÕES: HELOÍSA PINTARELLI/ARQUIVO DA EDITORA

Na primeira organização, as carteiras estão dispostas em semicírculo e um estudante encontra-se à frente e ao centro. Ela pode ser utilizada para promover a compreensão profunda de conteúdos, incentivando os estudantes a assumir diferentes papéis e perspectivas. A segunda, chamada Mandala da Amizade, pode ser utilizada para promover integração e também ser feita de pé. Na terceira, o trabalho em grupo é favorecido, o que contribui para movimentos colaborativos, enquanto a quarta pode ser utilizada em rodas de conversa, por exemplo (REIS; DAROS; TOMELIN, 2023).

Cada disposição pode favorecer a ocorrência de experiências diversas: há *layouts* que promovem criação de vínculos, colaboração, imersão, investigação, consolidação, avaliação, e o professor deve analisar a viabilidade de utilizar determinada disposição com base nos objetivos que tem e na proposta pedagógica a ser desenvolvida.

[...]

> Neste contexto, pode-se afirmar que, mais do que um espaço físico, é o local que precisa ser dinamizado pela constituição das relações psicopedagógicas e, por isso, deve ser planejado para atender as finalidades educativas. [...]

REIS, Ana Valéria Sampaio de Almeida; DAROS, Thuinie; TOMELIN, Karina Nones. Layouts *criativos para aulas inovadoras*. Maringá, PR: B42, 2023. p. 19.

Para enriquecer o ambiente, é possível, ainda, que as paredes e os espaços visíveis sejam preenchidos com produções, registros e memórias dos estudantes. Esses elementos personalizam o ambiente, tornando-o acolhedor e familiar, e valorizam as conquistas e os aprendizados individuais e coletivos. Ao expor trabalhos, textos significativos e reflexões, os estudantes podem se sentir reconhecidos e motivados a contribuir com o ambiente educacional de forma ativa e contínua e fortalecer o sentimento de pertencimento àquele local e ao grupo que o frequenta.

É interessante que exista flexibilidade na configuração do espaço ao longo do ano letivo. A mudança na disposição física das carteiras e dos demais móveis e objetos pode acompanhar o desenvolvimento das atividades pedagógicas e das necessidades de aprendizagem dos estudantes. Essas variações devem ser acompanhadas de movimentos reflexivos por parte do professor em relação ao alinhamento entre cada disposição, as atividades propostas e a perspectiva que o estudante tem em cada uma delas.

Além da sala de aula, é essencial que o professor explore outros espaços disponíveis na escola, como laboratórios científicos e espaços ao ar livre, como o pátio e a quadra, bibliotecas, áreas de convivência e até mesmo a cozinha. Cada um desses ambientes oferece oportunidades para experiências educativas por meio de experimentos práticos, pesquisas em grupo, leitura e exploração de diferentes mídias, interação social, entre outras. Ao utilizar esses espaços de maneira integrada ao currículo, o professor amplia os horizontes e proporciona a construção de conhecimentos de modo significativo e qualificado.

O estudante do Ensino Médio

Por muito tempo, a juventude foi compreendida como um período de passagem, uma etapa prévia da vida adulta, marcada por uma faixa etária delimitada. Porém, de acordo com o estudioso Juarez Dayrell (2016), as pesquisas têm demonstrado que a juventude deve ser compreendida como uma categoria socialmente construída na qual os jovens se assumem como verdadeiros sujeitos, ou seja, têm determinada origem familiar, estão inseridos em relações sociais, apresentam uma historicidade específica, movem-se por desejos e se constituem como seres ativos e produtores de conhecimento.

> [...]
>
> A juventude constitui um momento determinado, mas que não se reduz a uma passagem. Ela assume uma importância em si mesma como um momento de exercício de inserção social, no qual o indivíduo vai se descobrindo e descortinando as possibilidades em todas as instâncias de sua vida, desde a dimensão afetiva até a profissional. Essa realidade ganha contornos próprios em contextos históricos, sociais e culturais distintos. As distintas condições sociais (origem de classe, por exemplo), a diversidade cultural (a cor da pele, as identidades culturais e religiosas, os diferentes valores familiares etc.), a diversidade de gênero e de orientação afetiva e até mesmo as diferenças territoriais se articulam para a constituição das diferentes modalidades de se vivenciar a juventude.
>
> [...]

DAYRELL, Juarez (org.). *Por uma pedagogia das juventudes*: experiências educativas do Observatório da Juventude da UFMG. Belo Horizonte: Mazza Edições, 2016. p. 27.

Para que as relações possam ser fecundas e mutuamente respeitosas no ambiente escolar, uma opção interessante é investir no trabalho com as diversas manifestações culturais juvenis, ou seja, fazer da escola um território de produção cultural da juventude, e não apenas um local de aprendizado de uma cultura externa ou "adulta". Nesse contexto, o jovem deve se identificar com as produções culturais com as quais convive, deve se sentir incluído e, principalmente, valorizado.

Para realizar esse trabalho de aproximação e de valorização das culturas juvenis, a primeira etapa é compreender o jovem como um sujeito de interlocução, com o qual se pode aprender e expandir os horizontes culturais. Essa aproximação requer uma flexibilidade por parte dos professores, que muitas vezes terão de superar visões estereotipadas e superficiais sobre a juventude atual. Assim, deve-se considerar que os jovens não estão inseridos em uma cultura única. A juventude se constitui como categoria socialmente construída, que deve ser analisada com base no contexto de cada comunidade. Existem jovens, por exemplo, que já estão inseridos no mercado de trabalho e que vivenciam a juventude de um modo muito diferente daqueles que têm mais tempo de lazer ou de estudo.

Compreender as múltiplas culturas juvenis que permeiam o contexto escolar faz parte do processo de inovação que tem marcado o curso educativo nos últimos anos. Em vez de "transmitirmos os saberes" aos jovens, por que não trocarmos e compartilharmos conhecimento, abrindo espaços e criando condições para que as culturas juvenis se expressem no ambiente escolar? Essas novas práticas compõem um caminho de construção coletiva do conhecimento. Sob esse ponto de vista, a aprendizagem passa a ser encarada como uma via de mão dupla, como uma troca e, assim, tende a criar um clima mais saudável e menos impositivo, sendo menos propício ao desenvolvimento de problemas indisciplinares e de relações conflituosas.

O professor

Diante desses novos desafios educacionais, que envolvem, inclusive, a interdisciplinaridade e o trabalho com metodologias ativas e tecnologias, o professor assume cada vez mais o papel de mediador das relações entre os estudantes e o conhecimento, orientando o caminho a ser adotado no processo de ensino e aprendizagem. Essa mediação ocorre de acordo com um planejamento bem definido das aulas, no qual são explicitadas as estratégias de engajamento e protagonismo dos estudantes. Supera-se a postura de um profissional meramente transmissor de informações e almeja-se uma conduta mais interativa, que toma como base a colaboração.

Sabe-se que no Brasil as turmas de Ensino Médio são diversificadas e formadas por grupos de estudantes que têm diferenças nos modos de aprender. O processo de ensino e aprendizagem é complexo e envolve diversas dimensões da vida dos sujeitos. Knud Illeris (2013), por exemplo, descreve a aprendizagem em três dimensões: a de conteúdo, a de incentivo e a de interação. A dimensão de **conteúdo** envolve a aprendizagem cognitiva, relacionada aos conhecimentos que são internalizados. Já a dimensão de **incentivo** se relaciona às sensibilidades, ao equilíbrio mental e às motivações que instigam as pessoas no aprendizado. Por fim, a dimensão de **interação** é aquela que está ligada à sociabilidade e à comunicação do indivíduo.

Desse modo, uma maneira de o professor lidar com a diversidade em sala de aula é identificar em qual dimensão de aprendizagem estão as defasagens dos estudantes. Com esse

diagnóstico, pode-se, então, desenvolver estratégias adequadas ao tipo de dificuldade específica apresentada por eles. Por exemplo, em casos de defasagem na dimensão de interação, o professor poderá desenvolver estratégias de trabalho em grupo e dinâmicas que exijam a troca de ideias. Quando o problema for em relação à dimensão de incentivo, o professor poderá repensar as maneiras pelas quais aquele conteúdo instiga os estudantes e se relaciona com o cotidiano deles.

A fim de contribuir para o processo de adequação dos professores aos novos parâmetros que têm sido delimitados na educação no século XXI, sugerimos a seguir algumas condutas que podem ser utilizadas durante o planejamento e as aulas com turmas do Ensino Médio.

- Analisar os estudantes de modo personalizado, adequando os desafios e as propostas às características de cada um e procurando colocar a diferença como um agregador e um ponto positivo em relação ao coletivo.
- Organizar planejamentos coletivos e individuais para lidar com as turmas como um todo e também de modo personalizado.
- Relacionar os temas e conteúdos à realidade próxima dos estudantes, problematizando as experiências vivenciadas e alinhando os conteúdos aos interesses da turma.
- Dar importância à significação dos conteúdos que serão trabalhados em sala de aula.
- Propor constantemente diferentes maneiras de autoavaliação, permitindo aos estudantes um momento de reflexão a respeito de suas atividades e seu aprendizado e também permitindo ao professor avaliar suas práticas em sala de aula.
- Desenvolver flexibilidade para improvisar, quando necessário, e para adequar as propostas metodológicas à realidade de cada turma.
- Acompanhar a evolução de cada grupo ou estudante, avaliando-a sob uma perspectiva processual.
- Evitar propostas que abordem capacidades meramente interpretativas e que não desafiem os estudantes a desenvolver sua criatividade e seu pensamento crítico.
- Inserir opiniões e sugestões dos estudantes no planejamento das tarefas, considerando suas dificuldades e preferências.
- Capacitar os estudantes em determinadas atividades com as quais eles possam não estar acostumados, como a realização de uma pesquisa bem fundamentada ou a produção de um texto-síntese.
- Gerir o tempo de modo personalizado, observando os ritmos de aprendizagem específicos das turmas.
- Aderir a dinâmicas que alterem o posicionamento tradicional das carteiras em sala de aula, promovendo atividades em grupo e explorando os diversos ambientes da escola.
- Propor trabalhos em grupos, para que os estudantes desenvolvam as capacidades de expressão e de socialização.

Planejamento

A complexidade do trabalho docente está ancorada em diversos fatores, uma vez que ele não se restringe à sala de aula por estar diretamente ligado a exigências sociais e à experiência de vida dos estudantes. Nesse sentido, o planejamento torna-se uma etapa fundamental, pois nele são estabelecidos as diretrizes e os meios de realização do trabalho docente (LIBÂNEO, 2013).

> [...]
>
> O planejamento é um processo de racionalização, organização e coordenação da ação docente, articulando a atividade escolar e a problemática do contexto social. A escola, os professores e os alunos são integrantes da dinâmica das relações sociais; tudo o que acontece no meio escolar está atravessado por influências econômicas, políticas e culturais. [...] A ação de planejar, portanto, não se reduz ao simples preenchimento de formulários para controle administrativo; é, antes, a atividade consciente de previsão das ações docentes, fundamentadas em opções político-pedagógicas, e tendo como referência permanente as situações didáticas concretas [...]
>
> LIBÂNEO, José Carlos. *Didática*. São Paulo: Cortez, 2013. p. 246.

Um bom planejamento ajuda a antecipar possíveis dificuldades dos estudantes e elaborar estratégias para superá-las, contribuindo, dessa forma, para uma construção de conhecimento sólida e contextualizada. Além disso, ao planejar as aulas, o professor pode alinhar seus objetivos pedagógicos com as necessidades e os interesses dos estudantes. O planejamento acaba se configurando como um guia de orientação. Para tanto, deve haver uma ordem sequencial e progressiva que alinhe o que se planeja com a realidade com a qual se vai trabalhar. É importante, ainda, buscar coerência entre os objetivos delineados, os conteúdos a serem trabalhados, os métodos a serem mobilizados e a avaliação que será conduzida no processo.

O planejamento individual permite que o professor organize as aulas de acordo com o ritmo e as características da turma, enquanto o planejamento coletivo, realizado em colaboração com outros professores de Matemática ou de diferentes componentes curriculares, enriquece o processo educativo por meio da troca de experiências e ideias. Essa abordagem interdisciplinar favorece a articulação entre os componentes curriculares e a contextualização dos conteúdos, promovendo o desenvolvimento de habilidades e competências de forma integrada e diversificada.

Nesse sentido, considera-se principalmente três níveis de planejamento: o plano da escola, com orientações mais gerais, o plano de ensino, com a previsão do trabalho docente para um ano ou semestre, e o plano de aula, de caráter mais específico, com a previsão do desenvolvimento do conteúdo para uma aula ou conjunto de aulas (LIBÂNEO, 2013). Ao planejar as aulas, o professor deve sempre considerar o Projeto Político Pedagógico (PPP) da escola e os currículos municipal e estadual. Esses documentos orientam as práticas pedagógicas e garantem que o ensino esteja alinhado com as diretrizes educacionais estabelecidas. É essencial que o planejamento didático seja flexível e adaptável, permitindo que o professor faça ajustes conforme necessário para atender às especificidades do contexto escolar e das culturas juvenis em sua comunidade educativa.

Em algumas situações, pode ser necessário elaborar um Planejamento Educacional Individual (PEI) para atender às necessidades específicas de estudantes com deficiências ou transtornos. O PEI deve ser cuidadosamente elaborado para garantir que esses jovens tenham acesso a uma educação de qualidade e equitativa, com conteúdos e atividades adaptados às suas capacidades e potencialidades. Essa prática promove a inclusão e

o respeito às diferenças, contribuindo para a formação integral de todos, independentemente do perfil.

Um dos primeiros passos no planejamento é realizar um diagnóstico dos conhecimentos, das habilidades, das atitudes e dos valores prévios dos estudantes. Esse levantamento pode ser feito por meio de avaliações diagnósticas, observações e atividades diversificadas que permitam ao professor compreender o nível de desenvolvimento de cada um. Com base nesses dados, o professor pode planejar as aulas de forma mais assertiva, criando oportunidades para que eles ampliem e aprofundem os conhecimentos.

Por fim, o planejamento deve contemplar práticas e vivências diversificadas, que dinamizem a aprendizagem e contribuam para o pluralismo de ideias e para o desenvolvimento do pensamento crítico e científico. Atividades práticas, projetos interdisciplinares, debates e estudos de caso são exemplos de abordagens que podem enriquecer o ensino de Matemática, tornando-o mais relevante e interessante para os estudantes. Por meio dessas experiências, eles não apenas aprendem os conteúdos curriculares, mas também desenvolvem competências essenciais para a vida em sociedade, como a argumentação, a inferência e a autonomia de pensamento.

O combate à violência e a promoção da saúde mental dos estudantes

De acordo com a Organização Mundial da Saúde (OMS), a adolescência é o período de 10 a 19 anos de idade (BRASIL, 2018c). Nessa etapa da vida, o indivíduo ainda está em desenvolvimento e vários fatores podem interferir em seu comportamento e em sua saúde mental. Trata-se de um período de mudanças e descobertas, no qual o jovem constrói e reconstrói sua identidade. Fatores emocionais associados à realidade social, econômica, histórica e cultural tornam essa parcela da população muito vulnerável mental e emocionalmente.

Entre os problemas relacionados à saúde mental que mais afetam os jovens estão a violência familiar, o *bullying*, o *cyberbullying*, a depressão, a ansiedade e a dependência química.

Os casos de *bullying*, por exemplo, envolvem relações de poder e dominação que provocam violência psicológica e, muitas vezes, física, sem motivos aparentes. Já o *cyberbullying* envolve relações de insultos, intimidação e violência psicológica que são potencializadas, principalmente, por meio das redes sociais.

Tanto o *bullying* quanto o *cyberbullying* podem causar sofrimento às vítimas e ter consequências extremas. Em alguns casos, os indivíduos agressores recebem punição, mas é necessário promover um trabalho de conscientização para que esses jovens possam refletir sobre as próprias ações e analisar os impactos emocionais que elas acarretam nas vítimas. Os jovens que praticam *bullying* geralmente são atraídos por um imaginário preestabelecido de padrões de beleza, comportamento, consumo e configurações sociais. Por isso, as ações de combate a essa prática devem contribuir para a desconstrução desses padrões e para o respeito à diversidade.

Além disso, é preciso analisar o contexto familiar desses jovens, que, muitas vezes, vivem em ambientes onde há violência e/ou negligência. Por essas razões, é imprescindível o papel da escola no cuidado com a saúde mental dos estudantes, combatendo ativamente todos as formas de discriminação e de violência.

Para isso, são necessários programas para prevenir o *bullying* e qualquer outro tipo de violência, além do abuso de substâncias nocivas. Esses programas devem ter a participação da escola, dos familiares, da comunidade e de profissionais, como psicólogos e psicopedagogos. Tal união pode contribuir para detectar os sinais de problemas envolvendo a saúde mental dos estudantes e para tomar as medidas necessárias antes que esse tipo de comportamento resulte em alguma consequência grave.

Como a escola pode contribuir para a promoção da saúde mental dos estudantes?

A escola deve ser um espaço de disseminação do respeito e da proteção social dos jovens, atuando com a participação ativa das famílias. No ambiente escolar, os estudantes podem ser organizados em grupos a fim de possibilitar a troca de experiências em debates mediados por um psicólogo. Assim, os jovens tendem a se sentir mais à vontade para discutir e relatar a própria realidade, compartilhando emoções e descobrindo os gatilhos que os fazem reagir com violência, ansiedade ou tristeza, por exemplo. Trata-se de uma oportunidade para trabalhar o autoconceito, a autoimagem e a autoestima dos jovens.

Averigue a possibilidade de a escola oferecer espaços em horários alternativos para que os estudantes desenvolvam práticas extracurriculares, como esportes, oficinas de teatro, atividades de cuidado com a escola e com os colegas, oficinas de dança, gincanas, competições e simulados. Nesses momentos, é importante incluir estudantes de diferentes perfis. A convivência é essencial para o desenvolvimento do respeito mútuo e da empatia, colaborando com a saúde mental deles.

Atividades envolvendo atitudes solidárias podem contribuir para que os estudantes se coloquem no lugar de outras pessoas, desenvolvendo a empatia. Uma sugestão é promover campanhas de coleta de produtos com o intuito de disponibilizá-los às pessoas vulneráveis e em situação de necessidade assistidas por instituições sociais do município.

Outras atividades podem envolver o futuro dos estudantes, identificando os potenciais de cada um a fim de construir um projeto de vida. Mostrar que as atitudes de hoje influenciam o futuro incentiva-os a refletir sobre suas escolhas e opções. A escola, então, tem o papel de ajudá-los a ultrapassar as barreiras com atividades que envolvam a autoestima, o autoconhecimento e o autocuidado.

O professor deve ficar atento aos sinais que denotem mudança de comportamento dos estudantes e que demandem o encaminhamento para avaliação pela equipe de profissionais que cuidam da saúde mental, ações que contribuem para prevenir transtornos. Para isso, é muito importante que o professor converse com a administração da escola sobre a possibilidade de promover eventos de formação continuada relacionada à saúde mental.

O convívio social em sala de aula

Vivemos constantemente em interação com outras pessoas e dependemos delas em muitas atividades do dia a dia. Por isso, é necessário ter harmonia no convívio social, com proveito mútuo e respeito constante. Não ter preconceitos, compreender as necessidades do outro, aprender a lidar com as próprias limitações e contribuir para criar um ambiente propício para o crescimento em conjunto exige, além de boa vontade, ações de inclusão e integração comunitária.

Na socialização humana, em especial no ambiente escolar, lidamos com indivíduos de diferentes perfis, com diversas crenças e opiniões. Respeitar essas diferenças é dever de cada um e a palavra-chave, em todos os casos, é empatia.

Comumente, a escola é um dos primeiros lugares onde boa parte dos jovens tem contato com outras pessoas. Assim, entre as tarefas do professor está a necessidade de orientar e instruir os estudantes a ser empáticos, desenvolvendo a tolerância, a sensibilidade e, principalmente, o respeito para com os demais. Por meio de práticas saudáveis e bons exemplos, é possível que o professor consiga influenciar os estudantes em um sentido positivo de comportamento socialmente responsável, o qual poderá ter impactos benéficos na sociedade como um todo.

Ações que podem facilitar a construção de um ambiente com essas características incluem, por exemplo, conversas amistosas nas quais, um a um, os estudantes possam expressar suas opiniões e compartilhar suas emoções sobre os mais variados assuntos. Tal prática pode ser incrementada com atividades complementares, como a solicitação de pesquisas extraclasse, para posterior debate construtivo, a respeito de temas como as relações familiares, a importância dos vínculos de amizade, a aceitação de ideias contrárias às nossas e o respectivo respeito, o pluralismo cultural na escola e no ambiente de trabalho, o combate ao racismo, o combate à homofobia, a promoção da paz na comunidade escolar, entre outros.

A Matemática, nesse contexto, pode ser uma ferramenta para analisar dados acerca da distribuição de renda ou das discriminações em razão de etnia, sexualidade, identidade de gênero ou crença, investigando e interpretando as porcentagens de cada grupo sociocultural em diferentes estudos estatísticos. Com base em análises quantitativas, é possível discutir os desafios que a sociedade enfrenta rumo à efetividade da justiça social, que pode ser um ponto de partida para a troca de ideias e o autoconhecimento por parte dos estudantes, inclusive com o envolvimento do professor. Para isso, noções de proporcionalidade, de causas e consequências lógicas e até mesmo da objetividade dos números na descrição dos fenômenos naturais, incluindo os socioeconômicos, são fatores importantes para a compreensão da realidade e também para aumentar a consciência dos jovens de modo a auxiliá-los no embasamento de argumentos.

Ademais, sempre que julgar conveniente, o professor pode conversar com os estudantes, dispondo-se a ouvi-los e incentivando-os a expressar suas ideias. Atitudes desse tipo favorecem o respeito e a admiração mútuos, contribuindo para o engajamento saudável e natural em sala de aula.

Além disso, é importante conversar com os estudantes sobre traçar planos em busca de sonhos e alcançar os meios necessários para consolidá-los pelo próprio esforço. Justamente por essa razão, o planejamento do futuro também está entre os desafios da prática docente.

Nesse processo dinâmico, muitas vezes sem fim, a educação assume um papel importantíssimo, em especial nas peculiares etapas de transição entre a infância e a vida adulta. Ao lado da família, da sociedade e da autodeterminação do próprio sujeito, a escola é o fator mais importante na produção desse despertar de consciência e de responsabilidade no jovem, instruindo-o, tanto quanto possível, na estruturação gradativa e na viabilização sensata de um projeto de vida tão necessário. Tal projeto, constituindo o alicerce em que o futuro do jovem será edificado, deve levar em consideração os múltiplos âmbitos interconectados em que a vida se manifesta: pessoal, educacional, profissional, social, político, moral, intelectual e emocional.

O anseio por objetivos de vida maiores e mais realistas do que aqueles dos primeiros sonhos da infância costuma despontar com ímpeto durante a juventude, e, em geral, os estudantes o desenvolvem de maneira desordenada, cheia de agitação, ingenuidades, inseguranças e receios. Assim, a escola deve se preocupar com a formação integral dos jovens e assumir o compromisso de lidar adequadamente com essas questões, elegendo a construção da autonomia como o eixo central em torno do qual organizar suas atividades.

Como última etapa da Educação Básica, no Ensino Médio tais questões devem ser trabalhadas pelo professor com maior atenção e de maneira mais explícita, ora no contexto das tarefas do componente curricular, ora em conversas com a turma, mas sempre por meio de exemplos e de aconselhamentos que fomentem o delineamento de planos de vida e o recrudescimento do caráter.

Nesse sentido, a trajetória escolar deve ser capaz de dialogar com os jovens, desenvolvendo neles habilidades e conhecimentos que incentivem atitudes efetivas para lidar com os desafios da sociedade, promovendo a maturação de valores que incidirão sobre seus processos de tomada de decisão ao longo da vida. Além disso, ela os prepara para o mercado de trabalho, fornece orientação vocacional e os capacita para eventuais estudos mais complexos no ensino superior ou para aperfeiçoamento técnico em cursos profissionalizantes, conforme as circunstâncias de cada caso.

O estabelecimento do projeto de vida, como já frisado, é um processo dinâmico que conta com diálogos entre jovens, família, amigos, escola e sociedade. Contudo, a liberdade e o protagonismo são exclusivos do indivíduo: é ele que escolherá a própria profissão, decidirá constituir família ou não e direcionará atenção e esforços para a área de seu interesse. Desse modo, o projeto de vida que os estudantes almejam, projetam e redefinem para si ao longo de suas trajetórias, praticamente coincidindo com o desenvolvimento da própria identidade, é apenas motivado e instruído pela escola, nunca imposto por ela. As escolhas devem ocorrer naturalmente em uma multiplicidade de influências, experiências e aprendizagens que enriquecem à medida que se tornam plurais, de tal modo que os estudantes de diferentes perfis aprendem uns com os outros por interação mútua e convívio constante, mediados – e não determinados – pela família, pelo professor, pela escola como um todo e, ainda mais amplamente, pelas conjunturas socioculturais nas quais estão inseridos.

É, enfim, no ambiente escolar que os jovens podem experimentar, de modo controlado, as interações com o outro e com o mundo, vislumbrando, na valorização da diversidade, oportunidades de crescimento para seu presente e seu futuro. É nessa riqueza de motivação que ele deve traçar o próprio caminho, explorando seus talentos e suas potencialidades, assumindo deveres e responsabilidades, aprendendo a fruir e a conter desejos, a dosar razão com emoção, a harmonizar lazer com labor, a mesclar estudos com diversão, e disciplina com curiosidade. Com isso, ele estará apto a constituir-se um ser humano íntegro, seguro de si, cônscio de quem é, dos próprios méritos e das próprias limitações, atento ao seu papel no mundo e ativo quanto às necessidades de seu tempo e de sua comunidade.

A BASE NACIONAL COMUM CURRICULAR NA ETAPA DO ENSINO MÉDIO

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é o documento que estabelece os principais conhecimentos, competências e habilidades que os estudantes devem desenvolver em cada etapa da Educação Básica (Educação Infantil, Ensino Fundamental e Ensino Médio).

Com o intuito de substituir o currículo do Ensino Médio isolado em componentes curriculares, a BNCC apresenta, para essa etapa, as aprendizagens essenciais distribuídas por áreas do conhecimento. Assim, para cada área são definidas competências específicas que se relacionam diretamente com as habilidades da área. Essa estrutura constitui a formação geral básica que, segundo as Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (DCNEM):

> [...] é composta por competências e habilidades previstas na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e articuladas como um todo indissociável, enriquecidas pelo contexto histórico, econômico, social, ambiental, cultural local, do mundo do trabalho e da prática social [...]

BRASIL. Ministério da Educação. Conselho Nacional de Educação. Câmara de Educação Básica. Resolução nº 3, de 21 de novembro de 2018. Atualiza as Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio. *Diário Oficial da União*, Brasília, DF, 22 nov. 2018. p. 5. Disponível em: https://web.archive.org/web/20231025202209/http://portal.mec.gov.br/docman/novembro-2018-pdf/102481-rceb003-18/file. Acesso em: 5 out. 2024.

Além de estabelecer que os conteúdos sejam apresentados por área (formação geral básica), a BNCC prevê, com base nas DCNEM como documento orientador, os itinerários formativos, em que os estudantes poderão escolher, por exemplo, a formação técnica como maneira de complementar a formação escolar.

Com essa estruturação, a BNCC do Ensino Médio articula-se às habilidades e competências do Ensino Fundamental, com o objetivo de consolidar, aprofundar e ampliar a formação integral dos estudantes, possibilitando, assim, a construção de uma sociedade mais justa e igualitária.

As áreas do conhecimento

A etapa do Ensino Médio requer a elaboração de um currículo que integre não só os conteúdos dos componentes de determinada área (interdisciplinaridade), mas também os componentes de outras áreas, estabelecendo relações transdisciplinares.

Áreas do conhecimento e seus respectivos componentes curriculares na BNCC

Áreas do conhecimento	Componentes curriculares
Linguagens e suas Tecnologias	Arte Educação Física Língua Inglesa Língua Portuguesa
Matemática e suas Tecnologias	Matemática
Ciências da Natureza e suas Tecnologias	Biologia Física Química
Ciências Humanas e Sociais Aplicadas	Filosofia Geografia História Sociologia

Competências gerais, competências específicas e habilidades

As dez competências gerais da Educação Básica, previstas na BNCC, têm como principal objetivo formar cidadãos conscientes de seu papel na sociedade e que saibam agir de maneira justa. Essas competências se desdobram na construção de conhecimentos e no desenvolvimento de habilidades, valores e atitudes.

Competências gerais da Educação Básica previstas na BNCC

1 – Valorizar e utilizar os conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico, social, cultural e digital para entender e explicar a realidade, continuar aprendendo e colaborar para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva.

2 – Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas.

3 – Valorizar e fruir as diversas manifestações artísticas e culturais, das locais às mundiais, e também participar de práticas diversificadas da produção artístico-cultural.

4 – Utilizar diferentes linguagens – verbal (oral ou visual-motora, como Libras, e escrita), corporal, visual, sonora e digital –, bem como conhecimentos das linguagens artística, matemática e científica, para se expressar e partilhar informações, experiências, ideias e sentimentos em diferentes contextos e produzir sentidos que levem ao entendimento mútuo.

5 – Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva.

6 – Valorizar a diversidade de saberes e vivências culturais e apropriar-se de conhecimentos e experiências que lhe possibilitem entender as relações próprias do mundo do trabalho e fazer escolhas alinhadas ao exercício da cidadania e ao seu projeto de vida, com liberdade, autonomia, consciência crítica e responsabilidade.

7 – Argumentar com base em fatos, dados e informações confiáveis, para formular, negociar e defender ideias, pontos de vista e decisões comuns que respeitem e promovam os direitos humanos, a consciência socioambiental e o consumo responsável em âmbito local, regional e global, com posicionamento ético em relação ao cuidado de si mesmo, dos outros e do planeta.

8 – Conhecer-se, apreciar-se e cuidar de sua saúde física e emocional, compreendendo-se na diversidade humana e reconhecendo suas emoções e as dos outros, com autocrítica e capacidade para lidar com elas.

9 – Exercitar a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação, fazendo-se respeitar e promovendo o respeito ao outro e aos direitos humanos, com acolhimento e valorização da diversidade de indivíduos e de grupos sociais, seus saberes, identidades, culturas e potencialidades, sem preconceitos de qualquer natureza.

10 – Agir pessoal e coletivamente com autonomia, responsabilidade, flexibilidade, resiliência e determinação, tomando decisões com base em princípios éticos, democráticos, inclusivos, sustentáveis e solidários.

Fonte de pesquisa: BRASIL. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*. Versão final. Brasília: MEC, 2018. p. 9-10. Disponível em: https://www.gov.br/mec/pt-br/escola-em-tempo-integral/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal.pdf. Acesso em: 24 set. 2024.

Além das competências gerais, a BNCC estabelece as competências específicas para cada componente curricular. Essas competências determinam o trabalho com habilidades, conceitos e noções que orientam a prática docente e que estão relacionados às unidades temáticas e aos objetos de conhecimento, promovendo também o desenvolvimento cognitivo dos estudantes.

Competências específicas de Matemática e suas Tecnologias para o Ensino Médio

1 – Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.

2 – Propor ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas sociais, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, mobilizando e articulando conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática.

3 – Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.

4 – Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.

5 – Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.

Fonte de pesquisa: BRASIL. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*. Versão final. Brasília: MEC, 2018. p. 531. Disponível em: https://www.gov.br/mec/pt-br/escola-em-tempo-integral/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal.pdf. Acesso em: 24 set. 2024.

Habilidades de Matemática e suas Tecnologias desenvolvidas neste volume

(EM13MAT105) Utilizar as noções de transformações isométricas (translação, reflexão, rotação e composições destas) e transformações homotéticas para construir figuras e analisar elementos da natureza e diferentes produções humanas (fractais, construções civis, obras de arte, entre outras).

(EM13MAT301) Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

(EM13MAT306) Resolver e elaborar problemas em contextos que envolvem fenômenos periódicos reais (ondas sonoras, fases da lua, movimentos cíclicos, entre outros) e comparar suas representações com as funções seno e cosseno, no plano cartesiano, com ou sem apoio de aplicativos de álgebra e geometria.

(EM13MAT307) Empregar diferentes métodos para a obtenção da medida da área de uma superfície (reconfigurações, aproximação por cortes etc.) e deduzir expressões de cálculo para aplicá-las em situações reais (como o remanejamento e a distribuição de plantações, entre outros), com ou sem apoio de tecnologias digitais.

(EM13MAT308) Aplicar as relações métricas, incluindo as leis do seno e do cosseno ou as noções de congruência e semelhança, para resolver e elaborar problemas que envolvem triângulos, em variados contextos.

(EM13MAT315) Investigar e registrar, por meio de um fluxograma, quando possível, um algoritmo que resolve um problema.

(EM13MAT405) Utilizar conceitos iniciais de uma linguagem de programação na implementação de algoritmos escritos em linguagem corrente e/ou matemática.

(EM13MAT505) Resolver problemas sobre ladrilhamento do plano, com ou sem apoio de aplicativos de geometria di-

nâmica, para conjecturar a respeito dos tipos ou composição de polígonos que podem ser utilizados em ladrilhamento, generalizando padrões observados.

Fonte de pesquisa: BRASIL. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*. Versão final. Brasília: MEC, 2018. p. 543-546. Disponível em: https://www.gov.br/mec/pt-br/escola-em-tempo-integral/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal.pdf. Acesso em: 24 set. 2024.

Cabe destacar que as competências específicas e as habilidades estabelecidas para o Ensino Médio, articuladas às aprendizagens essenciais definidas para o Ensino Fundamental, contribuem para o desenvolvimento das competências gerais da Educação Básica. Dessa forma, para que os estudantes desenvolvam as competências gerais, é preciso, primeiro, que adquiram as aprendizagens essenciais de cada área, por meio das habilidades correspondentes, desenvolvendo também os princípios das competências específicas. Ao fazer o planejamento das práticas pedagógicas, o professor deve estar atento aos diferentes graus de amplitude e complexidade das competências (gerais e específicas) e ter autonomia para fazer as adaptações necessárias no que foi proposto no Projeto Político Pedagógico da escola de acordo com a realidade da turma.

Esta coleção foi organizada de maneira a contemplar as habilidades e as competências específicas relacionadas à área do conhecimento **Matemática e suas Tecnologias**, bem como a contemplar as competências gerais propostas na BNCC. Essas relações estão presentes nas abordagens dos conteúdos, nas teorias, nas seções e nas tarefas apresentadas. O **Livro do Estudante** aborda as relações entre as habilidades e/ou competências, de maneira que os conteúdos de Matemática estão destacados, permitindo que tanto os estudantes quanto o professor confiram como esses elementos são desenvolvidos. Já o **Suplemento para o professor** aborda as relações entre as habilidades e/ou competências e os conteúdos da área de **Matemática e suas Tecnologias**, assim como as competências específicas da área de **Ciências da Natureza e suas Tecnologias**, auxiliando o professor a verificar como esses itens podem ser desenvolvidos, a fim de contribuir para a formação integral dos estudantes.

A fim de auxiliar o professor no planejamento do trabalho em sala de aula, são apresentadas a seguir as competências específicas da área de **Ciências da Natureza e suas Tecnologias para o Ensino Médio**.

1 – Analisar fenômenos naturais e processos tecnológicos, com base nas interações e relações entre matéria e energia, para propor ações individuais e coletivas que aperfeiçoem processos produtivos, minimizem impactos socioambientais e melhorem as condições de vida em âmbito local, regional e global.

2 – Analisar e utilizar interpretações sobre a dinâmica da Vida, da Terra e do Cosmos para elaborar argumentos, realizar previsões sobre o funcionamento e a evolução dos seres vivos e do Universo, e fundamentar e defender decisões éticas e responsáveis.

3 – Investigar situações-problema e avaliar aplicações do conhecimento científico e tecnológico e suas implicações no mundo, utilizando procedimentos e linguagens próprios das Ciências da Natureza, para propor soluções que considerem demandas locais, regionais e/ou globais, e comunicar suas descobertas e conclusões a públicos variados, em diversos contextos e por meio de diferentes mídias e tecnologias digitais de informação e comunicação (TDIC).

BRASIL. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*. Versão final. Brasília: MEC, 2018. p. 553. Disponível em: https://www.gov.br/mec/pt-br/escola-em-tempo-integral/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal.pdf. Acesso em: 26 jul. 2024.

Temas contemporâneos transversais

Os temas contemporâneos transversais não são novidade nos documentos oficiais para a Educação Básica. Nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) de 1997, eram chamados **temas transversais** e pressupunha-se que fossem incluídos nos currículos das escolas. Contudo, como os PCNs não tinham caráter obrigatório e os seis temas listados não eram pautados em nenhuma legislação ou norma específica, nem sempre essa inclusão acontecia no contexto escolar.

Com as Diretrizes Curriculares Nacionais (DCNs) de 2013, os Temas transversais receberam o nome de **eixos temáticos** ou **eixos norteadores** e pressupunham que os professores e os estudantes escolhessem temas/assuntos vinculados ao componente curricular que desejassem estudar, contextualizando-os com outros. O trabalho interdisciplinar e transdisciplinar, por meio de eixos temáticos, tornou-se obrigatório a fim de conduzir os estudantes na reflexão sobre a vida em sociedade.

Com a homologação da BNCC em 2018, eles passaram a ser chamados **temas contemporâneos** e tornaram-se referência obrigatória para a elaboração dos currículos. Em 2019, com a publicação do documento *Temas contemporâneos transversais na BNCC*, passaram a ser chamados **temas contemporâneos transversais** (TCTs). Essa mudança de nomenclatura é pautada na BNCC, que afirma:

> [...] cabe aos sistemas e redes de ensino, assim como às escolas, em suas respectivas esferas de autonomia e competência, incorporar aos currículos e às propostas pedagógicas a abordagem de temas contemporâneos que afetam a vida humana em escala local, regional e global, preferencialmente de forma **transversal** e integradora. [...]

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. *Base Nacional Comum Curricular*. Versão final. Brasília: MEC, 2018. p. 19. (Grifo nosso). Disponível em: https://www.gov.br/mec/pt-br/escola-em-tempo-integral/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal.pdf. Acesso em: 3 set. 2024.

Na BNCC, os TCTs foram distribuídos em seis áreas temáticas, conforme apresentado a seguir.

Temas contemporâneos transversais

Macroáreas temáticas	Temas
Ciência e tecnologia	Ciência e tecnologia
Meio ambiente	Educação ambiental e Educação para o consumo
Economia	Trabalho, Educação financeira e Educação fiscal
Multiculturalismo	Diversidade cultural e Educação para valorização do multiculturalismo nas matrizes históricas e culturais brasileiras
Cidadania e civismo	Diversidade cultural e Educação para valorização do multiculturalismo nas matrizes históricas e culturais brasileiras
Saúde	Saúde e Educação alimentar e nutricional

Os TCTs não pertencem a nenhuma área específica do conhecimento e devem ser abordados por todas elas de maneira integrada e complementar, possibilitando aos estudantes a melhor compreensão da sociedade em que vivem. Seguindo essa premissa, e com o objetivo de orientar o trabalho com os TCTs, esta coleção aborda esses temas por meio de recursos e tarefas, tanto no **Livro do Estudante** quanto neste **Suplemento para o professor**. Essas abordagens são feitas de maneira interdisciplinar e percorrem as áreas do conhecimento, proporcionando aos estudantes a reflexão sobre seu papel na sociedade e contribuindo para sua formação cidadã.

ORIENTAÇÕES DIDÁTICAS E METODOLÓGICAS

Esta coleção propõe a contextualização sociocultural do estudante, tornando-o protagonista de seu processo de aprendizagem. Embora a Matemática seja, "[...] por excelência, uma ciência hipotético-dedutiva, porque suas demonstrações se apoiam sobre um sistema de axiomas e postulados [...]" (BRASIL, 2018a, p. 265), o papel heurístico das experimentações na aprendizagem da Matemática tem importância considerável e deve fazer parte, sempre que possível, das tarefas discentes, a fim de produzir questionamentos saudáveis, levantar conjecturas e buscar contraexemplos, entre outras situações. Nesse sentido, em diversos momentos desta coleção a condução dos conceitos busca ferramentas da tendência socioetnocultural, amparada na Etnomatemática, que propõe troca de conhecimento entre professor e estudante, incentivando sua autonomia crítica, criativa e transformadora na aprendizagem de um saber prático e dinâmico. Além disso, a realidade do estudante é, muitas vezes, problematizada e tomada como contexto para explorar novos conceitos e ampliar os conhecimentos prévios deles.

O ponto de partida da tendência socioetnocultural está pautado nos:

> [...] problemas oriundos do meio cultural, das práticas cotidianas. Professor e alunos trocariam seus conhecimentos [...]. Isso se evidencia pelo trabalho pedagógico a partir da abordagem de temas envolvendo o conhecimento cotidiano dos alunos.
>
> [...]
>
> ZIMER, Tania Teresinha Bruns. *Aprendendo a ensinar matemática nas séries iniciais do ensino fundamental*. 2008. 299 f. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2008. p. 86-87. Disponível em: https://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/48/48134/tde-24062008-162627/publico/TeseTaniaBrunsZimer.pdf. Acesso em: 30 set. 2024.

A Matemática é uma ciência prática e dinâmica, produzida histórica e culturalmente em diversos contextos sociais, em que sua história desmitifica a realidade e estabelece estratégias que incentivam e facilitam as ações dos estudantes, contribuindo para a construção de uma consciência cidadã e democrática. Além disso, as trocas de conhecimentos entre o professor e os estudantes por meio de metodologias ativas objetivam a formação crítica, pessoal e social.

Ademais, os recursos tecnológicos são ferramentas potenciais de ensino ao apoiar a autoprodução de conhecimentos por parte dos estudantes.

Tendências no ensino de Matemática nesta coleção

Sabe-se que os resultados matemáticos são obtidos por meio de deduções pautadas em axiomas, teoremas, corolários, lemas, postulados ou proposições. Grande parte do ensino atual está relacionada à mera reprodução de algoritmos. No entanto, não podemos reduzir a Matemática à simples aplicação de fórmulas e à resolução de exercícios, pois são procedimentos mecânicos, que não possibilitam o

desenvolvimento do pensamento crítico do estudante. Com o objetivo de mudar essa abordagem em sala de aula, algumas concepções no ensino de Matemática podem ser adotadas, visando tornar o estudante protagonista do próprio processo de aprendizagem. Entre elas, temos a Etnomatemática, a História da Matemática, a Investigação matemática, a Resolução de problemas e a Modelagem matemática.

No Brasil, o precursor da Etnomatemática é o professor doutor Ubiratan D'Ambrosio. Etimologicamente, Etnomatemática significa a maneira, a técnica ou a arte (*tica*) de explicar, conhecer e entender (*mathema*) a realidade natural e sociocultural em que o indivíduo está inserido (*etno*). Para D'Ambrosio, a Matemática é espontânea e individual, motivada e desenvolvida de acordo com o ambiente social e cultural em que o indivíduo se encontra. Ao sugerir um vínculo entre a Etnomatemática e a sala de aula, D'Ambrosio argumenta que:

> [...]
>
> A proposta pedagógica da etnomatemática é fazer da matemática algo vivo, lidando com situações reais no tempo [agora] e no espaço [aqui]. E, através da crítica, questionar o aqui e agora. Ao fazer isso, mergulhamos nas raízes culturais e praticamos dinâmica cultural. [...]
>
> D'AMBROSIO, Ubiratan. *Etnomatemática*: elo entre as tradições e a modernidade. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2007. p. 46.

Nesta coleção, a Etnomatemática é trabalhada em alguns contextos e tarefas que apresentam o conhecimento matemático atrelado a diversas culturas, oportunizando momentos de reflexão quanto ao papel social que a Matemática representa nas relações humanas. Por meio dessa abordagem, é esperado que os estudantes descubram métodos úteis para resolver, de maneira eficaz, problemas em contextos não tão comuns à própria realidade. No tópico **Orientações, comentários e sugestões** deste **Suplemento para o professor**, são apresentadas diversas situações que permitem ao professor promover, com os estudantes, um debate acerca da importância da Etnomatemática.

A História da Matemática, como uma tendência de ensino, excede a descrição de fatos históricos ou a apresentação de biografias de matemáticos famosos. Esse ramo envolve a recuperação do processo histórico de construção do conhecimento matemático, favorecendo a contextualização dos objetos de conhecimento. Segundo Lopes e Ferreira (2013), uma dinâmica interessante para introduzir um novo conteúdo em sala de aula é proporcionar aos estudantes o contato com o desenvolvimento histórico desse conceito, apontando, sempre que possível, quais eram as condições sociais, econômicas e políticas que, possivelmente, levaram ao surgimento daquela ideia. Para Miguel e Miorim (2008), o professor pode buscar na História da Matemática o apoio de que necessita para atingir os objetivos pedagógicos que levem os estudantes a perceber:

> [...] (1) a matemática como uma criação humana; (2) as razões pelas quais as pessoas fazem matemática; (3) as necessidades práticas, sociais, econômicas e físicas que servem de estímulo ao desenvolvimento das ideias matemáticas; (4) as conexões existentes entre matemática e filosofia, matemática e religião, matemática e lógica etc.; (5) a curiosidade estritamente intelectual que pode levar à generalização e extensão de ideias e teorias; (6) as percepções que os matemáticos têm do próprio objeto da matemática, as quais mudam e se desenvolvem ao longo do tempo; (7) a natureza de uma estrutura, de uma axiomatização e de uma prova.
>
> [...]
>
> MIGUEL, Antonio; MIORIN, Maria Ângela. *História na educação matemática*: propostas e desafios. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2008. p. 53.

Nesta coleção, a História da Matemática é abordada, sempre que oportuno, por meio de situações motivadoras, que propiciam o trabalho com os aspectos históricos dos conceitos envolvidos. Essas situações podem ser encontradas tanto no decorrer das teorias quanto nos enunciados das tarefas propostas.

A Investigação matemática, por sua vez, consiste no trabalho com situações abertas, isto é, situações em que a questão principal não está bem definida. Visto que os estudantes podem tomar diferentes pontos de partida, é provável que os resultados obtidos também sejam diferentes ao final do processo de investigação. O desenvolvimento de atividades de investigação envolve quatro momentos distintos: exploração e formulação de questões; conjecturas; testes e reformulação; justificação e avaliação (PONTE; BROCADO; OLIVEIRA, 2016). Em um primeiro momento, os estudantes devem reconhecer e explorar a situação-problema proposta, além de formular questões que serão investigadas no decorrer desse processo. Em um segundo momento, eles são levados a organizar os dados coletados e propor conjecturas com base nas informações obtidas até então. Depois, eles devem testar tais conjecturas, verificando sua validade e reformulando-as, caso necessário. Por fim, devem justificar essas conjecturas, avaliando o raciocínio desenvolvido e os resultados obtidos.

Nesta coleção, a Investigação matemática é trabalhada em contextos nos quais os estudantes são levados a: investigar algoritmos e representá-los por meio de um fluxograma; elaborar enunciados de problemas, nos quais eles devem investigar questões parecidas que envolvam os conceitos estudados, tomando-os como base para criar uma nova situação; investigar propriedades matemáticas e estabelecer relações entre diferentes conceitos, de modo a formular conjecturas e validá-las sempre que necessário; entre outros casos.

Outra tendência no ensino de Matemática é a Resolução de problemas, que consiste em trabalhar com situações cujos procedimentos que permitem sua resolução não estão predefinidos. Em primeiro lugar, é preciso definir o conceito de problema. Para Onuchic e Allevato (2011), problemas são situações nas quais não se sabe o que fazer, mas há interesse em solucioná-las. Em outras palavras, são situações que levam o estudante a pensar em algum procedimento de resolução que ainda não está bem definido. Polya (1995), ao tratar da Resolução de problemas no ensino de Matemática, propõe uma heurística de resolução, isto é, resolver um problema consiste em seguir determinadas etapas. O primeiro passo é compreender o problema interpretando o enunciado. Em seguida, elabora-se um plano de resolução, no qual é possível identificar procedimentos matemáticos que podem ser úteis. Definido o plano, deve-se colocá-lo em execução, encontrando uma solução para o problema. Por fim, a última

etapa consiste na comparação dos resultados obtidos com o enunciado do problema, verificando todos os procedimentos utilizados e analisando se a solução é consistente com o que foi solicitado.

Nesta coleção, a Resolução de problemas é abordada na seção **Resolvendo por etapas**, em que são apresentadas situações que complementam os conteúdos trabalhados no **Livro do Estudante**. Por meio de orientações específicas detalhadas em algumas etapas, os estudantes são levados a determinar a resposta do problema proposto. Dependendo do que o professor julgar conveniente, o trabalho com essa seção poderá ser desenvolvido individualmente ou em grupos.

As atividades de cunho predominantemente investigativo, que não têm procedimentos de resolução já determinados, não se restringem apenas à Resolução de problemas ou à Investigação matemática. A Modelagem matemática, como tendência de ensino, também tem como base as atividades investigativas. Porém, o que a diferencia das outras tendências é o fato de que as atividades abordam situações do mundo real, em contextos próximos à realidade dos estudantes. Nesse sentido, ao trabalhar com uma tarefa na perspectiva da Modelagem matemática, os estudantes têm como ponto de partida uma situação-problema cujo contexto está relacionado ao mundo real e cujos dados só serão conhecidos por meio da coleta de informações. Essa etapa leva os estudantes a elaborar problemas que serão investigados por meio da Matemática, resultando em um modelo formado por um sistema conceitual expresso em linguagem matemática. A construção desse modelo matemático requer que os estudantes criem estratégias que os auxiliem na resolução do problema, mesmo que tais estratégias não sejam determinadas *a priori*. Por fim, é necessário que eles determinem a resolução do problema por meio do modelo matemático elaborado, cuja resposta será confrontada com o enunciado, buscando possíveis divergências de valores. Essa interpretação do resultado pode resultar em uma solução que satisfaça o problema ou, então, em uma solução que não seja condizente com as informações previamente apresentadas. Neste último caso, é necessário orientar o estudante a retomar os procedimentos a fim de encontrar o erro cometido e, assim, executá-los novamente com o intuito de encontrar a solução correta. Esse tipo de atividade, além de proporcionar uma aprendizagem significativa, pode causar motivação nos estudantes, visto que são estudadas situações do cotidiano deles. O desenvolvimento de atividades sob a luz da Modelagem matemática exige que o professor desempenhe o papel de orientador, tornando o estudante o próprio protagonista de seu processo de aprendizagem.

Apesar das diferentes características entre as tendências citadas, todas elas destacam o papel do professor distinto do modelo usual de ensino. Quando inserido em atividades com as características descritas, ele deve se tornar um mediador do ensino, na intenção de fazer com que os estudantes utilizem suas habilidades e técnicas na resolução dos problemas e/ou situações que surgirem. Nesse sentido, há dois caminhos que podem ser percorridos: primeiro, o professor encaminha os estudantes na resolução do problema por meio de dicas e orientações que, na verdade, não os auxiliam no desenvolvimento do raciocínio crítico; segundo, o professor, por meio de questionamentos, auxilia os estudantes na resolução da situação proposta sem revelar a solução do problema inicial. Em qualquer caso, cabe ao professor utilizar todo o conhecimento relacionado à sua prática pedagógica para refletir acerca do caminho mais adequado para aquela situação, de acordo com o trabalho que estiver sendo desenvolvido.

O computador e o ensino da Matemática

Os computadores, celulares, *tablets* e outros dispositivos eletrônicos estão presentes em qualquer ambiente, inclusive na sala de aula. Assim, é de se esperar que tais equipamentos passem a fazer parte do cotidiano escolar dos estudantes, contrariando grande parte da população que considera instrumentos escolares apenas a lousa, o giz e o livro didático.

Enquanto alguns professores encaram os equipamentos tecnológicos como eficazes transmissores de conhecimento (informática na educação), outros ainda acreditam que deveria ser criado um componente curricular específico no currículo escolar dos estudantes com o intuito de auxiliá-los a manipular tais equipamentos (educação informática). Mas qual seria a diferença entre esses dois conceitos?

De maneira geral, o objetivo da educação informática é preparar o indivíduo para o mercado de trabalho, ensinando-lhe alguns conceitos computacionais, os fundamentos sobre como um computador funciona e o uso de alguns *softwares* para trabalhos específicos. Já em relação à informática na educação, o computador assume outro papel: sua inserção na rotina escolar tem participação no processo de ensino e aprendizagem. Nesse caso, é possível obter e trocar informações, desenvolver conceitos, entre outras possibilidades.

Focando no segundo conceito, informática na educação, podem surgir algumas perguntas que merecem reflexão.

- De quais maneiras é possível inserir o computador no ambiente escolar?
- Que tipo de contribuição esse instrumento pode trazer para o processo de ensino e aprendizagem?
- Quais são os *softwares* mais adequados para o trabalho em sala de aula?
- Que cuidados devemos ter para que o computador seja uma ferramenta efetiva utilizada para fins educativos?

As respostas para essas e outras perguntas devem surgir de acordo com o planejamento do projeto pedagógico da escola, tendo em vista os objetivos a serem alcançados.

O uso de um computador como recurso didático requer muito mais do que a simples instalação desse equipamento e de como os professores farão uso dele. É necessário que eles sejam capazes de extrair todo o potencial desse equipamento no ambiente escolar. Com o objetivo de alcançar resultados cada vez mais satisfatórios, ao trabalhar com o auxílio da tecnologia, o professor deve explorá-la como uma ferramenta pedagógica capaz de auxiliar no processo de ensino e aprendizagem. É importante enfatizar que, diante de todas essas transformações, o professor em sala de aula deixa de ser apenas um transmissor de informações para ser mediador do processo de ensino e aprendizagem.

Em certos momentos, especificamente nas aulas de Matemática, a utilização de alguns *softwares* pode facilitar algumas dinâmicas em sala de aula ou propiciar a exploração de algo

que seria inviável sem esses recursos. Os *softwares* contribuem de maneira significativa no processo de ensino e aprendizagem, pois são interativos, promovem maior abertura para o desenvolvimento da criatividade dos estudantes, estimulam a pesquisa e auxiliam na construção de um saber coletivo. Portanto, quanto maior a gama de *softwares* distintos conhecidos pelo professor, mais rica, dinâmica e produtiva será a aula ministrada.

Nesta coleção, alguns temas relacionados ao uso do computador em sala de aula são abordados em diversos momentos. Por exemplo, na seção **Acessando tecnologias** são apresentados *softwares* e outros recursos tecnológicos que complementam o ensino dos conteúdos abordados no **Livro do Estudante**. O trabalho com essa seção poderá ser realizado no laboratório de informática da escola ou, ainda, proposto como tarefa extraclasse.

Interdisciplinaridade

A interdisciplinaridade "é o conjunto de relações, interações, diálogos estabelecidos no espaço escolar por diferentes disciplinas" (STECANELA, 2013, p. 27). Ela surgiu pela necessidade de enfrentar a fragmentação disciplinar em que as ciências se dividiram, procurando favorecer a construção de um conhecimento integrador. Nesse sentido, entende-se que o trabalho interdisciplinar é uma abordagem pedagógica que integra conhecimentos de diferentes disciplinas, promovendo a articulação entre os componentes curriculares, permitindo que os estudantes percebam as relações entre diferentes áreas do saber.

> [...]
>
> As vivências interdisciplinares preveem ações articuladas entre os vários campos do conhecimento sistematizado ao integrarem a realidade vivida pelos alunos e ao promoverem a interação entre os educadores que devem estar comprometidos com a ética, com a profissão e, especialmente, com a realidade sociopolítica, construindo uma atitude integrada no desenvolvimento da prática pedagógica, prevendo superar a produção do conhecimento fragmentado na formação do cidadão.
>
> [...]
>
> STECANELA, Nilda. Ler e escrever na EJA: práticas interdisciplinares. *Caderno de EJA*. Caxias do Sul: Educs, 2013. p. 25.

Sendo assim, é salutar destacar que, além de integrar conteúdos, o trabalho interdisciplinar envolve atitude e postura interdisciplinares e se associa a processos de investigação, envolvimento, responsabilidade e troca. A importância desse trabalho no Ensino Médio reside no desenvolvimento de relações múltiplas sobre um saber com base em vivências significativas. Ao conectar diferentes áreas do conhecimento, os estudantes desenvolvem habilidades críticas e analíticas, necessárias para enfrentar os desafios do mundo contemporâneo. A interdisciplinaridade também favorece a formação integral, preparando os jovens para a vida acadêmica e profissional, em que a capacidade de integrar conhecimentos de diversas fontes é cada vez mais valorizada. Além disso, essa abordagem favorece a colaboração e o trabalho em equipe, fundamentais para o desenvolvimento de competências socioemocionais.

Para que a interdisciplinaridade seja efetiva, é fundamental que ela considere as diversas culturas juvenis e as vivências dos estudantes do Ensino Médio, utilizando nas situações de ensino contextos vinculados à realidade próxima deles. A aprendizagem se torna mais relevante quando os estudantes podem relacionar os conteúdos escolares com as próprias experiências e os próprios interesses. Projetos que envolvam questões locais, culturais ou sociais, por exemplo, permitem que eles vejam a aplicação prática do que aprendem e se sintam mais motivados.

A articulação da Matemática com os componentes curriculares da área do conhecimento de Ciências da Natureza e suas Tecnologias pode ser implementada por meio de projetos que integram conhecimentos para solucionar problemas complexos. Por exemplo, um projeto sobre sustentabilidade ambiental pode envolver cálculos matemáticos para medir a eficiência energética, princípios físicos para entender os processos de produção de energia, conceitos químicos para analisar a poluição e fundamentos biológicos para avaliar os impactos nos ecossistemas. Essa abordagem não só fortalece as competências específicas das áreas, mas também promove uma compreensão integrada dos fenômenos naturais e tecnológicos, contribuindo para a formação integral dos estudantes.

Apesar dos benefícios, a implementação da interdisciplinaridade enfrenta vários desafios. Uma dificuldade importante reside na estrutura tradicional das escolas, que muitas vezes segmenta as disciplinas e limita a colaboração entre os professores. Além disso, a falta de formação específica para docentes e a resistência a mudanças metodológicas podem dificultar a mobilização dessa abordagem. Para superar esses desafios, é essencial promover uma cultura escolar que valorize a inovação pedagógica, oferecendo formação continuada e incentivando a colaboração entre os educadores.

O papel do professor é determinante na implementação da perspectiva interdisciplinar. Como mediador, o professor deve reconhecer a aula como um momento com cultura própria, incentivar a curiosidade e a autonomia de pensamento dos estudantes, estar aberto a novas metodologias e buscar constantemente refletir sobre suas práticas pedagógicas. A colaboração entre os professores de diferentes componentes curriculares é vital para o sucesso da interdisciplinaridade, pois permite a troca de experiências e a cocriação de projetos integrados que enriqueçam os processos de ensino e de aprendizagem.

A BNCC enfatiza a importância da interdisciplinaridade para o desenvolvimento das competências gerais dos estudantes. Segundo ela, a integração entre as áreas do conhecimento é essencial para a construção de uma educação mais contextualizada, diversa e significativa. A BNCC orienta que as escolas adotem práticas pedagógicas que favoreçam a conexão entre os saberes, incentivando uma abordagem integrada e colaborativa do currículo.

Nesta coleção, a interdisciplinaridade é promovida por meio de tarefas e projetos que conectam os conteúdos matemáticos com outras áreas do conhecimento. Os conteúdos são abordados, sempre que possível, com base em contextos reais e próximos à realidade dos estudantes. A abordagem interdisciplinar visa fortalecer as competências matemáticas, desenvolver habilidades críticas e analíticas e preparar os estudantes para enfrentar os desafios acadêmicos e profissionais de maneira ética, consciente, inclusiva e responsável.

Pensamento computacional

Vivemos em uma sociedade na qual a presença das Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação (TDIC) provoca importantes transformações em diversos setores, como na economia, na cultura e na educação. Nesse caso, é importante trabalharmos com programação e conceitos oriundos da ciência da computação, pois, assim, desenvolve-se, por exemplo, capacidades relacionadas ao pensamento computacional.

Mas o que é o pensamento computacional?

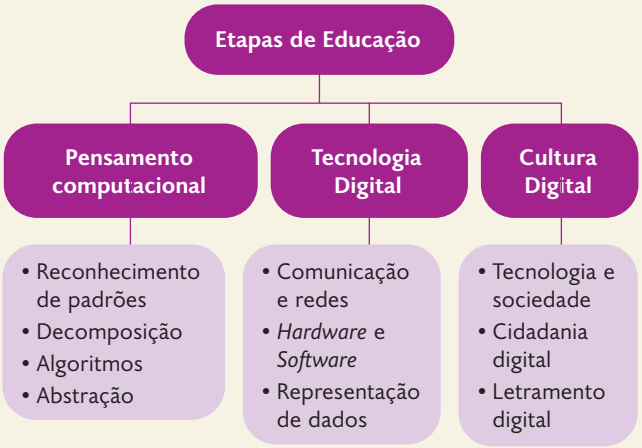
> [...] Pensamento computacional é uma forma para seres humanos resolverem problemas; não é tentar fazer com que seres humanos pensem como computadores. Computadores são tediosos e enfadonhos; humanos são espertos e imaginativos. Nós humanos tornamos a computação empolgante. Equipados com aparelhos computacionais, usamos nossa inteligência para resolver problemas que não ousaríamos sequer tentar antes da era da computação e construir sistemas com funcionalidades limitadas apenas pela nossa imaginação;
>
> [...]

WING, Jeannette. Computational Thinking. Tradução: Cleverson Sebastião dos Anjos. *Communications of the ACM*, n. 3, 2006. p. 4. Disponível em: https://periodicos.utfpr.edu.br/rbect/article/view/4711. Acesso em: 5 out. 2024.

Um dos eixos do currículo de referência em tecnologia e computação, do Centro de Inovação para a Educação Brasileira (Cieb), é o pensamento computacional, o qual disserta sobre a resolução de problemas que envolvem tecnologias digitais considerando quatro pilares: decomposição, reconhecimento de padrões, abstração e algoritmo (CIEB, 2018; BRACKMANN, 2017).

- **Decomposição:** decompor o problema em problemas menores, conhecidos como subproblemas, mais fáceis de serem resolvidos.
- **Reconhecimento de padrões:** analisar os subproblemas individualmente, com o objetivo de reconhecer padrões e identificar características comuns que ajudam na sua resolução.
- **Abstração:** filtrar, classificar e organizar as informações relevantes ao considerar apenas os dados essenciais para a resolução do problema e ignorar as informações irrelevantes, atingindo uma generalização dos padrões identificados.
- **Algoritmo:** construção de estratégias ou instruções claras e ordenadas que auxiliam a resolução dos subproblemas e, consequentemente, a obter a solução do problema principal.

Para mais informações a respeito do currículo de referência em tecnologia e computação, acesse o *site* do Cieb. Disponível em: https://curriculo.cieb.net.br/assets/docs/Curriculo_de_Referencia_em_Tecnologia_e_Computacao.pdf. Acesso em: 5 out.2024.



Fonte de pesquisa: CENTRO DE INOVAÇÃO PARA A EDUCAÇÃO BRASILEIRA (CIEB). *Currículo de referência em tecnologia e computação*. Disponível em: https://curriculo.cieb.net.br/. Acesso em: 5 out.2024.

Como estratégia didática para o desenvolvimento do pensamento computacional, os conceitos relacionados à linguagem de programação, quando o contexto assim solicitar, podem ser utilizados de modo contextualizado a fim de que os estudantes exercitem sua aprendizagem e autonomia para estabelecer relações com situações do cotidiano. O uso de simulações, *softwares* ou equipamentos específicos, por exemplo, pode levar os estudantes a estudar determinados fenômenos reais que dificilmente seriam possíveis sem o auxílio desses recursos.

No Ensino Médio, ao trabalhar com abordagens que desenvolvem o pensamento computacional, deve-se planejar a maneira como as atividades propostas serão efetuadas, considerando diferentes perfis de estudantes, bem como as características de cada turma, além de fazer uso dos recursos disponíveis no ambiente escolar e de perseguir os objetivos a serem alcançados.

Sabe-se que as escolas públicas brasileiras, muitas vezes, não possuem o aparato tecnológico e computacional necessário para o desenvolvimento de atividades com essas tecnologias. Nesses casos, o professor deve recorrer ao trabalho com o pensamento computacional sem o auxílio de recursos tecnológicos, conhecido como pensamento computacional desplugado, ou *unplugged*. Segundo Brackmann (2017), essa alternativa, por ser de fácil aplicação em diferentes realidades, foi pensada justamente com o intuito de atender às escolas públicas que não possuem condições socioeconômicas de ter acesso a computadores ou outras tecnologias. Desse modo, o professor pode aplicar abordagens lúdicas, como truques de mágica e competições entre os estudantes ou, ainda, usar objetos manipuláveis, como jogos (de tabuleiro, de cartas, de peças), livros, fichas, figuras e, até mesmo, o próprio material escolar dos estudantes.

Além disso, de acordo com a BNCC, o pensamento computacional:

> [...] envolve as capacidades de compreender, analisar, definir, modelar, resolver, comparar e automatizar problemas e suas soluções, de forma metódica e sistemática, por meio do desenvolvimento de algoritmos; [...]

[...]

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. *Base Nacional Comum Curricular*. Versão final. Brasília: MEC, 2018. p. 474. Disponível em: https://www.gov.br/mec/pt-br/escola-em-tempo-integral/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal.pdf. Acesso em: 5 out. 2024.

Assim, nesta coleção, o pensamento computacional é incentivado eventualmente: em tarefas que envolvem a organização do pensamento; no registro e na análise de resultados e dados por meio de planilhas e gráficos; no uso de *softwares* de geometria dinâmica; nas construções de algoritmos e fluxogramas; por meio de linguagem de programação usando o *software* Scratch.

O estudante no centro do processo de aprendizagem

Nas últimas décadas, o advento da tecnologia e as discussões envolvendo novos métodos de ensino têm gerado grandes desafios aos professores e às escolas. Estruturas de ensino tradicionais, nas quais professores transmitem conhecimentos aos estudantes, têm sido cada vez mais questionadas quanto ao seu papel efetivo no processo de ensino e aprendizagem.

Nesse sentido, as metodologias ativas são uma maneira de transformar essa realidade, engajando o estudante e tornando o processo de ensino e aprendizagem mais significativo.

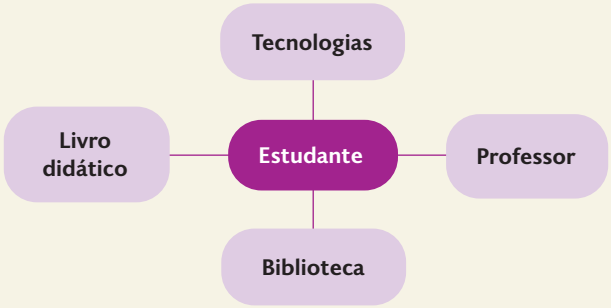
As metodologias ativas

As estratégias de metodologias ativas são um processo de ensino e aprendizagem em que o estudante é o protagonista da construção do conhecimento, tendo o professor como mediador para atingir um objetivo de aprendizagem de modo interativo, dinâmico, reflexivo e colaborativo.

Nesse tipo de abordagem, o professor deixa de ser o transmissor do conhecimento, passando a ser um mediador ao planejar as aulas com foco em orientar e incentivar os estudantes.

> [...] As metodologias ativas dão ênfase ao papel protagonista do estudante, ao seu envolvimento direto, participativo e reflexivo em todas as etapas do processo, experimentando, desenhando, criando, com orientação do professor [...]
>
> MORAN, J. Metodologias ativas para uma aprendizagem mais profunda. *In*: BACICH, L; MORAN, J. (org.). *Metodologias ativas para uma educação inovadora*: uma abordagem teórico-prática. Porto Alegre: Penso, 2018. p. 4.

Ao empregar estratégias de metodologias ativas no processo de ensino e aprendizagem, os estudantes são incentivados a construir o conhecimento de modo integrado às necessidades do cotidiano. Nesse processo, é possível agregar o uso de recursos diversos, como o livro didático usado em sala de aula, os livros disponíveis na biblioteca e os recursos provenientes da tecnologia, como o computador, o celular, a internet e as plataformas digitais.



Considerando esse contexto, esta coleção busca explorar diferentes estratégias de metodologias ativas por meio de tarefas que incentivam o protagonismo dos estudantes. No tópico **Orientações, comentários e sugestões** deste **Suplemento para o professor**, sempre que conveniente, sugere-se o trabalho com a estratégia de metodologia ativa mais adequada para ser adotada naquele contexto específico.

Estratégias

Gallery walk (Caminhada na galeria)

Gallery walk é uma estratégia que desenvolve a habilidade de síntese e estimula a interação, o trabalho em equipe e a socialização do conhecimento. Nela, os estudantes exibem seus trabalhos em cartazes que devem ser afixados em paredes, como obras de arte em uma galeria. Em seguida, a turma circula pela sala, observando os cartazes afixados, debatendo e refletindo sobre o tema proposto.

Há diversas possibilidades de condução dessa estratégia: trabalhos individuais apresentados enquanto a turma percorre a "galeria" em conjunto; circulação livre dos estudantes pela "galeria", colando notas adesivas nos cartazes com dúvidas ou sugestões; entre outras.

Essa dinâmica pode ser aplicada na apresentação, revisão ou mesmo na avaliação de conteúdos. Cabe ao professor definir os objetivos e o tema a serem trabalhados, orientando a turma em relação à tarefa. Durante o processo, o docente assume o papel de observador, permitindo que os estudantes se organizem e intervindo somente se for necessário. Ao final, é importante promover um debate geral com a turma ou fazer uma breve explanação sobre os trabalhos e o processo da *Gallery walk*.

Think-pair-share (Pensar-conversar-compartilhar)

Think-pair-share é uma estratégia de aprendizagem cooperativa que consiste em pensar, individualmente, sobre uma questão ou um problema levantado pelo professor, compartilhar o raciocínio individual com um colega e, em seguida, socializar com um grupo maior os pensamentos e as conclusões aos quais a dupla chegou.

Essa estratégia favorece os estudantes que não se sentem à vontade em compartilhar suas opiniões ou seus conhecimentos com a turma ou com um grupo, mas são capazes de conversar com um colega sobre determinada situação antes de se posicionar diante de um grupo maior.

- *Think*: o professor expõe o problema e o estudante reflete individualmente sobre a situação.

- *Pair*: o estudante reúne-se com um colega para trocar percepções sobre a situação. É interessante que as duplas sejam definidas antes de a questão ser exposta, a fim de que as reflexões dos estudantes não sejam interrompidas para que eles encontrem um par.
- *Share*: as duplas se unem em grupos maiores para compartilhar as conclusões a que chegaram após a discussão conjunta. O grupo discute todas as percepções e chega a uma nova síntese das ideias com base na discussão coletiva. Em outro modelo de socialização, o professor pode pedir a algumas duplas que compartilhem suas conclusões com toda a turma.

Essa estratégia desenvolve habilidades de oralidade e argumentação, além de incentivar os estudantes a ouvir e respeitar diferentes opiniões.

Quick writing (Escrita rápida)

Quick writing é uma estratégia que consiste em escrever uma resposta relacionada a um conteúdo em, no máximo, cinco minutos.

Essa dinâmica desenvolve a fluência na escrita e a capacidade de síntese. A pergunta é feita pelo professor e pode se relacionar tanto aos assuntos estudados quanto à vivência dos estudantes. É possível aplicar essa estratégia baseando-se em abordagens como: explicação de conceitos ou vocabulários de um texto; formulação de hipóteses; ou inferências e explanação de conhecimentos prévios.

Argumentação e inferência

A argumentação e a inferência são pilares importantes para o desenvolvimento do pensamento crítico e do pensamento científico dos estudantes. Essas habilidades favorecem a compreensão dos conteúdos e desempenham um papel significativo na formação cidadã. A argumentação permite que os estudantes construam e expressem opiniões com base em dados científicos e princípios éticos, promovendo um entendimento profundo e crítico da realidade. A inferência, por sua vez, facilita a análise e a avaliação de informações, ajudando os estudantes a desenvolver uma visão ampla e fundamentada sobre os temas discutidos. Juntas, essas habilidades contribuem para uma aprendizagem significativa e para a formação de cidadãos informados e participativos.

Fiorin (2015) considera que um argumento são proposições destinadas a fazer admitir-se uma dada tese. Argumentar é construir um discurso que tem a finalidade de convencer. A argumentação, portanto, pode ser vista como um processo de construção de discurso. Promover práticas fundamentadas em dados científicos e princípios éticos é essencial para garantir que os estudantes desenvolvam uma capacidade argumentativa sólida e responsável. Por meio da argumentação bem fundamentada, eles podem aprender a analisar situações de forma coerente e ética.

Inferência é a capacidade intelectual de se afirmar a verdade de uma proposição com base em informações disponíveis ou outras proposições já consideradas verdadeiras. O desenvolvimento da capacidade inferencial permite aos estudantes analisar e avaliar informações de maneira crítica, favorecendo um entendimento abrangente e profundo dos conteúdos estudados. Ao aprender a fazer inferências, os estudantes desenvolvem habilidades de análise e síntese, essenciais para a construção de argumentos robustos e para a resolução de problemas complexos.

Diversas atividades e estratégias podem ser empregadas para desenvolver as habilidades argumentativas e inferenciais dos estudantes. Debates estruturados, estudos de caso, simulações e produções de vídeos, por exemplo, permitem que os estudantes pratiquem a construção e a defesa de argumentos ao mesmo tempo que aprendem a ouvir e considerar diferentes pontos de vista. É importante que o professor incentive essas interações em um ambiente respeitoso e que acolhe os diferentes pontos de vista.

A análise crítica de textos também é uma estratégia profícua, pois ajuda os estudantes a identificar e avaliar argumentos, além de detectar falácias e fragilidades argumentativas. Outras práticas, como a pesquisa, a elaboração de relatórios e a apresentação de seminários, promovem a mobilização prática das habilidades argumentativas e inferenciais, contribuindo com a aprendizagem.

Nessa perspectiva, trabalhar com textos, reportagens e postagens em redes sociais pode ser uma opção interessante para ajudar os estudantes a identificar digressões, generalizações indevidas e incoerências. Essa análise crítica permite que os estudantes desenvolvam uma compreensão sobre como construir e avaliar argumentos de forma coerente e fundamentada. A prática contínua dessa habilidade contribui para o aprimoramento da capacidade argumentativa dos estudantes e para a construção de um pensamento crítico e analítico.

Para apoiar o desenvolvimento das habilidades argumentativas e inferenciais, é fundamental utilizar uma variedade de abordagens e práticas diversificadas. Além disso, é importante considerar os diferentes perfis e necessidades dos estudantes, ajustando as práticas pedagógicas para garantir que todos possam participar e se beneficiar das atividades propostas. Nesse sentido, a contextualização das atividades de argumentação e inferência é central para atender às necessidades e aos perfis diversos.

É importante, ainda, que o professor estabeleça uma reflexão contínua sobre a adequação das práticas utilizadas, para garantir que todos os estudantes desenvolvam suas habilidades argumentativas e inferenciais de maneira apropriada. O professor deve, também, avaliar regularmente as estratégias e as atividades implementadas, ajustando-as conforme necessário para melhorar os resultados da aprendizagem. Essa abordagem reflexiva e adaptativa permite que o ensino seja consistente e acolhedor. A prática da reflexão crítica é um componente importante para assegurar que a formação integral dos estudantes seja alcançada.

A avaliação

A etapa escolar do Ensino Médio busca o desenvolvimento **integral** dos estudantes. Os objetivos pedagógicos, portanto, de acordo com as orientações da BNCC, devem propiciar o desenvolvimento de **competências** não apenas no sentido de **saber**, mas principalmente de **saber fazer**. Desse modo, nesta coleção, os estudantes são envolvidos em situações de estudo que perpassam suas necessidades e seus interesses, ampliam seus conhecimentos e permitem a mobilização desses conhecimentos visando atender às demandas do mundo onde vivem.

Portanto, a **avaliação das aprendizagens** desses estudantes, como parte indissociável do processo de ensino e aprendizagem, deve estar alinhada a esses objetivos na atividade escolar.

A prática avaliativa tem sido cada vez mais reconhecida por sua importância, pois auxilia o trabalho do professor, e por seu caráter legítimo na validação da condução didático-pedagógica. Desse modo, faz-se necessário compreender a essência de algumas modalidades de avaliação e implementá-las de acordo com os objetivos definidos para cada momento do processo de ensino e aprendizagem.

Avaliação diagnóstica

Toda avaliação tem caráter diagnóstico, pois tende a obter informações sobre a aprendizagem dos estudantes. Essa é uma prática muito importante ao iniciar um conteúdo, pois, por meio dela, é possível identificar os conhecimentos prévios de cada um. Desse modo, é possível tomar decisões sobre seu planejamento de ensino, caso seja necessário complementá-lo ou resumi-lo.

Avaliação somativa

Em geral, é aplicada ao final do estudo de um conteúdo e pode valer-se de diferentes tipos de instrumentos. Fornece dados ou informações que sintetizam os avanços das aprendizagens dos estudantes em relação a tal conteúdo. Busca, de maneira pontual e conclusiva, sintetizar e registrar os resultados verificados, com finalidade informativa ou classificatória.

Avaliação formativa

É parte integrante de todo o processo de ensino e aprendizagem, pois busca melhorias na atividade em curso. Oferece subsídios que respaldam a interferência no processo de atuação do professor e de aprendizagem dos estudantes, com vistas ao seu aprimoramento. Desse modo, permite a retomada e a revisão de conceitos e temas, além do ajuste da prática pedagógica.

Avaliação comparativa

Consiste em comparar o desempenho dos estudantes tendo como referência um padrão externo, um critério estabelecido, uma norma ou outros grupos de estudantes. Permite analisar o que os estudantes aprenderam em relação ao que deveria ter sido ensinado, e seus resultados podem auxiliar o professor na tomada de decisões a respeito de sua prática pedagógica. Pode ser feita por meio de provas padronizadas, simulados, relatórios e exames de larga escala.

Avaliação ipsativa

O progresso do estudante é analisado tendo como referência o próprio estudante. Em vez de compará-lo com os outros, observa-se como ele evoluiu em relação a si mesmo, levando em conta suas próprias metas e seus objetivos de aprendizagem. O foco, portanto, está no desenvolvimento individual, na evolução e no crescimento pessoal do estudante.

Avaliação em larga escala

Tendo como responsável o Ministério da Educação, as avaliações em larga escala são elaboradas por instituições vinculadas ao governo. Seu principal objetivo é avaliar e monitorar a situação da educação no país. Por meio dos diagnósticos obtidos, é possível orientar reformas e apoiar políticas públicas que visem a melhoria do sistema educacional brasileiro. O Exame Nacional do Ensino Médio (Enem), o Sistema de Avaliação da Educação Básica (Saeb) e a Prova Brasil são exemplos de avaliações em larga escala nacionais.

A avaliação e o trabalho do professor

Alguns fatores são fundamentais para que a prática avaliativa possa contribuir de modo efetivo com o professor em seu trabalho diário.

A avaliação e a prática pedagógica

É possível observar casos de práticas avaliativas que se limitam, na maioria das vezes, a uma verificação resumida de notas, seguida de progressão e certificação. Essas práticas, em geral, estão relacionadas a encaminhamentos pedagógicos em que o professor é um transmissor de conhecimento e os estudantes, meros receptores. Por outro lado, em algumas metodologias, nas quais o estudante assume parte importante no processo de construção e ampliação de seu conhecimento, a avaliação preocupa-se mais com "como" o estudante aprende e menos com "o que" ele aprende. Portanto, o acompanhamento das aprendizagens dos estudantes está intrinsecamente relacionado à **opção teórico-metodológica** escolhida, ou seja, o modo como se avalia diz muito sobre o modo como se ensina, e vice-versa.

Uma prática constante

A avaliação não deve ser estanque ou limitada a determinados momentos. Uma prova ao final do estudo de um conteúdo não é suficiente para obter todas as informações necessárias sobre a aprendizagem de cada estudante. Desse modo, a **diversificação** de dinâmicas e instrumentos de avaliação, assim como o registro das informações que ela fornece sobre o processo de aprendizagem, devem ser analisados e confrontados constantemente, a fim de embasar o prosseguimento do trabalho do professor.

Há diferentes maneiras de **registrar** a trajetória dos estudantes em relação à sua aprendizagem. Muitos professores fazem relatórios de observação diária, constroem um portfólio ou anotam comentários em um diário de aulas. Esses registros podem conter descrições ou conceitos que indiquem o progresso ou as dificuldades dos estudantes de maneira individual, em pequenos grupos ou de toda a turma. Com base neles, é possível decidir sobre a retomada de explicações, sugestões de leituras ou atividades paralelas, que auxiliem o acompanhamento dos estudantes em relação aos objetivos de aprendizagem estabelecidos. Esse **aspecto qualitativo** da prática avaliativa exige do professor uma postura ativa, reflexiva e reguladora em relação ao processo de ensino e aprendizagem. E, portanto, é inevitável que a avaliação seja **constante** e esteja inserida em diversos momentos desse processo.

A seguir, apresentamos um modelo de **relatório** que pode auxiliar no acompanhamento da aprendizagem dos estudantes. Lembramos que esse relatório figura como modelo que pode (e deve) ser adaptado de acordo com as necessidades e a realidade de trabalho de cada turma ou escola.

Modelo de relatório de acompanhamento da aprendizagem

Nome do estudante _____

Componente curricular _____ **Ano** _____

Período letivo do registro _____ **Turma** _____

Objetivos, habilidades da BNCC e atividades propostas avaliadas

Objetivos/habilidades ou atividades propostas	NÃO consegue executar	Executa com DIFICULDADE	Executa com FACILIDADE	Apresentou progressos	NÃO apresentou progressos
Reconhecer algumas unidades de medida de base do Sistema Internacional de Unidades (SI).					
EM13MAT103					
Síntese conclusiva da utilização de diferentes unidades de medida de base pertencentes ou não ao SI.					

MODELO

Observações: _____

Instrumentos de avaliação diversificados

Independentemente do instrumento de avaliação que o professor decida utilizar, é fundamental que os objetivos a serem atingidos estejam bem definidos. Obter **indicadores** da aprendizagem dos estudantes deve ser a essência de cada instrumento de avaliação elaborado pelo professor. Portanto, provas objetivas ou discursivas, seminários, produções de textos, sínteses de pesquisas, debates, dramatizações, produção de esquemas ou desenhos e trabalhos em grupo ou individuais estão entre as variações possíveis.

Quanto ao professor, é preciso esclarecer os **objetivos** de ensino a serem investigados em relação à aprendizagem dos estudantes. Já os estudantes devem receber, por parte do professor, toda e qualquer **orientação** possível sobre a dinâmica proposta, de modo que estejam conscientes a respeito de como e quando serão avaliados.

Mas por que a avaliação deve ter essa **diversificação**? Porque os estudantes são diferentes, aprendem de maneiras distintas e expressam-se também de modos diversos. Alguns têm mais facilidade em aprender ouvindo explicações, enquanto outros precisam ler textos, resumos ou esquemas. Há aqueles que demonstram o que sabem por meio de conversas ou debates, mas apresentam dificuldade para se expressar por meio da escrita. Enquanto alguns têm facilidade em compreender raciocínios lógico-matemáticos, outros têm destreza na produção de textos.

A variedade de estratégias, como dinâmicas em grupo ou individuais, ou de participação anônima, por exemplo, também é um recurso que auxilia no trabalho com grupos de **diferentes perfis**. O incentivo à socialização e à junção de grupos heterogêneos, a relevância dos temas de estudos e o envolvimento dos jovens também são fatores que podem tornar eficaz o trabalho de professores e estudantes no processo de ensinar, aprender e avaliar.

A avaliação nesta coleção

Nesta coleção, a opção por um trabalho que destaque o protagonismo dos estudantes do Ensino Médio apresenta **oportunidades constantes** de avaliação do processo de ensino e aprendizagem, privilegiando **dinâmicas diversificadas**, em especial aquelas fundamentadas em **metodologias ativas**. Para tanto, no trabalho com as diferentes unidades temáticas, são propostas dinâmicas e tarefas variadas, com a exploração de diversos recursos (textuais e imagéticos), ocasiões que permitem o acompanhamento do professor em relação à aprendizagem dos estudantes.

Também são disponibilizadas, no tópico **Orientações, comentários e sugestões** deste **Suplemento para o professor**, diversas orientações com dicas pontuais, alinhadas aos objetivos de ensino e a uma avaliação formativa. Destacamos o boxe **Sugestão de avaliação**, que apresenta, em geral, orientações específicas para os momentos de avaliação, com sugestões de como obter informações a respeito da aprendizagem dos estudantes, e possibilidades de escolher o melhor procedimento a ser tomado.

Em alguns momentos, como no desenvolvimento da seção **Síntese do capítulo**, é possível propor aos estudantes que façam uma **autoavaliação**, ferramenta que colabora com o propósito de que eles assumam o protagonismo no processo de formação do conhecimento. Essa proposta de reflexão a respeito de sua aprendizagem, participação, limitações e potencialidades deve ser mediada pelo professor como um processo construtivo e positivo, para que não se encaminhe de modo depreciativo e interfira na autoestima dos estudantes. Ao contrário, deve ser encarada e assimilada como um procedimento de verificação dos caminhos possíveis para superar os diferentes desafios que a vida lhes colocará.

Em se tratando de desafios, esta coleção também se preocupa em preparar os estudantes para os **exames de larga escala**. Para isso, a condução dos estudos é norteada pelo objetivo de desenvolver **habilidades** e **competências** que permitam o embasamento em conhecimentos científicos, o exercício da criatividade, a resolução de problemas com base em saberes interdisciplinares e transdisciplinares, a valorização da cultura em suas diversas expressões, e expressar-se e argumentar por meio de diferentes linguagens, inclusive a tecnológica e a digital, agindo com respeito a si mesmo e aos outros, sempre com responsabilidade.

A BNCC E A COLEÇÃO

Cada volume desta coleção foi organizado e desenvolvido de maneira a contemplar as competências gerais, as competências específicas, as habilidades e os temas contemporâneos transversais elencados na BNCC, estabelecendo, sempre que possível, conexões com outras áreas do conhecimento. É possível perceber tais relações na maneira como os capítulos foram estruturados e abordados, nas questões de intervenção ao longo do desenvolvimento dos conteúdos, nas seções especiais e nas tarefas propostas no decorrer do **Livro do Estudante**. No tópico **Orientações, comentários e sugestões** deste **Suplemento para o professor** há o aporte para o desenvolvimento desse trabalho.

Sugestão de cronograma

Apresentamos, a seguir, três propostas de cronograma para elaborar o planejamento deste volume: uma bimestral, uma trimestral e outra semestral. No entanto, cabe ao professor a decisão de como utilizar o livro didático como apoio pedagógico, seguindo critérios de seleção dos capítulos e levando em consideração diversos fatores, como o projeto pedagógico da escola, as condições da turma, a carga horária e a grade curricular.

Sugestão de cronograma bimestral

1º bimestre	2º bimestre	3º bimestre	4º bimestre
Capítulo 1 (p. 14 a 77) Capítulo 2 (p. 78 a 93)	Capítulo 3 (p. 94 a 109) Capítulo 4 (p. 110 a 157)	Capítulo 5 (p. 158 a 215)	Capítulo 6 (p. 216 a 247) Capítulo 7 (p. 248 a 267)

Sugestão de cronograma trimestral

1º trimestre	2º trimestre	3º trimestre
Capítulo 1 (p. 14 a 77) Capítulo 2 (p. 77 a 93) Capítulo 3 (p. 94 a 109)	Capítulo 4 (p. 110 a 157) Capítulo 5 (p. 158 a 186)	Capítulo 5 (p. 187 a 215) Capítulo 6 (p. 216 a 247) Capítulo 7 (p. 248 a 267)

Sugestão de cronograma semestral

1º semestre	2º semestre
Capítulo 1 (p. 14 a 77) Capítulo 2 (p. 78 a 93) Capítulo 3 (p. 94 a 109) Capítulo 4 (p. 110 a 157)	Capítulo 5 (p. 158 a 215) Capítulo 6 (p. 216 a 247) Capítulo 7 (p. 248 a 267)

PANORAMA DO VOLUME

Quadro de conteúdos

O quadro a seguir apresenta os principais conceitos, as competências gerais, as competências específicas, as habilidades e os temas contemporâneos transversais trabalhados neste volume, organizados de acordo com cada capítulo, especificando também as competências específicas da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias, quando forem abordadas. Com base nesse quadro, o professor poderá organizar as suas aulas de acordo com as necessidades e a realidade escolar em que trabalha e com os seus planejamentos.

Neste quadro, por exemplo:
CG1 indica a **Competência geral 1**.
CE2MAT indica a **Competência específica de Matemática e suas Tecnologias 2**.
CE3CNT indica a **Competência específica de Ciências da Natureza e suas Tecnologias 3**.

Quadro de conteúdos

Capítulo	Principais conceitos	Habilidades da BNCC	Competências gerais; Competências específicas de Matemática e suas Tecnologias; Competências específicas de Ciências da Natureza e suas Tecnologias	Temas contemporâneos transversais
1	Teorema de Tales Semelhança de triângulos Relações métricas no triângulo retângulo Teorema de Pitágoras Trigonometria no triângulo retângulo Ângulos notáveis Tabela trigonométrica Seno e cosseno de ângulos suplementares Lei dos senos e lei dos cossenos Trigonometria na circunferência Arcos da circunferência Circunferência trigonométrica Arcos côngruos Seno, cosseno e tangente de um arco Redução ao 1º quadrante	EM13MAT308 EM13MAT315 EM13MAT405	CG1 CG4 CG5 CE3MAT CE4MAT CE1CNT CE2CNT	Educação ambiental Educação em direitos humanos Ciência e tecnologia
2	Funções trigonométricas	EM13MAT306 EM13MAT308	CE3MAT CE2CNT	Ciência e tecnologia
3	Fórmulas de transformação Relações trigonométricas Equações trigonométricas	EM13MAT306	CE3MAT	Saúde Educação alimentar e nutricional

4	Polígonos Ladrilhamento no plano Ladrilhamento regular e semirregular Estudando a área de figuras planas Área do quadrado Área do retângulo Área do paralelogramo Área do losango Área do triângulo Área do trapézio Cálculo da área de um triângulo utilizando trigonometria Área de polígonos regulares Razão entre área de figuras planas Área do círculo Área do setor circular e da coroa circular	EM13MAT307 EM13MAT315 EM13MAT405 EM13MAT505	CG5 CG9 CE3MAT CE4MAT CE5MAT	Processo de envelhecimento, respeito e valorização do idoso Educação para valorização do multiculturalismo nas matrizes históricas e culturais brasileiras
5	Matrizes Matriz transposta e matriz simétrica Adição e subtração de matrizes Multiplicação de um número real por uma matriz Multiplicação de matrizes Matriz inversa Equações envolvendo matrizes Determinante de uma matriz Teorema de Jacobi e Teorema de Binet Equação linear Sistema linear Sistema linear homogêneo Matrizes associadas a um sistema linear Escalonamento de um sistema linear Discussão de um sistema linear	EM13MAT301	CG4 CE1MAT CE3MAT CE1CNT CE2CNT CE3CNT	Ciência e tecnologia Saúde Educação alimentar e nutricional
6	Geometria analítica Coordenadas na reta e no plano Distância entre dois pontos Coordenadas do ponto médio de um segmento Baricentro de um triângulo Condição de alinhamento de três pontos Área da região determinada por um triângulo Equação geral da reta	EM13MAT315 EM13MAT405	CG1 CG4 CE3MAT CE4MAT CE2CNT CE3CNT	Ciência e tecnologia
7	Transformações geométricas Reflexão Rotação Translação Composição de transformações Homotetia	EM13MAT105	CE1MAT	

ORIENTAÇÕES, COMENTÁRIOS E SUGESTÕES

Nesta seção do **Suplemento para o professor**, são oferecidos subsídios para o trabalho docente em sala de aula, além de orientações e comentários que podem enriquecer o processo de ensino e aprendizagem por meio de propostas de condução de momentos da aula, informações complementares e algumas sugestões de avaliação formativa.

CAPÍTULO 1

Trigonometria no triângulo e na circunferência

Nesse capítulo, são desenvolvidas, em diferentes situações, as seguintes unidades temáticas da Matemática: **Números e Álgebra**, **Geometria e Medidas**. Essas situações ocorrem, por exemplo, ao aplicar as noções de semelhança para elaborar e resolver problemas que envolvem triângulos e ao determinar distâncias inacessíveis utilizando relações trigonométricas. Além disso, há ocorrências da inter-relação entre essas unidades no uso de um algoritmo para determinar o comprimento de um cateto de um triângulo retângulo.

Objetivos específicos

- Utilizar o Teorema de Tales para resolver problemas em diferentes contextos.
- Reconhecer os casos de semelhança de triângulos.
- Apresentar as relações métricas no triângulo retângulo, com especial ênfase no Teorema de Pitágoras, demonstrando sua validade.
- Reconhecer ângulos notáveis.
- Utilizar a lei dos senos e a lei dos cossenos na resolução de situações-problema.
- Obter o comprimento dos lados ou a medida dos ângulos internos de um triângulo qualquer, dadas as medidas de comprimento de alguns lados ou a medida de alguns ângulos.
- Conceituar as medidas de arcos em graus e em radianos.
- Generalizar resultados para qualquer número de voltas na circunferência trigonométrica.
- Determinar o quadrante e o número de voltas completas de um ângulo qualquer a partir da circunferência trigonométrica.
- Ampliar os conceitos de seno, cosseno e tangente para arcos trigonométricos e trabalhar a redução ao 1º quadrante.

Justificativa

As relações métricas no triângulo retângulo, que serão objeto de estudo ao longo desse capítulo, fazem emergir um dos teoremas mais famosos e importantes de toda a Matemática, o Teorema de Pitágoras. Essas relações são fundamentais para que se dê um passo além no estudo da Geometria, levando a descobertas e construindo ferramentas matemáticas que são de grande utilidade em uma ampla gama de situações práticas (desde a simples medição de terrenos até a Astronomia, por exemplo). Além disso, tais relações métricas fornecem a base teórica para que se introduzam com adequado encadeamento lógico os primeiros conceitos e resultados da Trigonometria. A abordagem trabalhada no capítulo é tal que, ao mesmo tempo que incentiva a intuição geométrica dos estudantes, fazendo-os visualizar a validade de cada relação apresentada com base na percepção empírica, também os orienta no indispensável formalismo lógico, demonstrando com rigor matemático todos os teoremas e relações apresentados. Dessa maneira, procura-se aumentar a maturidade matemática e o senso crítico dos estudantes, bem como desenvolver a percepção necessária para associar os conteúdos estudados a fenômenos físicos do mundo real.

Por fim, em se tratando do estudo da Trigonometria na circunferência, espera-se propiciar aos estudantes uma compreensão significativa da circunferência trigonométrica e a ampliação de conceitos de seno, cosseno e tangente para arcos trigonométricos.

Página 16

Ao trabalhar com o tópico **Teorema de Tales**, diga aos estudantes que Tales é considerado o pai da Geometria demonstrativa, na qual se faz necessário justificar, por meio de demonstrações lógicas, os conhecimentos geométricos. Além disso, informe-os de que os estudos de Tales contribuíram em diversas áreas do conhecimento, como Matemática, Filosofia e Astronomia, tornando-o conhecido como um dos sete sábios da Antiguidade.

Nesse tópico, é enunciado e demonstrado o famoso Teorema de Tales. Analise a seguir uma tarefa que pode ser utilizada para auxiliar os estudantes na compreensão dos conceitos. Ela consiste em investigar empiricamente a validade do Teorema de Tales, utilizando, para isso, régua, esquadro e uma calculadora (ou o aplicativo Calculadora do *smartphone*).

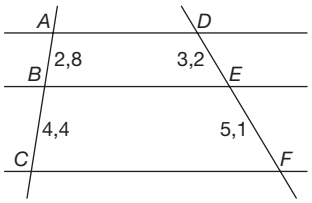
Tarefa extra

Providencie uma folha sulfite para cada estudante e oriente-os a desenhar um feixe de retas paralelas utilizando a régua e o esquadro. Quanto maior for o desenho, mais fácil será realizar medições com precisão.

Após eles desenharem o feixe de paralelas, oriente-os a traçar retas transversais às retas paralelas, quantas eles acharem conveniente, e com os mais variados ângulos de inclinação em relação às paralelas. Peça-lhes que nomeiem os pontos de interseção das paralelas com as transversais, medindo e registrando o comprimento dos segmentos, em centímetros, contidos nas retas transversais, que unem uma reta paralela a outra.

RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Acompanhe a seguir um exemplo em que um feixe de três retas paralelas é cortado por duas retas transversais.



O Teorema de Tales diz que, se duas retas transversais são cortadas por um feixe de retas paralelas, então a razão entre os comprimentos de quaisquer dois segmentos determinados em uma das transversais é igual à razão entre os comprimentos dos segmentos correspondentes na outra transversal.

Calculando, no exemplo dado, as razões $\frac{AB}{BC}$ e $\frac{DE}{EF}$, temos:

- $\frac{AB}{BC} = \frac{2,8}{4,4} = 0,\overline{63}$
- $\frac{DE}{EF} = \frac{3,2}{5,1} \simeq 0,63$

Note que os valores numéricos são muito próximos, e só não são iguais porque existem erros de medição. O mesmo ocorre ao calcularmos as razões $\frac{AB}{AC}$ e $\frac{DE}{DF}$, ou seja:

- $\frac{AB}{AC} = \frac{2,8}{2,8 + 4,4} = \frac{2,8}{7,2} = 0,3\overline{8}$
- $\frac{DE}{DF} = \frac{3,2}{3,2 + 5,1} = \frac{3,2}{8,3} \simeq 0,38$

Oriente os estudantes a explorar, além dessas razões, outras que condizem com o Teorema de Tales.

Página 20

Para que os estudantes tenham a oportunidade de explorar os conceitos de forma interativa, se julgar conveniente, ao propor a tarefa **6**, leve-os à sala de informática para desenvolverem o trabalho utilizando um *software* de Geometria dinâmica. Oriente-os a:

- construir um triângulo ABC;
- determinar o ponto médio de $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$, indicados por D e E, respectivamente;
- construir a reta $\overleftrightarrow{DE}$;
- construir uma reta paralela à $\overline{AB}$, passando por um dos pontos médios (D ou E).

Um possível passo a passo para essa construção é apresentado a seguir.

a) Selecione a ferramenta **Ponto** e construa os pontos A, B e C.

b) Com a ferramenta **Polígono**, clique sobre os pontos A, B, C e A, nessa ordem. Desse modo, obtém-se o triângulo ABC.

c) Marque o ponto médio do lado $\overline{AC}$, o qual será denotado por D. Para isso, selecione a ferramenta **Ponto Médio ou Centro** e clique sobre os pontos A e C. Em seguida, repetindo o mesmo procedimento, porém clicando sobre os pontos B e C, obtenha o ponto médio de $\overline{BC}$, o qual indicaremos por E.

d) Selecione a ferramenta **Reta** e clique sobre os pontos D e E para construir a reta $\overleftrightarrow{DE}$.

e) Construa uma reta paralela ao lado $\overline{AB}$ passando por um dos pontos médios (D ou E). Para isso, selecione a ferramenta **Reta Paralela**, clique sobre o lado $\overline{AB}$ e sobre o ponto D, por exemplo.

Por fim, oriente os estudantes a manipular a construção, para que investiguem e, posteriormente, justifiquem a resposta dada ao problema proposto na tarefa, utilizando os conteúdos estudados.

No trabalho sugerido com o *software* de Geometria dinâmica, os estudantes são desafiados a decompor problemas, reconhecer padrões, filtrar, classificar e organizar informações relevantes e construir algoritmos, desenvolvendo, assim, o **pensamento computacional**.

Página 21

No tópico **Semelhança de triângulos**, estudaremos os casos que estabelecem condições necessárias e suficientes para que dois triângulos sejam semelhantes. Enunciaremos e demonstraremos o **caso de semelhança AA**. Já os casos **LAL** e **LLL** serão apenas enunciados, pois as demonstrações podem ser de difícil compreensão para esse nível de ensino.

Ainda nesse tópico, os estudantes são desafiados a aplicar a semelhança de triângulos para construir modelos e elaborar e resolver problemas que envolvam triângulos em diferentes contextos, conforme orientam a habilidade **EM13MAT308** e a **Competência específica de Matemática e suas Tecnologias 3** da BNCC.

Além disso, ao desenvolver o trabalho com o *software* de Geometria dinâmica, os estudantes podem, por meio de tecnologias digitais, se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, além de elaborar e resolver problemas, exercendo protagonismo na vida pessoal e coletiva e desenvolvendo, assim, a **Competência geral 5** da BNCC.

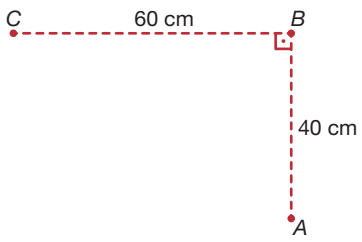
Página 25

O tópico **Relações métricas no triângulo retângulo**, e posteriormente os resultados da Trigonometria, tem aplicação em muitas áreas das **Ciências da Natureza**, principalmente na **Física**, quando se trabalha com vetores para descrever velocidade, aceleração e forças atuantes sobre determinado objeto. Para obter a velocidade de uma partícula, por exemplo, é frequente que se tenha de adicionar os vetores de sua velocidade no eixo horizontal com a velocidade no eixo vertical, de onde quase sempre ocorre o surgimento de um triângulo retângulo. Reciprocamente, uma mesma velocidade pode ser decomposta em seus componentes verticais e horizontais, o que facilita os cálculos em várias situações, como na cinemática do arremesso de um projétil. Esse é um dos exemplos que revelam a atuação da Matemática na investigação científica para descrever, compreender e prever fenômenos da realidade.

Com o intuito de verificar o conhecimento prévio dos estudantes acerca do tópico, proponha problemas contextualizados que direcionem suas atenções às relações envolvendo triângulos retângulos. Uma proposta de problema que possibilita esse diagnóstico é apresentada na **Sugestão de avaliação** a seguir.

Sugestão de avaliação

Verifique na imagem o caminho percorrido por um inseto para ir do ponto *A* ao ponto *C*, passando por *B*.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Se esse inseto tivesse feito o caminho entre *A* e *C* em linha reta, qual seria a distância percorrida por ele?

Resoluções e comentários

Note que o triângulo *ABC* é retângulo. Assim, aplicando o Teorema de Pitágoras, segue que:

$(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2$

$(AC)^2 = 40^2 + 60^2$

$(AC)^2 = 1\,600 + 3\,600$

$(AC)^2 = 5\,200$

$AC = \sqrt{5\,200}$

$AC \simeq 72{,}11$

Note que $AC \simeq 72{,}11$, pois $AC > 0$.

Portanto, o inseto teria percorrido, aproximadamente, 72,11 cm.

Os assuntos abordados no tópico **Relações métricas no triângulo retângulo** contemplam aspectos da habilidade **EM13MAT308**, fornecendo bases para a elaboração e a resolução de problemas envolvendo triângulos em variados contextos. Desse modo, abrangem aspectos da **Competência específica de Matemática e suas Tecnologias 3** da BNCC.

Refinando a percepção geométrica, esse estudo leva os estudantes a exercitar a habilidade de enxergar propriedades de triângulos em esquemas gráficos que representem situações reais, facilitando a resolução de problemas das mais variadas espécies, desde aqueles envolvendo medições até, futuramente, problemas das **Ciências da Natureza**.

Página 27

O item **b** da tarefa **22** está relacionado às culturas juvenis dos mangás. Aproveite e converse com os estudantes sobre o tema, despertando a curiosidade deles. Podem ser feitos alguns questionamentos, como: "Alguém da turma se interessa por mangás?"; "Vocês preferem mangás ou gibis tradicionais?"; "Quais são seus títulos favoritos?"; "Quais são as características dos mangás de que vocês mais gostam?"; "O que vocês acham sobre as adaptações de mangás para animês e filmes?".

Páginas 28 e 29

Educação Midiática

A seção **Os influenciadores digitais influenciam?** favorece a troca de ideias com os estudantes sobre o surgimento dos influenciadores digitais, conduzindo-os a refletir acerca do papel desempenhado por eles na publicidade de produtos e mercadorias, bem como a influência exercida nos hábitos de consumo na atualidade. Verifique se eles percebem que nem sempre uma tendência ou influência é benéfica, podendo acarretar exposições excessivas e desnecessárias, além de frustrações e outros problemas futuros.

A respeito dos *blogs*, pergunte aos estudantes se algum deles os conhece ou acessa. Em caso afirmativo, peça-lhes que contem suas experiências e quais são os temas abordados pelo *blog* visitado, bem como se eles sabem quem é a pessoa por trás da criação do conteúdo. Em seguida, comente com eles que *blogs* são páginas de internet, conhecidas como diários *on-line*, nas quais os produtores de conteúdo publicam informações periodicamente. Esclareça que os primeiros *blogs* surgiram no final da década de 1990 e, em sua maioria, serviam como diários pessoais. Contudo, ao longo do tempo, eles se popularizaram e passaram também a divulgar opiniões, notícias, dicas e informações. A popularização dos *blogs* ocorreu na década de 2000, especialmente com a chegada das primeiras plataformas de hospedagem gratuitas, possibilitando a muitas pessoas produzir os próprios conteúdos e compartilhá-los na internet.

O texto apresentado nessa seção permite explorar a relação entre o *marketing* e os influenciadores digitais. Comente com os estudantes que marcas e empresas contratantes levam em consideração não somente a quantidade de seguidores que um influenciador tem em suas redes sociais, mas também o poder de engajamento de seus seguidores. Em alguns casos, influenciadores com poucos seguidores, mas com muito engajamento entre eles (curtidas, comentários e compartilhamentos), são escolhidos para a divulgação de marcas e produtos. Ao curtirem, compartilharem ou comentarem publicações, vídeos ou postagens, os seguidores se conectam a outros, trocando experiências e impressões acerca dos produtos divulgados pelo influenciador, legitimando ainda mais o sentimento de autenticidade sobre o influenciador e a mercadoria divulgada por ele. A respeito do tema, leia o texto a seguir.

> [...]
>
> O modelo de negócios baseado na influência tem se mostrado lucrativo tanto para as marcas quanto para os influenciadores. A efetividade das estratégias de comunicação com influenciadores digitais tem se revelado através do aumento da visibilidade e das taxas de conversão de vendas, quando comparado à publicidade tradicional. Os *millennials* buscam das marcas a verdade e a autenticidade. O grande desafio é entrar na conversa entre influenciadores e seu público de forma oportuna e genuína.
>
> [...]

GOMES, Erika Cirqueira; GOMES, Evandro Ferreira. O papel dos Influenciadores Digitais no relacionamento entre Marcas e *Millennials* na Era Pós-Digital. *In*: CONGRESSO DE CIÊNCIAS DA COMUNICAÇÃO NA REGIÃO NORDESTE, 19., 2017, Fortaleza: Intercom. *Anais*... Fortaleza, 2017. p. 8-9. Disponível em: https://portalintercom.org.br/anais/nordeste2017/resumos/R57-0751-1.pdf. Acesso em: 14 ago. 2024.

Página 30

O Teorema de Pitágoras é possivelmente o teorema mais famoso de toda a Matemática. Além disso, sua história é rica e tem um significado ímpar. Por essas razões, é desejável que se dê grande ênfase a seu estudo. Sabe-se que o fato de a medida do quadrado da hipotenusa ser igual à soma das medidas dos quadrados dos catetos é algo que já havia sido percebido por várias civilizações muito anteriores a Pitágoras.

Sobre o assunto, Maria Helena Souza explica que:

> [...] A originalidade pitagórica foi a introdução da ideia de matemática abstrata, estabelecida na Grécia, na primeira metade do século V a.C., e que serviu de referência para o seu desenvolvimento entre as épocas de Tales e de Euclides. O que se enfatiza [...] é a passagem de uma matemática marcada por cálculos e técnicas operatórias, realizada por babilônios e egípcios, para outra mais teórica, a praticada pelos gregos, que se consolidou com base em argumentações e demonstrações consistentes.
>
> [...]
>
> SOUZA, Maria Helena. *21 teoremas matemáticos que revolucionaram o mundo*. São Paulo: Planeta do Brasil, 2018. p. 8.

Um teorema não tem, necessariamente, apenas uma demonstração. No caso do Teorema de Pitágoras, mais de trezentas provas diferentes são conhecidas nos dias atuais, variando em complexidade e nas abordagens empregadas.

Página 31

O problema resolvido **R6** permite o desenvolvimento do **pensamento computacional**. A construção de um algoritmo para cálculos a fim de determinar o comprimento de um dos lados de um triângulo retângulo, dados os outros dois, promove uma compreensão mais detalhada e organizada dos procedimentos algébricos, viabilizando uma estruturação ordenada que, posteriormente, poderá ser implementada em um programa de computador.

Página 33

A tarefa **26** tem relação com o tema contemporâneo transversal **Educação ambiental**. Os painéis fotovoltaicos para captação de energia solar, mencionados na tarefa, são boas alternativas para a alimentação da energia elétrica de uma residência. Essa fonte de energia, além de ser não poluente, é mais barata do que as fontes tradicionais, sendo, portanto, ambientalmente sustentável e economicamente favorável. Além disso, essa tarefa tem conexão com a **Competência específica de Ciências da Natureza e suas Tecnologias 1** da BNCC. Nessa tarefa, a Matemática é ferramenta útil para viabilizar o uso de painéis fotovoltaicos, incentivando os estudantes a analisar processos tecnológicos ambientalmente sustentáveis, com base nas interações entre matéria e energia, para pensar sobre ações individuais e coletivas que aperfeiçoem processos produtivos, minimizem impactos ambientais e melhorem as condições de vida.

Ao trabalhar com a tarefa **27**, destaque a importância de conhecer a história da Matemática. Estudar as origens dos conhecimentos atualmente já consolidados é imprescindível para o reconhecimento dos méritos das gerações passadas e para a compreensão de que a Matemática não surge "do nada", ou seja, não é algo pronto e acabado, e sim fruto do trabalho coletivo de pensadores de inúmeras épocas e lugares, os quais acrescentam suas descobertas e invenções ao conhecimento geral. Esse tipo de comentário é importante para que os estudantes percam a ingenuidade quanto ao desenvolvimento da Matemática, em particular, e da Ciência, em geral, passando a compreender que o conhecimento humano está em permanente construção.

Página 34

Ao trabalhar com a tarefa **30**, estabeleça um tempo para que os estudantes possam refletir sobre a importância da Trigonometria na construção civil. Oriente-os a fazer a leitura das páginas **8** e **9** do **Livro do Estudante**, que explica os **Objetivos da Agenda 2030**, e assim retomar o **Objetivo 9** trabalhado nessas páginas.

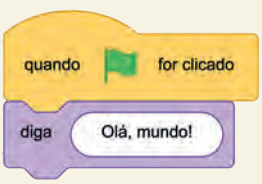
Verifique o interesse dos estudantes pelos assuntos abordados no canal sugerido no boxe **Para expandir**. Se julgar oportuno, proponha a eles que conheçam outras relações práticas do dia a dia divulgadas nas postagens desse canal.

Página 35

A seção **Acessando tecnologias** contempla a habilidade **EM13MAT405** e aspectos da **Competência específica de Matemática e suas Tecnologias 4** da BNCC. Nas tarefas propostas, conceitos iniciais de uma linguagem de programação são utilizados para a implementação de um algoritmo que permita, computacionalmente, determinar o comprimento de um cateto de um triângulo retângulo, desde que se informem os comprimentos do outro cateto e da hipotenusa. Além disso, os estudantes utilizam diferentes linguagens, possibilitando-lhes, por meio delas, se expressar e partilhar informações, experiências, ideias e sentimentos, como sugere a **Competência geral 4** da BNCC.

Ao iniciar o trabalho com a seção, oriente os estudantes a mudar o idioma do Scratch, acessando o menu **Idioma**, em **Configurações**, e selecionando **Português Brasileiro**. Em seguida, deixe-os manipular o Scratch e se familiarizar com sua estrutura. Para conhecer um pouco mais sobre a usabilidade dessa linguagem, sugerimos assistir ao vídeo "Primeiros passos". Disponível em: https://scratch.mit.edu/projects/editor/?tutorial=getStarted. Acesso em: 12 ago. 2024.

Antes de propor aos estudantes que reproduzam o algoritmo apresentado na seção, sugira, por exemplo, a construção do algoritmo a seguir.



REPRODUÇÃO/SCRATCH

Ao executar esse algoritmo, o personagem do Scratch diz "Olá, mundo!".

Se necessário, leve-os a compreender que o bloco 

indica o início do algoritmo e que o bloco 

é usado para apresentar mensagens com balões de fala, nesse caso, "Olá, mundo!".

FOTOS: REPRODUÇÃO/SCRATCH

A fim de que os estudantes trabalhem com o programa apresentado, oriente-os a digitar as instruções correspondentes no *software* e atribuir valores às variáveis definidas.

A construção de um algoritmo em linguagem de programação para cálculos envolvendo o Teorema de Pitágoras faz com que os estudantes comecem a notar os benefícios que tal linguagem proporciona. Além disso, a tarefa proposta oportuniza uma nova abordagem para o problema resolvido **R6** da página **31**. Assim, a experiência favorece a compreensão das diferentes maneiras existentes para obter a solução de um mesmo problema, evidenciando os benefícios de cada uma delas.

Caso não haja computadores suficientes para todos os estudantes, organize-os em grupos e cuide para que, no decorrer da tarefa, todos eles tenham a oportunidade de manipular o *software* em questão.

Páginas 47 e 48

Verifique a conveniência de trabalhar com a estratégia ***Think-pair-share*** ao abordar a tarefa **49**. Essa tarefa envolve um contexto de Astronomia que pode ser novo para os estudantes e, por isso, pode ser desafiador. A fim de levar os estudantes a perceber o uso criativo da Matemática na relação entre Trigonometria e o componente de **Física**, peça a eles que tentem resolver esse problema individualmente. Depois, sugira que formem duplas a fim de discutir os raciocínios empregados. Em seguida, oriente-os a apresentar as conclusões para a turma.

Na tarefa **49**, os recursos trigonométricos são aplicados como ferramentas para o cálculo de medidas de distância, para aferição de ângulos e para analisar e interpretar fenômenos astronômicos de relevância à dinâmica da vida na Terra, como os movimentos dos astros e a incidência de luz solar. Esse trabalho permite desenvolver parcialmente a **Competência específica de Ciências da Natureza e suas Tecnologias 2** da BNCC. Por meio dessa integração entre os componentes, os estudantes são convidados a ponderar a importância da Matemática, servindo de instrumentadora de um conjunto de fórmulas que permitem analisar comportamentos complexos, como a inclinação do eixo terrestre e as mudanças nas sombras projetadas. Esses conhecimentos são fundamentais para a **Física** e a Astronomia, possibilitando a realização de previsões com embasamento científico acerca dos fenômenos naturais. Com tais informações, fomenta-se uma visão integrada dos conhecimentos, promovendo atitudes éticas e responsáveis em situações que envolvam tomadas de decisões quanto à interpretação e à análise do mundo de maneira científica e devidamente fundamentada.

Após o trabalho com a tarefa **50**, estabeleça um tempo para que os estudantes possam refletir sobre como as leis e normas de acessibilidade, como o Decreto nº 5.296/2004 e a NBR 9050, são aplicadas na prática para garantir a inclusão. Oriente-os a fazer a leitura das páginas iniciais do **Livro do Estudante**, que explicam os **Objetivos da Agenda 2030**, retomando assim o **Objetivo 10** trabalhado nessas páginas.

A tarefa **50** permite abordar o tema contemporâneo transversal **Educação em direitos humanos**. Nessa tarefa, os conhecimentos técnicos de Trigonometria são úteis para identificar o respeito à legislação que protege pessoas com deficiências físicas, promovendo a inclusão social. Assim, a aplicação da Matemática revela-se necessária no que se refere à garantia dos direitos à autonomia e à igualdade das pessoas com deficiência, pilares para concretizar o desenvolvimento pleno dos indivíduos.

A tarefa **51** contempla aspectos da habilidade **EM13MAT308**, ao propor a participação ativa e criativa dos estudantes para elaborar uma questão envolvendo relações métricas e Trigonometria no triângulo retângulo. Essa "inversão de perspectiva" é positiva, pois faz com que eles pensem nos assuntos estudados por um novo ponto de vista, possibilitando compreender o conteúdo de maneira significativa e garantir aplicabilidade efetiva dos assuntos estudados. Além disso, favorece uma postura menos passiva no processo de ensino e aprendizagem, indo além da resolução de problemas e vislumbrando as inúmeras possibilidades na criação deles.

Página 51

Os conteúdos estudados no tópico **Seno e cosseno de ângulos suplementares** estabelecem relações com a Trigonometria na circunferência e funções trigonométricas, fórmulas de transformação, relações e equações trigonométricas e áreas de figuras planas, que serão estudadas em tópicos posteriores.

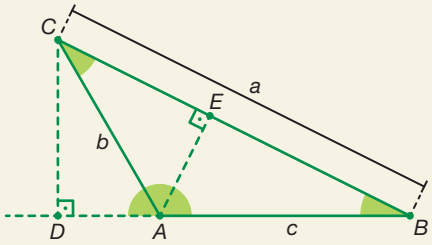
Os conteúdos abordados no tópico **Lei dos senos** possibilitam o desenvolvimento da **Competência geral 1** da BNCC, ao conduzir os estudantes a valorizar e utilizar os conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico, social, cultural e digital para entender e explicar a realidade, continuar aprendendo e colaborar para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva. Além disso, as tarefas propostas visam oportunizar a aplicação das leis do seno e do cosseno na resolução e na elaboração de problemas que envolvam triângulos em diferentes contextos, contemplando, assim, a habilidade **EM13MAT308**. Desse modo, abordam-se aspectos da **Competência específica de Matemática e suas Tecnologias 3** da BNCC.

Após apresentar a demonstração da lei dos senos para um triângulo acutângulo, se julgar conveniente, solicite aos estudantes que demonstrem a validade desse resultado para triângulos obtusângulos e retângulos. A seguir, é apresentada a demonstração para ambos os casos.

Triângulo obtusângulo

Triângulo obtusângulo é aquele em que pelo menos um ângulo interno é obtuso, ou seja, maior do que 90°.

Para demonstrar a lei dos senos para triângulos obtusângulos, vamos considerar o triângulo *ABC*.



Nos triângulos retângulos obtidos ao traçarmos as alturas relativas aos lados $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$, temos:

- $\triangle BCD$: $\operatorname{sen}\hat{B} = \frac{CD}{a} \Rightarrow CD = a \cdot \operatorname{sen}\hat{B}$
- $\triangle ACD$: $\operatorname{sen}(180° - \hat{A}) = \frac{CD}{b} \Rightarrow$
$\Rightarrow \operatorname{sen}\hat{A} = \frac{CD}{b} \Rightarrow CD = b \cdot \operatorname{sen}\hat{A}$
- $\triangle ABE$: $\operatorname{sen}\hat{B} = \frac{AE}{c} \Rightarrow AE = c \cdot \operatorname{sen}\hat{B}$
- $\triangle ACE$: $\operatorname{sen}\hat{C} = \frac{AE}{b} \Rightarrow AE = b \cdot \operatorname{sen}\hat{C}$

Assim:

$a \cdot \operatorname{sen}\hat{B} = b \cdot \operatorname{sen}\hat{A} \Rightarrow \frac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}}$ **(I)**

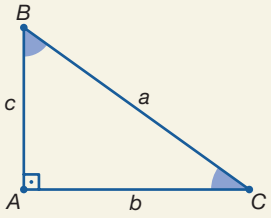
$c \cdot \operatorname{sen}\hat{B} = b \cdot \operatorname{sen}\hat{C} \Rightarrow \frac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen}\hat{C}}$ **(II)**

Portanto, de **I** e **II**, segue que:

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen}\hat{C}}$$

Triângulo retângulo

Para demonstrar a lei dos senos para triângulos retângulos, consideramos o triângulo *ABC*.



Nesse triângulo, temos:

$\operatorname{sen}\hat{B} = \frac{b}{a} \Rightarrow \frac{\operatorname{sen}\hat{B}}{1} = \frac{b}{a} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{\operatorname{sen}\hat{B}}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \frac{b}{a} \Rightarrow \frac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}}$ **(I)**

Lembre-se de que $\operatorname{sen}90° = 1$.

Analogamente, temos:

$\operatorname{sen}\hat{C} = \frac{c}{a} \Rightarrow \frac{\operatorname{sen}\hat{C}}{1} = \frac{c}{a} \Rightarrow \frac{\operatorname{sen}\hat{C}}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \frac{c}{a} \Rightarrow \frac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \frac{c}{\operatorname{sen}\hat{C}}$ **(II)**

Portanto, de **I** e **II**, segue que:

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen}\hat{C}}$$

Página 55

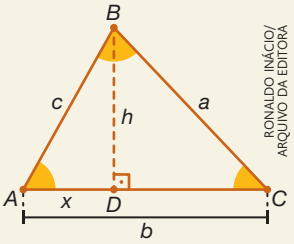
Aproveite que a tarefa **66** aborda previsões meteorológicas e estabeleça conexão com o tema contemporâneo transversal **Ciência e tecnologia**. Promova um debate com a turma a respeito dos métodos utilizados na coleta de dados meteorológicos, como a sondagem, que utiliza o balão meteorológico para coletar informações. Diga aos estudantes que, nesse método, um dispositivo (sonda) é acoplado a um balão que, ao ser inflado, sobe a altitudes de cerca de 20 a 25 km. Essa sonda faz a leitura das informações referentes ao clima e as envia a um receptor localizado em solo, que as decodifica em mensagens numéricas, as quais são enviadas aos órgãos responsáveis pela elaboração das previsões meteorológicas. Esses órgãos, por sua vez, decodificam os dados numéricos e transmitem as informações a todos os interessados, como emissoras de televisão, agricultores e aviadores.

A tarefa **69** contempla aspectos da habilidade **EM13MAT308**, ao propor a participação ativa e criativa dos estudantes para elaborar um problema envolvendo a lei dos senos. Esse tipo de tarefa faz com que os estudantes pensem nos assuntos que serão explorados sob um novo ponto de vista, possibilitando-lhes compreender com maior profundidade os conteúdos trabalhados.

Páginas 56 a 58

Explique aos estudantes que a lei dos cossenos é válida para todos os triângulos e, se julgar conveniente, peça-lhes que demonstrem a validade desse resultado para triângulos acutângulos e retângulos. A seguir, é apresentada a demonstração para os triângulos acutângulos. No caso dos triângulos retângulos, vide o problema resolvido **R20**, da página **58**.

Para demonstrar a lei dos cossenos para triângulos acutângulos, consideramos o triângulo *ABC* e traçamos a altura relativa ao lado $\overline{AC}$.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

No triângulo *BCD*, temos:

$a^2 = h^2 + (b - x)^2$ **(I)**

No triângulo *ABD*, segue que:

$c^2 = h^2 + x^2 \Rightarrow h^2 = c^2 - x^2$ **(II)**

$\cos\hat{A} = \frac{x}{c} \Rightarrow x = c \cdot \cos\hat{A}$ **(III)**

Substituindo **II** em **I**, temos:

$a^2 = h^2 + (b - x)^2 \Rightarrow a^2 = c^2 - x^2 + b^2 - 2bx + x^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow a^2 = c^2 + b^2 - 2bx$ **(IV)**

Substituindo **III** em **IV**, obtemos:

$a^2 = c^2 + b^2 - 2bx \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\hat{A}$

De maneira análoga, podemos demonstrar que:

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\hat{B}$ e $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\hat{C}$.

Páginas 59 e 60

Na tarefa **75**, o assunto apresentado estabelece relação com a área de **Ciências da Natureza e suas Tecnologias**, contribuindo para o desenvolvimento da **Competência específica de Ciências da Natureza e suas Tecnologias 1** da BNCC, pois permite analisar e representar as transformações e conservações em sistemas que envolvam quantidade de energia e de movimento para realizar previsões sobre seus comportamentos em situações cotidianas.

A tarefa **79** propõe aos estudantes elaborar um problema envolvendo a lei dos cossenos, contribuindo assim para o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT308**. O processo de elaboração de problemas, além de instigar a investigação, possibilita aos estudantes refletir sobre os conteúdos explorados sob um novo ponto de vista.

ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Ao fim do trabalho com a seção **Exercícios e problemas**, verifique a conveniência de utilizar a estratégia ***Quick writing*** para avaliar o aprendizado dos estudantes, levando-os a refletir acerca dos conteúdos estudados. Em um momento de diálogo, solicite-lhes que expliquem qual é a importância do estudo de Trigonometria em um triângulo qualquer na Matemática, na Ciência, no desenvolvimento tecnológico e em situações da vida cotidiana.

Páginas 64 e 65

A tarefa **82** aborda a habilidade **EM13MAT315**, ao favorecer a organização do pensamento para a construção de um algoritmo e sua organização em um fluxograma. Desse modo, são abordados aspectos da **Competência específica de Matemática e suas Tecnologias 3** da BNCC.

Ao abordar o contexto proposto na tarefa **89**, verifique a possibilidade de elaborar uma aula com um professor da área de **Linguagem e suas Tecnologias**, preferencialmente o do componente curricular de **Arte**. Oriente os estudantes a formar grupos e pesquisar outras situações em que a proporção áurea é obtida, como em obras de arte e em elementos da natureza.

Página 69

Ao trabalhar os conteúdos do tópico **Seno**, **cosseno e tangente de um arco**, lembre os estudantes de que os conceitos de seno, cosseno e tangente, estudados anteriormente, foram estabelecidos a partir dos ângulos internos e dos lados do triângulo.

No entanto, quando estudamos esses conceitos no ciclo trigonométrico, estendemos o domínio a todos os reais, e os conceitos de seno, cosseno e tangente de um ângulo são transcendidos para seno, cosseno e tangente de um arco.

Página 75

Trabalho e juventudes

Complemente o estudo da seção **A profissão de astrônomo** explicando aos estudantes como se desenvolve o trabalho dos astrônomos em alguns dos campos mencionados.

- Nos centros de pesquisas espaciais, ele realiza pesquisas espaciais e atmosféricas e monitora áreas com imagens obtidas por satélites.
- Em museus de Ciência e em planetários, pode apresentar e divulgar conhecimentos astronômicos para o público em geral, promovendo a democratização do conhecimento científico.
- Em empresas de tecnologia, pode projetar e desenvolver equipamentos de uso espacial, como satélites, detectores e telescópios.

Na atividade **2**, organize uma roda de conversa para que os estudantes compartilhem suas opiniões sobre a importância da Astronomia para a humanidade. Essa atividade tem como objetivo levá-los a perceber que os resultados dos estudos astronômicos estão presentes em nossa vida de diversas maneiras. Na agricultura, por exemplo, é necessário que o produtor conheça as estações climáticas do ano que influenciam fatores como a variação da incidência de luz solar e de calor. Já na pesca marinha, é importante ter conhecimento sobre as fases da lua, pois elas determinam a alteração das marés com sua força gravitacional e interferem na quantidade de peixes durante a pesca.

Página 77

Na questão **1**, se necessário, oriente os estudantes a formar duplas e retomar os conteúdos abordados no capítulo, mencionando os que já conheciam e se houve algum em que tiveram dificuldades.

O trabalho com a questão **2** pode ser desenvolvido de diferentes maneiras: por meio de desenhos, textos, dinâmicas em grupos etc. Nesse momento, se necessário, proponha aos estudantes que elaborem questionamentos a respeito dos erros mais comuns que eles identificaram durante o trabalho com os tópicos propostos. Alguns exemplos são: "Consigo utilizar o Teorema de Tales para resolver problemas?"; "Consigo resolver problemas que envolvem triângulos aplicando as noções de semelhança?"; "Tenho segurança para determinar distâncias inacessíveis utilizando relações trigonométricas?"; "Compreendo a relação entre o comprimento de um arco e suas diferentes formas de representação?"; "Identifico em quais situações é mais conveniente utilizar a lei dos senos ou a lei dos cossenos?". Com base nas respostas, é esperado que eles identifiquem suas dificuldades e reflitam acerca da necessidade de retomar o que foi estudado.

As questões de **3** a **12** são de direta aplicação dos conteúdos estudados. Com elas, é esperado que os estudantes validem a reflexão proposta na questão **2**. Durante o desenvolvimento dessas questões, oriente-os a não consultar o material e a registrar suas dúvidas, pois esses registros auxiliarão no desenvolvimento da questão **13**.

Na síntese proposta na questão **13**, os estudantes podem usar diversas estratégias, como listas de conceitos, mapas conceituais e resumos textuais. Instigue-os a dar exemplos e, se julgarem conveniente, usar imagens. Incentive-os a utilizar a criatividade nesse momento.

CAPÍTULO 2 Funções trigonométricas

Nesse capítulo, são desenvolvidas as seguintes unidades temáticas da Matemática: **Números e Álgebra**, **Geometria e Medidas**. Por meio desse trabalho, espera-se favorecer a capacidade de resolver e elaborar problemas envolvendo fenômenos periódicos reais e a comparação da representação desses fenômenos com as funções trigonométricas.

Objetivos específicos

- Compreender o conceito de funções trigonométricas, destacando os aspectos que caracterizam a função seno e a função cosseno.
- Reconhecer que fenômenos periódicos da natureza podem ser analisados e interpretados por funções trigonométricas.
- Reconhecer e aplicar o conceito de função trigonométrica na resolução de problemas.
- Interpretar algébrica e graficamente uma função periódica.

Justificativa

Nesse capítulo, são apresentados estratégias e conceitos matemáticos relacionados a funções trigonométricas que permitem aos estudantes interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos. Além disso, viabiliza a relação de alguns movimentos periódicos presentes no cotidiano e na natureza com as funções trigonométricas, como a respiração de um ser humano e a variação das marés.

Páginas 78 e 79

Nessas páginas, a noção de periodicidade é relacionada, de maneira intuitiva, às funções trigonométricas.

Determine um tempo (por exemplo, 15 minutos) para que os estudantes leiam o texto e respondam às questões. Em seguida, pergunte a eles se já viram o mar e tiveram contato com marés. Questione-os sobre o que observaram desse fenômeno. Caso algum deles nunca tenha observado o comportamento de uma maré, pergunte se já assistiram a algum filme, programa de TV ou esporte em que ela aparecia.

Uma maneira de complementar as questões propostas nessas páginas é solicitar aos estudantes que formem grupos e façam uma pesquisa sobre outros fenômenos periódicos. Para isso, leve-os ao laboratório de informática ou à biblioteca da escola e oriente-os a escolher um fenômeno (por exemplo, a duração de um dia ou as fases da Lua) e a pesquisar sua periodicidade. Em seguida, solicite a cada grupo que apresente as informações coletadas para a turma.

Caso julgue conveniente, proponha um trabalho com o professor da área de **Ciências da Natureza e suas Tecnologias**, preferencialmente com o do componente curricular de **Física**. Nesse momento, é importante que ele explique aos estudantes o conceito de forças gravitacionais diferenciais e sua relação com as marés. Mais informações sobre esse assunto podem ser obtidas no texto "Forças gravitacionais diferenciais ou Forças de maré". Disponível em: http://www.if.ufrgs.br/fis02001/aulas/aulafordif.htm. Acesso em: 14 ago. 2024. Avalie também a possibilidade de orientar os estudantes a buscar na internet algum vídeo que apresente a influência da Lua nas marés.

Página 81

Outra possibilidade para iniciar o estudo da função seno e posteriormente da função cosseno é desenvolver o trabalho utilizando um *software* de Geometria dinâmica que representa conceitos de Geometria e Álgebra. Nele, podemos realizar diversas construções geométricas utilizando pontos, retas, circunferência e outras curvas, considerando relações entre os elementos envolvidos, como posição relativa, pertinência e interseção. Um *software* que pode ser obtido gratuitamente e está disponível em vários idiomas, inclusive em português, é o GeoGebra. Disponível em: https://www.geogebra.org/ Acesso em: 14 ago. 2024.

Esse tipo de tarefa possibilita aos estudantes entrar em contato com o conhecimento científico por meio de ferramentas que fazem parte das culturas juvenis.

Página 84

Caso os estudantes tenham dificuldades na resolução da tarefa **3**, peça-lhes que esbocem os gráficos das funções f e g e pergunte-lhes sobre o problema apresentado, de maneira a facilitar a compreensão. Uma sugestão é questioná-los a respeito do valor de $h(x)$ para $x = 0$ e para $x = \frac{\pi}{2}$.

Página 85

O tópico **Funções do tipo trigonométricas:** $\boldsymbol{f(x) = a + b \cdot \text{sen}(cx + d)}$ **e** $\boldsymbol{g(x) = a + b \cdot \cos(cx + d)}$ possibilita aos estudantes resolver e elaborar problemas envolvendo fenômenos periódicos reais. Além disso, viabiliza a comparação da representação desses fenômenos com as funções trigonométricas, contemplando a habilidade **EM13MAT306** da BNCC.

Página 88

Para avaliar como os estudantes estão lidando com os conteúdos estudados até o momento, proponha a eles que resolvam a seguinte tarefa.

Sugestão de avaliação

Determine o período de cada função a seguir.

a) f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \text{sen}(2x + \pi)$

b) g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = 1 + \cos\left(2\pi - \frac{x}{2}\right)$

Resoluções e comentários

a) O período da função trigonométrica m dada por $m(x) = \text{sen}x$ é $p_m = 2\pi$. Logo:

$$p = \frac{p_m}{|c|} = \frac{2\pi}{|2|} = \pi$$

Portanto, o período da função f é π.

b) O período da função trigonométrica n dada por $n(x) = \cos x$ é $p_n = 2\pi$. Logo:

$$p = \frac{p_n}{|c|} = \frac{2\pi}{\left|-\frac{1}{2}\right|} = 4\pi$$

Portanto, o período da função g é 4π.

Caso os estudantes tenham dificuldade, reúna-os em duplas para resolverem a tarefa, sanando as possíveis dúvidas.

Página 89

Trabalho e juventudes

Ao abordar com os estudantes a seção **O que faz um engenheiro de som?**, inicie o trabalho com a página explorando os conhecimentos prévios deles a respeito dessa profissão. Para isso, faça algumas perguntas, como: "Vocês sabem em que consiste o trabalho do engenheiro de som?"; "Em quais áreas ele pode atuar?"; "Quais cursos são necessários para se tornar um engenheiro de som?".

Para realizar a visita sugerida nessa seção, providencie a autorização dos responsáveis pelos estudantes menores de idade e verifique a necessidade de equipamentos de segurança. Oriente-os a elaborar antecipadamente algumas questões e deixe-os à vontade para fazer outros questionamentos durante a visita, ressaltando a importância do diálogo respeitoso. Caso não seja possível visitar o local, convide o profissional para ir até a escola ou realize uma videochamada para que ele possa ser entrevistado pelos estudantes e apresentar seu ambiente de trabalho e os recursos que utiliza no dia a dia.

Páginas 90 a 92

A tarefa **11** mostra uma relação entre os componentes curriculares de **Matemática** e **Biologia**. Nela, o conceito de função trigonométrica é associado ao estudo do sistema respiratório humano. Para promover essa aproximação, relembre aos estudantes de que o sistema respiratório no corpo humano é o responsável por captar oxigênio do ambiente e eliminar dióxido de carbono do nosso organismo. Pergunte a eles

qual órgão desse sistema é mencionado na tarefa. Espera-se que identifiquem o pulmão. Em seguida, verifique se eles se lembram de outros órgãos e estruturas que compõem esse sistema. Se necessário, auxilie-os nessa tarefa, mencionando que, antes de chegar aos pulmões, o ar passa por nariz, cavidade nasal, faringe, laringe, traqueia, brônquios e bronquíolos.

A tarefa **13** oportuniza uma articulação com o componente curricular de **Física**, pois o Movimento Harmônico Simples (MHS), tratado com mais detalhes nesse componente curricular, pode ser identificado no dia a dia em variadas situações, como no movimento oscilatório de um pêndulo ou de um balanço infantil, no vai e vem de uma mola ou mesmo na vibração de uma corda de violão. Esse tipo de movimento é caracterizado por um período e por uma frequência.

A tarefa **14** contempla aspectos da habilidade **EM13MAT308**, ao propor a participação ativa e criativa dos estudantes para elaborar um problema envolvendo fenômenos periódicos e funções trigonométricas. Essa "inversão de perspectiva" é positiva, pois os leva a pensar nos assuntos estudados sob um novo ponto de vista, possibilitando compreender com mais profundidade o conteúdo e adquirir habilidades na exploração dos assuntos abordados. Além disso, incentiva uma postura menos passiva no processo de ensino e aprendizagem, indo além da resolução de problemas e vislumbrando as inúmeras possibilidades na criação deles.

O trabalho com a tarefa **15** permite o desenvolvimento do tema contemporâneo transversal **Ciência e tecnologia**, uma vez que trata da duração do dia de acordo com o movimento e a posição da Terra em relação ao Sol. Além disso, aborda aspectos da habilidade **EM13MAT306** da BNCC ao trazer para discussão a resolução de problemas em contextos que envolvem fenômenos periódicos reais. Isso requer, ainda, que os estudantes saibam utilizar estratégias e conceitos matemáticos para interpretar, analisar e resolver problemas relacionados a fenômenos naturais e fazer previsões sobre o funcionamento do Universo. Tais requisitos estão relacionados à **Competência específica de Matemática e suas Tecnologias 3** e à **Competência específica de Ciências da Natureza e suas Tecnologias 2** da BNCC.

Ao trabalhar com a tarefa **15**, caso julgue oportuno, a fim de ampliar as informações apresentadas na página, assista com os estudantes ao vídeo "A dança do Sol", no *site* da Unicamp. Nele, um mestre de obras precisa utilizar informações a respeito da posição aparente do Sol para planejar uma construção. Disponível em: https://m3.ime.unicamp.br/recursos/1080. Acesso em: 14 ago. 2024.

O trabalho com o item **e** da tarefa **15** explora os benefícios ou malefícios do desenvolvimento do relógio para a sociedade. Por se tratar de uma resposta pessoal, é esperado que haja abordagens variadas. Por exemplo, alguns deles podem dizer que o desenvolvimento do relógio não trouxe benefícios, uma vez que vivemos sob a pressão do tempo, que nos faz andar mais rápido, dirigir mais rápido, além de atrapalhar nosso desempenho e aumentar o estresse crônico, entre outras intercorrências. Outros podem responder que o desenvolvimento do relógio permite que milhões de pessoas possam ir trabalhar em um horário específico, além de coordenar voos, trens e todo o tipo de transporte ao redor do mundo, por exemplo.

Avalie a conveniência de elaborar uma aula com um professor da área de **Ciências da Natureza e suas Tecnologias**, preferencialmente com o professor do componente curricular de **Física**. Aproveite a oportunidade para desenvolver previsões relativas ao movimento da Terra no espaço, destacando o imenso potencial da Ciência. Informe-os de que essas previsões contêm informações sobre o futuro próximo ou distante, possibilitando a reflexão voltada ao alcance dos conhecimentos científicos. Se possível, proponha aos estudantes que construam representações ou protótipos envolvendo a temática em questão.

Ao trabalhar com a seção **Exercícios e problemas**, é possível escolher e aplicar um problema sob a perspectiva da estratégia ***Think-pair-share***. Após os estudantes resolverem esse problema, peça-lhes que apresentem suas soluções para a turma.

Página 93

Na questão **1**, se necessário, oriente os estudantes a formar duplas e retomar os conteúdos abordados no capítulo, mencionando os que já conheciam e se houve algum em que tiveram dificuldades.

O trabalho com a questão **2** pode ser desenvolvido de diferentes maneiras: por meio de textos, desenhos e dinâmicas em grupos. Nesse momento, se necessário, proponha aos estudantes que elaborem questionamentos em relação aos erros mais comuns que identificaram durante o trabalho com os tópicos propostos. Alguns exemplos são: "Consigo definir o que é uma função trigonométrica?"; "Consigo resolver problemas envolvendo funções periódicas?"; "Tenho segurança para trabalhar com o gráfico de funções trigonométricas?"; "Consigo identificar a amplitude e o período de uma função trigonométrica?". Com base nas respostas, é esperado que eles identifiquem suas dificuldades e reflitam acerca da necessidade de retomar o que foi estudado.

As questões de **3** a **7** são de direta aplicação dos conteúdos estudados. Com elas, é esperado que os estudantes validem a reflexão proposta na questão **2**. Durante o desenvolvimento dessas questões, oriente-os a não consultar o material e a registrar suas dúvidas. Essas anotações auxiliarão no desenvolvimento da questão **8**.

Na síntese proposta na questão **8**, os estudantes podem usar diversas estratégias, como listas de conceitos, mapas conceituais e resumos textuais. Instigue-os a apresentar exemplos e usar imagens. Incentive-os a trabalhar com a criatividade nesse momento.

CAPÍTULO 3

Fórmulas de transformação, relações e equações trigonométricas

Nesse capítulo, são desenvolvidas as unidades temáticas da Matemática **Números** e **Álgebra**, possibilitando aos estudantes resolver e elaborar problemas envolvendo fenômenos periódicos reais e a comparação desses fenômenos por meio de funções trigonométricas e no plano cartesiano, utilizando procedimentos matemáticos para interpretar, analisar e construir argumentação, além de desenvolver o pensamento crítico acerca de fenômenos naturais.

Objetivos específicos

- Aplicar adequadamente fórmulas de transformação trigonométrica e de relações trigonométricas.
- Resolver situações-problema com base em conhecimentos trigonométricos.
- Resolver alguns tipos de equações trigonométricas.

Justificativa

Esse capítulo contempla as ideias relacionadas a transformações trigonométricas, relações fundamentais da Trigonometria e alguns tipos de equações trigonométricas. O objetivo

é esclarecer a importância de utilizar algumas transformações trigonométricas, além de conduzir os estudantes a resolver e elaborar problemas em contextos que envolvem fenômenos periódicos reais.

Página 96

Antes de trabalhar com o tópico **Fórmulas de transformação**, verifique a possibilidade de avaliar o conhecimento prévio dos estudantes acerca dos conteúdos explorados em capítulos anteriores. Para isso, proponha que resolvam problemas envolvendo os conceitos de seno, cosseno e tangente. Confira a seguir, uma sugestão de tarefa que possibilita fazer esse diagnóstico.

Sugestão de avaliação

Sabendo que $\cos x = -\frac{4}{5}$ e $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, determine o valor de $\operatorname{sen} 2x$.

Resolução e comentários

Sabemos que a relação $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$ é válida para todo número real x. Como $\cos x = -\frac{4}{5}$, temos:

$$\operatorname{sen}^2 x + \left(-\frac{4}{5}\right)^2 = 1 \Rightarrow \operatorname{sen}^2 x + \frac{16}{25} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{sen}^2 x = 1 - \frac{16}{25} \Rightarrow \operatorname{sen}^2 x = \frac{9}{25} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{sen} x = \pm\sqrt{\frac{9}{25}} \Rightarrow \operatorname{sen} x = \pm\frac{3}{5}$$

Como x pertence ao 2º quadrante, então $\operatorname{sen} x = \frac{3}{5}$.

Caso eles tenham dificuldades na resolução dessa tarefa, reúna-os em duplas para debater as dúvidas.

Considerando os aspectos relevantes das fórmulas de transformação, apresentaremos as demonstrações das fórmulas do cosseno, do seno e da tangente da soma e da diferença de dois arcos.

Seno da soma e da diferença

Inicialmente, sabemos que:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \beta\right) = \cos\frac{\pi}{2} \cdot \cos\beta - \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} \cdot \operatorname{sen}\beta = -\operatorname{sen}\beta$$

Assim:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\cos(\pi + \alpha) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -(\cos\pi \cdot \cos\alpha - \operatorname{sen}\pi \cdot \operatorname{sen}\alpha) = \cos\alpha$$

De acordo com as igualdades obtidas e usando a fórmula do cosseno da soma de dois arcos, temos:

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = -\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha + \beta\right) \Rightarrow \operatorname{sen}(\alpha + \beta) =$$

$$= -\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \cdot \cos\beta - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \cdot \operatorname{sen}\beta\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{sen}(\alpha + \beta) = -(-\operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\beta - \cos\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\beta + \operatorname{sen}\beta \cdot \cos\alpha$$

Assim, para calcular o **seno da soma de dois arcos**, temos a seguinte fórmula:

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\beta + \operatorname{sen}\beta \cdot \cos\alpha$$

No caso do seno da diferença de dois arcos, temos:

$$\operatorname{sen}(\alpha + (-\beta)) = \operatorname{sen}\alpha \cdot \cos(-\beta) + \cos\alpha \cdot \operatorname{sen}(-\beta) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\beta - \operatorname{sen}\beta \cdot \cos\alpha$$

Assim, para calcular o **seno da diferença de dois arcos**, temos a seguinte fórmula:

$$\operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\beta - \operatorname{sen}\beta \cdot \cos\alpha$$

Cosseno da soma e da diferença

Na figura, temos:

$OA = \cos(\alpha + \beta)$.

$OB' = \cos\beta$.

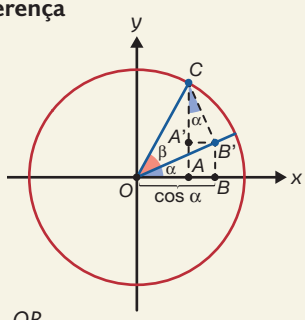
$B'C = \operatorname{sen}\beta$.

$AB = \operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta$,

pois $AB = A'B'$,

$\operatorname{sen}\alpha = \frac{A'B'}{B'C}$ e $B'C = \operatorname{sen}\beta$.

$OB = \cos\alpha \cdot \cos\beta$, pois $\cos\alpha = \frac{OB}{OB'}$ e $OB' = \cos\beta$.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Assim:

$$OA = OB - AB = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta$$

Logo:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta$$

Assim, para calcular o **cosseno da soma de dois arcos**, temos a seguinte fórmula:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta$$

No caso do cosseno da diferença de dois arcos, temos:

$\cos(\alpha + (-\beta)) = \cos\alpha \cdot \cos(-\beta) - \operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{sen}(-\beta) \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta$

Lembre-se de que $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$ e que $\operatorname{sen}(-\alpha) = -\operatorname{sen}\alpha$, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

Assim, para calcular o **cosseno da diferença de dois arcos**, temos a seguinte fórmula:

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta$$

Tangente da soma e da diferença

Utilizando a fórmula do seno da soma de dois arcos, do cosseno da soma de dois arcos e a relação fundamental, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$, para $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$, vamos deduzir a fórmula que permite calcular $\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$.

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{sen}(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\beta + \operatorname{sen}\beta \cdot \cos\alpha}{\cos\alpha \cdot \cos\beta - \operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta}$$

Dividindo o numerador e o denominador por $\cos\alpha \cdot \cos\beta$, temos:

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\dfrac{\operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\beta + \operatorname{sen}\beta \cdot \cos\alpha}{\cos\alpha \cdot \cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha \cdot \cos\beta - \operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha \cdot \cos\beta}} =$$

$$= \frac{\dfrac{\operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\beta}{\cos\alpha \cdot \cos\beta} + \dfrac{\operatorname{sen}\beta \cdot \cos\alpha}{\cos\alpha \cdot \cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha \cdot \cos\beta}{\cos\alpha \cdot \cos\beta} - \dfrac{\operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha \cdot \cos\beta}} = \frac{\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} + \dfrac{\operatorname{sen}\beta}{\cos\beta}}{1 - \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} \cdot \dfrac{\operatorname{sen}\beta}{\cos\beta}} =$$

$$= \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}$$

Assim, para calcular a **tangente da soma de dois arcos**, temos a seguinte fórmula:

$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}$, válida para $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $\beta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ e $\alpha + \beta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$.

No caso da tangente da diferença de dois arcos, temos:

$$\operatorname{tg}(\alpha + (-\beta)) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}(-\beta)}{1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}(-\beta)}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}$$

Note que:

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = \frac{\operatorname{sen}(-\alpha)}{\cos(-\alpha)} = \frac{-\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = -\operatorname{tg}\alpha$$

para $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$.

Assim, para calcular a **tangente da diferença de dois arcos**, temos a seguinte fórmula:

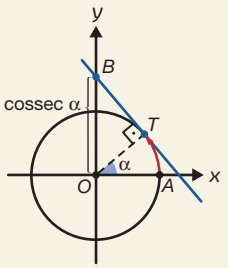
$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}$, válida para $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $\beta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ e $\alpha - \beta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$.

Página 99

No tópico **Relações trigonométricas**, ao trabalhar com as relações cossecante, secante e cotangente, mostre aos estudantes suas representações no ciclo trigonométrico.

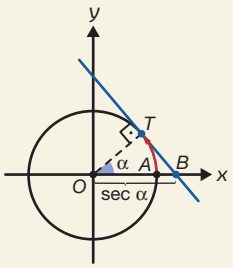
Considere no ciclo trigonométrico o arco $\overset{\frown}{AT}$ de medida α, em que $\alpha \neq k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$.

A cossecante é a ordenada de B, que é dada pela interseção do eixo dos senos e a reta que tangencia o ciclo em T. Verifique se os estudantes perceberam que a cossecante é positiva no 1º e 2º quadrantes e negativa no 3º e 4º quadrantes.

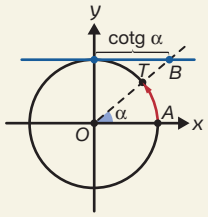


Considere no ciclo trigonométrico o arco $\overset{\frown}{AT}$ de medida α, em que $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$.

A secante é a abscissa de B, que é dada pela interseção do eixo dos cossenos e a reta que tangencia o ciclo em T. Verifique se os estudantes perceberam que a secante é positiva no 1º e 4º quadrantes e negativa no 2º e 3º quadrantes.



Considere no ciclo trigonométrico o arco $\overset{\frown}{AT}$ de medida α, em que $\alpha \neq k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$.



A cotangente é a abscissa de B, que é dada pela interseção da reta $\overleftrightarrow{OT}$ e a reta que tangencia o ciclo no ponto $(0, 1)$. Verifique se os estudantes perceberam que a cotangente é positiva no 1º e 3º quadrantes e negativa no 2º e 4º quadrantes.

Página 105

As tarefas da seção **Exercícios e problemas** possibilitam aos estudantes resolver e elaborar problemas em contextos que envolvem fenômenos periódicos reais. Além disso, permite que comparem a representação desses fenômenos por meio das funções trigonométricas e no plano cartesiano, contemplando a habilidade **EM13MAT306** e a **Competência específica de Matemática e suas Tecnologias 3** da BNCC.

Ao final desse tópico, verifique a conveniência de utilizar a estratégia ***Quick writing*** para avaliar o aprendizado dos estudantes. Em debate, fomente a discussão conduzindo-os a explicar a importância do estudo das fórmulas de transformação, relações e equações trigonométricas em situações do dia a dia.

Páginas 106 e 107

Desenvolvimento sustentável

O texto apresentado na seção **Cuidando da pressão arterial** possibilita trabalhar a questão de saúde e fomentar uma roda de conversa relacionada à pressão arterial. Pergunte-lhes se uma pessoa com pressão sanguínea de "15 por 10" pode ser considerada com pressão alta, baixa ou adequada. Espera-se que eles compreendam que o exemplo revela uma pressão arterial alta.

Ao trabalhar a importância dos cuidados com a pressão arterial, os estudantes desenvolverão o **Objetivo 3**, dos Objetivos de Desenvolvimento Sustentável, da ONU.

O assunto desenvolvido na seção favorece o trabalho com a habilidade **EM13MAT306** e a **Competência específica de Matemática e suas Tecnologias 3** da BNCC, ao propor a compreensão de fenômenos periódicos reais, como a pressão sanguínea do coração. Além disso, a temática proposta nessas páginas possibilita uma conexão com os temas contemporâneos transversais **Saúde** e **Educação alimentar e nutricional**, uma vez que expõe orientações a respeito de alimentação e nutrição para um desenvolvimento humano e saudável.

Verifique a oportunidade de elaborar uma aula com o professor do componente curricular de **Biologia**. Uma sugestão é solicitar aos estudantes que formem grupos e façam uma pesquisa acerca do funcionamento do coração e dos fatores que levam à alteração na pressão arterial. Por fim, solicite aos grupos que apresentem suas pesquisas.

Página 108

Trabalho e juventudes

Antes de iniciar a seção **O que faz um sismólogo?**, explore os conhecimentos prévios dos estudantes a respeito dessa profissão, perguntando-lhes se sabem como é o trabalho que esse profissional desempenha, setores em que pode atuar e o que é preciso fazer para se tornar sismólogo. Aproveite para fomentar a discussão perguntando se alguns deles têm interesse em seguir essa carreira e, em caso positivo, peça-lhes que expliquem o motivo.

Na atividade **2**, apresente informações sobre o trabalho realizado pelos sismólogos brasileiros e projetos desenvolvidos nos centros de pesquisa. Para isso, oriente os estudantes a acessar os seguintes *sites*.

- CENTRO de Sismologia da USP. Disponível em: https://moho.iag.usp.br/.
- OBSERVATÓRIO Sismológico. Disponível em: http://obsis.unb.br/portalsis/.
- REDE Sismográfica Brasileira. Disponível em: http://rsbr.on.br/index.html.

Acessos em: 14 ago. 2024.

ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Página 109

Na questão **1**, se necessário, oriente os estudantes a formar duplas e retomar os conteúdos abordados no capítulo, mencionando os que já conheciam e tiveram dificuldade em algum deles.

A questão **2** pode ser desenvolvida de diferentes maneiras: por meio de textos, dinâmicas em grupos etc. Se necessário, proponha aos estudantes que elaborem questionamentos em função dos erros mais comuns que eles identificaram durante o trabalho com os tópicos desse capítulo. Alguns exemplos são: "Consigo aplicar as fórmulas de transformação?"; "Tenho segurança para interpretar as relações trigonométricas?"; "Consigo resolver equações trigonométricas?". Com base nas respostas, espera-se que eles identifiquem suas dificuldades e reflitam acerca da necessidade de retomar o que foi estudado.

As questões de **3** a **11** são de direta aplicação dos conteúdos. Espera-se que os estudantes validem a reflexão proposta na questão **2**. Durante o desenvolvimento dessas questões, oriente-os a não consultar o material e a registrar suas dúvidas, pois esses registros auxiliarão no desenvolvimento da questão **12**.

Na síntese proposta na questão **12**, os estudantes podem usar diversas estratégias, como listas de conceitos, mapas conceituais e resumos textuais. Instigue-os a exemplificar e usar imagens.

CAPÍTULO 4

Ladrilhamento e área de figuras planas

Nesse capítulo, são desenvolvidas as seguintes unidades temáticas da Matemática: **Números e Álgebra**, **Geometria e Medidas**. Esses conteúdos estão presentes em exemplos e tarefas que instruem os estudantes no uso de diversos métodos para determinar áreas aproximadas de regiões com formatos mais complexos, como mapas geográficos e terrenos, que normalmente têm contornos não poligonais. Além disso, há ocorrências da inter-relação entre essas unidades temáticas ao generalizar padrões para determinar a área de polígonos.

Objetivos específicos

- Identificar os ladrilhamentos regulares do plano.
- Resolver problemas envolvendo ladrilhamento regular e semirregular no plano.
- Estudar o conceito de área em figuras geométricas planas.
- Deduzir expressões para o cálculo das áreas: do quadrado, do retângulo, do paralelogramo e do losango.
- Resolver situações-problema envolvendo áreas: de quadrados, de retângulos, de paralelogramos e de losangos.
- Resolver e representar situações-problema utilizando conceitos de figuras planas.
- Deduzir expressões para o cálculo das áreas: de triângulos, de trapézios e de polígonos regulares.
- Distinguir e resolver problemas que envolvam áreas: do círculo, do setor circular e da coroa circular.

Justificativa

Esse capítulo aborda conteúdos que tratam de ladrilhamento do plano utilizando polígonos regulares. O objetivo é levar os estudantes a refletir a respeito dos tipos ou composições de polígonos regulares que podem ser utilizados em ladrilhamentos. Além disso, trata da área de quadrados, retângulos, paralelogramos e losangos.

Ao longo do capítulo, os estudantes serão expostos a deduções de expressões para o cálculo de área e desafiados a realizar algumas demonstrações, como no caso da expressão de cálculo da área do losango. Assim, eles serão levados a aplicar as expressões deduzidas não só em contextos puramente matemáticos, mas em situações práticas em que a Geometria se revelar útil.

Conhecer com clareza o conceito de área, aplicar adequadamente expressões de cálculo e saber usar a criatividade geométrica para determinar áreas de figuras em vários contextos são competências fundamentais na educação matemática. Tais habilidades, se bem trabalhadas, aguçam a percepção geométrica e desenvolvem o raciocínio lógico dos estudantes, além de ser indispensáveis em inúmeras circunstâncias da vida prática.

Páginas 110 e 111

Nessas páginas, de maneira intuitiva, a ideia de área da coroa circular está relacionada às faixas musicais gravadas em discos de vinil. O texto apresenta subsídios para que os estudantes entendam que, quanto maior a duração da música, maior será a área da faixa, ou seja, da coroa circular.

Ao trabalhar com essas páginas, verifique a possibilidade de elaborar uma aula com um professor da área de **Linguagens e suas Tecnologias**, preferencialmente com o do componente curricular de **Arte**. Proponha aos estudantes que se organizem em grupos a fim de fazer uma pesquisa sobre as relações entre música e Matemática, destacando, por exemplo, as contribuições de Pitágoras para a música. Além disso, promova um debate voltado à diversidade de gêneros e estilos musicais presentes no Brasil.

Página 112

Para um bom desenvolvimento do estudo do tópico **Alguns conceitos necessários**, é importante que os estudantes tenham alguns conhecimentos acerca de polígonos, por exemplo, a medida dos ângulos internos de um polígono regular. Nesse caso, ao iniciar o trabalho, proponha alguns problemas envolvendo essa temática. A seguir, é apresentado um problema que possibilita esse diagnóstico.

Sugestão de avaliação

Sabendo que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180° e que de um vértice qualquer de um n-ágono regular partem $(n - 3)$ diagonais, determine a medida do ângulo interno de um:

a) pentágono regular.

b) hexágono regular.

c) n-ágono regular.

Resolução e comentários

a) A partir de um vértice qualquer, traçamos duas diagonais que decompõem o pentágono em três $(5 - 2)$ triângulos. Assim, a soma das medidas dos ângulos internos do pentágono é:

$$3 \cdot 180° = 540°$$

Como o pentágono regular tem cinco ângulos congruentes, então a medida x de cada ângulo interno é:

$$x = \frac{540°}{5} = 108°$$

b) A partir de um vértice qualquer, traçamos três diagonais que decompõem o hexágono em quatro $(6 - 2)$

triângulos. Assim, a soma das medidas dos ângulos internos do hexágono é:

$$4 \cdot 180° = 720°$$

Como o hexágono regular tem seis ângulos internos congruentes, então a medida x de cada ângulo interno é:

$$x = \frac{720°}{6} = 120°$$

c) A partir de um vértice qualquer, traçamos $(n - 3)$ diagonais que decompõem o n-ágono em $(n - 2)$ triângulos. Assim, a soma das medidas dos ângulos internos do n-ágono é:

$$(n - 2) \cdot 180°$$

Como o n-ágono regular tem n ângulos internos congruentes, então a medida x de cada ângulo interno é:

$$x = \frac{(n - 2) \cdot 180°}{n}$$

Caso os estudantes tenham dificuldades, oriente-os a formar duplas para sanar as dúvidas.

Nesse tópico, os estudantes serão desafiados a pensar sobre os tipos ou composições de polígonos que podem ser utilizados em ladrilhamentos, identificando a necessidade ou não de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas, conforme orienta a habilidade **EM13MAT505** e as **Competências específicas de Matemática e suas Tecnologias 3** e **5** da BNCC.

Página 113

Caso julgue conveniente, leve os estudantes ao laboratório de informática da escola para que eles façam as investigações propostas nessa página com o auxílio de um *software* de Geometria dinâmica. A seguir, é apresentado um passo a passo que possibilita a construção de um ladrilhamento regular no plano utilizando triângulos equiláteros.

A) Usando a ferramenta **Segmento com Comprimento Fixo**, construa um segmento $\overline{AB}$ com, por exemplo, 3 cm de comprimento.

B) Selecione a ferramenta **Polígono Regular**, clique sobre os pontos A e B, nessa ordem. Na janela **Polígono Regular**, digite a quantidade de lados do polígono – nesse caso, 3.

C) Com a ferramenta **Polígono Regular**, clique sobre os pontos C e B, nessa ordem. Em seguida, na janela **Polígono Regular**, digite a quantidade de lados do polígono – nesse caso, 3.

D) Selecione a ferramenta **Polígono Regular**, clique sobre os pontos A e C, nessa ordem. Em seguida, na janela **Polígono Regular**, digite a quantidade de lados do polígono – nesse caso, 3.

E) Novamente com a ferramenta **Polígono Regular**, clique sobre os pontos B e A, nessa ordem. Em seguida, na janela **Polígono Regular**, digite a quantidade de lados do polígono – nesse caso, 3.

F) De maneira semelhante à apresentada nos passos anteriores, construa triângulos equiláteros ao redor de cada um dos vértices dos triângulos obtidos.

G) Repita, sucessivamente, o passo **F**.

Sugira aos estudantes que, utilizando estratégias análogas à apresentada, façam as investigações envolvendo os outros polígonos regulares.

Página 114

No trabalho com a seção **Resolvendo por etapas**, é possível recorrer à estratégia ***Think-pair-share***. Oriente os estudantes a refletir individualmente sobre os tipos ou composições de polígonos regulares que podem ser utilizados em ladrilhamentos, registrando possíveis dúvidas. Em seguida, peça-lhes que compartilhem suas reflexões com um colega, discutindo as percepções e registrando novas ideias. Após a discussão em duplas, promova uma apresentação das conclusões para a turma, permitindo uma troca de ideias mais ampla.

Página 117

Anteriormente, apresentamos um passo a passo que permite a construção de um ladrilhamento regular com o auxílio de um *software* de Geometria dinâmica. Se julgar oportuno, leve os estudantes ao laboratório de informática para que, de maneira semelhante à sugerida, façam as investigações propostas nessa página.

Página 118

Exponha aos estudantes a simplificação da equação

$$\frac{(n_1 - 2) \cdot 180°}{n_1} + \frac{(n_2 - 2) \cdot 180°}{n_2} + \frac{(n_3 - 2) \cdot 180°}{n_3} = 360°,$$

apresentada a seguir.

$$\frac{(n_1 - 2) \cdot 180°}{n_1} + \frac{(n_2 - 2) \cdot 180°}{n_2} + \frac{(n_3 - 2) \cdot 180°}{n_3} = 360°$$

$$180° \cdot \left[\frac{(n_1 - 2)}{n_1} + \frac{(n_2 - 2)}{n_2} + \frac{(n_3 - 2)}{n_3}\right] = 360°$$

$$\frac{n_2 \cdot n_3(n_1 - 2) + n_1 \cdot n_3(n_2 - 2) + n_1 \cdot n_2(n_3 - 2)}{n_1 \cdot n_2 \cdot n_3} = \frac{360°}{180°}$$

$$n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \left(\frac{1 - \frac{2}{n_1} + 1 - \frac{2}{n_2} + 1 - \frac{2}{n_3}}{n_1 \cdot n_2 \cdot n_3}\right) = 2$$

$$1 - \frac{2}{n_1} + 1 - \frac{2}{n_2} + 1 - \frac{2}{n_3} = 2$$

$$3 - 2 \cdot \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3}\right) = 2$$

$$\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} = \frac{2 - 3}{-2}$$

$$\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} = \frac{1}{2}$$

Página 123

A questão **I** aborda a habilidade **EM13MAT315**, à medida que favorece a organização das ideias para a construção de um algoritmo e sua ordenação em um fluxograma.

Página 125

Nessa página, os estudantes são levados a deduzir a expressão de cálculo da área de um losango, contemplando assim aspectos da habilidade **EM13MAT307**.

Páginas 127 a 129

As tarefas propostas na seção **Exercícios e problemas** visam possibilitar aos estudantes o emprego de diferentes métodos para a obtenção da área de uma região e a aplicação das expressões de cálculos deduzidas anteriormente em situações reais, contemplando assim a habilidade **EM13MAT307**

e aspectos da **Competência específica de Matemática e suas Tecnologias 3** da BNCC.

A tarefa **15** aborda o desmatamento na Amazônia Legal, promovendo a conscientização sobre a importância da preservação ambiental e a sustentabilidade. Oriente-os a ler as páginas **8** e **9** do **Livro do Estudante**, que explica os **Objetivos da Agenda 2030**, e assim retomem o **Objetivo 15** trabalhado nessas páginas.

Ao relacionar a área desmatada com a quantidade de campos de futebol, os estudantes conseguem visualizar a magnitude do desmatamento, facilitando a compreensão do impacto ambiental. Encoraje-os a refletir sobre as consequências do desmatamento e a importância de medidas para a proteção e recuperação dos ecossistemas terrestres.

Ao fim do trabalho com esse tópico, verifique a conveniência de utilizar a estratégia ***Quick writing*** para avaliar o aprendizado dos estudantes, fazendo-os refletir sobre os conteúdos trabalhados. Durante a roda de conversa, solicite-lhes, se possível, que comentem quais métodos consideram mais interessantes e inventivos para calcular a área de figuras irregulares e se já conheciam as deduções das expressões apresentadas para o cálculo da área dos quadriláteros.

Páginas 130 e 131

O contexto abordado nessas páginas possibilita o desenvolvimento do tema contemporâneo transversal **Processo de envelhecimento, respeito e valorização do idoso**. Com o objetivo de formar cidadãos conscientes capazes de viver em sociedade, converse com os estudantes sobre a importância de respeitar e valorizar a população idosa, combatendo assim atitudes de etarismo.

Aproveite a conversa para destacar a importância de exercitar a empatia, o diálogo e a cooperação, fazendo-se respeitar e promovendo o respeito às pessoas idosas e a seus direitos, com acolhimento e valorização, contribuindo para o desenvolvimento da **Competência geral 9** da BNCC.

Desenvolvimento sustentável

O texto apresentado na seção **As pessoas idosas e o direito de ir e vir** permite uma reflexão sobre os direitos das pessoas idosas abordados na Lei Federal nº 10.741, de 1º de outubro de 2003.

Antes de iniciar o trabalho com as atividades, pergunte aos estudantes em que lugares eles já viram vagas de estacionamento destinadas às pessoas idosas, se em espaços públicos ou privados, e se sabiam se essas vagas estavam de fato ocupadas por pessoas dessa faixa etária.

Na tarefa **2**, os estudantes são levados a aplicar a fórmula da área do retângulo, deduzida anteriormente, para calcular a área de vagas destinadas às pessoas idosas contemplando aspectos da habilidade **EM13MAT307** e da **Competência específica de Matemática e suas Tecnologias 3** da BNCC.

A questão **4** tem o objetivo de relacionar o conteúdo ao **Objetivo 11** da Agenda 2030, sendo esperado que os estudantes compreendam que respeitar os direitos das pessoas idosas sobretudo o de garantir que haja vagas de estacionamento reservada a essas pessoas, bem como assegurar que esses lugares sejam ocupados somente por elas, é uma maneira de contribuir para a inclusão segura das pessoas idosas em diversas situações do dia a dia, além de propiciar o combate ao etarismo.

Página 133

Na questão intervenção **O** da página **133**, os estudantes são desafiados a escrever um algoritmo que possibilite calcular a área de um triângulo equilátero, dado o comprimento de sua altura, e organizá-lo em um fluxograma, contemplando a habilidade **EM13MAT315** da BNCC.

Na questão **P**, os estudantes são desafiados a mostrar que a área A de um trapézio de base maior B, base menor b e altura h é igual a $A = \frac{(B + b) \cdot h}{2}$, contemplando aspectos da habilidade **EM13MAT307** da BNCC.

Página 136

As tarefas propostas na seção **Exercícios e problemas** visam possibilitar aos estudantes o emprego de diferentes métodos para a obtenção da área de uma região e a aplicação das expressões de cálculos deduzidas anteriormente em situações reais, o que contempla a habilidade **EM13MAT307** da BNCC.

Páginas 139 e 140

Aproveite a tarefa **35** para desenvolver um trabalho com Etnomatemática. Verifique se os estudantes percebem que o cálculo de área de figuras planas abordado na escola nem sempre é o mesmo que o utilizado pelos camponeses. Diga-lhes que o cálculo utilizado para a determinação de áreas pode variar de acordo com as circunstâncias socioculturais de cada civilização, embora todos esses métodos devam concordar, ao menos aproximadamente, no resultado obtido, considerando eventuais conversões de medidas.

Para complementar as informações do texto, diga aos estudantes que há medidas agrárias não padronizadas. O alqueire, utilizado na maioria das regiões do Brasil para determinar áreas rurais, é um exemplo, pois o alqueire paulista tem 24 200 m^2, enquanto o alqueire mineiro tem o dobro, 48 400 m^2.

A tarefa **35** trata dos diferentes métodos utilizados para determinar a área de certa região. Assim, é esperado que os estudantes mobilizem conceitos e estratégias matemáticas, fazendo uso de diferentes tipos de representações, principalmente a geométrica, na determinação dos resultados do problema proposto. Com isso, contemplam-se aspectos das **Competências específicas de Matemática e suas Tecnologias 3** e **4** da BNCC.

A tarefa **38** contempla a habilidade **EM13MAT315**, pois propõe que os estudantes criem um algoritmo para determinar a área de um triângulo equilátero, dado seu perímetro, e depois organizem um fluxograma com base nesse algoritmo.

Página 146

Ao desenvolver o trabalho com a seção **Acessando tecnologias**, os estudantes podem, por meio de tecnologias digitais, se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos e elaborar e resolver problemas, exercendo protagonismo na vida pessoal e coletiva, o que desenvolve a **Competência geral 5** da BNCC.

A tarefa **4** desafia os estudantes a utilizar os conceitos iniciais de uma linguagem de programação na implementação de um algoritmo que possibilita determinar a área de um polígono regular qualquer, dado o comprimento de seu apótema, a quantidade de lados e o comprimento de cada um deles, contemplando assim a habilidade **EM13MAT405** da BNCC.

Página 148

A tarefa **51** trata do processo de produção de peças em cerâmica. Esse contexto permite estabelecer conexão com o tema contemporâneo transversal **Educação para valorização do multiculturalismo nas matrizes históricas e culturais brasileiras**, levando os estudantes a perceber a pluralidade cultural que ajuda a formar a identidade brasileira. Se julgar conveniente, oriente-os a fazer uma pesquisa sobre a cerâmica marajoara, feita inicialmente pelos povos indígenas que habitavam a Ilha de Marajó. Informe-os de que essa é a mais antiga entre as artes em cerâmica do Brasil.

Página 149

Ao longo do tópico **Área do círculo**, além da fórmula da área do círculo, serão apresentadas aos estudantes as fórmulas da área de um setor circular e de uma coroa circular. Porém, é importante que eles percebam a possibilidade de resolver problemas relacionados à área dessas figuras sem o uso de fórmulas específicas, utilizando, para tanto, a fórmula da área do círculo.

Nesse tópico, os estudantes são levados a utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos que abordam círculos e circunferências para interpretar, construir modelos e resolver problemas envolvendo o cálculo de área em diferentes contextos, contemplando assim a **Competência específica de Matemática e suas Tecnologias 3** da BNCC. Além disso, conforme sugere a habilidade **EM13MAT307**, eles serão desafiados a utilizar diferentes métodos para a obtenção de área de regiões e deduzir expressões de cálculo para aplicá-las em situações reais.

Página 150

Depois de apresentado o conteúdo do tópico **Área da coroa circular** e de avaliar os estudantes quanto à compreensão dessas informações, retome o assunto exposto nas páginas **110** e **111**, levando um disco de vinil para os estudantes analisarem. Nesse momento, avalie a conveniência de propor que eles se organizem em duplas e desenhem uma réplica do disco com faixas de mesma área. Essa tarefa pode ajudá-los a perceber que, quanto mais afastada do centro a faixa estiver, mais estreita ela será, pois $R - r$ será cada vez menor, considerando que R e r indicam os comprimentos dos raios das circunferências maior e menor, respectivamente.

Ao trabalhar com a questão **R**, os estudantes têm a oportunidade de escrever um algoritmo que possibilita calcular a área da coroa circular, dado o comprimento dos raios das circunferências que a determinam, desenvolvendo dessa maneira a habilidade **EM13MAT315** da BNCC.

Página 152

Trabalho e juventudes

No trabalho com a seção **Qual é a função de um pedreiro?**, promova um debate com os estudantes a respeito desse ofício. Peça a eles que relatem o que sabem sobre a profissão e o que conhecem das atividades e das ferramentas que o pedreiro utiliza e comentem o que pensam a respeito da importância da profissão para a construção civil e a sociedade. Na conversa, pergunte se alguma pessoa do convívio deles trabalha como pedreiro e se gostariam de exercer a profissão, justificando os motivos.

Aproveite a oportunidade e chame a atenção dos estudantes para o fato de a profissão de pedreiro ser exercida majoritariamente por homens em razão, principalmente, da força física exigida para o desempenho das atividades do trabalho. Porém, comente que nos últimos anos a quantidade de mulheres atuando nesse ramo apresentou um crescimento significativo.

Para a realização da atividade **2**, combine previamente o dia da entrevista com os estudantes e o profissional que será entrevistado. Solicite auxílio da diretoria e da coordenação da escola a fim de receber esse profissional ou se será necessário entrar em contato remotamente. O entrevistado pode ser, por exemplo, algum familiar dos estudantes ou do corpo docente. Oriente a turma para a elaboração do roteiro, auxiliando os estudantes a planejar o que vai ser questionado por meio de perguntas, e como vão se organizar no dia da conversa. Caso considere interessante, solicite ao profissional entrevistado a permissão para gravar a entrevista em áudio ou vídeo, a fim de produzir um documento com as principais informações obtidas.

Página 157

Na questão **1**, se necessário, oriente os estudantes a formar duplas e retomar os conteúdos abordados no capítulo, mencionando os que já conheciam e se houve algum em que tiveram dificuldades.

O trabalho com a questão **2** pode ser desenvolvido de diferentes maneiras: por meio de desenhos, textos ou dinâmicas em grupo. Nesse momento, se necessário, proponha aos estudantes que elaborem questionamentos em função dos erros mais comuns que identificaram durante o trabalho com os tópicos propostos. Alguns exemplos são: "Reconheço ladrilhamentos regulares do plano?"; "Tenho segurança para determinar a área de quadrados, retângulos, paralelogramos e losangos?"; "Consigo resolver problemas que envolvam área do círculo, do setor circular e da coroa circular?". Por meio das respostas, é esperado que eles identifiquem suas dificuldades e reflitam acerca da necessidade de retomar o que foi estudado.

As questões de **3** a **9** são de direta aplicação dos conteúdos estudados. Com elas, é esperado que os estudantes validem a reflexão proposta na questão **2**. Durante o desenvolvimento dessas questões, oriente-os a não consultar o material e a registrar suas dúvidas, pois esses registros auxiliarão no desenvolvimento da questão **10**.

Na síntese proposta na questão **10**, os estudantes podem usar diversas estratégias, como listas de conceitos, mapas conceituais e resumos textuais. Instigue-os a dar exemplos e, se julgar conveniente, proponha o uso de imagens, explorando a criatividade deles nesse momento.

CAPÍTULO 5 Matrizes, determinante e sistemas lineares

Nesse capítulo, ao abordar conteúdos de matrizes relacionados a sistemas lineares e representá-los inicialmente por meio de uma tabela, são desenvolvidas as seguintes unidades temáticas de Matemática: **Números e Álgebra**, **Probabilidade e Estatística**. São destacadas as possíveis classificações de um sistema linear de acordo com as soluções. Além disso, os tópicos descrevem como resolver esses sistemas por meio de escalonamento.

Objetivos específicos

- Resolver problemas envolvendo matrizes e determinantes.
- Resolver e elaborar problema envolvendo operações com matrizes.
- Determinar a transposta e a inversa de uma matriz.
- Resolver situações-problema usando matriz inversa ou determinantes.
- Compreender o conceito de equações lineares e sistemas lineares.
- Resolver problemas usando o conceito de sistema linear.
- Utilizar o conceito de matriz na resolução de sistemas lineares.
- Resolver um sistema linear pelo método de escalonamento.
- Resolver possíveis problemas do cotidiano utilizando o conceito de matriz e o de sistema linear.

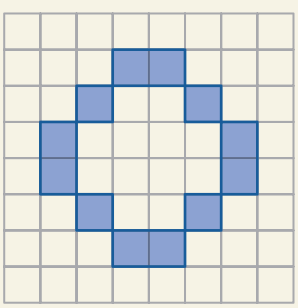
Justificativa

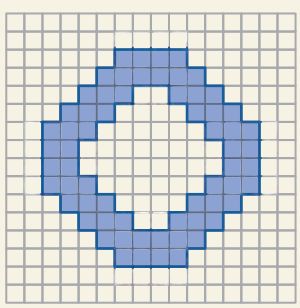
Nesse capítulo, é apresentado o conceito de matriz, a princípio de modo intuitivo, por meio de um exemplo prático, comparando-a a uma tabela, para gradativamente proceder a uma conceituação mais formal. Ao longo da exposição, as nomenclaturas e as notações tradicionais para matrizes e seus elementos são introduzidas uma a uma, com explicações e exemplos. Em seguida, temos as classificações, especificando o que são matrizes quadradas, matrizes diagonais, matrizes identidades e os demais casos especiais de matrizes mais recorrentes e de mais interesse nos estudos em geral. Além disso, é abordada a igualdade entre matrizes, bem como a operação de transposição de matrizes com a ideia de matriz simétrica. De modo geral, busca-se relacionar o estudo de matrizes com a resolução de problemas das mais variadas áreas do conhecimento, inclusive da própria Matemática.

Também são abordados os sistemas de equações lineares, apresentando as definições associadas, a identificação de soluções e sua aplicação na modelagem e resolução de situações-problema. Dessa forma, os estudantes são levados a construir expressões algébricas e a efetuar cálculos que permitam relacionar variáveis entre si, por meio dos sistemas lineares, em diferentes contextos.

Páginas 158 e 159

As páginas de abertura tratam da resolução de imagens em telas de dispositivos eletrônicos. Considerando como temos nos acostumado aos avanços tecnológicos e à popularização da tecnologia digital nos últimos anos, é explicado o que são os *pixels*, que compõem uma imagem nesses dispositivos. Antes de iniciar o trabalho com essas páginas, mostre aos estudantes as duas figuras a seguir, a fim de que o texto se torne mais significativo.





ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Agora, faça as seguintes perguntas à turma: "Quais semelhanças e diferenças podem ser identificadas nessas figuras?"; "O que vocês acham que essas figuras representam?".

Depois, diga aos estudantes que é semelhante a essa maneira que as imagens digitais são formadas, e cada "quadradinho" representa um *pixel*. As imagens têm melhor ou pior definição dependendo da quantidade de *pixels*.

O conteúdo abordado na abertura também permite estabelecer conexões com o tema contemporâneo transversal **Ciência e tecnologia**, trabalhando com termos técnicos frequentemente utilizados no cotidiano moderno da humanidade. Além disso, identificar a relação entre imagens digitais e matrizes proporciona um conhecimento extra sobre o funcionamento das tecnologias contemporâneas, despertando a percepção quanto às evoluções de sistemas de linguagem e de codificação na implementação de recursos em dispositivos eletrônicos.

A utilização da Matemática como estratégia para a interpretação de situações tecnológicas vai ao encontro da **Competência específica de Matemática e suas Tecnologias 1** da BNCC.

Página 164

Ao mostrar aos estudantes o que é igualdade de matrizes, explique-lhes que a ordem das matrizes iguais deve ser a mesma. Assim, por exemplo, tem-se:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Páginas 166 a 168

Ao realizar a tarefa **3**, verifique se os estudantes percebem que a quantidade de produções brasileiras ainda é inferior à quantidade de produções estrangeiras nos gêneros citados. Esse contexto permite uma reflexão crítica sobre os motivos que contribuem para esse cenário e, além disso, oferece uma boa oportunidade para explorar a perspectiva decolonial. Aproveite esse momento para compartilhar experiências e opiniões sobre filmes nacionais a que alguns deles tenham assistido, questionando narrativas dominantes e resistindo a preconceitos. Oriente-os a expandir horizontes e, por meio de conselhos motivadores, incentive o interesse por produções locais, reconhecendo a importância delas para a construção de nossa identidade cultural.

No item **e** da tarefa **15**, caso os estudantes não compreendam o motivo de os elementos da diagonal principal serem iguais a zero, explique-lhes que esses elementos, em que $i = j$, correspondem ao percurso de uma cidade até ela mesma.

Ao fim do trabalho com a seção **Exercícios e problemas**, verifique a possibilidade de utilizar a estratégia ***Quick writing*** para avaliar o aprendizado dos estudantes. Assim, oriente-os a refletir sobre as dificuldades que eventualmente tiveram, como determinar ordem de matrizes ou a posição de elementos ou, ainda, compreender alguma classificação ou operação que não tenha ficado totalmente clara. Proponha a eles que pensem em outras situações (da Ciência, da Tecnologia, do mundo profissional ou mesmo de suas rotinas) em que seja possível perceber que matrizes são indispensáveis ou que pelo menos podem ser úteis na tarefa desenvolvida, seja para planejamento, seja em nível operacional. No final da conversa, solicite aos estudantes que registrem suas conclusões a respeito de todo o tópico.

Página 169

Para mais detalhes e descrição de outras conquistas femininas, acesse o *site* disponível em: https://nossacausa.com/conquistas-do-feminismo-no-brasil/. Acesso em: 16 ago. 2024.

Página 170

Antes de responder à questão **B** da página **170**, peça aos estudantes que escrevam duas matrizes de mesma ordem, A e B, e calculem $A - B$ e $B - A$, comparando os resultados. Verifique se eles percebem que as matrizes resultantes são opostas. Se tiverem alguma dificuldade, peça a eles que escrevam outras duas matrizes e repitam os procedimentos a fim de constatarem essa regularidade. Complemente a questão propondo a seguinte pergunta: "Quando essa igualdade é verdadeira?". Espera-se que a resposta seja quando $A = B$. Esse tipo de tarefa desenvolve a capacidade de investigação e motiva a formulação de hipóteses.

Página 172

Com relação às propriedades da soma de matrizes exploradas na tarefa **26**, verifique a possibilidade de apresentá-las aos estudantes, conforme segue ao final dos comentários específicos deste **Suplemento para o professor**. Esse tipo de tarefa promove a compreensão de conjecturas por meio de relações e propriedades.

Páginas 175 e 176

O contexto da atividade resolvida **R9** oferece uma oportunidade para conversar com os estudantes sobre o fenômeno de modernização das relações de trabalho, advindo do uso da tecnologia e associado à autonomia do prestador de serviço. Para ampliar o conhecimento sobre esse assunto, proponha aos estudantes que pesquisem diferenças e semelhanças entre os prestadores de serviço autônomos e os assalariados com vínculos empregatícios.

A fim de verificar se os estudantes compreenderam as estratégias apresentadas nas tarefas resolvidas dessas páginas, proponha-lhes que resolvam a tarefa a seguir.

Sugestão de avaliação

Considere as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} -2x & 1 \\ x-1 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -x & 0 \\ x+3 & 4 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} -2x & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Calcule o valor do número real x tal que $A \cdot B = 2 \cdot C$.

Resoluções e comentários

Inicialmente, vamos resolver $A \cdot B$ e, depois, $2 \cdot C$.

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} (-2x)\cdot(-x) + 1\cdot(x+3) & (-2x)\cdot 0 + 1\cdot 4 \\ (x-1)\cdot(-x) + 0\cdot(x+3) & (x-1)\cdot 0 + 0\cdot 4 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2x^2 + x + 3 & 4 \\ -x^2 + x & 0 \end{bmatrix}$$

$$2 \cdot C = \begin{bmatrix} -4x & 4 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Em seguida, escrevemos a igualdade e comparamos os elementos de mesma posição.

$$\begin{bmatrix} 2x^2 + x + 3 & 4 \\ -x^2 + x & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4x & 4 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Na sequência, obtemos as equações.

$2x^2 + x + 3 = -4x$ e $-x^2 + x = -2$

Resolvendo a primeira equação, temos:

$2x^2 + x + 3 = -4x \Rightarrow 2x^2 + 5x + 3 = 0$

Logo:

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3}}{2 \cdot 2} = \frac{-5 \pm 1}{4}$$

$$x_1 = \frac{-4}{4} = -1$$

$$x_2 = \frac{-6}{4} = -1{,}5$$

Resolvendo a segunda equação, temos:

$-x^2 + x = -2 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0$

Logo:

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2}$$

$$x_1 = \frac{4}{2} = 2$$

$$x_2 = \frac{-2}{2} = -1$$

Portanto, $x = -1$ é o único valor que verifica a igualdade.

Página 177

Tarefa extra

Após o trabalho com a tarefa **34**, proponha aos estudantes a demonstração das propriedades citadas para uma matriz quadrada genérica de ordem 2. Para isso, solicite a eles que desenvolvam cada um dos lados da igualdade e comparem os resultados obtidos, conforme o exemplo a seguir.

$(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$

$$(A \cdot B)^t = \begin{bmatrix} a_{11}\cdot b_{11} + a_{12}\cdot b_{21} & a_{11}\cdot b_{12} + a_{12}\cdot b_{22} \\ a_{21}\cdot b_{11} + a_{22}\cdot b_{21} & a_{21}\cdot b_{12} + a_{22}\cdot b_{22} \end{bmatrix}^t =$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}\cdot b_{11} + a_{12}\cdot b_{21} & a_{21}\cdot b_{11} + a_{22}\cdot b_{21} \\ a_{11}\cdot b_{12} + a_{12}\cdot b_{22} & a_{21}\cdot b_{12} + a_{22}\cdot b_{22} \end{bmatrix}$$

$$(B^t \cdot A^t) = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{21} \\ b_{12} & b_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} b_{11}\cdot a_{11} + b_{21}\cdot a_{12} & b_{11}\cdot a_{21} + b_{21}\cdot a_{22} \\ b_{12}\cdot a_{11} + b_{22}\cdot a_{12} & b_{12}\cdot a_{21} + b_{22}\cdot a_{22} \end{bmatrix}$$

Página 178

Ao trabalhar com os estudantes o boxe **Observação**, apresente o *software* Calc e comente que essa é uma planilha eletrônica do pacote LibreOffice, versão gratuita de aplicativos que inclui, além da planilha, editores de textos, apresentações, desenhos e banco de dados. Para fazer o *download* e instalá-lo, basta acessar o *site*. Disponível em: https://pt-br.libreoffice.org/baixe-ja/libreoffice-novo/. Acesso em: 16 ago. 2024.

Página 179

Ao abordar a criptografia, na tarefa **42**, os estudantes podem fazer uso de diferentes linguagens, bem como de conhecimentos da linguagem matemática, para criar, expressar

e partilhar informações e ideias em diferentes contextos, de modo a promover o entendimento mútuo, conforme sugere a **Competência geral 4** da BNCC.

Para desenvolver o item **e** da tarefa **42**, organize a turma em grupos com quatro estudantes e oriente-os para que dois deles sejam responsáveis por definir a matriz-chave e codificar uma mensagem, enquanto os outros dois deverão decifrar a versão codificada. Em seguida, proponha que troquem de função.

Páginas 180 e 181

Educação Midiática

O texto apresentado na seção **Criptografia e segurança digital** permite fomentar a importância da criptografia para a salvaguarda de arquivos, informações e dados pessoais na internet, bem como refletir acerca de hábitos e práticas que colaboram para a segurança digital.

Em relação aos ataques virtuais, diga aos estudantes que entre 2022 e 2023 aumentou cerca de 143% a quantidade de vítimas de *ransomware* pelo mundo. Esclareça que, além desse, vários outros tipos de crimes virtuais acontecem frequentemente, como golpes do boleto ou Pix. No Brasil, por exemplo, houve um aumento de 38% dos ataques nos três primeiros meses de 2024. Explique que, por conta do aumento considerável de crimes virtuais nos últimos anos, é importante o papel da segurança digital e da adoção de boas práticas de uso na internet. O conjunto dessas medidas dificulta o acesso de cibercriminosos ao banco de dados de empresas, instituições financeiras e órgãos governamentais, bem como aos dados de computadores e *smartphones* de uso pessoal.

Páginas 184 e 185

Desenvolvimento sustentável

Ao trabalhar com a seção **Menos sódio, mais saúde**, pergunte aos estudantes se têm o hábito de frequentar feiras livres e se eles e seus familiares consomem produtos naturais comercializados nesses lugares. Essas reflexões oportunizam abordar o **Objetivo de Desenvolvimento Sustentável 2**, especificamente a meta voltada para a questão do acesso a alimentos seguros e nutritivos.

Para contribuir com essa reflexão, verifique a possibilidade de mostrar aos estudantes o vídeo "Dúvidas sobre o sódio", do canal **Drauzio Varella**, em que o médico explica os efeitos do excesso de sódio em nosso organismo, a quantidade recomendada, além de dicas para temperar os alimentos que consumimos no dia a dia sem exagerar na quantidade de sal.

O contexto dessas páginas permite a realização de um trabalho articulado com a área de **Ciências da Natureza e suas Tecnologias**, preferencialmente com os professores dos componentes curriculares de **Química** e **Biologia**. Assim, pode ser realizada uma tarefa com o intuito de abordar a quantidade de sódio presente em diferentes tipos de alimento, discutindo os efeitos colaterais que podem ser causados pelo consumo excessivo.

O assunto dessa seção possibilita relacionar as matrizes com o tema contemporâneo transversal **Saúde**, contribuindo tanto para o estudo de aplicações práticas dos conceitos matemáticos quanto para incentivar reflexões a respeito da importância de adotar hábitos saudáveis. A proposta também pode motivar o estudo de uma situação-problema, com base em conceitos teóricos presentes na atualidade e cuja solução pode gerar implicações no cotidiano das pessoas. Desse modo, aborda-se a **Competência específica de Ciências da Natureza e suas Tecnologias 3** da BNCC.

Na atividade **4**, é possível estabelecer uma relação com o tema contemporâneo transversal **Educação alimentar e nutricional**, mediante reflexões a respeito da importância de seguir uma alimentação balanceada para a manutenção da saúde, priorizando frutas, verduras e legumes em detrimento de produtos industrializados.

Página 186

Trabalho e juventudes

Para iniciar o estudo da seção **O que faz um criptógrafo?**, investigue o conhecimento prévio dos estudantes questionando-os sobre a importância da segurança na troca de informações digitais. Pergunte-lhes se há uma preocupação por parte deles na proteção de seus dados pessoais ao fazer uma compra *on-line* ou durante o preenchimento de um cadastro em *sites* de redes sociais, por exemplo.

Complemente os comentários sobre a profissão de criptógrafo explicando que a experiência prática nesse trabalho é altamente valorizada pelos empregadores, podendo envolver atividades autônomas e conhecimentos de tecnologia relacionados ao setor, não necessariamente com vínculo empregatício anterior.

Na atividade **2**, reforce que os criptógrafos são os responsáveis por criar chaves originais que possibilitam codificar e decodificar textos e dados, mas, por outro lado, temos os criptoanalistas, profissionais que analisam informações criptografadas e buscam decifrá-las mesmo sem ter acesso à chave original de decodificação.

Explique aos estudantes que o matemático Alan Turing teve papel importante no desenvolvimento de técnicas de decodificação de informações durante a Segunda Guerra Mundial. Se considerar oportuno, organize com o professor do componente curricular de **História** um momento de conversa para que os estudantes conheçam um pouco mais da participação de Turing no conflito.

Página 189

Após introduzir os conteúdos dessa página, demonstre na lousa, passo a passo, os teoremas de Jacobi e de Binet, conforme segue ao final dos comentários específicos deste **Suplemento para o professor**.

Página 190

Ao longo do tópico **Introdução aos sistemas lineares**, diversos problemas são propostos aos estudantes a fim de que os interpretem e os representem por meio de sistemas lineares, que possibilitem a criação de modelos matemáticos

cujas soluções são obtidas com a resolução dos sistemas lineares segundo o contexto em estudo, abordando a **Competência específica de Matemática e suas Tecnologias 3** e a habilidade **EM13MAT301** da BNCC. Assim, os estudantes são levados a resolver problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento que envolvem equações lineares simultâneas.

Páginas 195 a 197

Verifique se os estudantes percebem que há soluções reais para cada uma das equações apresentadas na tarefa **63**. Escreva na lousa algumas delas, com auxílio deles. Leve para a sala de aula malhas quadriculadas e peça-lhes que representem as equações lineares e as respectivas soluções. A malha quadriculada também será útil durante a resolução de outras tarefas, no decorrer desse tópico.

As tarefas **65**, **66**, **68**, **70** e **71** permitem desenvolver um trabalho no laboratório de informática comparando os resultados obtidos algebricamente, com base nos conceitos teóricos estudados no livro e por meio do auxílio das ferramentas disponíveis nos *softwares* de Geometria dinâmica. Assim, nesta proposta, os estudantes podem resolver alguns dos problemas utilizando, inicialmente, os procedimentos algébricos e, em seguida, as construções no *software*, enquanto, em outros, pode ser adotada a ordem contrária, iniciando a resolução da tarefa pelo *software* e validando seus resultados por meio dos procedimentos algébricos correspondentes.

Após a resolução da tarefa **72**, pode ser proposta uma discussão a respeito de outras configurações geométricas capazes de ser identificadas durante a resolução de um sistema linear. Para isso, apresente um sistema que admite infinitas soluções e outro que não admite nenhuma, como os sistemas lineares $\begin{vmatrix} 2x + 3y = 5 \\ 4x + 6y = 10 \end{vmatrix}$ e $\begin{vmatrix} 2x + 3y = 5 \\ 4x + 6y = 0 \end{vmatrix}$. Depois, faça a comparação geométrica com o auxílio do *software*, a fim de diferenciar esses casos dos que estão presentes nessa tarefa.

Antes de abordar a tarefa **73**, verifique a possibilidade de um trabalho integrado com a área de **Ciências da Natureza e suas Tecnologias**, preferencialmente com os professores dos componentes curriculares de **Biologia** e **Química**, para estudarem os benefícios de uma alimentação balanceada e descobrirem quais alimentos devemos ingerir para obter os nutrientes necessários. Se possível, organize a turma em grupos de três ou quatro integrantes e peça a cada grupo que se encarregue de pesquisar alimentos que contenham nutrientes necessários a uma alimentação balanceada. Durante a pesquisa desses alimentos, peça-lhes que atentem também aos preços e às quantidades necessárias de cada produto, de modo que se consiga ingerir a quantidade suficiente do nutriente. Se preciso, consulte a Tabela Brasileira de Composição de Alimentos (TBCA), disponível em: https://www.tbca.net.br/base-dados/composicao_alimentos.php. Acesso em: 16 ago. 2024.

No trabalho com o item **d**, oriente os estudantes a formar duplas e leve-os ao laboratório de informática para fazer a pesquisa.

O trabalho com a tarefa **73** permite o desenvolvimento dos temas contemporâneos transversais **Saúde** e **Educação alimentar e nutricional**, ao incentivar discussões a respeito de ter uma alimentação saudável para a manutenção da saúde e proporcionar um espaço importante para reflexões, por parte dos estudantes, a respeito de qualidade de vida e prevenção de doenças. Além disso, aborda aspectos da **Competência específica de Ciências da Natureza e suas Tecnologias 2** da BNCC.

Página 200

Após o trabalho com o problema resolvido **R20**, apresente aos estudantes uma maneira geral de classificar um sistema 2×2, dado por $\begin{vmatrix} a_1x + b_1y = k_1 \\ a_2x + b_2y = k_2 \end{vmatrix}$, com a_2, b_2 e k_2 não nulos.

- Se $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$, então o sistema é SPD.
- Se $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{k_1}{k_2}$, então o sistema é SPI.
- Se $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{k_1}{k_2}$, então o sistema é SI.

Páginas 201 a 205

No decorrer do tópico **Matrizes associadas a um sistema linear**, na resolução dos **Exercícios e problemas** propostos, é necessário que os estudantes resolvam e elaborem problemas do cotidiano envolvendo equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas. Em muitos desses momentos, os *softwares* de Geometria dinâmica são utilizados como ferramenta de auxílio na resolução e elaboração de problemas e obtenção de resultados. Ao realizar essas tarefas, são contempladas a **Competência específica de Matemática e suas Tecnologias 3** e a habilidade **EM13MAT301** da BNCC.

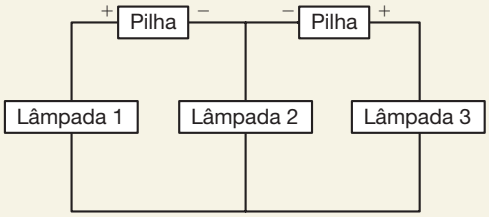
Uma sugestão para o trabalho com a tarefa **88** é utilizar, se possível, o laboratório de informática da escola. Para isso, verifique antecipadamente se todos os computadores têm instalado o *software* de Geometria dinâmica escolhido para o desenvolvimento do contexto. Caso não haja um computador para cada estudante, organize-os em grupos e cuide para que, no decorrer da tarefa, todos tenham a oportunidade de manipular o *software* em questão.

A tarefa **89** possibilita o trabalho com a área de **Ciências da Natureza e suas Tecnologias**, preferencialmente com o professor do componente curricular de **Química**. Nesse trabalho, proponha uma conversa a respeito do átomo, destacando sua estrutura. Além disso, explore com os estudantes os isótopos e sua classificação. Desse modo, abordam-se aspectos da **Competência específica de Ciências da Natureza e suas Tecnologias 2** da BNCC.

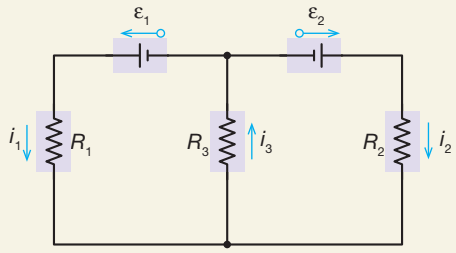
Página 212

O tema proposto na tarefa **101** permite que seja realizado um trabalho com a área de **Ciências da Natureza e suas Tecnologias**, preferencialmente com o professor do componente curricular de **Física**. Uma sugestão para avaliar a compreensão dos estudantes em relação a esse conteúdo é propor um trabalho com o professor desse componente para estudar o funcionamento dos circuitos elétricos.

Utilizando fios elétricos finos, 2 pilhas de 1,5 V e 3 lâmpadas pequenas de 12 V e 55 W ($R \simeq 2{,}62\ \Omega$), organize a turma em grupos de três ou quatro integrantes e oriente cada grupo a montar um circuito elétrico, da seguinte maneira.



Assim, determinando o sentido das correntes, indicado pelas setas, temos o circuito a seguir.



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Percorrendo o circuito no sentido anti-horário e utilizando a Primeira e a Segunda Lei de Kirchhoff, monte com os estudantes o sistema a seguir.

$$\begin{cases} i_1 + i_2 - i_3 = 0 \\ -2{,}62\,i_1 - 2{,}62\,i_3 + 1{,}5 = 0 \\ -2{,}62\,i_2 - 2{,}62\,i_3 + 1{,}5 = 0 \end{cases}$$

Em seguida, peça a eles que escrevam a equação matricial associada ao sistema apresentado anteriormente.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2{,}62 & 0 & -2{,}62 \\ 0 & -2{,}62 & -2{,}62 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1{,}5 \\ -1{,}5 \end{bmatrix}$$

Comente com os estudantes que o sistema formado não é homogêneo, visto que duas equações não são homogêneas.

Ao abordar circuitos elétricos na tarefa **101**, os estudantes são levados a analisar conteúdos relacionados a processos tecnológicos, mobilizando aspectos da **Competência específica de Ciências da Natureza e suas Tecnologias 1** da BNCC.

Página 215

Na questão **1**, se necessário, oriente os estudantes a formar duplas e retomar os conteúdos abordados no capítulo, mencionando os que já conheciam e se houve algum em que tiveram dificuldades.

O trabalho com a questão **2** pode ser desenvolvido de diferentes maneiras: por meio de desenhos, textos e/ou dinâmicas em grupos. Nesse momento, se necessário, proponha aos estudantes a elaboração de questionamentos em função dos erros mais comuns que identificaram durante o trabalho com os tópicos propostos. Alguns exemplos são: "Consigo resolver problemas envolvendo matrizes e determinantes?"; "Tenho segurança em calcular o determinante de uma matriz quadrada?"; "Consigo resolver um sistema linear pelo método de escalonamento?". Por meio das respostas, é esperado que eles identifiquem suas dificuldades e reflitam acerca da necessidade de retomar o que foi estudado.

As questões de **3** a **11** são de direta aplicação dos conteúdos estudados. Com elas, é esperado que os estudantes validem a reflexão proposta na questão **2**. Durante o desenvolvimento dessas questões, oriente-os a não consultar o material e a registrar suas dúvidas, pois esses registros auxiliarão no desenvolvimento da questão **12**.

Na síntese proposta na questão **12**, os estudantes podem usar diversas estratégias, como listas de conceitos, mapas conceituais e resumos textuais. Instigue-os a dar exemplos e, se julgarem conveniente, usar imagens. Incentive-os a utilizar a criatividade nesse momento.

CAPÍTULO 6

Geometria analítica

Nesse capítulo, são desenvolvidas as unidades temáticas de Matemática: **Números** e **Álgebra**. Além disso, os estudantes são levados a desenvolver um algoritmo que determine as coordenadas do ponto médio de um segmento, dadas as coordenadas dos seus extremos, e o transcrevam em linguagem de programação.

Objetivos específicos

- Reconhecer coordenadas na reta e no plano.
- Calcular a distância entre dois pontos na reta e no plano.
- Determinar as coordenadas do ponto médio de um segmento.
- Determinar o baricentro e resolver problemas que envolvam as medianas de um triângulo.
- Resolver problemas envolvendo alinhamento de três pontos.
- Calcular a área de um triângulo dadas as coordenadas de seus vértices em um plano cartesiano.
- Determinar a equação geral da reta.

Justificativa

Esse capítulo tem como principais conteúdos: coordenadas na reta; coordenadas no plano; distância entre dois pontos; coordenadas do ponto médio de um segmento e baricentro de um triângulo. Além disso, retoma outros conceitos matemáticos, como coordenadas cartesianas, pontos notáveis no triângulo e Teorema de Pitágoras.

Também trata da condição de alinhamento de três pontos e sua relação com as retas, além de propor o estudo de uma estratégia específica para o cálculo da área de triângulos, por meio de conceitos da Geometria analítica e da equação geral de uma reta. Assim, os estudantes são levados a construir expressões e realizar cálculos que permitam avaliar quando os pontos estão alinhados e se as equações são referentes a retas, que podem ser aplicados em situações práticas nas quais a Geometria se revelar útil.

Páginas 216 e 217

Nas páginas de abertura, os conceitos de distância e alinhamento entre pontos são associados ao estudo de fenômenos astronômicos do Sistema Solar – no caso, os eclipses. Nessa abordagem, a ideia de alinhamento entre três pontos é utilizada para estimar a posição do Sol, da Lua e da Terra nos eclipses solar e lunar.

A respeito desse assunto, obtenha mais informações sobre os eclipses no *site* da Nasa (National Aeronautics and Space Administration). Disponível em: https://science.nasa.gov/eclipses/. Acesso em: 19 ago. 2024. Nele, é possível verificar a data e o local em que ocorrerão os próximos eclipses.

Se julgar oportuno, proponha aos estudantes uma visita guiada a um museu de Ciência ou observatório da cidade onde a escola se localiza, ou de alguma cidade vizinha, para que tenham contato com as ferramentas que esses lugares

fornecem, contribuindo para a aprendizagem dos conceitos astronômicos. Saiba mais sobre essa atividade no texto a seguir.

> [...] visita escolar é um recurso didático utilizado pelos professores para programar uma atividade curricular intencionalmente planejada, servindo para desenvolver e complementar conteúdos curriculares, mediante saídas direcionadas para ambientes externos ao espaço físico da escola ou da sala de aula. São, portanto, atividades educativas de cunho pedagógico, e não necessariamente contidas no plano de curso.
>
> [...]
>
> LINHARES, Fernando R. da C. *O objetivo das visitas escolares a um observatório astronômico na visão dos professores*. 2011. 239 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte. p. 149.

Avalie a possibilidade de elaborar uma aula com professores da área de **Ciências da Natureza e suas Tecnologias**, preferencialmente o do componente curricular de **Física**. Aproveite a oportunidade para realizar experimentos que possibilitem aos estudantes compreender como ocorre, na prática, um eclipse lunar ou solar. Para isso, pode-se usar, por exemplo, uma lanterna para representar o Sol e bolas de isopor de diferentes tamanhos para representar a Terra e a Lua. Esses objetos devem ser organizados conforme as ilustrações apresentadas nessas páginas, o que permite a observação das sombras, como as produzidas por um eclipse. Durante esse trabalho, a turma pode ser organizada em grupos, com estudantes de diferentes perfis, para que discutam a respeito das características específicas de cada tipo de eclipse, construindo e testando conjecturas e pesquisando o tema para que, ao final, seja realizado um debate, visando desenvolver o pensamento crítico e a argumentação.

No desenvolvimento dessa dinâmica, converse com os estudantes sobre a importância de ter harmonia no convívio social, não ter preconceitos, compreender as necessidades dos outros, aprender a lidar com nossas limitações e contribuir para a criação de um ambiente propício para o crescimento em conjunto, promovendo, sempre que possível, a paz na comunidade escolar e na sociedade.

O trabalho com essas páginas permite o desenvolvimento do tema contemporâneo transversal **Ciência e tecnologia**, uma vez que discute a respeito dos eclipses, relacionados à movimentação dos astros no Sistema Solar. Além disso, estabelece relação do ponto de vista matemático, no sentido de possibilitar a compreensão de um fenômeno natural, permitindo a eles que se baseiem em interpretações voltadas à dinâmica do Universo para fazer previsões sobre seu funcionamento. Desse modo, abordam-se aspectos da **Competência específica de Ciências da Natureza e suas Tecnologias 2** da BNCC.

Página 218

Ao relacionar o capítulo à história do matemático René Descartes, os estudantes são levados a utilizar os conhecimentos historicamente construídos para entender e explicar aspectos da realidade, conforme sugere a **Competência geral 1** da BNCC.

Página 220

Sugestão de avaliação

Investigue os conhecimentos prévios dos estudantes a respeito da estrutura do plano cartesiano e da identificação e representação das coordenadas de pontos. Para isso, entregue a eles uma malha quadriculada. Depois, organize-os em duplas e oriente-os a esboçar nessa malha os eixos das abscissas e das ordenadas para representar o plano cartesiano. Escreva na lousa alguns pares ordenados, pedindo-lhes que marquem esses pontos. Escreva pares ordenados que contenham zero na abscissa ou na ordenada, ou em ambos, para verificar se os estudantes marcam corretamente tais pares.

Caso tenham dificuldades, organize-os em duplas para que possam conversar sobre as dúvidas.

Página 222

A tarefa **7** da página **222** possibilita uma relação com a área de **Ciências Humanas e Sociais Aplicadas**, especialmente com o componente curricular de **Geografia**, pois permite explorar conceitos referentes às coordenadas geográficas, especificamente tomando como base os meridianos e os paralelos, em interface com as coordenadas cartesianas, cujo princípio de localização é semelhante. Para reforçar os conceitos geográficos, recorde com os estudantes o que é o Meridiano de Greenwich. Caso tenham dificuldades, relembre-os de que ele é considerado o principal meridiano do planeta, pois é utilizado como referência para dividir o mundo entre Ocidente e Oriente e calcular fusos horários.

Página 223

Sugestão de avaliação

Antes de iniciar o trabalho com o tópico **Distância entre dois pontos**, realize com os estudantes uma tarefa cujo objetivo seja tratar do conceito intuitivo de distância entre pontos. Para isso, entregue a eles uma malha pontilhada e peça-lhes que determinem a distância entre dois pontos quaisquer da malha, utilizando como unidade de medida a distância d entre dois pontos consecutivos, horizontal ou verticalmente.

Oriente os estudantes a considerar essa distância constante em toda a malha.

Como exemplo, proponha uma tarefa para calcular a distância entre os pontos A e B. Para isso, considere um ponto C de maneira que ABC seja um triângulo retângulo em C. Mostre a eles que há duas possibilidades de posicionar o ponto C; em qualquer caso, o raciocínio será análogo.

Caso tenham dificuldades, retome a tarefa após o trabalho com o conceito de distância entre pontos.

Página 224

O problema resolvido **R2** aborda a habilidade **EM13MAT315** ao favorecer a organização do pensamento para a construção de um algoritmo e sua disposição em um fluxograma.

Página 227

Trabalho e juventudes

O texto e as questões da seção **A relação do topógrafo com a Geometria** abordam o trabalho dos topógrafos na construção civil.

Para iniciar o trabalho com a seção, peça aos estudantes que imaginem como são as etapas iniciais de uma construção, por exemplo, de ruas, viadutos ou escolas. Verifique se eles reconhecem que, primeiro, antes

da execução da obra, precisam ser realizados estudos técnicos, que envolvem diversos cálculos e medições.

A atividade **3** possibilita aos estudantes conhecer outras profissões que tenham relação com a Geometria analítica. Se necessário, faça uma lista de diversas profissões e distribua uma para cada dupla, evitando repetições durante as pesquisas. Para finalizar a atividade, oriente-os a apresentar o resultado das pesquisas para os demais colegas. Esse é um momento para os estudantes dialogarem entre si e exporem suas opiniões sobre a importância dessa área de estudo da Matemática.

Páginas 228 e 229

Na tarefa **14**, é possível trabalhar a importância do rádio no Brasil. Pergunte aos estudantes se eles ouvem emissoras radiofônicas e se usam o aparelho de rádio ou outros meios de comunicação. Explique-lhes que o rádio é um dos meios de comunicação mais populares e antigos em todo o mundo e teve grande contribuição em funções de divulgação, informação e entretenimento. Vale ressaltar que, mesmo com o advento das novas tecnologias, o rádio ainda é muito presente nas casas dos brasileiros, por se tratar de um veículo democrático e de fácil acesso. Nos tempos atuais, além do aparelho de rádio tradicional, que sintoniza emissoras pelas ondas sonoras, é possível ouvir conteúdos de rádio pela internet. Por meio desses conteúdos, é possível estar sempre informado e aproveitar as novidades também no mundo da música. Além disso, o rádio é considerado uma fonte confiável de informação cuja transmissão de notícias acontece em linguagem simples e de fácil entendimento.

Na tarefa **20**, se julgar conveniente, peça aos estudantes que façam uma breve pesquisa sobre as diferenças entre os sinais analógico e digital. Comente que, segundo a associação Seja Digital, no período de 2015 a 2023, a mudança do sinal analógico para o digital alcançou mais de 70% da população brasileira. O resultado é que a maior parte do país desfruta dos benefícios do sinal de TV digital, com alta qualidade de som e imagem, representando um marco importante na história da televisão no Brasil. Em 2024, a meta era que até junho de 2025 o sinal digital atingisse todos os municípios brasileiros.

As tarefas **14** e **20** possibilitam um trabalho com a área de **Ciências da Natureza e suas Tecnologias**, preferencialmente com o componente curricular de **Física**. Uma sugestão é estudar a importância das localizações exatas das antenas de transmissão de rádio e TV. O professor de **Física** pode abordar questões relacionadas a comprimento, transmissão e sinais de ondas desses meios de comunicação. Dessa forma, são abordados aspectos da **Competência específica de Ciências da Natureza e suas Tecnologias 3** da BNCC.

Página 230

A tarefa proposta nas questões **A** e **B** contempla as habilidades **EM13MAT315** e **EM13MAT405**, ao investigar um algoritmo que resolve um problema e ao utilizar conceitos iniciais de uma linguagem de programação na implementação de algoritmos escritos em linguagem corrente e/ou matemática. Desse modo, abordam-se as **Competências específicas de Matemática e suas Tecnologias 3** e **4** da BNCC.

Além disso, são mobilizados aspectos da **Competência geral 4** da BNCC, ao utilizar diferentes linguagens (oral, escrita e digital) que permitem aos estudantes se expressarem e partilhar informações, experiências, ideias e sentimentos em diferentes contextos e produzir sentidos que levem ao entendimento mútuo.

Página 231

Ao trabalhar o conteúdo dessa página, verifique a possibilidade de os estudantes observarem na prática que o baricentro de um triângulo é seu ponto de equilíbrio. Para isso, distribua a eles pedaços de cartolina. Peça-lhes que construam um triângulo qualquer, tracem as medianas e recortem-no. O ponto de encontro das medianas corresponde ao baricentro do triângulo. Para equilibrá-lo, coloque linha em uma agulha, dando um nó na ponta da linha, e atravesse a agulha no baricentro. Lembre-os do cuidado ao manusear a agulha.

Página 235

Para auxiliar na resolução das tarefas, oriente os estudantes a fazer anotações, destacar os dados relevantes em cada problema e representar os pontos do plano nos problemas sem imagens.

Páginas 235 e 236

A tarefa **33** relaciona conceitos de Geometria analítica com a investigação sobre a provável localização de um tesouro. Nessa abordagem, de maneira intuitiva, a ideia de coordenadas de um ponto qualquer é relacionada às instruções para chegar a um tesouro. Verifique se os estudantes perceberam as ideias de coordenadas no plano e de distância entre dois pontos no espaço – no caso, a localização do tesouro com base na distância entre pontos de referência.

No item **b**, se necessário, oriente os estudantes a validar as descrições dos elementos no texto para elaborar o mapa.

Ao final do trabalho com esse tópico, verifique a conveniência de utilizar a estratégia ***Quick writing*** para avaliar o aprendizado dos estudantes, fazendo-os refletir sobre os conteúdos estudados. Em debate, solicite a eles que expliquem de que modo o estudo de coordenadas e distâncias pode contribuir para sua formação.

Página 237

O assunto dessa página integra os conteúdos matemáticos Geometria analítica, matrizes e determinantes. Aproveite o momento para lembrar os estudantes das diferentes técnicas que podem ser utilizadas para calcular o determinante de uma matriz, recorrendo, inicialmente, a exemplos numéricos e prosseguindo com a apresentação de outros exemplos que envolvem a presença de uma variável em alguma das entradas da matriz, como o cálculo de $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ x & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix}$. Assim, eles vão perceber que, ao igualar o determinante a um número, podemos obter equações, como é o caso de $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ x & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 3$, que implica a equação $4x + 11 = 3$.

Página 239

A tarefa **37** auxilia no desenvolvimento do **pensamento computacional**. A construção de um fluxograma associado a

um algoritmo em linguagem de programação para a determinação da condição de alinhamento entre três pontos e para o cálculo de área de triângulos permite aos estudantes identificar características da linguagem de programação e refletir a respeito de seu funcionamento, além de contribuir para a resolução de problemas correlatos. Com isso, eles podem comparar diferentes estratégias empregadas na resolução de um mesmo problema, tanto usando conceitos matemáticos e procedimentos algébricos quanto por meio de um programa escrito em uma linguagem de programação específica.

A tarefa **37** da seção **Exercícios e problemas** contempla a habilidade **EM13MAT315** da BNCC, ao exigir dos estudantes a compreensão da estrutura do algoritmo a fim de organizá-lo por meio de um fluxograma. Assim, é abordada a **Competência específica de Matemática e suas Tecnologias 3** da BNCC.

Páginas 240 e 241

Antes de trabalhar com o tópico **Área da região determinada por um triângulo**, como o cálculo da área envolve tanto o estudo de valor absoluto de números reais quanto os determinantes de matrizes de ordem 3, é importante se certificar de que os estudantes compreendem ambos os conceitos, para garantir que assimilem as definições e apliquem-nas corretamente na resolução dos exercícios e problemas propostos nas páginas seguintes.

Ao trabalhar o conteúdo dessa página, diga aos estudantes que o determinante utilizado para calcular a área de uma região triangular é o mesmo que se usa para verificar se três pontos estão alinhados. Verifique se eles compreenderam que três pontos alinhados não determinam um triângulo, e sim uma reta.

Sugestão de avaliação

Para avaliar o aprendizado dos estudantes sobre os conceitos estudados nesse tópico, faça um trabalho no laboratório de informática usando *softwares* de Geometria dinâmica para que possam verificar os resultados obtidos algebricamente, principalmente nas tarefas **40** e **41**. Caso tenham dificuldades, retome o conteúdo trabalhado.

Página 242

Antes de iniciar os estudos do tópico **Equação da reta**, proponha uma conversa sobre equação geral da reta, buscando investigar os conhecimentos prévios dos estudantes a respeito desse conceito, da relação entre uma equação algébrica e a representação geométrica dessa equação, que é uma reta. Durante a conversa, incentive-os a dar exemplos de equação geral da reta.

Página 245

Após o trabalho com a tarefa **47**, discuta a respeito de outras situações que podem ser construídas utilizando um procedimento semelhante à tarefa, solicitando aos estudantes que façam uma pesquisa a respeito de equação geral da reta. Se julgar conveniente, proponha a eles que, em pequenos grupos, pesquisem tarefas análogas, relacionando-as ao conceito estudado, e posteriormente apresentem as conclusões para a turma.

Página 247

Na questão **1**, se necessário, oriente os estudantes a formar duplas e retomar os conteúdos abordados no capítulo, mencionando os que já conheciam e se houve algum em que tiveram dificuldades.

O trabalho com a questão **2** pode ser desenvolvido por meio de textos ou dinâmicas em grupos. Nesse momento, proponha aos estudantes a elaboração de questionamentos em função dos erros mais comuns que identificaram durante o trabalho com os tópicos propostos. Alguns exemplos são: "Reconheço coordenadas na reta e coordenadas no plano?"; "Compreendo e consigo resolver problemas envolvendo distância entre dois pontos e coordenadas do ponto médio de um segmento?"; "Compreendo o que é baricentro de um triângulo?"; "Tenho segurança para utilizar a condição de alinhamento de três pontos?"; "Consigo identificar e calcular a área da região determinada por um triângulo?"; "Compreendo e determino uma equação geral da reta?". Por meio das respostas, é esperado que eles identifiquem suas dificuldades e reflitam acerca da necessidade de retomar o que foi estudado, sanando as possíveis dúvidas.

As questões de **3** a **13** são de direta aplicação dos conteúdos trabalhados. Com elas, é esperado que os estudantes validem a reflexão proposta na questão **2**. Durante o desenvolvimento dessas questões, oriente-os a não consultar o material e a registrar suas dúvidas, pois esses registros auxiliarão no desenvolvimento da questão **14**.

Na síntese proposta na questão **14**, os estudantes podem usar diversas estratégias, como listas de conceitos, mapas conceituais e resumos textuais. Instigue-os a dar exemplos e, se julgar conveniente, usar imagens. Incentive-os a utilizar a criatividade nesse momento.

CAPÍTULO 7 Transformações geométricas

Nesse capítulo, são desenvolvidas as unidades temáticas de Matemática: **Geometria e Medidas**. Esses conteúdos estão presentes ao explorar as relações entre as transformações geométricas em diferentes situações, como obras artísticas e arquitetônicas.

Objetivos específicos

- Compreender as características de transformações geométricas, isométricas e homotéticas.
- Reconhecer a aplicação de transformações geométricas em obras de arte, na arquitetura e em outras situações do cotidiano.
- Identificar a aplicação de transformações e de composição de transformações sobre polígonos construídos no plano cartesiano.
- Reconhecer a homotetia como uma maneira de reduzir ou aumentar uma imagem mantendo suas proporções.

Justificativa

Esse capítulo trabalha com o estudo das transformações geométricas: rotação, translação, reflexão e homotetia e a composição entre essas transformações. A escolha dessas transformações se baseia em sua relevância, tanto no contexto

matemático quanto em aplicações na vida cotidiana, na arte e na arquitetura. A estrutura do capítulo foi elaborada para permitir aos estudantes que construam gradualmente seu conhecimento sobre transformações geométricas. Dessa forma, são apresentados os conceitos fundamentais de cada tipo de transformação, utilizando exemplos práticos que ilustram sua aplicação em situações reais.

Páginas 248 e 249

Ao trabalhar a questão **1**, das páginas de abertura, incentive os estudantes a citar padrões e a diferenciá-los entre padrões fractais e não fractais. Caso não sejam citados, mencione o Conjunto de Cantor, a Curva de Dragão e a Esponja de Menger. Incentive-os a explicar as características e a construção desses fractais e explore as conexões entre os diferentes exemplos.

Nesse capítulo, é contemplada a habilidade **EM13MAT105**, ao trabalhar com as transformações isométricas e homotéticas, contribuindo para que os estudantes reconheçam a aplicação das diferentes transformações em situações diversas, principalmente no que se refere às obras de arte e arquitetônicas e a outras produções humanas ou elementos da natureza. Desse modo, é abordada a **Competência específica de Matemática e suas Tecnologias 1** da BNCC.

O assunto desse capítulo mostra uma relação entre os componentes curriculares de **Matemática** e **Arte**, em especial nas obras de arte, possibilitando relacionar tanto os aspectos matemáticos, como a identificação de padrões e regularidades, quanto os aspectos artísticos, como o uso de cores, os padrões e a presença em diferentes obras.

Verifique a possibilidade de realizar um trabalho com o professor do componente curricular de **Arte**, visando enriquecer as discussões sobre os fractais e sua presença na natureza e em obras artísticas. Assim, pode ser feito um trabalho inicial no sentido de incentivar os estudantes a compreender as principais características que definem os fractais, a fim de que possam, utilizando a internet, fazer pesquisas sobre diferentes tipos de fractais. Além disso, pode ser proposta a construção de fractais utilizando dobraduras e recortes, como os cartões fractais, ou mesmo por desenhos.

13 SMILE/SHUTTERSTOCK



Cartão fractal.

Página 250

Inicialmente, promova uma conversa com a turma a respeito dos elementos que compõem o plano cartesiano e as características dos polígonos, de modo a identificar os conhecimentos prévios dos estudantes com relação a essa temática.

O boxe **Para expandir** propõe aos estudantes a ampliação do conhecimento sobre a cerâmica marajoara, incentivando a leitura da publicação de Lilian Bayma de Amorim. Esse estudo visa enriquecer o entendimento deles quanto às transformações geométricas, mas também busca explorar a conexão entre Matemática e patrimônio cultural. A cerâmica marajoara, como exemplo de artefato cultural, demonstra padrões geométricos que podem ser analisados sob pontos de vista diversos: matemático, artístico, histórico e cultural.

Aproveite o boxe **Observação** para retomar com os estudantes o significado do termo **congruente** no contexto da Geometria plana, destacando, por exemplo, a possibilidade de construir triângulos com as mesmas dimensões e áreas, dispostos em diferentes regiões e sob diferentes posições no plano cartesiano.

Para desenvolver o conteúdo proposto nesse tópico, é possível utilizar a estratégia ***Think-pair-share***. Oriente os estudantes a refletir sobre suas dúvidas, durante o estudo da temática, e discutir em duplas essas reflexões, para que, posteriormente, apresentem as conclusões à turma.

Página 252

Nas tarefas **4** e **5**, instrua os estudantes sobre o uso adequado da régua e do compasso, garantindo que as construções sejam precisas e corretas. O desenvolvimento da habilidade motora é fundamental para a utilização eficaz desses instrumentos, principalmente na realização das construções características das transformações isométricas e homotéticas. Caso haja estudantes com deficiência motora ou visual, considere o uso de recursos adaptativos, como réguas e compassos com suportes especiais ou magnéticos que facilitem o manuseio. Além disso, versões digitais desses instrumentos podem ser utilizadas em *softwares* de Geometria dinâmica, permitindo-lhes realizar as construções geométricas por meio de interfaces digitais acessíveis.

No item **b** da tarefa **6**, incentive os estudantes a observar e analisar as obras encontradas na pesquisa e peça-lhes que compartilhem suas impressões sobre elas. Verifique se percebem que as formas geométricas estão expressivamente presentes na obra desse artista. Comente que, ao questionar e romper com os padrões estabelecidos pelos artistas europeus, Rubem Valentim construiu todo o seu projeto com base em fortes influências da cultura afro-brasileira, principalmente nos símbolos de religiões como o candomblé. Enfatize a importância de conhecer e respeitar todas as religiões. Se considerar pertinente, mencione que outras informações sobre Valentim ou outros artistas que se interessam pela cultura afro-brasileira e são representativos dela estão no *site* do Museu Afro Brasil. Disponível em: http://www.museuafrobrasil.org.br/. Acesso em: 21 ago. 2024.

Página 254

A tarefa **12** permite um trabalho articulado com as áreas de **Linguagens e suas Tecnologias** e **Ciências Humanas e Sociais Aplicadas**, preferencialmente com os professores dos componentes curriculares de **Arte** e **História**. Se julgar conveniente, peça a esses professores que conversem com os estudantes a respeito de assuntos referentes a importantes fatos históricos associados à Catedral de Notre-Dame, sua categorização como patrimônio mundial, a inclusão de obras artísticas contemporâneas no seu interior no processo de restauração e outras obras arquitetônicas que, assim como a catedral, também apresentam vitrais no formato de rosáceas.

Para complementar esse trabalho, avalie a possibilidade de apresentar aos estudantes fotos da Catedral de Notre-Dame que mostrem a rosácea, inclusive em outras perspectivas, de modo a auxiliá-los na observação de padrões que se repetem, associando-os a transformações geométricas.

Página 255

Para desenvolver o trabalho com o problema resolvido **R1**, verifique a possibilidade de este ser proposto aos estudantes antes de apresentar a seção. Para a resolução desse problema, providencie e entregue a cada um deles uma malha quadriculada, depois oriente-os a fazer nela a construção da imagem solicitada. Além disso, pode ser utilizado um recurso tecnológico, como o GeoGebra. Disponível em: https://www.geogebra.org/download?lang5pt. Acesso em: 21 ago. 2024. Ele também pode ser acessado na versão *on-line*. Disponível em: https://www.geogebra.org/classic. Acesso em: 21 ago. 2024.

Páginas 257 a 259

É possível desenvolver o trabalho com a seção **Acessando tecnologias** com o suporte de um *software* de Geometria dinâmica, a fim de relacionar as representações algébricas e geométricas com o auxílio da tecnologia. Uma sugestão de *software* dessa natureza é o GeoGebra, disponível no *site* citado anteriormente.

As tarefas dessa seção favorecem o **pensamento computacional**. Por meio da construção de polígonos utilizando, no caso, a transformação geométrica de translação, motiva-se a versatilidade em traduzir ideias com o suporte de ferramentas tecnológicas, empregando-as na resolução de problemas. Além disso, os conteúdos da seção possibilitam aos estudantes entrar em contato com o conhecimento científico por meio de ferramentas que fazem parte das culturas juvenis.

Página 262

Trabalho e juventudes

O texto apresentado na seção **O trabalho do artista plástico** permite fomentar o trabalho realizado por esses artistas e as diferentes manifestações que podem produzir. Explique-lhes que todas elas, independentemente dos materiais utilizados, são consideradas artes plásticas e podem expressar sentimentos e emoções do artista, além de uma crítica à sociedade.

Para realizar a atividade **2**, verifique a possibilidade de visitar o local de trabalho de um artista plástico. Para isso, providencie a autorização dos responsáveis pelos estudantes menores de idade. Oriente-os a elaborar antecipadamente algumas questões e deixe-os à vontade para fazer outros questionamentos durante a visita, ressaltando a importância do diálogo respeitoso. Nos casos em que não seja possível a visitação, convide o profissional para ir até a escola ou faça uma videochamada para que ele possa ser entrevistado e mostre seu ambiente de trabalho e os recursos que utiliza no dia a dia.

Página 263

Ao trabalhar com as tarefas da seção **Exercícios e problemas**, verifique a conveniência de aplicar algum dos problemas sob a perspectiva da estratégia ***Think-pair-share***. Nesse sentido, após os estudantes resolverem esse problema, pode ser feita uma apresentação das soluções obtidas aliada à discussão a seu respeito.

No item **b** da tarefa **18**, reforce aos estudantes a orientação de observar e analisar a imagem das cerâmicas marajoaras para além do objetivo de identificar as transformações geométricas, com atenção também às características desse tipo de cerâmica como um objeto artístico, histórico e cultural representativo dos povos indígenas que habitavam a Ilha de Marajó, no Pará.

Comente que a cerâmica marajoara era uma prática realizada pelos povos indígenas que habitavam essa ilha antes de 1500, e que as peças moldadas, como vasos e tigelas, eram comumente utilizadas no cotidiano. Mencione que essas cerâmicas são consideradas objetos artísticos e podem ser encontradas nos acervos de diversos museus ao redor do mundo.

Enfatize que entrar em contato com esse saber, tradicional auxilia a compreender a relevância cultural dessa prática e a valorizar a diversidade do patrimônio histórico e cultural brasileiro.

No item **b** da tarefa **20**, se julgar conveniente, mostre para os estudantes imagens de outras obras do artista. Para isso, acesse o *site MC Escher*. Disponível em: https://mcescher.com/gallery/. Acesso em: 21 ago. 2024. Para a realização do item **b**, leve-os ao laboratório de informática e, se necessário, oriente-os a formar duplas para construir a imagem.

Página 266

É possível desenvolver o trabalho com a seção **Acessando tecnologias** com o suporte de um *software* de Geometria dinâmica, a fim de relacionar as representações algébricas e geométricas com o auxilio da tecnologia. Uma sugestão de *software* dessa natureza é o GeoGebra, disponível no *site* citado anteriormente.

Página 267

Na questão **1**, se necessário, oriente os estudantes a formar duplas e retomar os conteúdos abordados no capítulo mencionando os que já conheciam e se houve algum em que tiveram dificuldades.

O trabalho com a questão **2** pode ser desenvolvido por meio de textos ou de dinâmicas em grupos. Nesse momento, proponha aos estudantes que elaborem questionamentos em função dos erros mais comuns que eles identificaram durante o trabalho com os tópicos propostos. Alguns exemplos são: “Reconheço as características de transformações geométricas, isométricas e homotéticas?”; “Identifico transformações geométricas em obras de arte, na arquitetura?”; “Consigo reduzir ou aumentar uma imagem mantendo suas proporções por meio da homotetia?”; “Compreendo e determino uma equação geral da reta?”. Com base nas respostas, é esperado que eles identifiquem suas dificuldades e reflitam acerca da necessidade de retomar o que foi estudado, sanando suas possíveis dúvidas.

As questões de **3** a **9** são de direta aplicação dos conteúdos. Com elas, espera-se que os estudantes validem a reflexão proposta na questão **2**. Durante o desenvolvimento dessas questões, oriente-os a não consultar o material e a registrar suas dúvidas, pois esses registros auxiliarão no desenvolvimento da questão **10**.

Na síntese proposta na questão **10**, os estudantes podem usar diversas estratégias, como listas de conceitos, mapas conceituais e resumos textuais. Instigue-os a dar exemplos e, caso julguem conveniente, usar imagens. Incentive-os a utilizar a criatividade nesse momento.

Propriedades da soma de matrizes - referente à tarefa **26** da página **172** do **Livro do Estudante**

a) $A + B = B + A$

Dadas as matrizes $A_{2\times2}$ e $B_{2\times2}$, temos:

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} + a_{11} & b_{12} + a_{12} \\ b_{21} + a_{21} & b_{22} + a_{22} \end{bmatrix} = B + A$$

comutatividade da soma de números reais

b) $(A + B) + C = A + (B + C)$

Dadas as matrizes $A_{2\times2}$, $B_{2\times2}$ e $C_{2\times2}$, então:

$$(A + B) + C = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (a_{11} + b_{11}) + c_{11} & (a_{12} + b_{12}) + c_{12} \\ (a_{21} + b_{21}) + c_{21} & (a_{22} + b_{22}) + c_{22} \end{bmatrix} =$$

associatividade de soma de números reais

$$= \begin{bmatrix} a_{11} + (b_{11} + c_{11}) & a_{12} + (b_{12} + c_{12}) \\ a_{21} + (b_{21} + c_{21}) & a_{22} + (b_{22} + c_{22}) \end{bmatrix} = A + (B + C)$$

c) $A + 0 = A$

Dadas as matrizes $A_{2\times2}$ e $0_{2\times2}$, então:

$$A + 0 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} + 0 & a_{12} + 0 \\ a_{21} + 0 & a_{22} + 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = A$$

propriedade do elemento neutro da soma de números reais

d) $A + (-A) = 0$

Dadas as matrizes $A_{2\times2}$ e $-A_{2\times2}$, então:

$$A + (-A) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & -a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} + (-a_{11}) & a_{12} + (-a_{12}) \\ a_{21} + (-a_{21}) & a_{22} + (-a_{22}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0_{2\times2}$$

propriedade do elemento oposto da soma de números reais

Demonstração dos teoremas - referente à página **189** do **Livro do Estudante**

Demonstração do Teorema de Jacobi

Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$. Ao adicionarmos aos elementos da 1ª linha os elementos da 3ª linha multiplicados pelo número real k, obtemos a matriz $B = \begin{bmatrix} a_{11} + a_{31} \cdot k & a_{12} + a_{32} \cdot k & a_{13} + a_{33} \cdot k \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$.

Calculando o determinante dessas duas matrizes, temos:

$\det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{23} \cdot a_{32} \cdot a_{11} - a_{33} \cdot a_{12} \cdot a_{21}$

$\det B = (a_{11} + a_{31} \cdot k) \cdot a_{22} \cdot a_{33} + (a_{12} + a_{32} \cdot k) \cdot a_{23} \cdot a_{31} +$

$+ (a_{13} + a_{33} \cdot k) \cdot a_{21} \cdot a_{32} - (a_{13} + a_{33} \cdot k) \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{23} \cdot a_{32} \cdot (a_{11} + a_{31} \cdot k) - a_{33} \cdot (a_{12} + a_{32} \cdot k) \cdot a_{21} =$

$= a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + \cancel{a_{31} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdot k} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + \cancel{a_{32} \cdot a_{23} \cdot a_{31} \cdot k} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} +$

$+ \cancel{a_{33} \cdot a_{21} \cdot a_{32} \cdot k} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - \cancel{a_{33} \cdot a_{22} \cdot a_{31} \cdot k} - a_{23} \cdot a_{32} \cdot a_{11} - \cancel{a_{23} \cdot a_{32} \cdot a_{31} \cdot k} - a_{33} \cdot a_{12} \cdot a_{21} - \cancel{a_{33} \cdot a_{32} \cdot a_{21} \cdot k} =$

$= a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{23} \cdot a_{32} \cdot a_{11} - a_{33} \cdot a_{12} \cdot a_{21}$

Portanto, $\det A = \det B$.

Demonstração do Teorema de Binet

Considere as matrizes:

$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ $\qquad$ $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$

Nesse caso, temos:

$\det A = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$ $\qquad$ $\det B = b_{11} \cdot b_{22} - b_{12} \cdot b_{21}$.

$\det A \cdot \det B = (a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}) \cdot (b_{11} \cdot b_{22} - b_{12} \cdot b_{21})$

Calculando o produto dessas matrizes, obtemos a matriz $A \cdot B = \begin{bmatrix} a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} & a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} \\ a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} & a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22} \end{bmatrix}$.

Calculando seu determinante, temos:

$\det (A \cdot B) = (a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21})(a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22}) - (a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22})(a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21}) =$

$= \cancel{a_{11} \cdot a_{21} \cdot b_{11} \cdot b_{12}} + a_{12} \cdot a_{21} \cdot b_{21} \cdot b_{12} + a_{11} \cdot a_{22} \cdot b_{11} \cdot b_{22} +$

$\cancel{+ a_{12} \cdot a_{22} \cdot b_{21} \cdot b_{22}} - \cancel{a_{11} \cdot a_{21} \cdot b_{11} \cdot b_{12}} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot b_{22} \cdot b_{11} - a_{11} \cdot a_{22} \cdot b_{12} \cdot b_{21} - \cancel{a_{12} \cdot a_{22} \cdot b_{21} \cdot b_{22}} =$

$= a_{11} \cdot a_{22} \cdot (b_{11} \cdot b_{22} - b_{12} \cdot b_{21}) - a_{12} \cdot a_{21} (b_{11} \cdot b_{22} - b_{12} \cdot b_{21}) = (a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21})(b_{11} \cdot b_{22} - b_{12} \cdot b_{21}) = \det A \cdot \det B$

Logo, $\det (A \cdot B) = \det A \cdot \det B$.

RESOLUÇÕES

Esta seção apresenta a resolução simplificada de problemas, atividades e questões da teoria e de seções do **Livro do Estudante**, contendo o raciocínio central deles. Respostas pessoais e atividades de elaboração de problemas não foram incluídas nesta seção. Para esses casos, há notas de orientações na reprodução do **Livro do Estudante** neste **Suplemento para o professor**, sempre que necessário.

CAPÍTULO 1 TRIGONOMETRIA NO TRIÂNGULO E NA CIRCUNFERÊNCIA

Abertura do capítulo

1. Para estabelecer unidades-padrão de medidas, entre elas o metro.

2. Sugestões de resposta: Na construção civil, na Astronomia, na navegação, na agrimensura e na topografia.

Questões

A. A veracidade de semelhança entre os pares de triângulos indicados nessa questão está mostrada na seção **Respostas**, no final da reprodução do **Livro do Estudante** deste volume.

B. A veracidade de cada igualdade dessa questão está mostrada na seção **Respostas**, no final da reprodução do **Livro do Estudante** deste volume.

C. O caso de semelhança **AA** garante a semelhança, pois o ângulo $\hat{C}$ é comum aos triângulos e os ângulos $C\hat{D}G$, $D\hat{E}F$ e $E\hat{A}B$ são retos.

D. A veracidade de cada igualdade dessa questão está mostrada na seção **Respostas**, no final da reprodução do **Livro do Estudante** deste volume.

Exercícios e problemas

1. A. $\frac{12}{9} = \frac{4}{x} \Rightarrow x = 3$

B. $\frac{x+4}{5} = \frac{x+2}{4} \Rightarrow 4 \cdot (x+4) = 5 \cdot (x+2) \Rightarrow x = 6$

C. $\frac{x+12}{10} = \frac{x}{4} \Rightarrow 4 \cdot (x+12) = 10 \cdot x \Rightarrow x = 8$

D. $\frac{8}{x-4} = \frac{5}{x-10} \Rightarrow 8 \cdot (x-10) = 5 \cdot (x-4) \Rightarrow x = 20$

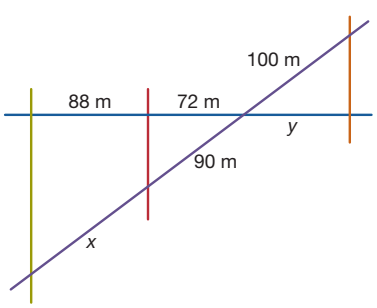
2. A. $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \Rightarrow \frac{12}{6} = \frac{10}{EC} \Rightarrow EC = 5$. Assim:
12 cm + 6 cm + 12 cm + 5 cm + 10 cm = 45 cm
Portanto, o perímetro é 45 cm.

B. $\frac{DA}{BD} = \frac{EA}{CE} \Rightarrow \frac{9}{4} = \frac{EA}{5} \Rightarrow EA = 11{,}25$. Assim:
9,75 cm + 4 cm + 9 cm + 11,25 cm + 5 cm = 39 cm
Portanto, o perímetro é 39 cm.

C. $\frac{AC}{AD} = \frac{AB}{AE} \Rightarrow \frac{x+5}{x} = \frac{12}{8} \Rightarrow 8 \cdot (x+5) = 12 \cdot x \Rightarrow x = 10$
Assim:
15 cm + 20 cm + 12 cm = 47 cm
Portanto, o perímetro é 47 cm.

D. $\frac{BE}{EA} = \frac{CD}{DA} \Rightarrow \frac{4}{5} = \frac{CD}{14} \Rightarrow CD = 11{,}2$. Assim:
18,3 cm + 4 cm + 5 cm + 14 cm + 11,2 cm = 52,5 cm
Portanto, o perímetro é 52,5 cm.

3.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

$\frac{x}{90} = \frac{88}{72} \Rightarrow x = 110$

$\frac{y}{72} = \frac{100}{90} \Rightarrow y = 80$

Portanto, $x = 110$ m e $y = 80$ m.

a) $100 + 90 + x = 190 + 110 = 300$
Portanto, o pedestre vai percorrer 300 m.

b) $88 + 72 + y = 160 + 80 = 240$
Portanto, o pedestre vai percorrer 240 m.

4. $\frac{AP_2}{CP_2} = \frac{P_1P_2}{BP_2} \Rightarrow \frac{60}{12} = \frac{P_1P_2}{10} \Rightarrow P_1P_2 = 50$
Portanto, foram utilizados, no mínimo, 50 m de cabo.

6. Paralela, pois a razão entre os comprimentos dos segmentos correspondentes é a mesma, ou seja, em um triângulo ABC, se D e E são os pontos médios dos lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$, respectivamente, temos $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} = 1$.

7. a) $\frac{CE}{BC} = \frac{CD}{AC} \Rightarrow \frac{CE}{9} = \frac{4}{6} \Rightarrow CE = 6$
Executando os passos apresentados e usando $AC = 6$ cm, $AD = 2$ cm, $BC = 9$ cm e $CE = 6$ cm, é possível efetuar a construção solicitada.
A imagem das retas nas condições dadas, referente a esse item, está apresentada na seção **Respostas**, no final da reprodução do **Livro do Estudante** deste volume.

b) $CE = 6$ cm

c) Uma possibilidade é traçar, em um triângulo ABC qualquer, duas retas, r e s, uma contendo $\overline{AB}$ e outra contendo $\overline{AC}$, respectivamente. Em r, marcamos um ponto D tal que B esteja entre A e D. Em seguida, medimos o comprimento de $\overline{AB}$, $\overline{BD}$ e $\overline{AC}$ e calculamos $d = AC \cdot \frac{BD}{AB}$.
Depois, marcamos em s um ponto E, tal que C esteja entre A e E e $CE = d$. Por fim, traçamos a reta que passa por D e E, que é paralela ao lado $\overline{BC}$ do triângulo.

8. Pelo caso de semelhança **AA**, os triângulos ABC e EBD são semelhantes. Logo:

$$\frac{BC}{BD} = \frac{AB}{EB} \Rightarrow \frac{x+8}{6} = \frac{2x+6}{8} \Rightarrow x = 7$$

9. A veracidade da igualdade enunciada nessa tarefa está mostrada na seção **Respostas**, no final da reprodução do **Livro do Estudante** deste volume.

10. De acordo com a tarefa anterior, $\frac{480}{24} = 20$, ou seja, a razão de proporcionalidade entre esses triângulos é 20. Assim:

$$20 \cdot 6{,}5 = 130$$

Portanto, o comprimento do menor lado desse triângulo é 130 cm.

11. Pelo caso de semelhança **AA**, os triângulos AGF e BGC são semelhantes. Assim:

$$\frac{AF}{BC} = \frac{AG}{BG} \Rightarrow \frac{30}{BC} = \frac{20}{(20 - AB)}$$

Como $AB = BC$, temos:

$$\frac{30}{BC} = \frac{20}{(20 - BC)} \Rightarrow 600 - 30BC = 20BC \Rightarrow BC = 12$$

Logo, o perímetro do quadrado é:

$$P = 4 \cdot BC = 4 \cdot 12 \text{ cm} = 48 \text{ cm}$$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

12. Seja x o comprimento do segmento BC, T_1 o triângulo retângulo de base $\overline{KI}$ e altura $\overline{KH}$ e T_2 o triângulo retângulo de base $\overline{LJ}$ e altura $\overline{LI}$.

$KH = 13 \text{ cm} - 8 \text{ cm} = 5 \text{ cm}$ $\qquad LI = 8 \text{ cm} - x \text{ cm}$

$$\frac{5}{8-x} = \frac{8}{x} \Rightarrow 5x = 64 - 8x \Rightarrow 13x = 64 \Rightarrow x = \frac{64}{13}$$

Por fim, calculamos o perímetro P do quadrado $BCLJ$.

$$P = 4 \cdot x = 4 \cdot \frac{64}{13} = \frac{256}{13}$$

Portanto, o quadrado $BCLJ$ tem $\frac{256}{13}$ cm de perímetro.

13. Indicando por P o perímetro do triângulo ABC, segue que:

$$\frac{AB}{MN} = \frac{P}{552} \Rightarrow \frac{25}{150} = \frac{P}{552} \Rightarrow 150P = 13\,800 \Rightarrow P = 92$$

Portanto, o triângulo ABC tem 92 cm de perímetro.

14. Note que $\hat{A} = \hat{E}$, porém: $\frac{5}{2,5} \neq \frac{7}{3,7}$ e $\frac{7}{2,5} \neq \frac{5}{3,7}$. Logo, os triângulos não são semelhantes, pois os lados correspondentes não são proporcionais.

15. a) Sim. O caso que garante a semelhança é o **LLL**, pois os lados correspondentes são proporcionais, isto é: $\frac{AC}{EG} = \frac{AB}{GF} = \frac{BC}{EF}$.

b) $\hat{B} = \hat{F} \Rightarrow 4x - 45° = 5y \Rightarrow 4x - 5y = 45°$

$\hat{C} = \hat{E} \Rightarrow 3y + 30° = 2x + 11° \Rightarrow 2x - 3y = 19°$

Assim, $x = 20°$ e $y = 7°$. Consequentemente:

- $\hat{B} = 4 \cdot 20° - 45° = 35°$
- $\hat{C} = 3 \cdot 7° + 30° = 51°$
- $z + 35° + 51° = 180° \Rightarrow z = 94°$

16. Sendo h a altura do poste, temos: $\frac{h}{1,6} = \frac{3}{1,2} \Rightarrow h = 4$.

Portanto, a altura do poste é 4 m.

17. Pelo caso de semelhança **AA**, segue que:

- AEF e ADB são semelhantes e $\frac{EF}{\underbrace{6}_{BD}} = \frac{AF}{AB}$.
- BEF e BCA são semelhantes e $\frac{EF}{\underbrace{4}_{AC}} = \frac{FB}{AB}$.

Como $AF + FB = AB$, temos:

$$\frac{EF}{\underbrace{6}_{BD}} + \frac{EF}{\underbrace{4}_{AC}} = \frac{AF}{AB} + \frac{FB}{AB} \Rightarrow \frac{EF}{6} + \frac{EF}{4} = \frac{\overbrace{AF+FB}^{AB}}{AB} \Rightarrow EF = 2,4$$

Logo, $EF = 2,4$ m. Portanto, a alternativa **c** é a correta.

19. A. $(20)^2 = (16 + HC) \cdot 16 \Rightarrow HC = 9$

$h^2 = 16 \cdot 9 \Rightarrow h^2 = 144 \Rightarrow h = 12$

$x \cdot 12 = 20 \cdot 9 \Rightarrow 12x = 180 \Rightarrow x = 15$

Portanto, $x = 15$ cm.

B. $(8)^2 = 4 \cdot HC \Rightarrow HC = \frac{64}{4} \Rightarrow HC = 16$. Logo, $BC = 20$ cm.

Assim, temos: $x^2 = 20 \cdot 16 \Rightarrow x = 8\sqrt{5}$. Portanto, $x = 8\sqrt{5}$ cm.

C. $x \cdot 6,72 = 7 \cdot 24 \Rightarrow x = 25$. Portanto, $x = 25$ cm.

D. $(9,6)^2 = HC \cdot 7,2 \Rightarrow HC = 12,8$. Logo, $BC = 20$ cm.

Assim: $x^2 = 20 \cdot 7,2 \Rightarrow x = 12$. Portanto, $x = 12$ cm.

20. $a \cdot h = b \cdot c \Rightarrow a \cdot 7,2 = 12 \cdot 9 \Rightarrow a = 15$

$b^2 = a \cdot n \Rightarrow 9^2 = 15 \cdot n \Rightarrow n = 5,4$

$c^2 = a \cdot m \Rightarrow 12^2 = 15 \cdot m \Rightarrow m = 9,6$

Portanto, o comprimento da projeção do cateto $\overline{AB}$ sobre a hipotenusa mede 5,4 cm e o comprimento da projeção do cateto $\overline{AC}$ sobre a hipotenusa mede 9,6 cm.

21. $(P_3P_4)^2 = P_1P_3 \cdot P_2P_3 \Rightarrow 80^2 = 100 \cdot P_2P_3 \Rightarrow P_2P_3 = 64$

Logo, $P_1P_2 = 36$ cm. Assim:

$$(P_1P_4)^2 = P_1P_3 \cdot P_1P_2 \Rightarrow (P_1P_4)^2 = 100 \cdot 36 \Rightarrow P_1P_4 = 60$$

Portanto, a distância entre os postes P_1 e P_4 é 60 m e entre os postes P_2 e P_3, 64 m.

22. a) Como o raio da circunferência de centro G é 6,5 cm, $MN = 2 \cdot 6,5 = 13$ cm. Assim:

$(MN)^2 = (AN)^2 + (AM)^2 \Rightarrow 13^2 = 12^2 + (AM)^2 \Rightarrow AM = 5$

Consequentemente:

$$(AM)^2 = (SM) \cdot (NM) \Rightarrow 25 = SM \cdot 13 \Rightarrow SM \simeq 1,92$$

Logo, $GS = 6,5 - 1,92 = 4,58$. Como A' é ponto médio de $\overline{GS}$, segue que $SA' = 2,29$ cm. Assim:

$MA' = A'S + SM \Rightarrow MA' \simeq 2,29 + 1,92 \Rightarrow MA' \simeq 4,21$

Portanto, $MA' \simeq 4,21$ cm.

23. A. $x^2 = 3^2 + 4^2 \Rightarrow x^2 = 25 \Rightarrow x = 5$

B. $13^2 = 5^2 + x^2 \Rightarrow x^2 = 144 \Rightarrow x = 12$

24. $c^2 = h^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 \Rightarrow h^2 = c^2 - \frac{c^2}{4} \Rightarrow h = \sqrt{\frac{3c^2}{4}} \Rightarrow h = \frac{c\sqrt{3}}{2}$

Logo, a fórmula que expressa o comprimento da altura h de um triângulo equilátero em função do comprimento c de seu lado é $\frac{c\sqrt{3}}{2}$. Para $c = 8$, temos: $h = \frac{8\sqrt{3}}{2} \Rightarrow h = 4\sqrt{3}$.

Portanto, o comprimento da altura do triângulo equilátero de lado 8 cm mede $4\sqrt{3}$ cm.

25. Sejam a e b as dimensões do retângulo. Assim:

$$\begin{cases} 2a + 2b = 98 \\ \frac{a}{b} = \frac{3}{4} \end{cases} \Rightarrow a = 21 \text{ e } b = 28$$

Logo, $a = 21$ cm e $b = 28$ cm. Sendo d o comprimento da diagonal do retângulo, temos: $d^2 = 21^2 + 28^2 \Rightarrow d = 35$. Portanto, o comprimento da diagonal é 35 cm.

26. Seja x a diagonal de cada célula. Assim: $x^2 = 8^2 + 6^2 \Rightarrow x = 10$

Cada célula produz 240 Wh por dia e há 100 células. Sendo assim, há uma produção diária de 24 000 Wh. Além disso, a quantidade consumida é 24 000 Wh. Assim:

$$24\,000 - 20\,160 = 3\,840$$

Desse modo, essa casa produz 3 840 Wh a mais do que consome. Por fim, para determinar a quantidade de células que devem ser retiradas, efetuamos $\frac{3\,840}{240} = 16$, ou seja, para que o proprietário atinja seu objetivo, ele deve retirar 16 células. Portanto, a alternativa **a** é a correta.

27. a) Indicando por d essa distância, temos:

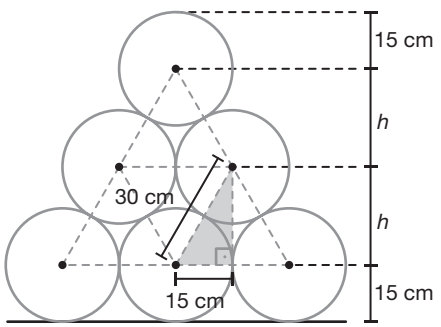
$10^2 = d^2 + 6^2 \Rightarrow d = 8$. Portanto, essa escada alcança uma distância de 8 cúbitos.

b) Indicando por a e b os comprimentos dos lados desse retângulo, temos: $\begin{cases} a \cdot b = 60 \\ \sqrt{a^2 + b^2} = 13 \end{cases}$

Logo, $a = 5$ e $b = 12$

Portanto, os lados do retângulo têm comprimentos de 5 e 12 cúbitos.

28.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

$$30^2 = h^2 + 15^2 \Rightarrow h^2 = 675 \Rightarrow h = 15\sqrt{3}$$

Seja H a altura de uma pilha com n camadas. Assim:

$$H = 15 + \underbrace{h + h + \ldots + h}_{n-1 \text{ vezes}} + 15 = 30 + \left(n - 1\right) \cdot h$$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Como $H = 1{,}86$ m, então: $30 + (n-1)\cdot 15\sqrt{3} = 186 \Rightarrow n \simeq 7$.

Assim, existem aproximadamente 7 camadas na pilha.

Calculando a quantidade por camadas, temos:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 28$$

Portanto, a pilha tem no mínimo 7 camadas e um total de 28 tubos.

29. **a)** Seja x a largura e y a altura. Para um televisor de 29", temos:

$$\begin{cases} \frac{x}{y} = \frac{16}{9} \\ x^2 + y^2 = 29^2 \end{cases}$$

Logo, $x \simeq 25{,}3$ e $y \simeq 14{,}2$.

Portanto, as dimensões aproximadas do televisor de 29" são 25,3" e 14,2".

Para um televisor de 32", temos:

$$\begin{cases} \frac{x}{y} = \frac{16}{9} \\ x^2 + y^2 = 32^2 \end{cases}$$

Logo, $x \simeq 27{,}9$ e $y \simeq 15{,}7$.

Portanto, as dimensões aproximadas do televisor de 32" são 27,9" e 15,7".

Para um televisor de 42", temos:

$$\begin{cases} \frac{x}{y} = \frac{16}{9} \\ x^2 + y^2 = 42^2 \end{cases}$$

Logo, $x \simeq 36{,}6$ e $y \simeq 20{,}6$.

Portanto, as dimensões aproximadas do televisor de 42" são 36,6" e 20,6".

b) Seja d o comprimento da diagonal dessa tela. Assim:

$$d^2 = (110{,}69)^2 + (62{,}26)^2 \Rightarrow d \simeq 127$$

Consequentemente, $\frac{127}{2{,}54} = 50$. Portanto, a tela desse televisor tem 50".

30. **a)** Porque $1^2 = 0{,}6^2 + 0{,}8^2$, e se em um triângulo qualquer o quadrado do comprimento do lado maior for igual à soma dos quadrados dos comprimentos dos outros lados, então o triângulo é retângulo.

b) • Triângulo ABC: $37^2 = 35^2 + 12^2$.

• Triângulo EFG: $35{,}7^2 \neq 29^2 + 20{,}93^2$.

• Triângulo MNO: $5{,}3^2 = 4{,}5^2 + 2{,}8^2$.

Portanto, ABC e MNO são triângulos retângulos.

c) Seja a o comprimento do cateto desconhecido. Assim:

$$7{,}5^2 = 4{,}5^2 + a^2 \Rightarrow a = 6$$

Desse modo, o perímetro da região destinada à construção do cômodo é:

$$2 \cdot 4{,}5 + 2 \cdot 6 = 21$$

Portanto, o perímetro da região mede 21 m.

31. $12^2 = AC^2 + 8^2 \Rightarrow 144 = AC^2 + 64 \Rightarrow AC = 4\sqrt{5}$

Assim:

• $\text{sen}\beta = \frac{4\sqrt{5}}{12} = \frac{\sqrt{5}}{3}$ • $\cos\beta = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$ • $\text{tg}\beta = \frac{4\sqrt{5}}{8} = \frac{\sqrt{5}}{2}$

32. • $\frac{BC}{6\sqrt{10}} = \frac{3}{2} \Rightarrow BC = 9\sqrt{10}$

• $\frac{27}{A'B'} = \frac{3}{2} \Rightarrow A'B' = 18$

• $BC^2 = AC^2 + 27^2 \Rightarrow \left(9\sqrt{10}\right)^2 = AC^2 + 729 \Rightarrow AC = 9$

• $\frac{9}{A'C'} = \frac{3}{2} \Rightarrow A'C' = 6$

a) $\text{sen}\alpha = \frac{9}{9\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$

b) $\cos\alpha = \frac{27}{9\sqrt{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$

c) $\text{tg}\alpha = \frac{9}{27} = \frac{1}{3}$

d) $\text{sen}\beta = \frac{27}{9\sqrt{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$

e) $\cos\beta = \frac{9}{9\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$

f) $\text{tg}\beta = \frac{27}{9} = 3$

33. $2 \cdot AD + 2 \cdot 16 = 76 \Rightarrow AD = 22$. Assim: $\text{tg}\alpha = \frac{CD}{DE} = \frac{16}{22-4} = \frac{8}{9}$.

Portanto, $\text{tg}\alpha = \frac{8}{9}$.

34. A veracidade da igualdade enunciada nessa tarefa está mostrada na seção **Respostas**, no final da reprodução do **Livro do Estudante** deste volume.

35. $\text{sen}\hat{C} = \frac{\sqrt{15}}{8} \Rightarrow \frac{AB}{16} = \frac{\sqrt{15}}{8} \Rightarrow AB = 2\sqrt{15}$

$(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2 \Rightarrow 16^2 = \left(2\sqrt{15}\right)^2 + (BC)^2 \Rightarrow BC = 14$

Logo:

$$\cos\hat{C} = \frac{BC}{AC} = \frac{14}{16} = \frac{7}{8}$$

$$\text{sen}\hat{E} = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{11{,}4}{DE} = \frac{3}{5} \Rightarrow DE = 19$$

$$(DE)^2 = (DF)^2 + (EF)^2 \Rightarrow 19^2 = 11{,}4^2 + (EF)^2 \Rightarrow EF = 15{,}2$$

Logo:

$$\cos\hat{E} = \frac{EF}{DE} = \frac{15{,}2}{19} = \frac{4}{5}$$

$$\text{sen}\hat{G} = \frac{5\sqrt{41}}{41} \Rightarrow \frac{HI}{3\sqrt{41}} = \frac{5\sqrt{41}}{41} \Rightarrow HI = 15$$

$$(GH)^2 = (GI)^2 + (HI)^2 \Rightarrow \left(3\sqrt{41}\right)^2 = (GI)^2 + 15^2 \Rightarrow GI = 12$$

Logo:

$$\cos\hat{G} = \frac{GI}{GH} = \frac{12}{3\sqrt{41}} = \frac{4\sqrt{41}}{41}$$

36. **a)** $\cos^2\alpha + \text{sen}^2\alpha = 1 \Rightarrow \cos^2\alpha + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 \Rightarrow \cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\text{tg}\alpha = \frac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

c) $\cos\alpha = \frac{5\sqrt{3}}{AC} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{5\sqrt{3}}{AC} \Rightarrow AC = 10$

Portanto, o comprimento da hipotenusa é 10 m.

d) $\text{tg}\alpha = \frac{BC}{5\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{BC}{5\sqrt{3}} \Rightarrow BC = 5$

Portanto, o comprimento do cateto oposto a α é 5 m.

37. $\text{tg}\alpha = \frac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\cos\beta}{\text{sen}\beta} = \frac{1}{\text{tg}\beta} \Rightarrow \text{tg}\alpha = \frac{1}{\text{tg}\beta}$. Assim:

$$\frac{1}{\text{tg}\beta} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{\text{sen}\beta}{\cos\beta} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{\text{sen}\beta}{\sqrt{1-\text{sen}^2\beta}} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{\text{sen}^2\beta}{1-\text{sen}^2\beta} = \frac{9}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4\text{sen}^2\beta = 9 - 9\text{sen}^2\beta \Rightarrow 13\text{sen}^2\beta = 9 \Rightarrow \text{sen}\beta = \frac{3\sqrt{13}}{13}$$

38. A. $\cos 60° = \frac{x}{26} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{x}{26} \Rightarrow x = 13$. Portanto, $x = 13$ cm.

B. $\text{tg}30° = \frac{16}{x} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{16}{x} \Rightarrow x = 16\sqrt{3}$. Portanto, $x = 16\sqrt{3}$ cm.

C. $\text{sen}45° = \frac{x}{22} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{x}{22} \Rightarrow x = 11\sqrt{2}$.

Portanto, $x = 11\sqrt{2}$ cm.

D. $\text{sen}60° = \frac{MK}{18} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{MK}{18} \Rightarrow MK = 9\sqrt{3}$. Assim:

$\cos 30° = \frac{x}{y} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{x}{9\sqrt{3}} \Rightarrow x = \frac{27}{2}$

Portanto, $x = \frac{27}{2}$ cm.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

39. Indicando por α o ângulo que está em verde em cada um dos itens, temos:

A. $\text{sen}\alpha = \frac{18}{36} \Rightarrow \text{sen}\alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 30°$

B. $\text{tg}\alpha = \frac{30}{10\sqrt{3}} \Rightarrow \text{tg}\alpha = \sqrt{3} \Rightarrow \alpha = 60°$

C. $\cos\alpha = \frac{28}{28\sqrt{2}} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \alpha = 45°$

40. O triângulo *ABC* é retângulo e dois de seus ângulos são congruentes, logo seus ângulos medem 90°, 45° e 45°.

$$\text{sen}45° = \frac{AB}{BC} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{5\sqrt{2}}{BC} \Rightarrow BC = 10$$

Portanto, o comprimento de $\overline{BC}$ mede 10 cm.

41. $\cos 60° = \frac{AB}{AC} \Rightarrow 0{,}5 = \frac{4{,}5}{AC} \Rightarrow AC = 9$

$\text{sen}60° = \frac{BC}{AC} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{BC}{9} \Rightarrow BC = 4{,}5\sqrt{3}$

Assim, a soma das áreas dos quadrados é:

$$(4{,}5)^2 + 9^2 + \left(4{,}5\sqrt{3}\right)^2 = 20{,}25 + 81 + 60{,}75 = 162$$

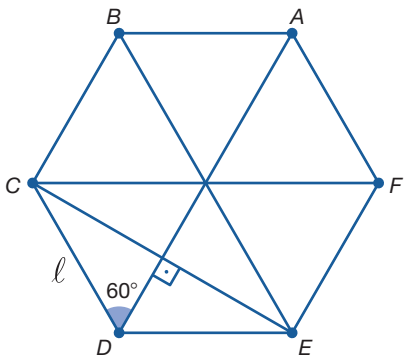
Logo, a soma das medidas das áreas dos três quadrados é 162 cm². Portanto, a alternativa **a** é a correta.

42. **a)** Como a circunferência tem raio medindo 5 m, a medida da distância entre os cones *A* e *B* é 10 m.

b) $\cos 30° = \frac{AC}{AB} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{AC}{10} \Rightarrow AC = 5\sqrt{3}$

Portanto, a distância entre os cones *A* e *C* é $5\sqrt{3}$ m.

43.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

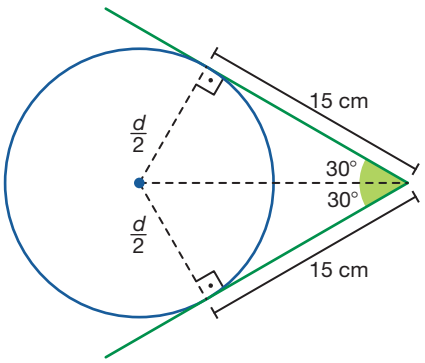
Como o perímetro do hexágono é 6 cm, cada lado da figura tem 1 cm de comprimento.

Logo:

- $\text{sen}60° = \frac{\frac{CE}{2}}{1} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\frac{CE}{2}}{1} \Rightarrow CE = \sqrt{3}$
- $AD = 2 \cdot 1 = 2$

Portanto, $CE = \sqrt{3}$ cm e $AD = 2$ cm.

44.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

$$\text{tg}30° = \frac{\frac{d}{2}}{15} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\frac{d}{2}}{15} \Rightarrow d \simeq 17{,}3$$

Portanto, o comprimento do diâmetro do tubo é, aproximadamente, 17,3 cm.

45. **a)** $\text{tg}30° = \frac{BD}{a} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{BD}{a} \Rightarrow BD = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

$\text{tg}60° = \frac{BD}{b} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{BD}{b} \Rightarrow BD = b\sqrt{3}$

Assim, $\frac{a\sqrt{3}}{3} = b\sqrt{3} \Rightarrow \frac{a}{b} = 3$.

b) Como $B\hat{D}C$ é o complementar de $B\hat{C}D$, então:

$$\text{sen}\left(B\hat{D}C\right) = \cos\left(B\hat{C}D\right) = \cos 60° = \frac{1}{2}$$

c) Como $A\hat{D}B$ é o complementar de $B\hat{A}D$, então:

$$\text{tg}\left(A\hat{D}B\right) = \frac{\text{sen}\left(A\hat{D}B\right)}{\cos\left(A\hat{D}B\right)} = \frac{\text{sen}60°}{\cos 60°} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

46. $\text{tg}\alpha = \frac{9\sqrt{3}}{27} \Rightarrow \text{tg}\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \alpha = 30°$

$\text{tg}\gamma = \frac{27}{9\sqrt{3}} \Rightarrow \text{tg}\gamma = \sqrt{3} \Rightarrow \gamma = 60°$

Como α, β e γ são os ângulos internos do triângulo, temos:

$$30° + \beta + 60° = 180° \Rightarrow \beta = 90°$$

47. **a)** sen78° = 0,978; cos78° = 0,208; tg78° = 4,705

b) sen5° = 0,087; cos5° = 0,996; tg5° = 0,087

c) sen52° = 0,788; cos52° = 0,616; tg52° = 1,280

48. Indicando por α o ângulo desconhecido em cada um dos itens, temos:

a) $\text{sen}\alpha = 0{,}21 \Rightarrow \alpha \simeq 12°$

b) $\cos\alpha = 0{,}239 \Rightarrow \alpha \simeq 76°$

c) $\text{tg}\alpha = 0{,}858 \Rightarrow \alpha \simeq 41°$

49. Sejam h_1 a altura da torre e h_2 a altura da pessoa. Assim:

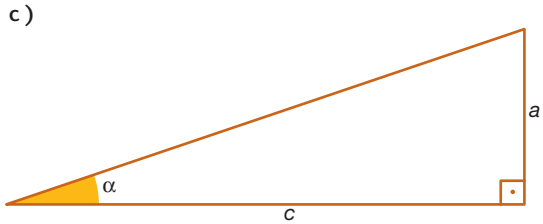
$$\text{tg}30° = \frac{33}{h_1} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{33}{h_1} \Rightarrow h_1 \simeq 57$$

$$\text{tg}60° = \frac{3}{h_2} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{3}{h_2} \Rightarrow h_2 \simeq 1{,}73$$

Portanto, a altura da torre é aproximadamente 57 m e a altura da pessoa, aproximadamente 1,73 m.

50. **b)** Se para uma rampa de altura 1 m é necessário que o comprimento horizontal seja ao menos 12 m, para uma rampa com metade dessa altura, 50 cm, precisamos de metade de 12 m, isto é, 6 m ou 600 cm.

c)



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

$$\text{tg}\alpha = \frac{a}{c} \Rightarrow \text{tg}\alpha = \frac{1}{12} \Rightarrow \text{tg}\alpha \simeq 0{,}0833$$

Portanto, de acordo com a tabela trigonométrica, concluímos que o ângulo deve estar entre 4° e 5°.

d) Sugestão de resposta: Banheiros adaptados para pessoas em cadeira de rodas e piso tátil para pessoas com deficiência visual.

52. A. $\text{sen}53° = \frac{20}{x} \Rightarrow 0{,}79863551 = \frac{20}{x} \Rightarrow x \simeq 25$

Portanto, $x \simeq 25$ cm.

B. $\cos 20° = \frac{16}{x} \Rightarrow 0{,}93969262 = \frac{16}{x} \Rightarrow x \simeq 17$

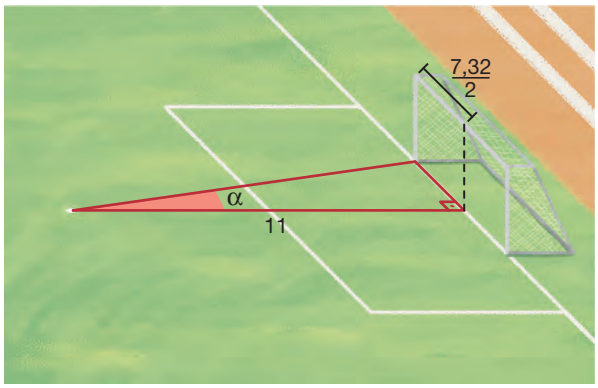
Portanto, $x \simeq 17$ cm.

C. $\text{tg}49° = \frac{15}{x} \Rightarrow 1{,}150368407 = \frac{15}{x} \Rightarrow x \simeq 13$

Portanto, $x \simeq 13$ cm.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

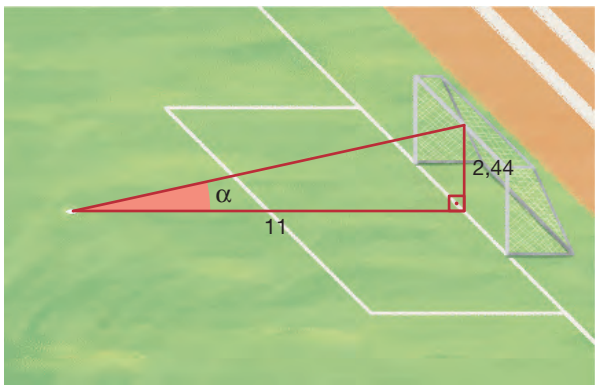
54. a)



$$tg\alpha = \frac{\frac{7,32}{2}}{11} \Rightarrow tg\alpha \simeq 0,333 \Rightarrow \alpha \simeq 18°$$

Portanto, o jogador deve chutar a bola formando um ângulo cuja medida é aproximadamente 18°.

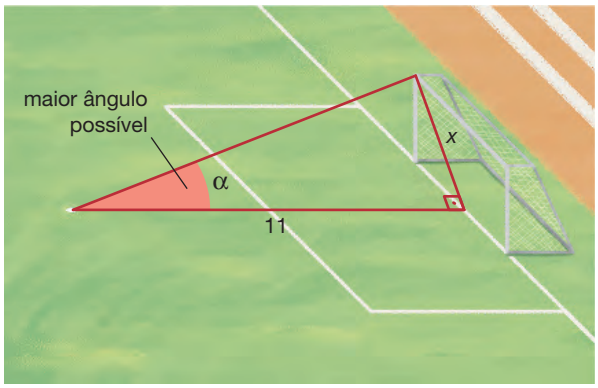
b)



$$tg\alpha = \frac{2,44}{11} \Rightarrow tg\alpha \simeq 0,222 \Rightarrow \alpha \simeq 13°$$

Portanto, o jogador deve chutar a bola formando um ângulo cuja medida é aproximadamente 13°.

c)



$$x^2 = 2,44^2 + \left(\frac{7,32}{2}\right)^2 \Rightarrow x = 4,4$$

$$tg\alpha = \frac{4,4}{11} \Rightarrow tg\alpha \simeq 0,4 \Rightarrow \alpha \simeq 22°$$

Portanto, se o jogador chutar a bola em um ângulo maior do que 30° em relação ao centro do gol, ela não atingirá a área interna às traves, pois o maior ângulo possível para acertar o gol é aproximadamente 22°, atingido quando a bola é chutada em direção ao canto superior esquerdo ou direito.

ILUSTRAÇÕES: LEONARDO GIBRAN/ARQUIVO DA EDITORA

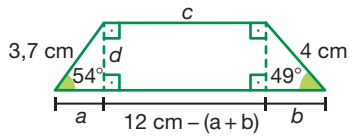
55. a) $tg65° = \frac{14}{AB} \Rightarrow 2,145 = \frac{14}{AB} \Rightarrow AB \simeq 6,5$

Assim:

$$2 \cdot 6,5 + 2 \cdot 14 = 13 + 28 = 41$$

Portanto, o perímetro desse retângulo é, aproximadamente, 41 cm.

b)



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

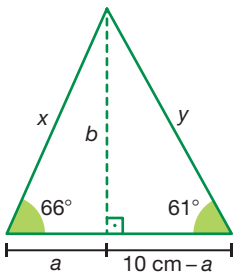
- $\cos 54° = \frac{a}{3,7} \Rightarrow 0,588 = \frac{a}{3,7} \Rightarrow a \simeq 2,2$
- $\cos 49° = \frac{b}{4} \Rightarrow 0,656 = \frac{b}{4} \Rightarrow b \simeq 2,6$
- $c = 12 - (a + b) \Rightarrow c = 12 - (2,2 + 2,6) \Rightarrow c \simeq 7,2$

Assim:

$$3,7 + 7,2 + 4 + 12 = 26,9$$

Portanto, o perímetro do trapézio é, aproximadamente, 26,9 cm.

c)



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

- $tg66° = \frac{b}{a} \Rightarrow 2,246 = \frac{b}{a} \Rightarrow a = \frac{b}{2,246}$
- $tg61° = \frac{b}{10 - a} \Rightarrow 1,804 = \frac{b}{10 - a} \Rightarrow$
$\Rightarrow a = \frac{18,04 - b}{1,804}$

Assim, temos:

$$\frac{b}{2,246} = \frac{18,04 - b}{1,804} \Rightarrow b \simeq 10$$

Como $a = \frac{b}{2,246}$, segue que $a \simeq 4,45$.

Agora, vamos calcular o comprimento dos lados do triângulo.

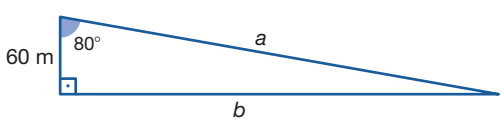
- $\text{sen}66° = \frac{10}{x} \Rightarrow x \simeq 10,9$
- $\text{sen}61° = \frac{10}{y} \Rightarrow y \simeq 11,4$

Desse modo, o perímetro P desse triângulo é aproximadamente:

$$P = 10 + 10,9 + 11,4 = 32,3$$

Portanto, o perímetro desse triângulo mede, aproximadamente, 32,3 cm.

56.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

$$\cos 80° = \frac{60}{a} \Rightarrow 0,174 = \frac{60}{a} \Rightarrow a \simeq 345$$

$$tg80° = \frac{b}{60} \Rightarrow 5,671 = \frac{b}{60} \Rightarrow b \simeq 340$$

Logo, $a \simeq 345$ m e $b \simeq 340$ m.

a) Falsa, pois essa medida é, aproximadamente, 98% da medida do comprimento do cabo.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

b) Verdadeira, pois o praticante vai percorrer uma distância de 348 m, que é a medida da distância aproximada do percurso (12 · 29).

c) Falsa, pois nesse caso o praticante vai percorrer uma distância vertical que mede 100 m, ou seja: 5 · 20 m.

d) Falsa, pois a distância do percurso mede, aproximadamente, 345 m.

Portanto, a alternativa **b** é a correta.

57. Como $B\hat{A}C = 87°$, no triângulo ADE, temos:

$$\text{tg}87° = \frac{DE}{AD} \Rightarrow 19{,}081 = \frac{DE}{1{,}7} \Rightarrow DE \simeq 32$$

Portanto, a distância do navio até a praia é de, aproximadamente, 32 m.

58. a) 11 000 m = 11 km. Assim:

$$r = \frac{h \cdot \text{sen}\alpha}{1 - \text{sen}\alpha} \Rightarrow r = \frac{11 \cdot \text{sen}86{,}53°}{1 - \text{sen}86{,}53°} \Rightarrow r \simeq 5\,989$$

Portanto, o comprimento aproximado do raio da Terra nessa situação é 5 989 km.

b) 6 380 km − 5 989 km = 391 km

Portanto, a diferença é de aproximadamente 391 km.

59. a) $\text{sen}95° = \text{sen}(180° - 95°) = \text{sen}85° = 0{,}996$

$\cos 95° = -\cos(180° - 95°) = -\cos 85° = -0{,}087$

b) $\text{sen}110° = \text{sen}(180° - 110°) = \text{sen}70° = 0{,}940$

$\cos 110° = -\cos(180° - 110°) = -\cos 70° = -0{,}342$

c) $\text{sen}125° = \text{sen}(180° - 125°) = \text{sen}55° = 0{,}819$

$\cos 125° = -\cos(180° - 125°) = -\cos 55° = -0{,}574$

d) $\text{sen}168° = \text{sen}(180° - 168°) = \text{sen}12° = 0{,}208$

$\cos 168° = -\cos(180° - 168°) = -\cos 12° = -0{,}978$

e) $\text{sen}174° = \text{sen}(180° - 174°) = \text{sen}6° = 0{,}105$

$\cos 174° = -\cos(180° - 174°) = -\cos 6° = -0{,}995$

60. A. $\frac{x}{\text{sen}68°} = \frac{96}{\text{sen}58°} \Rightarrow \frac{x}{0{,}927} = \frac{96}{0{,}848} \Rightarrow x \simeq 105$

$\frac{y}{\text{sen}54°} = \frac{96}{\text{sen}58°} \Rightarrow \frac{y}{0{,}809} = \frac{96}{0{,}848} \Rightarrow y \simeq 91{,}6$

Portanto, $x \simeq 105$ m e $y \simeq 91{,}6$ m.

B. $\frac{x}{\text{sen}68°} = \frac{55}{\text{sen}27°} \Rightarrow \frac{x}{0{,}927} = \frac{55}{0{,}454} \Rightarrow x \simeq 112{,}3$

$\frac{y}{\text{sen}85°} = \frac{55}{\text{sen}27°} \Rightarrow \frac{y}{0{,}996} = \frac{55}{0{,}454} \Rightarrow y \simeq 120{,}7$

Portanto, $x \simeq 112{,}3$ m e $y \simeq 120{,}7$ m.

C. $\frac{x}{\text{sen}28°} = \frac{90}{\text{sen}72°} \Rightarrow \frac{x}{0{,}469} = \frac{90}{0{,}951} \Rightarrow x \simeq 44{,}4$

$\frac{y}{\text{sen}80°} = \frac{90}{\text{sen}72°} \Rightarrow \frac{y}{0{,}985} = \frac{90}{0{,}951} \Rightarrow y \simeq 93{,}2$

Portanto, $x \simeq 44{,}4$ m e $y \simeq 93{,}2$ m.

D. $\frac{x}{\text{sen}25°} = \frac{120}{\text{sen}73°} \Rightarrow \frac{x}{0{,}423} = \frac{120}{0{,}956} \Rightarrow x \simeq 53$

$\frac{y}{\text{sen}82°} = \frac{120}{\text{sen}73°} \Rightarrow \frac{y}{0{,}990} = \frac{120}{0{,}956} \Rightarrow y \simeq 124{,}3$

Portanto, $x \simeq 53$ m e $y \simeq 124{,}3$ m.

E. $\frac{x}{\text{sen}50°} = \frac{110}{\text{sen}60°} \Rightarrow \frac{x}{0{,}766} = \frac{110}{0{,}866} \Rightarrow x \simeq 97{,}3$

$\frac{y}{\text{sen}70°} = \frac{110}{\text{sen}60°} \Rightarrow \frac{y}{0{,}940} = \frac{110}{0{,}866} \Rightarrow y \simeq 119{,}4$

Portanto, $x \simeq 97{,}3$ m e $y \simeq 119{,}4$ m.

F. $\frac{x}{\text{sen}78°} = \frac{80}{\text{sen}64°} \Rightarrow \frac{x}{0{,}978} = \frac{80}{0{,}899} \Rightarrow x \simeq 87$

$\frac{y}{\text{sen}38°} = \frac{80}{\text{sen}64°} \Rightarrow \frac{y}{0{,}616} = \frac{80}{0{,}899} \Rightarrow y \simeq 54{,}8$

Portanto, $x \simeq 87$ m e $y \simeq 54{,}8$ m.

61. $43° + 43° + \hat{A} = 180° \Rightarrow \hat{A} = 94°$

$\text{sen}94° = \text{sen}(180° - 94°) = \text{sen}86° \simeq 0{,}998$

Assim: $\frac{AB}{\text{sen}43°} = \frac{50}{\text{sen}94°} \Rightarrow \frac{x}{0{,}682} = \frac{50}{0{,}998} \Rightarrow x \simeq 34{,}2$.

Portanto, os comprimentos dos lados medem, aproximadamente, 50 cm, 34,2 cm e 34,2 cm, e o seno do ângulo oposto à base é, aproximadamente, 0,998.

62. Como o triângulo é isósceles, os ângulos adjacentes à base (x) são congruentes. Logo: $x + x + 104° = 180° \Rightarrow x = 38°$.

Calculando sen104°, obtemos:

$$\text{sen}104° = \text{sen}(180° - 104°) = \text{sen}76° \simeq 0{,}970$$

Indicando por y os lados congruentes do triângulo, temos:

$$\frac{75}{\text{sen}104°} = \frac{y}{\text{sen}38°} \Rightarrow \frac{75}{0{,}970} = \frac{y}{0{,}616} \Rightarrow y \simeq 47{,}6$$

Portanto, os comprimentos dos lados são aproximadamente 75 cm, 47,6 cm e 47,6 cm, e o seno do ângulo oposto à base é, aproximadamente, 0,616.

63. A. $\frac{AB}{\text{sen}54°} = \frac{BE}{\text{sen}80°} \Rightarrow \frac{AB}{0{,}809} = \frac{4}{0{,}985} \Rightarrow AB \simeq 3{,}3$

$\frac{AE}{\text{sen}46°} = \frac{BE}{\text{sen}80°} \Rightarrow \frac{AE}{0{,}719} = \frac{4}{0{,}985} \Rightarrow AE \simeq 2{,}9$

Como $\triangle ABE \sim \triangle ACD$, temos:

- $\frac{BE}{CD} = \frac{AB}{AB + BC} \Rightarrow \frac{4}{12} = \frac{3{,}3}{3{,}3 + a} \Rightarrow a = 6{,}6$
- $\frac{BE}{CD} = \frac{AE}{AE + DE} \Rightarrow \frac{4}{12} = \frac{2{,}9}{2{,}9 + b} \Rightarrow b = 5{,}8$

Portanto, $a \simeq 6{,}6$ m e $b \simeq 5{,}8$ m.

B. $\frac{FG}{\text{sen}50°} = \frac{GJ}{\text{sen}72°} \Rightarrow \frac{FG}{0{,}766} = \frac{4}{0{,}951} \Rightarrow FG \simeq 3{,}22$

$\frac{FJ}{\text{sen}58°} = \frac{GJ}{\text{sen}72°} \Rightarrow \frac{FJ}{0{,}848} = \frac{4}{0{,}951} \Rightarrow FJ \simeq 3{,}57$

Como $\triangle FGJ \sim \triangle FHI$, temos:

- $\frac{GJ}{HI} = \frac{FG}{FG + GH} \Rightarrow \frac{4}{10} = \frac{3{,}22}{3{,}22 + a} \Rightarrow a \simeq 4{,}83$
- $\frac{GJ}{HI} = \frac{FJ}{FJ + JI} \Rightarrow \frac{4}{10} = \frac{3{,}57}{3{,}57 + b} \Rightarrow b \simeq 5{,}4$

Portanto, $a \simeq 4{,}83$ m e $b \simeq 5{,}4$ m.

C. $\frac{KL}{\text{sen}60°} = \frac{LO}{\text{sen}73°} \Rightarrow \frac{KL}{0{,}866} = \frac{5}{0{,}956} \Rightarrow KL \simeq 4{,}53$

$\frac{KO}{\text{sen}47°} = \frac{LO}{\text{sen}73°} \Rightarrow \frac{KO}{0{,}731} = \frac{5}{0{,}956} \Rightarrow KO \simeq 3{,}82$

Como $\triangle KLO \sim \triangle KMN$, temos:

- $\frac{LO}{MN} = \frac{KL}{KL + LM} \Rightarrow \frac{5}{18} = \frac{4{,}53}{4{,}53 + a} \Rightarrow a \simeq 11{,}8$
- $\frac{LO}{MN} = \frac{KO}{KO + ON} \Rightarrow \frac{5}{18} = \frac{3{,}82}{3{,}82 + b} \Rightarrow b \simeq 9{,}9$

Portanto, $a \simeq 11{,}8$ m e $b \simeq 9{,}9$ m.

64. $\frac{2x + 10}{\text{sen}120°} = \frac{\sqrt{3}x}{\text{sen}30°} \Rightarrow \frac{2x + 10}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}x}{\frac{1}{2}} \Rightarrow 2x + 10 = 3x \Rightarrow x = 10$

65. a) Inicialmente, calculamos a distância entre o ponto C e o carro A.

$$\frac{AB}{\text{sen}36°} = \frac{AC}{\text{sen}38°} \Rightarrow \frac{400}{0{,}588} = \frac{AC}{0{,}616} \Rightarrow AC \simeq 419$$

Agora, calculamos a distância entre o ponto C e o carro B. Sendo $\text{sen}106° = \text{sen}74°$, temos:

$$\frac{AB}{\text{sen}36°} = \frac{BC}{\text{sen}106°} \Rightarrow \frac{400}{0{,}588} = \frac{BC}{0{,}961} \Rightarrow BC \simeq 654$$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Portanto, a distância entre o carro *A* e o ponto *C* é aproximadamente 419 m e a distância entre o carro *B* e o ponto *C* é aproximadamente 654 m.

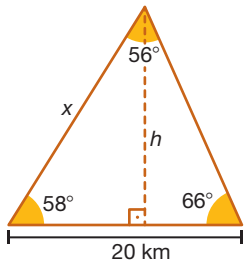
b) $v_A = \frac{AC}{t} \Rightarrow 18 = \frac{419}{t} \Rightarrow t \simeq 23$

Portanto, o tempo é aproximadamente 23 s.

c) $v_B = \frac{BC}{t} \Rightarrow v_B = \frac{654}{23} \Rightarrow v_B \simeq 28{,}4$

Portanto, a velocidade do carro *B* deve ser aproximadamente 28 m/s.

66.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

$$\frac{20}{\text{sen}56°} = \frac{x}{\text{sen}66°} \Rightarrow \frac{20}{0{,}829} = \frac{x}{0{,}914} \Rightarrow x = 22{,}05$$

Assim:

$$\text{sen}58° = \frac{h}{x} \Rightarrow 0{,}848 = \frac{h}{22{,}1} \Rightarrow h \simeq 18{,}7$$

Portanto, a altura do balão em relação ao plano horizontal mede aproximadamente 18,7 km.

67. A demonstração referente a essa tarefa está apresentada na seção **Respostas**, no final da reprodução do **Livro do Estudante** deste volume.

68. **a)** Inicialmente, calculamos a distância entre o navio *A* e o porto.

$$\frac{AB}{\text{sen}50°} = \frac{AC}{\text{sen}74°} \Rightarrow \frac{90}{0{,}766} = \frac{AC}{0{,}961} \Rightarrow AC \simeq 113$$

Agora, calculamos a distância entre o navio *B* e o porto.

$$\frac{AB}{\text{sen}50°} = \frac{BC}{\text{sen}56°} \Rightarrow \frac{90}{0{,}766} = \frac{BC}{0{,}829} \Rightarrow BC \simeq 97$$

Como $BC < AC$, temos que o navio *B* está mais próximo do porto.

b) Calculamos o tempo gasto pelo navio *A* (t_A) e o tempo gasto pelo navio *B* (t_B).

$$v_A = \frac{AC}{t_A} \Rightarrow 37 = \frac{113}{t_A} \Rightarrow t_A \simeq 3$$

$$v_B = \frac{BC}{t_B} \Rightarrow 32 = \frac{97}{t_B} \Rightarrow t_B \simeq 3$$

Portanto, cada navio chegará ao porto em aproximadamente 3 h.

c) $v_A = \frac{AC}{t_A} \Rightarrow v_A = \frac{113}{3{,}5} \simeq 32$

Portanto, o navio *A* deverá navegar a 32 km/h.

70. Em cada item, seja *x* a medida do comprimento, em metros, do lado oposto ao ângulo dado e *P* a medida do perímetro, em metros.

A. $x^2 = 20^2 + 15^2 - 2 \cdot 20 \cdot 15 \cdot \cos 65° \Rightarrow x \simeq 19{,}3$

Assim: $P = 20 + 15 + 19{,}3 = 54{,}3$.

Portanto, o perímetro é aproximadamente 54,3 m.

B. $x^2 = 24^2 + 18^2 - 2 \cdot 24 \cdot 18 \cdot \cos 52° \Rightarrow x \simeq 19{,}2$

Assim: $P = 24 + 18 + 19{,}2 = 61{,}2$.

Portanto, o perímetro é aproximadamente 61,2 m.

C. $x^2 = 18^2 + 18^2 - 2 \cdot 18 \cdot 18 \cdot \underbrace{\cos 112°}_{-\cos 68°} \Rightarrow x \simeq 29{,}9$

Logo: $P = 18 + 18 + 29{,}9 = 65{,}9$.

Portanto, o perímetro é aproximadamente 65,9 m.

D. $x^2 = 12^2 + 14^2 - 2 \cdot 12 \cdot 14 \cdot \underbrace{\cos 116°}_{-\cos 64°} \Rightarrow x \simeq 22{,}1$

Logo: $P = 12 + 14 + 22{,}1 = 48{,}1$.

Portanto, o perímetro é aproximadamente 48,1 m.

E. $x^2 = 18^2 + 16^2 - 2 \cdot 18 \cdot 16 \cdot \cos 68° \Rightarrow x \simeq 19{,}1$

Logo: $P = 18 + 16 + 19{,}1 = 53{,}1$.

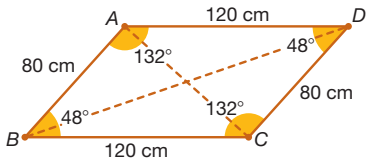
Portanto, o perímetro é aproximadamente 53,1 m.

F. $x^2 = 19^2 + 25^2 - 2 \cdot 19 \cdot 25 \cdot \cos 55° \Rightarrow x \simeq 21$

Assim: $P = 19 + 25 + 21 = 65$.

Portanto, o perímetro é aproximadamente 65 m.

71.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

No triângulo *BCD*, temos:

$$(BD)^2 = (BC)^2 + (CD)^2 - 2 \cdot (BC) \cdot (CD) \cdot \cos\hat{C}$$

$$(BD)^2 = 120^2 + 80^2 - 2 \cdot 120 \cdot 80 \cdot \underbrace{\cos 132°}_{-\cos 48°}$$

$$(BD)^2 = 20\,800 - 19\,200 \cdot (-0{,}669)$$

$$BD \simeq 183{,}4$$

Já no triângulo *ABC*, temos:

$$(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2 - 2 \cdot (AB) \cdot (BC) \cdot \cos\hat{B}$$

$$(AC)^2 = 80^2 + 120^2 - 2 \cdot 80 \cdot 120 \cdot \cos 48°$$

$$(AC)^2 = 20\,800 - 19\,200 \cdot 0{,}669$$

$$AC \simeq 89{,}2$$

Portanto, as medidas são, aproximadamente, 183,4 cm e 89,2 cm.

72. Quando o relógio marca 4 h o menor ângulo formado entre os ponteiros é 120°. Indicando por *x* a distância entre as extremidades desses ponteiros, segue que:

$$x^2 = 25^2 + 40^2 - 2 \cdot 25 \cdot 40 \cdot \underbrace{\cos 120°}_{-\cos 60°} \Rightarrow x \simeq 56{,}8$$

Portanto, a distância entre as extremidades dos ponteiros é aproximadamente 56,8 cm.

73. A. $72^2 = 54^2 + 90^2 - 2 \cdot 54 \cdot 90 \cdot \cos\alpha \Rightarrow$
$\Rightarrow \cos\alpha = 0{,}6 \Rightarrow \alpha \simeq 53°$

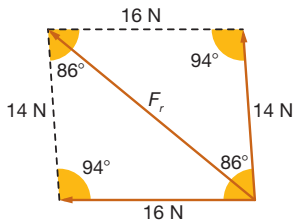
B. $56^2 = 48^2 + 72^2 - 2 \cdot 48 \cdot 72 \cdot \cos\alpha \Rightarrow$
$\Rightarrow \cos\alpha \simeq 0{,}630 \Rightarrow \alpha \simeq 51°$

C. $110^2 = 71^2 + 45^2 - 2 \cdot 71 \cdot 45 \cdot \cos\alpha \Rightarrow -\cos\alpha \simeq 0{,}788 \Rightarrow$
$\Rightarrow \cos(180° - \alpha) \simeq 0{,}788 \Rightarrow 180° - \alpha \simeq 38° \Rightarrow \alpha \simeq 142°$

D. $95^2 = 56^2 + 53^2 - 2 \cdot 56 \cdot 53 \cdot \cos\alpha \Rightarrow -\cos\alpha \simeq 0{,}519 \Rightarrow$
$\Rightarrow \cos(180° - \alpha) \simeq 0{,}519 \Rightarrow 180° - \alpha \simeq 59° \Rightarrow \alpha \simeq 121°$

74. Não, pois: $\left(\sqrt{76}\right)^2 = 10^2 + (AC)^2 - 2 \cdot 10 \cdot (AC) \cdot \cos 60° \Rightarrow$
$\Rightarrow (AC)^2 - 10 \cdot (AC) + 24 = 0 \Rightarrow AC = 6$ ou $AC = 4$.
Logo, $AC = 6$ cm ou $AC = 4$ cm. Portanto, os triângulos cujos comprimentos dos lados são 10 cm, $\sqrt{76}$ cm e 6 cm ou 10 cm, $\sqrt{76}$ cm e 4 cm têm as características citadas, mas não são congruentes.

75.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

$$F_r = 14^2 + 16^2 - 2 \cdot 14 \cdot 16 \cdot \underbrace{\cos 94°}_{-\cos 86°} \Rightarrow F_r \simeq 22$$

Portanto, $F_r \simeq 22$ N.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

76. • $(AB)^2 = 30^2 + 20^2 - 2 \cdot 30 \cdot 20 \cdot \cos 60° \Rightarrow AB \simeq 26{,}5$

• $(BC)^2 = 60^2 + 35^2 - 2 \cdot 60 \cdot 35 \cdot \cos 35° \Rightarrow BC \simeq 37{,}2$

• $(AC)^2 = 40^2 + 30^2 - 2 \cdot 40 \cdot 30 \cdot \cos 58° \Rightarrow AC \simeq 35$

Agora, calculamos o perímetro P do triângulo ABC:

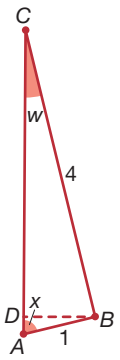
$$P = AB + BC + AC = 26{,}5 + 37{,}2 + 35 = 98{,}7$$

Assim, o perímetro aproximado do $\triangle ABC$ é 98,7 m.

77. $(AB)^2 = 500^2 + 1000^2 - 2 \cdot 500 \cdot 1000 \cdot \cos 75° \Rightarrow AB \simeq 995{,}5$

Assim, a diferença entre a distância percorrida pelo *drone* e a distância em linha reta entre A e B é dada por: $1500 - 995{,}5 \simeq 504{,}5$. Portanto, o *drone* teria percorrido aproximadamente 504,5 m a menos nessa entrega.

78.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

No triângulo retângulo CDB, temos:

$$\cos w = \frac{CD}{4} \Rightarrow CD = 4\cos w \text{ (I)}$$

No triângulo retângulo ADB, temos:

$$\cos x = \frac{AD}{1} \Rightarrow AD = \cos x \text{ (II)}$$

Logo, $AC = 4\cos w + \cos x$ (III).

Aplicando a lei dos senos no triângulo ABC, temos:

$$\frac{1}{\operatorname{sen} w} = \frac{4}{\operatorname{sen} x} \Rightarrow \operatorname{sen} w = \frac{\operatorname{sen} x}{4} \text{ (IV)}$$

Além disso:

$$\operatorname{sen}^2 w + \cos^2 w = 1 \Rightarrow \cos w = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 w} \text{ (V)}$$

Por fim, substituímos (IV) e (V) em (III). Assim:

$$AC = 4\cos w + \cos x \Rightarrow AC = 4\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 w} + \cos x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AC = 4\sqrt{1 - \left(\frac{\operatorname{sen} x}{4}\right)^2} + \cos x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AC = \sqrt{16 - \operatorname{sen}^2 x} + \cos x$$

Indicando AC por y, temos: $y = \cos x + \sqrt{16 - \operatorname{sen}^2 x}$.

Portanto, a alternativa **d** é a correta.

80. A. $\overset{\frown}{AB} = 360° - 250° = 110°$

Seja x o comprimento do arco. Assim:

$$\frac{360}{110} = \frac{2\pi \cdot 3}{x} \Rightarrow 360x = 660\pi \Rightarrow x \simeq 5{,}76$$

Portanto, o comprimento e a medida do arco são aproximadamente 5,76 cm e 110°, respectivamente.

B. $\overset{\frown}{AB} = 90°$. Seja x o comprimento do arco. Assim:

$$\frac{360}{90} = \frac{2\pi \cdot 2}{x} \Rightarrow 360x = 360\pi \Rightarrow x \simeq 3{,}14$$

Portanto, o comprimento e a medida do arco são aproximadamente 3,14 cm e 90°, respectivamente.

C. $\overset{\frown}{AB} = 360° - 180° = 180°$

Seja x o comprimento do arco. Assim:

$$\frac{360}{180} = \frac{2\pi \cdot 2{,}5}{x} \Rightarrow 360x = 900\pi \Rightarrow x \simeq 7{,}85$$

Portanto, o comprimento e a medida do arco são aproximadamente 7,85 cm e 180°, respectivamente.

D. $\overset{\frown}{AB} = 360° - 315° = 45°$

Seja x o comprimento do arco. Assim:

$$\frac{360}{45} = \frac{2\pi \cdot 3{,}5}{x} \Rightarrow 360x = 315\pi \Rightarrow x \simeq 2{,}75$$

Portanto, o comprimento e a medida do arco são aproximadamente 2,75 cm e 45°, respectivamente.

81. A. Seja x a medida do arco em radianos. Assim:

$$\frac{180}{110} = \frac{\pi}{x} \Rightarrow 180x = 110\pi \Rightarrow x = \frac{11\pi}{18}$$

Portanto, $110° = \frac{11\pi}{18}$ rad.

B. Seja x a medida do arco em radianos. Assim:

$$\frac{180}{90} = \frac{\pi}{x} \Rightarrow 180x = 90\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$$

Portanto, $90° = \frac{\pi}{2}$ rad.

C. Seja x a medida do arco em radianos. Assim:

$$\frac{180}{180} = \frac{\pi}{x} \Rightarrow 180x = 180\pi \Rightarrow x = \pi$$

Portanto, $180° = \pi$ rad.

D. Seja x a medida do arco em radianos. Assim:

$$\frac{180}{45} = \frac{\pi}{x} \Rightarrow 180x = 45\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$$

Portanto, $45° = \frac{\pi}{4}$ rad.

82. Indicando por x e y a medida do arco em graus e em radianos, respectivamente, temos:

$$\frac{180}{x} = \frac{\pi}{y} \Rightarrow 180y = x\pi \Rightarrow y = \frac{x\pi}{180}$$

O algoritmo e o fluxograma referentes a essa tarefa estão apresentados na seção **Respostas**, no final da reprodução do **Livro do Estudante** deste volume.

83. **a)** Seja x a medida do arco em graus. Assim:

$$\frac{180}{x} = \frac{\pi}{\frac{5\pi}{18}} \Rightarrow \frac{180}{x} = \frac{18}{5} \Rightarrow x = 50$$

Portanto, $\overset{\frown}{AB} = 50°$.

b) Seja x a medida do arco em graus. Assim:

$$\frac{180}{x} = \frac{\pi}{\frac{7\pi}{9}} \Rightarrow \frac{180}{x} = \frac{9}{7} \Rightarrow x = 140$$

Portanto, $\overset{\frown}{CD} = 140°$.

c) Seja x a medida do arco em graus. Assim:

$$\frac{180}{x} = \frac{\pi}{\frac{13\pi}{9}} \Rightarrow \frac{180}{x} = \frac{9}{13} \Rightarrow x = 260$$

Portanto, $\overset{\frown}{EF} = 260°$.

d) Seja x a medida do arco em graus. Assim:

$$\frac{180}{x} = \frac{\pi}{\frac{16\pi}{9}} \Rightarrow \frac{180}{x} = \frac{9}{16} \Rightarrow x = 320$$

Portanto, $\overset{\frown}{GH} = 320°$.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

84. **a)** Como 500 m = 0,5 km, o comprimento C da pista em quilômetros é:

$$C = 2\pi r = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}5 = 3{,}14$$

Para determinar a quantidade de voltas necessárias, efetuamos $\frac{78{,}5}{3{,}14} = 25$. Portanto, serão necessárias, no mínimo, 25 voltas.

b) 2 h 30 min = 2 h + 30 min = 120 min + 30 min = 150 min

Seja x o tempo médio máximo. Assim:

$$\frac{25}{1} = \frac{150}{x} \Rightarrow 25x = 150 \Rightarrow x = 6$$

Portanto, um atleta deve realizar cada volta em um tempo médio máximo de 6 min.

85. Seja C a distância percorrida por uma das cabines ao completar uma volta. Assim: $C = 2\pi r \Rightarrow C = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 75 \Rightarrow C = 471$. Portanto, uma das cabines percorre a distância aproximada de 471 m ao completar uma volta.

86. **a)** Seja x o comprimento do menor arco $\overset{\frown}{AB}$. Assim:

$$\frac{2\pi r_1}{x} = \frac{2\pi}{\frac{2\pi}{3}} \Rightarrow x = \frac{2\pi r_1}{3}$$

Como o comprimento do menor arco $\overset{\frown}{AB}$ é 25,12 cm, temos:

$$\frac{2\pi r_1}{3} = 25{,}12 \Rightarrow r_2 = \frac{3 \cdot 25{,}12}{2\pi} \Rightarrow r_2 \simeq 12$$

Logo: $r_1 = r_1 + 3 \Rightarrow r_1 \simeq 12 + 3 \Rightarrow r_1 = 15$.

Portanto, $r_2 \simeq 12$ cm e $r_1 \simeq 15$ cm.

b) Seja x o comprimento do menor arco $\overset{\frown}{CD}$. Assim:

$$\frac{2\pi r_2}{x} = \frac{2\pi}{\frac{2\pi}{3}} \Rightarrow x = \frac{2\pi \cdot 15}{3} \Rightarrow x \simeq 31{,}4$$

Portanto, o comprimento do menor arco $\overset{\frown}{CD}$ é aproximadamente 31,4 cm.

c) Sim, pois esses arcos são determinados pelo mesmo ângulo; no caso dos arcos menores, pelo ângulo $\frac{2\pi}{3}$ rad.

87. 2 h 45 min = 2 h + 45 min = $2\text{ h} + \frac{45}{60}\text{h} = 2\text{ h} + 0{,}75\text{ h} = 2{,}75\text{ h}$

Sabendo que, passada uma hora, o ponteiro das horas gira 30° e indicando por x o ângulo que representa o giro do ponteiro das horas ao passar 2,75 h, temos: $\frac{1}{2{,}75} = \frac{30}{x} \Rightarrow x = 82{,}5$.

Portanto, o ponteiro das horas girou 82,5°.

88. **a)** O mais votado foi o voleibol. Para obter a quantidade de estudantes que optaram por esse esporte, calculamos:

$$\frac{360}{\alpha} = \frac{2\pi \cdot 6}{\frac{3\pi}{2}} \Rightarrow \alpha = \frac{540\pi}{12\pi} \Rightarrow \alpha = 45°$$

Indicando por x a quantidade de estudantes que optaram por esse esporte, temos: $\frac{45}{180} = \frac{4}{x} \Rightarrow x = 16$. Portanto, 16 estudantes optaram pelo voleibol.

b) Indicando por y a quantidade de pessoas que participaram da votação, temos: $\frac{45}{360} = \frac{4}{y} \Rightarrow y = 32$.

Portanto, 32 estudantes participaram da votação.

c) Indicando por z a quantidade de estudantes que votaram em futebol, segue que: $16 + 4 + z = 32 \Rightarrow z = 12$. Portanto, 12 estudantes votaram em futebol.

89. O comprimento de cada arco da espiral é $\frac{1}{4}$ do comprimento das circunferências cujos raios são os números da sequência de Fibonacci, que são 1, 1, 2, 3, 5, 8 e 13, respectivamente. Sendo assim, temos:

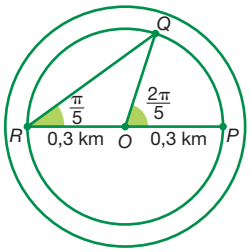
$$\frac{1}{4}(2\pi \cdot 1 + 2\pi \cdot 1 + 2\pi \cdot 2 + 2\pi \cdot 3 + 2\pi \cdot 5 + 2\pi \cdot 8 + 2\pi \cdot 13) =$$

$$= \frac{\pi}{2}(1 + 1 + 2 + 3 + 5 + 8 + 13) = 51{,}81$$

Portanto, o comprimento total da espiral destacada é aproximadamente 51,81 unidades de comprimento.

90. Considerando O o centro da circunferência e sabendo que a medida de um ângulo inscrito em uma circunferência é igual à metade da medida do ângulo central correspondente, temos:

$$P\hat{O}Q = 2 \cdot P\hat{R}Q = 2 \cdot \frac{\pi}{5}\text{rad} = \frac{2\pi}{5}\text{rad}$$



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Seja x o comprimento do menor arco $\overset{\frown}{PQ}$. Assim:

$$\frac{\frac{2\pi}{5}}{2\pi} = \frac{0{,}3}{x} \Rightarrow 5x = 0{,}6\pi \Rightarrow x = 0{,}12\pi$$

Logo, essa pessoa percorrerá 0,12π km. Portanto, a alternativa **d** é a correta.

91. **a)** 1460° = 20° + 4 · 360°; 1ª determinação positiva: 20°.

b) −900° = 180° − 3 · 360°; 1ª determinação positiva: 180°.

c) $\frac{27\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} + 3 \cdot 2\pi$; 1ª determinação positiva: $\frac{3\pi}{4}$.

92. A. 45° + k · 360°, sendo k um número inteiro.

B. 210° + k · 360°, sendo k um número inteiro.

C. $-\frac{\pi}{3} + 2\pi + k \cdot 2\pi = \frac{5\pi}{3} + k \cdot 2\pi$, sendo k um número inteiro.

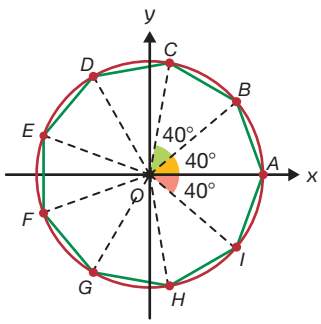
D. $\frac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi$, sendo k um número inteiro.

93. Inicialmente, atribuímos alguns valores para k.

- Para $k = 0$, temos: 20° + 0 · 90° = 20°.
- Para $k = 1$, temos: 20° + 1 · 90° = 110°.
- Para $k = 2$, temos: 20° + 2 · 90° = 200°.
- Para $k = 4$, temos: 20° + 3 · 90° = 290°.

A imagem da circunferência com a indicação desses arcos está apresentada na seção **Respostas**, no final da reprodução do **Livro do Estudante** deste volume.

94. **a)** O ângulo central do eneágono é: $\frac{360°}{9} = 40°$. Assim:



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Portanto, a medida do arco de origem em A e extremidade no vértice C é 80° ou $\frac{4\pi}{9}$.

b) De acordo com o item **a**, é possível perceber que os arcos de origem em A e extremidades em cada vértice do eneágono são múltiplos de 40°. Portanto, a expressão geral é $k \cdot 40°$ ou $\frac{k \cdot 2\pi}{9}$, sendo k um número inteiro.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

95. **a)** Não, pois o arco representado por ele é côngruo ao arco de $\frac{5\pi}{6}$, e não ao arco de $\frac{3\pi}{4}$. A resposta correta seria um arco da expressão geral $\frac{3\pi}{4} + 2k\pi$, sendo k um número inteiro.

b) A imagem referente a esse item está apresentada na seção **Respostas**, no final da reprodução do **Livro do Estudante** deste volume.

96. **a)** No 2º ou 3º quadrante, pois o cosseno nesses quadrantes é negativo.

b) No 1º ou 2º quadrante, pois o seno nesses quadrantes é positivo.

c) No 1º ou 3º quadrante, pois a tangente nesses quadrantes é positiva.

d) No 3º ou 4º quadrante, pois o seno nesses quadrantes é negativo.

e) No 2º ou 4º quadrante, pois a tangente nesses quadrantes é negativa.

f) No 1º ou 4º quadrante, pois o cosseno nesses quadrantes é positivo.

97. **a)** $2120° = 320° + 5 \cdot 360°$

Como $2120°$ está no 4º quadrante, então $\text{sen}2120°$ é negativo.

b) $-\frac{39\pi}{5} = \frac{\pi}{5} - 4 \cdot 2\pi$

Como $-\frac{39\pi}{5}$ está no 1º quadrante, então $\text{sen}\left(-\frac{39\pi}{5}\right)$ é positivo.

c) $-1605° = 195° - 5 \cdot 360°$

Como $-1605°$ está no 3º quadrante, então $\text{sen}(-1605°)$ é negativo.

d) $\frac{43\pi}{9} = \frac{7\pi}{9} + 2 \cdot 2\pi$

Como $\frac{43\pi}{9}$ está no 2º quadrante, então $\text{sen}\left(\frac{43\pi}{9}\right)$ é positivo.

98. **a)** 2º quadrante.
b) 2º quadrante.
c) 1º quadrante.
d) 4º quadrante.
e) 3º quadrante.

99. **a)** $500° = 140° + 360°$. Assim:

$$\text{sen}500° = \text{sen}140° = \text{sen}(180° - 140°) = \text{sen}40°$$

$3200° = 320° + 8 \cdot 360°$. Assim:

$$\cos 3200° = \cos 320° = \cos(360° - 320°) = \cos 40°$$

Consequentemente:

$$A = \text{sen}500° \cdot \cos 3200° = \text{sen}40° \cdot \cos 40°$$

Como $\text{sen}40° > 0$ e $\cos 40° > 0$, então $A > 0$.

b) $\frac{22\pi}{3} = \frac{4\pi}{3} + 3 \cdot 2\pi$.

Assim:

$$\cos\frac{22\pi}{3} = \cos\frac{4\pi}{3} = -\cos\left(\frac{4\pi}{3} - \pi\right) = -\cos\frac{\pi}{3}$$

$$-\frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6} - 2\pi$$

Assim:

$$\text{tg}\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \text{tg}\frac{11\pi}{6} = -\text{tg}\left(2\pi - \frac{11\pi}{6}\right) = -\text{tg}\frac{\pi}{6}$$

Consequentemente:

$$A = \cos\frac{22\pi}{3} \cdot \text{tg}\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\cos\frac{\pi}{3} \cdot \left(-\text{tg}\frac{\pi}{6}\right)$$

Como $-\cos\frac{\pi}{3} < 0$ e $-\text{tg}\frac{\pi}{6} < 0$, então $A > 0$.

c) $1345° = 265° + 3 \cdot 360°$

Assim:

$$\text{tg}1345° = \text{tg}265° = \text{tg}(265° - 180°) = \text{tg}85°$$

$$-1975° = 185° - 6 \cdot 360°$$

Assim:

$$\text{sen}(-1975°) = \text{sen}185° = -\text{sen}(185° - 180°) = -\text{sen}5°$$

$$A = \text{tg}1345° \cdot \text{sen}(-1975°) = \text{tg}85° \cdot (-\text{sen}5°)$$

Como $\text{tg}85° > 0$ e $-\text{sen}5° < 0$, então $A < 0$.

d) $\frac{27\pi}{5} = \frac{7\pi}{5} + 2 \cdot 2\pi$

Assim:

$$\cos\frac{27\pi}{5} = \cos\frac{7\pi}{5} = -\cos\left(\frac{7\pi}{5} - \pi\right) = -\cos\frac{2\pi}{5}$$

$$-2780° = 100° - 8 \cdot 360°$$

Assim:

$$\text{sen}(-2780°) = \text{sen}100° = \text{sen}(180° - 100°) = \text{sen}80°$$

$$A = \cos\frac{27\pi}{5} \cdot \text{sen}(-2780°) = -\cos\frac{2\pi}{5} \cdot \text{sen}80°$$

Como $-\cos\frac{2\pi}{5} < 0$ e $\text{sen}80° > 0$, então $A < 0$.

100. **a)** Como a medida do ângulo entre duas posições adjacentes é de 45°, temos:

- 1º: $5 \cdot (-45°) = -225°$
- 2º: $2 \cdot 45° = 90°$
- 3º: $4 \cdot 45° = 180°$
- 4º: $3 \cdot (-45°) = -135°$

b) $-225° + 90° + 180° - 135° = -90°$

Portanto, no sentido anti-horário, a diferença é de 270°.

c) $\text{sen}270° = -1$

$\cos 270° = 0$

101. **a)** $\frac{25}{8} \cdot 360° = 1125°$. Logo, o ângulo do arco que representa todo o trajeto percorrido é 1125°.

b) $1125° = 45° + 3 \cdot 360°$. Portanto, o ângulo do menor arco é 45°.

c) $\text{sen}45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

d) $\frac{2565° - 1125°}{360°} = 4$. Portanto, o ciclista deve percorrer 4 voltas a mais.

102. **a)** $5550° = 150° + 15 \cdot 360°$

Logo, a medida do menor ângulo é 150°.

b) $\text{sen}150° = \text{sen}(180° - 150°) = \text{sen}30° = \frac{1}{2}$

$\cos 150° = -\cos(180° - 150°) = -\cos 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

103. **a)** $1110° = 30° + 3 \cdot 360°$. Assim: $\text{sen}1110° = \text{sen}30° = \frac{1}{2}$.

b) $765° = 45° + 2 \cdot 360°$. Assim: $\text{tg}765° = \text{tg}45° = 1$.

c) $\frac{25\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + 4 \cdot 2\pi$. Assim: $\cos\frac{25\pi}{3} = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$.

d) $\frac{29\pi}{3} = \frac{5\pi}{3} + 4 \cdot 2\pi$. Assim: $\text{sen}\frac{29\pi}{3} = \text{sen}\frac{5\pi}{3} =$

$= -\text{sen}\left(2\pi - \frac{5\pi}{3}\right) = -\text{sen}\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

e) $-2310° = 210° - 7 \cdot 360°$. Assim: $\cos(-2310°) =$

$= \cos 210° = -\cos(210° - 180°) = -\cos 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

f) $1770° = 330° + 4 \cdot 360°$. Assim: $\cos(1770°) = \cos 330° =$

$= \cos(360° - 330°) = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

104. **a)** $\text{sen}^2\alpha + \left(\frac{5}{13}\right)^2 = 1 \Rightarrow \text{sen}^2\alpha = 1 - \frac{25}{169} \Rightarrow \text{sen}\alpha = \pm\frac{12}{13}$

Como α pertence ao 4º quadrante, $\text{sen}\alpha = -\frac{12}{13}$. Logo:

$$\text{tg}\alpha = \frac{-\frac{12}{13}}{\frac{5}{13}} = -\frac{12}{5}$$

Portanto, $\text{sen}\alpha = -\frac{12}{13}$ e $\text{tg}\alpha = -\frac{12}{5}$.

b) $\text{sen}^2\alpha + \left(-\frac{15}{17}\right)^2 = 1 \Rightarrow \text{sen}^2\alpha = 1 - \frac{225}{289} \Rightarrow \text{sen}\alpha = \pm\frac{8}{17}$

Como α pertence ao 3º quadrante, então $\text{sen}\alpha = -\frac{8}{17}$. Logo:

$$\text{tg}\alpha = \frac{-\frac{8}{17}}{-\frac{15}{17}} = \frac{8}{15}$$

Portanto, $\text{sen}\alpha = -\frac{8}{17}$ e $\text{tg}\alpha = \frac{8}{15}$.

105. $\text{sen}\alpha > 0$, $\cos\alpha > 0$ e $\text{tg}\alpha < 0$ para todo α cuja primeira determinação positiva é do segundo quadrante. Sugestões de resposta: 150°; $\frac{5\pi}{6}$; $\frac{20\pi}{3}$.

106. Sim, pois para qualquer valor de k os arcos serão 150°, 300° e 225° ou arcos côngruos a eles. Assim, sendo k um número inteiro, temos:

$$\frac{\text{sen}(150° + 2k\pi) + \cos(300° + 2k\pi)}{\text{tg}(225° + 2k\pi)} =$$

$$= \frac{\text{sen}(30°) + \cos(60°)}{\text{tg}(45°)} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}{1} = 1$$

Educação midiática (páginas 28 e 29)

2. De acordo com o texto, essas relações podem gerar problemas quando os seguidores se encantam com rotinas, hábitos e padrões físicos que transmitem uma ideia enganosa de perfeição e passam a comparar suas vidas com as dos influenciadores.

Acessando tecnologias (páginas 35 e 36)

1. O comprimento da hipotenusa desse triângulo é 5.

2. Resolução na página **MP092**.

Síntese do capítulo (página 77)

3. **AA**, **LAL** e **LLL**.

4. Sim, pelos casos de semelhança **AA** ou **LLL**.

5. **a)** Falso. Como $6^2 \neq 4^2 + 5^2$, o triângulo ABC não é retângulo.

b) Verdadeiro. O retângulo DEF é retângulo em D, pois:

$13^2 = 5^2 + 12^2$. Assim: $h \cdot EF = DE \cdot DF \Rightarrow h = \frac{60}{13}$

Logo, $h = \frac{60}{13}$ cm.

6. Os estudantes podem citar duas entre as relações: $a \cdot h = b \cdot c$; $b \cdot h = c \cdot n$; $c \cdot h = b \cdot m$; $b^2 = a \cdot n$; $c^2 = a \cdot m$ e $h^2 = m \cdot n$.

7. Quando o ângulo oposto ao lado desconhecido medir 90°. Considerando um triângulo retângulo ABC retângulo em A e comprimento da hipotenusa e dos catetos iguais a a, b e c, respectivamente, temos:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \underbrace{\cos 90°}_{0} \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2$$

8. A. Sabendo que o triângulo ABC é retângulo, uma possibilidade é usar a razão trigonométrica $\text{sen}23° = \frac{x}{39}$ e, para obter o valor do sen23°, consultar a tabela trigonométrica.

B. Sabendo que o triângulo ABC não é retângulo, uma possibilidade é aplicar a lei dos senos. Para obter o valor do seno de cada ângulo, consultar a tabela trigonométrica.

9. Suponha, por absurdo, que exista a $\text{tg}\frac{\pi}{2}$. Então, $\text{tg}\frac{\pi}{2} = \frac{\text{sen}\frac{\pi}{2}}{\cos\frac{\pi}{2}}$.

Sabendo que $\text{sen}\frac{\pi}{2} = 1$ e $\cos\frac{\pi}{2} = 0$, então $\text{tg}\frac{\pi}{2} = \frac{1}{0}$, que é uma indefinição. Por consequência, $\text{tg}\frac{\pi}{2}$ não está definida.

10. Como o $\text{sen}\alpha$ é negativo no 3º e no 4º quadrante e o $\cos\alpha$ é positivo no 1º e no 4º quadrante, α pertence ao 4º quadrante. Portanto, a alternativa **d** é a correta.

11. Uma possibilidade é usar a relação trigonométrica fundamental $\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

CAPÍTULO 2 FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Abertura do capítulo

1. Sugestão de resposta: As marés são variações periódicas do nível do mar causadas pela atração gravitacional do Sol e da Lua e pela inclinação do eixo de rotação da Terra.

2. Função trigonométrica.

Questões

A. a) $|-5| + |2| = 5 + 2 = 7$

b) $|-3 \cdot 2| = |-6| = 6$

c) $|-2| \cdot |7| = 2 \cdot 7 = 14$

d) $|-5 + 3| + |2 - 8| = |-2| + |-6| = 2 + 6 = 8$

Exercícios e problemas

1. **a)** $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ ou $x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$, para $k \in \mathbb{Z}$.

Se $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$, então $k = 1$, pois: $\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{4} + 2k\pi < \frac{5\pi}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1}{8} < k < \frac{9}{8}$. Assim: $x = \frac{\pi}{4} + 2 \cdot 1 \cdot \pi \Rightarrow x = \frac{9\pi}{4}$.

Se $x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$, então $k = 1$, pois: $\frac{\pi}{2} < -\frac{\pi}{4} + 2k\pi < \frac{5\pi}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{3}{8} < k < \frac{11}{8}$. Assim: $x = -\frac{\pi}{4} + 2 \cdot 1 \cdot \pi \Rightarrow x = \frac{7\pi}{4}$.

Portanto, $x = \frac{7\pi}{4}$ ou $x = \frac{9\pi}{4}$.

b) $\text{sen}x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$, para $k \in \mathbb{Z}$.

Se $x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$, então $k = 1$, pois: $2\pi < \frac{7\pi}{6} + 2k\pi < \frac{7\pi}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{5}{12} < k < \frac{7}{6}$. Assim: $x = \frac{7\pi}{6} + 2 \cdot 1 \cdot \pi \Rightarrow x = \frac{19\pi}{6}$.

Se $x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$, não existe $k \in \mathbb{Z}$ que satisfaça a inequação, pois: $2\pi < -\frac{\pi}{6} + 2k\pi < \frac{7\pi}{2} \Rightarrow \frac{13}{12} < k < \frac{11}{6}$. Portanto, $x = \frac{19\pi}{6}$.

c) $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x = 150° + k \cdot 360°$ ou $x = 210° + k \cdot 360°$, para k inteiro. Se $x = 150° + k \cdot 360°$, então $k = 0$ ou $k = 1$, pois:

$$90° < 150° + k \cdot 360° < 540° \Rightarrow -\frac{1}{6} < k < \frac{13}{12}$$

- Para $k = 0$: $x = 150° + 0 \cdot 360° \Rightarrow x = 150°$
- Para $k = 1$: $x = 150° + 1 \cdot 360° \Rightarrow x = 510°$

Se $x = 210° + k \cdot 360°$, então $k = 0$, pois:

$90° < 210° + k \cdot 360° < 540° \Rightarrow -\frac{1}{3} < k < \frac{11}{12}$

Assim: $x = 210° + 0 \cdot 360° \Rightarrow x = 210°$.

Portanto, $x = 150°$ ou $x = 210°$ ou $x = 510°$.

d) $\text{sen}x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ ou $x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$, para $k \in \mathbb{Z}$.

Se $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$, então $k = 2$, pois $\frac{11\pi}{4} < \frac{\pi}{4} + 2k\pi < \frac{9\pi}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{5}{4} < k < \frac{17}{8}$. Assim: $x = \frac{\pi}{4} + 2 \cdot 2 \cdot \pi \Rightarrow x = \frac{17\pi}{4}$.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Se $x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$, não existe $k \in \mathbb{Z}$ que satisfaça a inequação, pois: $\frac{11\pi}{4} < \frac{3\pi}{4} + 2k\pi < \frac{9\pi}{2} \Rightarrow 1 < k < \frac{15}{8}$. Portanto, $x = \frac{17\pi}{4}$.

e) $\text{sen}x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x = 240° + k \cdot 360°$ ou $x = -60° + k \cdot 360°$, para $k \in \mathbb{Z}$. Se $x = 240° + k \cdot 360°$, então $k = 1$, pois:

$$360° < 240° + k \cdot 360° < 720° \Rightarrow \frac{1}{3} < k < \frac{4}{3}$$

Assim: $x = 240° + 1 \cdot 360° \Rightarrow x = 600°$.
Se $x = -60° + k \cdot 360°$, então $k = 2$, pois:

$$360° < -60° + k \cdot 360° < 720° \Rightarrow \frac{7}{6} < k < \frac{13}{6}$$

Assim: $x = -60° + 2 \cdot 360° \Rightarrow x = 660°$. Portanto, $x = 600°$ ou $x = 660°$.

f) $\cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 60° + k \cdot 360°$ ou $x = -60° + k \cdot 360°$, para k inteiro. Se $x = 60° + k \cdot 360°$, então $k = 1$, pois:

$$390° < 60° + k \cdot 360° < 630° \Rightarrow \frac{11}{12} < k < \frac{19}{12}$$. Assim:

$$x = 60° + 1 \cdot 360° \Rightarrow x = 420°$$

Se $x = -60° + k \cdot 360°$, não existe $k \in \mathbb{Z}$ que satisfaça a inequação, pois:

$$390° < -60° + k \cdot 360° < 630° \Rightarrow \frac{5}{4} < k < \frac{23}{12}$$

Portanto, $x = 420°$.

2. a) $0 < 3 - m < 1 \Rightarrow 2 < m < 3$, com $m \in \mathbb{R}$.

b) $-1 < 2m + 1 < 0 \Rightarrow -1 < m < -\frac{1}{2}$, com $m \in \mathbb{R}$.

c) $-1 < \frac{3m - 2}{4} < 0 \Rightarrow -\frac{2}{3} < m < \frac{2}{3}$, com $m \in \mathbb{R}$.

d) $-1 < -2m + 7 < 1 \Rightarrow 3 < m < 4$, com $m \in \mathbb{R}$.

3. $h(x) = \cos^2 x + \text{sen}x - 1 \Rightarrow h(x) = (1 - \text{sen}^2 x) + \text{sen}x - 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow h(x) = -\text{sen}^2 x + \text{sen}x$

a) Fazendo $\text{sen}x = Y$, temos: $-Y^2 + Y = 0$. Assim:

$$Y_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{1}{2 \cdot (-1)} = \frac{1}{2}$$

Logo, $\text{sen}x = \frac{1}{2}$.

Portanto, $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$.

b) $h(x) = -\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$. Portanto, o valor máximo de h é $\frac{1}{4}$.

4. a) $a = \frac{\pi}{2}$

b) Como $\text{sen}x = \cos x$ para $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$, então:

$$-\pi \leq \frac{\pi}{4} + k\pi < \frac{9\pi}{4} \Rightarrow -\frac{5}{4} \leq k < 2$$

Logo, $k = -1$ ou $k = 0$ ou $k = 1$. Portanto, as coordenadas são $\left(-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ e $\left(\frac{5\pi}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

c) A representação gráfica das funções referentes a esse item está apresentada na seção **Respostas**, no final da reprodução do **Livro do Estudante** deste volume.

5. a) $Im(f) = [-1, 1]$ e $Im(g) = [-1, 5]$
A constante a desloca o gráfico para cima e a constante b amplia o gráfico verticalmente.

b) Analisando o gráfico, concluímos que $a = 2$ e que o período de g é π. Assim: $\pi = \frac{2\pi}{|c|} \Rightarrow |c| = 2$.
Agora, determinaremos os valores de c e d para $a = 2$ e $c = 2$.

$g(0) = 2 \Rightarrow b \cdot \text{sen}(d) = 0 \Rightarrow b = 0$ (falso) ou $\text{sen}(d) = 0$.
Como $\text{sen}(d) = 0$, segue que $d = 0$ (falso) ou $d = \pi$.
Logo, $d = \pi$. Agora, vamos calcular o valor de b. Para isso, fazemos:

$$g\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 5 \Rightarrow b = -\frac{3}{\text{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right)} \Rightarrow b = 3$$

Assim, $b = 3$. Portanto, uma sugestão de resposta é $g(x) = 2 + 3\text{sen}(2x + \pi)$.

6. a) $-1 \leq \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right) \leq 1 \Rightarrow -2 \leq -2\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right) \leq 2 \Rightarrow$
$\Rightarrow 1 \leq 3 - 2\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right) \leq 5 \Rightarrow 1 \leq f(x) \leq 5$
Portanto, a diferença é 4.

b) $-1 \leq \cos(3x) \leq 1 \Rightarrow -\frac{1}{4} \leq \frac{1}{4}\cos(3x) \leq \frac{1}{4} \Rightarrow$
$\Rightarrow -\frac{5}{4} \leq -1 + \frac{1}{4}\cos(3x) \leq -\frac{3}{4} \Rightarrow -\frac{5}{4} \leq g(x) \leq -\frac{3}{4}$
Portanto, a diferença é $\frac{1}{2}$.

c) $-1 \leq \text{sen}(2x + \pi) \leq 1 \Rightarrow -1 \leq -\text{sen}(2x + \pi) \leq 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow 2 \leq -\text{sen}(2x + \pi) \leq 4 \Rightarrow 2 \leq h(x) \leq 4$
Portanto, a diferença é 2.

d) $-1 \leq \cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) \leq 1 \Rightarrow -4 \leq 4\cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) \leq 4 \Rightarrow$
$\Rightarrow -3 \leq 1 + 4\cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) \leq 5 \Rightarrow -3 \leq n(x) \leq 5$
Portanto, a diferença é 8.

7. a) $40 = \frac{20^2}{10} \cdot \text{sen}2\varphi_0 \Rightarrow \text{sen}2\varphi_0 = 1 \Rightarrow 2\varphi_0 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \varphi_0 = \frac{\pi}{4}$
Portanto, o ângulo é 45°.

b) Não, pois a distância percorrida é diretamente proporcional a $\text{sen}2\varphi_0$ e a tacada já foi realizada com $\varphi = 45°$.

8. a) $|c| = 2\frac{\pi}{\underbrace{\frac{62}{5}}_{12,4}} = \frac{5\pi}{31}$. Para $c = \frac{5\pi}{31}$, temos:

$$8 = b \cdot \text{sen}\left(3{,}1 \cdot \frac{5\pi}{31}\right) \Rightarrow b = 8$$

Portanto, uma sugestão de resposta é $h(t) = 8 \cdot \text{sen}\left(\frac{5\pi}{31}t\right)$.

b) Altura máxima: 8 m; altura mínima: −8 m.

9. a) As funções g e h, pois se considerarmos as funções na forma $m(x) = a + b \cdot \cos(cx + d)$, os coeficientes b em g e em h são opostos e os demais coeficientes são iguais, ou seja, $g(x) = -h(x)$.

b) $Im(f) = [-1, 1]$, $Im(g) = [-2, 2]$ e $Im(h) = [-2, 2]$.

c) As funções apresentadas têm pontos em comum nos arcos côngruos de $\frac{\pi}{2}$.
Assim, $f(x) = g(x) = h(x)$ para $x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$, com $k \in \mathbb{Z}$.

10. a) $C(18) = 20 - 15 \cdot \cos\left(\frac{18\pi}{12}\right) = 20$
Portanto, às 18 horas havia 20 clientes.

b) Como $a = 20$ e $b = -15$, temos: $Im(C) = [5, 35]$.
$C(h) = 35 \Rightarrow 20 - 15\cos\left(\frac{h\pi}{12}\right) = 35 \Rightarrow h = 12 + 24k$, com $k \in \mathbb{Z}$.
Como $0 < h \leq 24$, então a quantidade média de clientes é maior às 12 horas e nesse horário há 35 clientes.

c) A menor quantidade de clientes é 5. Assim:

$$C(h) = 5 \Rightarrow 20 - 15\cos\left(\frac{h\pi}{12}\right) = 5 \Rightarrow h = 24k, \text{ com } k \in \mathbb{Z}.$$

Como $0 < h \leq 24$, então a quantidade média de clientes é menor às 24 horas e nesse horário há 5 clientes.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

11. Como $V(0) = 0$, segue que a função é do tipo $V(t) = b \cdot \text{sen}(ct)$.

- $5 = \frac{2\pi}{|c|} \Rightarrow |c| = \frac{2\pi}{5}$
- Como a taxa máxima de inalação e exalação, em módulo, é 0,6 L/s, temos $b = 0{,}6$.

Logo, $V(t) = 0{,}6 \cdot \text{sen}\left(\frac{2\pi}{5}t\right)$. Portanto, a alternativa **d** é a correta.

12. **a)** $T(\theta) = 2\pi\sqrt{\frac{2{,}5 \cdot \cos\theta}{10}} \Rightarrow T(\theta) = \pi\sqrt{\cos\theta}$

b) Como θ é o ângulo que a corda faz com a vertical, então $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$. Portanto, $D(T) = \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

13. **a)** Como $b = 3$, o valor máximo de m é 3. Assim:

$m(t) = 3 \Rightarrow 3\cos\left(\frac{\pi}{2}t - \frac{\pi}{4}\right) = 3 \Rightarrow t = \frac{1}{2} + 4k$, com $k \in \mathbb{Z}_+$.

b) $3\cos\left(\frac{\pi}{2}t - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2}t - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \Rightarrow t = \frac{3}{2} + 2k$, com $k \in \mathbb{Z}_+$.

c) Para esboçar o gráfico de m, atribuímos valores para t e calculamos os valores correspondentes para $m(t)$.

A representação gráfica de m referente a esse item está apresentada na seção **Respostas**, no final da reprodução do **Livro do Estudante** deste volume.

15. **a)** No equinócio de outono e no equinócio de primavera. Isso ocorre porque, nesses episódios, o dia e a noite têm a mesma duração: 12 horas cada.

b) 21/6/2023

c) $p = \frac{2\pi}{\left|\frac{2\pi}{365}\right|} = \frac{2\pi}{\frac{2\pi}{365}} = 365$

Portanto, o período da função h é 365. No contexto apresentado, esse período significa que a quantidade de horas de duração do dia em São Paulo (SP) se repete a cada 365 dias.

d) $h(0) = A + B \cdot \cos\left(\frac{2\pi \cdot 0}{365}\right) \Rightarrow A + B = 13{,}58$

Sem perda de generalidade, considerando $\cos\left(\frac{2\pi \cdot 182}{365}\right) = -1$, obtemos: $h(182) = A + B \cdot \cos\left(\frac{2\pi \cdot 182}{365}\right) \Rightarrow A - B = 10{,}68$.

Resolvendo o sistema $\begin{cases} A + B = 13{,}58 \\ A - B = 10{,}68 \end{cases}$, obtemos $A = 12{,}13$ e $B = 1{,}45$.

Portanto, a função h que descreve a duração aproximada do dia, medida em horas, em São Paulo, é dada por:

$$h(x) = 12{,}13 + 1{,}45 \cdot \cos\left(\frac{2\pi \cdot x}{365}\right)$$

Trabalho e juventudes (página 89)

1. O engenheiro de som pode trabalhar com processamento e criação de áudios. Ele utiliza diferentes equipamentos de gravação e manipulação, de transmissão ou de emissão de áudio para capturar, mixar e masterizar o som. Ele pode trabalhar na indústria do cinema, da televisão, do rádio, da música e dos *games*.

Síntese do capítulo (página 93)

3. Como $\text{sen}(0) = 0$, a alternativa **C** é a correta.

4. A alternativa **a** é a única falsa, pois a função seno ser ímpar implica que $-\text{sen}x = \text{sen}(-x)$. Portanto, as afirmações **b** e **c** são verdadeiras.

5. Como as marés são variações periódicas, o gráfico **I** é o que melhor representa essa variação, uma vez que seus valores se repetem periodicamente.

6. Nessa função, a é maior do que zero, pois, quando comparado com o gráfico da função cosseno, o gráfico da função f foi transladado $|a|$ unidades para cima.

CAPÍTULO 3 FÓRMULAS DE TRANSFORMAÇÃO, RELAÇÕES E EQUAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Abertura do capítulo

1. Porque, após esse período, a Terra estará do outro lado em relação à sua órbita em torno do Sol.

2. $1 \text{ km} = 1 \cdot 10^3 \text{ m}$, logo $9{,}46 \cdot 10^{15} \text{ m} = 9{,}46 \cdot 10^{12} \text{ km}$.

3. Dado um triângulo ABC qualquer, a medida do comprimento dos lados é proporcional ao seno dos ângulos opostos correspondentes.

Questões

A. Não, pois $\text{sen}45° + \text{sen}30° = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \simeq 1{,}21$.

B. Não, pois $\text{sen}45° - \text{sen}30° = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \simeq 0{,}21$.

Exercícios e problemas

1. **a)** $\text{sen}15° = \text{sen}(45° - 30°) =$

$= \text{sen}45° \cdot \cos30° - \text{sen}30° \cdot \cos45° =$

$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

b) $\cos15° = \cos(45° - 30°) =$

$= \cos45° \cdot \cos30° + \text{sen}45° \cdot \text{sen}30° =$

$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$

c) $\text{sen}255° = \text{sen}(270° - 15°) =$

$= \text{sen}270° \cdot \cos15° - \text{sen}15° \cdot \cos270° =$

$= (-1) \cdot \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \cdot 0 = \frac{-\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

d) $\text{tg}75° = \text{tg}(30° + 45°) =$

$= \frac{\text{tg}30° + \text{tg}45°}{1 - \text{tg}30° \cdot \text{tg}45°} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3} + 1}{1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot 1} = 2 + \sqrt{3}$

e) $\text{sen}105° = \text{sen}(60° + 45°) =$

$= \text{sen}60° \cdot \cos45° + \text{sen}45° \cdot \cos60° =$

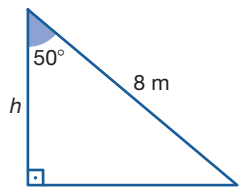
$= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$

f) $\cos105° = \cos(60° + 45°) =$

$= \cos60° \cdot \cos45° - \text{sen}60° \cdot \text{sen}45° =$

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$

2. Indicando por h a altura atingida pelo topo da escada na parede, temos:



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

$\cos50° = \frac{h}{8} \Rightarrow h = 8 \cdot \cos50°$

$\cos50° = \cos20° \cdot \cos30° - \text{sen}20° \cdot \text{sen}30° =$

$= 0{,}9397 \cdot 0{,}866 - 0{,}342 \cdot 0{,}5 \simeq 0{,}6428$

Assim:

$h = 8 \cdot \cos50° \Rightarrow h \simeq 5{,}14$

Logo, o vidraceiro não posicionou a escada corretamente, pois o topo da escada atingiu uma altura de, aproximadamente, 5,14 m.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

3. $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\cdot\cos x+\operatorname{sen}x\cdot\cos\frac{\pi}{2}=\cos x$

Portanto, a alternativa **b** é a correta.

4. $\operatorname{sen}20°=\operatorname{sen}(10°+10°)\Rightarrow \operatorname{sen}10°\cdot\cos 10+\cos 10\cdot\operatorname{sen}10°\Rightarrow$

$\Rightarrow 0{,}171+0{,}171=0{,}342$

Sendo h a altura da entrada em relação ao nível da calçada, temos:

$$\operatorname{sen}20°=\frac{h}{1{,}9}\Rightarrow h=0{,}6498$$

Portanto, a altura da entrada é de aproximadamente 0,65 m.

5. $\cos\frac{5\pi}{12}=\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

$\operatorname{sen}\frac{7\pi}{12}=\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

Assim:

$$\cos\frac{5\pi}{12}+\operatorname{sen}\frac{7\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}=\frac{\sqrt{6}}{2}$$

6. Como o ângulo externo 105° é o suplementar do ângulo interno do triângulo retângulo, temos:

$\cos 75°=\frac{12{,}2}{x}\Rightarrow x=\frac{12{,}2}{\cos 75°}$

$\cos 75°=\cos(30°+45°)=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=0{,}245$

Assim, $x=\frac{12{,}2}{\cos 75°}\Rightarrow x\simeq 49{,}8$. Logo, $12{,}2+49{,}8=62$, ou seja, o navio percorreu aproximadamente 62 km.

7. $\operatorname{sen}2y=2\cdot\operatorname{sen}y\cdot\cos y=2\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{\sqrt{13}}{4}=\frac{\sqrt{39}}{8}$

8. Indicando o ângulo $\widehat{BCD}$ por y, temos:

- $\operatorname{tg}(x+y)=\frac{14+7}{7\sqrt{3}}=\sqrt{3}$
- $\operatorname{tg}y=\frac{7}{7\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

$$\sqrt{3}=\operatorname{tg}(x+y)\Rightarrow\sqrt{3}=\frac{\operatorname{tg}x+\frac{\sqrt{3}}{3}}{1-\operatorname{tg}x\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\sqrt{3}=\frac{3\operatorname{tg}x+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}\operatorname{tg}x}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3\sqrt{3}-3\operatorname{tg}x=3\operatorname{tg}x+\sqrt{3}\Rightarrow\operatorname{tg}x=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Como $0°<x<90°$, temos $x=30°$.

9. $\operatorname{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha=1\Rightarrow\operatorname{sen}^2\alpha=1-\left(\frac{3}{5}\right)^2\Rightarrow$

$\Rightarrow\operatorname{sen}^2\alpha=\frac{16}{25}\Rightarrow\operatorname{sen}\alpha=\pm\frac{4}{5}$

Como α está no 3º quadrante, então $\operatorname{sen}\alpha=-\frac{4}{5}$.

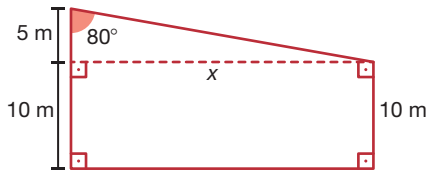
10. a) $\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2+\cos^2\theta=1\Rightarrow\cos\theta=\pm\frac{1}{3}$

Como $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$, $\cos\theta=-\frac{1}{3}$.

b) $\operatorname{cossec}\theta=\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}=\frac{1}{\frac{2\sqrt{2}}{3}}=\frac{3\sqrt{2}}{4}$

c) $\operatorname{cotg}\theta=\frac{1}{\operatorname{tg}\theta}=\frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}=\frac{-\frac{1}{3}}{\frac{2\sqrt{2}}{3}}=-\frac{\sqrt{2}}{4}$

11. Decompondo o terreno em um triângulo retângulo e um retângulo, obtemos a seguinte representação.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Do triângulo retângulo: $\operatorname{tg}80°=\frac{x}{5}\Rightarrow x=5\cdot\operatorname{tg}80°$.

Calculando tg80°, temos:

$$\operatorname{tg}80°=\frac{\operatorname{sen}80°}{\underbrace{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 80°}}_{\cos 80°}}\Rightarrow\operatorname{tg}80°=\frac{0{,}985}{\sqrt{1-0{,}985^2}}\Rightarrow\operatorname{tg}80°\simeq 5{,}71$$

Assim:

$$x=5\cdot\operatorname{tg}80°\Rightarrow x\simeq 28{,}6$$

Indicando por y o comprimento da hipotenusa do triângulo, segue que:

$$\cos 80°=\frac{5}{y}\Rightarrow 0{,}173=\frac{5}{y}\Rightarrow y\simeq 28{,}9$$

Perímetro do terreno: $15+28{,}9+10+28{,}6=82{,}5$.

O perímetro aproximado do terreno é 82,5 m.

12. $(\operatorname{sen}\alpha+\cos\alpha)^2=\operatorname{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha+2\cdot\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\alpha=$

$=1+\operatorname{sen}2\alpha=1+\operatorname{sen}\left(2\cdot\frac{13\pi}{12}\right)=1+\operatorname{sen}\left(\frac{13\pi}{6}\right)$

Como $\frac{13\pi}{6}=\frac{\pi}{6}+2\pi$, temos:

$$(\operatorname{sen}\alpha+\cos\alpha)^2=1+\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3}{2}$$

Portanto, $(\operatorname{sen}\alpha+\cos\alpha)^2=\frac{3}{2}$.

13. a) $\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\operatorname{sen}\left(\pi-\frac{3\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\operatorname{cossec}\frac{3\pi}{4}=\frac{1}{\operatorname{sen}\frac{3\pi}{4}}=\frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\sqrt{2}$

b) $\cos 195°=-\cos(195°-180°)=-\cos 15°=$

$=-\cos(45°-30°)=-(\cos 45°\cdot\cos 30°+\operatorname{sen}45°\cdot\operatorname{sen}30°)=$

$=-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)=-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

Assim:

$$\sec 195°=\frac{1}{\cos 195°}=\frac{1}{-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}=\sqrt{2}-\sqrt{6}$$

c) $\operatorname{cotg}\frac{5\pi}{3}=\frac{\cos\frac{5\pi}{3}}{\operatorname{sen}\frac{5\pi}{3}}$

- $\cos\frac{5\pi}{3}=\cos\left(2\pi-\frac{5\pi}{3}\right)=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$
- $\operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{3}\right)=-\operatorname{sen}\left(2\pi-\frac{5\pi}{3}\right)=-\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

Assim: $\operatorname{cotg}\frac{5\pi}{3}=\frac{\cos\frac{5\pi}{3}}{\operatorname{sen}\frac{5\pi}{3}}=\frac{\frac{1}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

14. $\underbrace{(\operatorname{cotg}^2x+1)}_{\operatorname{cossec}^2x}\underbrace{(1-\cos^2x)}_{\operatorname{sen}^2x}=\operatorname{cossec}^2x\cdot\operatorname{sen}^2x=\frac{1}{\operatorname{sen}^2x}\cdot\operatorname{sen}^2x=1$

Portanto, a alternativa **a** é a correta.

15. A veracidade da igualdade enunciada nessa tarefa está mostrada na seção **Respostas**, no final da reprodução do **Livro do Estudante** deste volume.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

16. $\sec x = -2 \Rightarrow \cos x = -\frac{1}{2}$

$$\cotg^2 x = \frac{\cos^2 x}{\sen^2 x} = \frac{\cos^2 x}{1 - \cos^2 x} = \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^2}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{3}$$

Portanto, a alternativa **b** é a correta.

17. Indicando por h a altura do prédio, temos:

$$\tg 42° = \frac{h - 1{,}8}{10} \Rightarrow h = 10 \cdot \tg 42° + 1{,}8$$

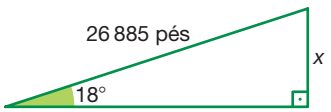
Calculando tg42°, obtemos:

$$\tg 42° = \frac{\sen 42°}{\sqrt{1 - \sen^2 42°}} \simeq 0{,}9$$

Assim: $h = 10 \cdot \tg 42° + 1{,}8 \Rightarrow h = 10{,}8$.

Portanto, a altura do prédio é aproximadamente 10,8 m.

18. **a)** Convertendo 8 200 m em pés: $\frac{8\,200}{0{,}305} \simeq 26\,885$



RONALDO INÁCIO/ ARQUIVO DA EDITORA

$$\sen 18° = \frac{x}{26\,885} \Rightarrow x = 26\,885 \cdot \sen 18°$$

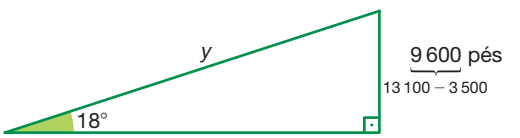
Calculando sen18°:

$$\sen 18° = \frac{1}{\operatorname{cossec} 18°} = \frac{1}{3{,}236} \simeq 0{,}309$$

$$x = 26\,885 \cdot \sen 18° \simeq 8\,308$$

A altura aproximada do avião é $3\,500 + 8\,308 = 11\,808$, ou seja, 11 808 pés.

b)



RONALDO INÁCIO/ ARQUIVO DA EDITORA

$$\sen 18° = \frac{9\,600}{y} \Rightarrow y = \frac{9\,600}{\sen 18°} \simeq 31\,068$$

O avião deve percorrer cerca de 31 068 pés, ou seja, aproximadamente 9 476 m.

19. **a)** Para k inteiro, temos:

$$x - \frac{7\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow x = \frac{7\pi}{6} + \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow x = \frac{5\pi}{3} + k\pi$$

Portanto, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| x = \frac{5\pi}{3} + k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$.

b) Como o seno é negativo no 3º e no 4º quadrante, temos:

- $x + \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{11\pi}{12} + 2k\pi$
- $x + \frac{\pi}{3} = \frac{7\pi}{4} + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{17\pi}{12} + 2k\pi$

Portanto, o conjunto solução da equação é:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| x = \frac{11\pi}{12} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{17\pi}{12} + 2k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$$

c) $\sen^2 2x = \frac{1}{4} \Rightarrow \sen 2x = \pm\frac{1}{2}$

Devemos analisar dois casos:

- $\sen\frac{\pi}{6} = \sen\frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}$
- $\sen\frac{7\pi}{6} = \sen\frac{11\pi}{6} = \frac{1}{2}$

Para todo $k \in \mathbb{Z}$, a solução da equação é:

$$2x = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{4}$$

Portanto, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| x = \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{4}, \text{com } k \in \mathbb{Z}\right\}$.

d) Como $\sen^2 x = 1 - \cos^2 x$, temos:

$$\cos x - \sen^2 x = 1 \Rightarrow \cos^2 x + \cos x - 2 = 0$$

Fazendo $y = \cos x$:

$$y^2 + y - 2 = 0 \Rightarrow y = -2 \text{ (não convém) ou } y = 1$$

Para $k \in \mathbb{Z}$, temos: $\cos x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi$.

Portanto, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| x = 2k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$.

e) Como o seno é negativo no 3º e no 4º quadrante, então:

$$\sen\frac{3\pi}{4} = \sen\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Para $k \in \mathbb{Z}$, temos:

- $2x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{3\pi}{8} + k\pi$
- $2x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{8} + k\pi$

Portanto, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| x = \frac{\pi}{8} + k\pi \text{ ou } x = \frac{3\pi}{8} + k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$.

f) $\cos\left(\pi - \frac{3\pi}{4}\right) = \sen\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

- $x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{12} + 2k\pi$
- $x + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{4} + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{19\pi}{12} + 2k\pi$

Assim, para todo $k \in \mathbb{Z}$, a solução da equação é:

$$x = \frac{\pi}{12} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{19\pi}{12} + 2k\pi$$

Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| x = \frac{\pi}{12} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{19\pi}{12} + 2k\pi, \text{com } k \in \mathbb{Z}\right\}$.

20. $16{,}2 = \frac{18^2}{10} \cdot \sen 2\alpha \Rightarrow \sen 2\alpha = \frac{1}{2}$

Como $0 < \alpha < 90°$, temos: $2\alpha = 30° \Rightarrow \alpha = 15°$.

21. Como $\operatorname{cossec}\left(\alpha + \frac{\pi}{5}\right) = \frac{1}{\sen\left(\alpha + \frac{\pi}{5}\right)}$ e o seno é positivo no 1º e no 2º quadrante, temos:

- $\alpha + \frac{\pi}{5} = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \alpha = \frac{2\pi}{15}$
- $\alpha + \frac{\pi}{5} = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow \alpha = \frac{7\pi}{15}$

Portanto, para $\alpha = \frac{2\pi}{15}$ ou $\alpha = \frac{7\pi}{15}$.

22. **a)** $\bullet\ h(2) = 3 \cdot \sen\left(\frac{5\pi}{31} \cdot 2\right) \Rightarrow h(2) \simeq 2{,}55$

$\bullet\ h(16) = 3 \cdot \sen\left(\frac{5\pi}{31} \cdot 16\right) \Rightarrow h(16) \simeq 2{,}9$

Portanto, a altura da maré às 2 h mede aproximadamente 2,55 m, e às 16 h, aproximadamente 2,90 m.

b) $1{,}5 = 3 \cdot \sen\left(\frac{5\pi}{31}t\right) \Rightarrow \sen\left(\frac{5\pi}{31}t\right) = \frac{1}{2}$. Como queremos determinar o menor valor de t, calculamos: $\frac{5\pi}{31}t = \frac{\pi}{6} \Rightarrow t = 1{,}0\overline{3}$.

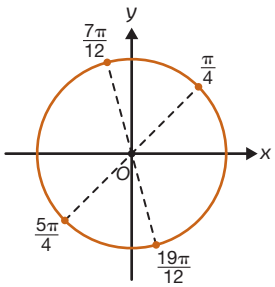
Portanto, o menor intervalo de tempo é aproximadamente 1 h 2 min.

23. O cosseno é negativo no 2º e no 3º quadrante e:

$$\cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3}$$

Na 1ª volta positiva, $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$ e $\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$. Assim, para $k \in \mathbb{Z}$, temos:

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

$$2x + \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi$$

$$2x + \frac{\pi}{6} = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{7\pi}{12} + k\pi$$

24. Para f intersectar o eixo das abscissas: $\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 0$.

Como $\cos\frac{\pi}{2} = 0$, temos: $x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} + k\pi$.

Portanto, $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$.

Resolvendo por etapas (páginas 101 e 102)

2. Sim, é possível resolver o problema utilizando o plano apresentado com algumas adequações. Determinando para quais valores de $t \in [1, 7]$, temos $q(t) = 3{,}6$.

$$3{,}6 = 2{,}1 + 1{,}5 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi t}{2}\right) \Rightarrow \operatorname{sen}\left(\frac{\pi t}{2}\right) = 1$$

Na 1ª volta positiva, temos $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi t}{2}\right) = 1$. Assim, para $k \in \mathbb{Z}$, a solução da equação é: $\frac{\pi t}{2} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Rightarrow t = 1 + 4k$.

Como $t \in [1, 7]$, temos $t = 1$ e $t = 5$. Portanto, essa cidade recebeu 3,6 mil turistas nos meses de janeiro e maio.

Desenvolvimento sustentável (páginas 106 e 107)

2. • Em $t = 0$, $y = 70$, logo 70 mmHg.
• Em $t = 0{,}4$, $y = 120$. Portanto, após 0,4 s.

Síntese do capítulo (página 109)

3. Sugestão de resposta: Variações das marés, balanço de pêndulos, vibrações sonoras na música e trajetória de corpos celestes.

4. As alternativas **a** e **b** não estão corretas, pois $\operatorname{sen}(a + b) = \operatorname{sen}a \cdot \cos b + \operatorname{sen}b \cdot \cos a$. E as alternativas **c** e **e** não estão corretas, pois $\operatorname{tg}(a + b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b}$ para todo $a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ e $(a + b) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$.

Portanto, as alternativas **d** e **f** estão corretas.

5. A veracidade de cada igualdade enunciada nessa tarefa está mostrada na seção **Respostas**, no final da reprodução do **Livro do Estudante** deste volume.

9. Sugestão de resposta:

$$\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2},\ \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \text{ e } 2 \cdot \cos^2 x - 5 \cdot \cos x.$$

10. Na 1ª volta positiva, temos $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ e $\cos\frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2}$.

Assim, para $k \in \mathbb{Z}$:

• $x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \Rightarrow x = 0 + 2k\pi$.

• $x + \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$.

Portanto, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = 2k\pi \text{ ou } x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Logo, a alternativa **c** é a correta.

CAPÍTULO 4 LADRILHAMENTO E ÁREA DE FIGURAS PLANAS

Abertura do capítulo

1. Pelo chiado do som, pela estética dos encartes e pela necessidade de dedicar um tempo especial para ouvir um bom disco.

3. Sugestão de resposta: Observando as áreas das faixas de gravação (que lembram coroas circulares), pois, quanto maior o tempo de duração da música, maior será sua área.

Questões

A. Utilizando as peças com formato de triângulo equilátero, é possível obter um ladrilhamento regular, assim como usando as peças com formato de hexágono regular.

C. Não é possível obter ladrilhamentos regulares com esses polígonos.

D. A veracidade da igualdade enunciada nessa questão está mostrada na seção **Respostas**, no final da reprodução do **Livro do Estudante** deste volume.

E. Seja m a quantidade de polígonos ao redor de um vértice comum, tem-se, evidentemente, $m \geq 3$. Como a menor medida do ângulo interno de um polígono regular é 60°, segue que $3 \leq m \leq 6$, pois $\frac{360°}{60°} = 6$.

F. Os procedimentos de resolução dessa questão estão expostos no desenvolvimento do tópico, nas páginas **118** e **119** do **Livro do Estudante**. Os estudantes devem obter as seguintes possibilidades: (3, 7, 42), (3, 8, 24), (3, 9, 18), (3, 10, 15), (3, 12, 12), (4, 5, 20), (4, 6, 12), (4, 8, 8) e (5, 5, 10).

G. Os procedimentos de resolução dessa questão estão expostos no desenvolvimento do tópico, nas páginas **119** e **120** do **Livro do Estudante**. Uma combinação de três polígonos envolvendo um triângulo equilátero ladrilha o plano apenas se os outros dois polígonos forem congruentes.

H. Considere um quadrado de lado a, diagonal d e área A. Assim:

$$d^2 = a^2 + a^2 \Rightarrow d^2 = 2 \cdot a^2 \Rightarrow d^2 = 2 \cdot A \Rightarrow A = \frac{d^2}{2}$$

I. O algoritmo e o fluxograma referentes a essa questão estão apresentados na seção **Respostas**, no final da reprodução do **Livro do Estudante** deste volume.

J. $A_{\text{Retângulo}} = 2 \text{ cm} \cdot 5 \text{ cm} = 10 \text{ cm}^2$

$$A_{\text{Quadrado}} = (3{,}7 \text{ cm})^2 = 13{,}69 \text{ cm}^2$$

Portanto, o quadrado cujo comprimento do lado é 3,7 cm tem maior área.

K. $A = 2 \cdot 5 = 10$. Logo, $A = 10$ cm.

L. $51{,}66 = 12{,}3 \cdot h \Rightarrow h = 4{,}2$. Portanto, $h = 4{,}2$ m.

M. A veracidade da afirmação apresentada nessa questão está mostrada na seção **Respostas**, no final da reprodução do **Livro do Estudante** deste volume.

N. A veracidade da afirmação apresentada nessa questão está mostrada na seção **Respostas**, no final da reprodução do **Livro do Estudante** deste volume.

O. O algoritmo e o fluxograma referentes a essa questão estão apresentados na seção **Respostas**, no final da reprodução do **Livro do Estudante** deste volume.

P. A veracidade da afirmação apresentada nessa questão está mostrada na seção **Respostas**, no final da reprodução do **Livro do Estudante** deste volume.

Q. $A_c = \pi R^2 - \pi r^2 \Rightarrow A_c = \pi\left(R^2 - r^2\right)$

R. O algoritmo e o fluxograma referentes a essa questão estão apresentados na seção **Respostas**, no final da reprodução do **Livro do Estudante** deste volume.

Exercícios e problemas

1. Os ladrilhamentos **B** e **D**, pois satisfaz as condições: as peças são polígonos regulares; a interseção de duas, se existir, é um lado ou um vértice; a distribuição de peças ao redor de cada um dos vértices do ladrilhamento é sempre a mesma.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

2. As imagens referentes aos itens dessa tarefa estão apresentadas na seção **Respostas**, no final da reprodução do **Livro do Estudante** deste volume.

3. a) Considere quatro polígonos regulares de n_1, n_2, n_3 e n_4 lados, respectivamente. Suponha que seja possível ladrilhar o plano utilizando esses polígonos. Assim:

$$\frac{(n_1-2)\cdot 180^\circ}{n_1}+\frac{(n_2-2)\cdot 180^\circ}{n_2}+$$
$$+\frac{(n_3-2)\cdot 180^\circ}{n_3}+\frac{(n_4-2)\cdot 180^\circ}{n_4}=360^\circ$$

Simplificando essa equação, obtemos: $\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}+\frac{1}{n_4}=1$.

Suponha que $n_1 \leq n_2 \leq n_3 \leq n_4$. Assim:

$$\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}+\frac{1}{n_4}=1 \Rightarrow 1 \leq \frac{4}{n_1} \Rightarrow 3 \leq n_1 \leq 4$$

Se $n_1 = 3$, então: $\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}+\frac{1}{n_4}=\frac{2}{3} \Rightarrow \frac{2}{3} \leq \frac{3}{n_2} \Rightarrow 3 \leq n_2 \leq 4$.

Desse modo, analisaremos os seguintes casos.

1º) caso: $n_1 = n_2 = 3$.

$$\frac{1}{n_3}+\frac{1}{n_4}=\frac{1}{3} \Rightarrow \frac{1}{3} \leq \frac{2}{n_3} \Rightarrow 4 \leq n_3 \leq 6$$

Além disso, temos: $\frac{1}{n_4}=\frac{1}{3}-\frac{1}{n_3}=\frac{n_3-3}{3n_3}$. Diante disso, se $n_3 = 4$, então $n_4 = 12$; se $n_3 = 6$, então $n_4 = 6$.

2º) caso: $n_1 = 3$ e $n_2 = 4$.

$$\frac{1}{n_3}+\frac{1}{n_4}=\frac{5}{12} \Rightarrow \frac{5}{12} \leq \frac{2}{n_3} \Rightarrow n_3 = 4 \text{ e } n_4 = 6$$

Se $n_1 = 4$, então: $\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}+\frac{1}{n_4}=\frac{3}{4} \Rightarrow \frac{3}{4} \leq \frac{3}{n_2} \Rightarrow 3 \leq n_2 \leq 4$.

Já analisamos o caso $n_1 = 3$ e $n_2 = 4$. Agora, vamos analisar o que ocorre quando $n_1 = n_2 = 4$.

$$\frac{1}{n_3}+\frac{1}{n_4}=\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{2}{n_3} \Rightarrow n_3 = n_4 = 4$$

Soluções inteiras e positivas de $\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}+\frac{1}{n_4}=1$

n_1	n_2	n_3	n_4
3	3	4	12
3	3	6	6
3	4	3	12
3	6	3	6
3	4	4	6
3	4	6	4
4	4	4	4

Como queremos apenas as combinações de quatro polígonos regulares de dois ou mais tipos ao redor de um vértice comum, então as outras quatro soluções são $(3, 3, 6, 6)$, $(3, 6, 3, 6)$, $(3, 4, 6, 4)$ e $(3, 4, 4, 6)$.

b) No item **a**, obtemos as possíveis combinações com quatro polígonos. Agora, vamos determinar quais delas ladrilham o plano. Com as soluções $(3, 3, 4, 12)$, $(3, 4, 3, 12)$, $(3, 4, 4, 6)$ e $(3, 3, 6, 6)$, não é possível obter ladrilhamentos semirregulares, pois a distribuição de peças ao redor de cada um dos vértices do ladrilhamento não é sempre a mesma. Portanto, os ladrilhamentos semirregulares com quatro polígonos regulares em cada vértice são $(3, 6, 3, 6)$ e $(3, 4, 6, 4)$.

4. a) A afirmação é falsa, pois é impossível obter ladrilhamentos regulares do plano utilizando octógonos regulares.

b) A afirmação é falsa, pois se indicarmos por α_1 e por α_2, respectivamente, a medida do ângulo interno do octógono e do quadrado, temos:

$$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_2+\alpha_2=\frac{(8-2)\cdot 180^\circ}{8}+3\cdot 90^\circ = 405^\circ > 360^\circ$$

c) Verdadeira, pois, como demonstrado na teoria, a combinação $(4, 8, 8)$ ladrilha o plano.

5. Considere cinco polígonos regulares de, respectivamente, n_1, n_2, n_3, n_4 e n_5 lados. Suponha que $n_1 \leq n_2 \leq n_3 \leq n_4 \leq n_5$, assim:

$$\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}+\frac{1}{n_4}+\frac{1}{n_5}=\frac{3}{2} \Rightarrow \frac{3}{2} \leq \frac{5}{n_1} \Rightarrow n_1 = 3$$

Consequentemente:

- $\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}+\frac{1}{n_4}+\frac{1}{n_5}=\frac{7}{6} \Rightarrow \frac{7}{6} \leq \frac{4}{n_2} \Rightarrow n_2 = 3$
- $\frac{1}{n_3}+\frac{1}{n_4}+\frac{1}{n_5}=\frac{5}{6} \Rightarrow \frac{5}{6} \leq \frac{3}{n_3} \Rightarrow n_3 = 3$
- $\frac{1}{n_4}+\frac{1}{n_5}=\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{2}{n_4} \Rightarrow 3 \leq n_4 \leq 4$

Além disso, temos:

$$\frac{1}{n_4}=\frac{1}{2}-\frac{1}{n_5} \Rightarrow \frac{1}{n_4}=\frac{n_5-2}{2n_5}$$

Logo, temos: $n_4 = 3$, então $n_5 = 6$; $n_4 = 4$, então $n_5 = 4$.

Sabendo que a posição dos polígonos importa, organizamos as possíveis combinações com cinco polígonos: $(3, 3, 3, 3, 6)$, $(3, 3, 3, 4, 4)$ e $(3, 3, 4, 3, 4)$. Portanto, é possível utilizar o triângulo equilátero, o hexágono regular e o quadrado.

6. Considere seis polígonos regulares de n_1, n_2, n_3, n_4, n_5 e n_6 lados, respectivamente, e suponha que $n_1 \leq n_2 \leq n_3 \leq n_4 \leq n_5 \leq n_6$. Assim:

$$\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}+\frac{1}{n_4}+\frac{1}{n_5}+\frac{1}{n_6}=2$$

Efetuando os cálculos, obtemos $n_i = 3$, para todo $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

Assim, a única composição com 6 polígonos é $(3, 3, 3, 3, 3, 3)$. Portanto, de acordo com as verificações feitas até o momento, os 11 ladrilhamentos bem comportados do plano são: $(3, 3, 3, 3, 3, 3)$, $(4, 4, 4, 4)$, $(6, 6, 6)$, $(3, 12, 12)$, $(4, 6, 12)$, $(4, 8, 8)$, $(3, 6, 3, 6)$, $(3, 4, 6, 4)$, $(3, 3, 3, 3, 6)$, $(3, 3, 3, 4, 4)$ e $(3, 3, 4, 3, 4)$.

As representações dos ladrilhamentos bem-comportados, referentes a essa tarefa, estão mostradas na seção **Respostas**, no final da reprodução do **Livro do Estudante** deste volume.

7. $17^2 = \left(\sqrt{93}\right)^2 + b^2 \Rightarrow b^2 = 196 \Rightarrow b = 14$

$A = \sqrt{93} \cdot 14 = 14\sqrt{93}$

Portanto, a área do retângulo é $14\sqrt{93}$ cm².

8. 0,12 m + 2,2 m + 0,12 m = 2,44 m

As dimensões da vaga são 5,25 m e 2,44 m. Logo:

$$A = 5{,}25 \cdot 2{,}44 = 12{,}81$$

Assim, a área de uma vaga é 12,81 m². Por fim, calculamos o preço cobrado pelo profissional.

$$12{,}81 \cdot 25 = 320{,}25$$

Portanto, esse profissional cobrou R$ 320,25 para pintar uma dessas vagas.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

9. A. Indicando por d o comprimento da diagonal menor, temos:

$$\left(2\sqrt{5}\right)^2 = \left(\frac{d}{2}\right)^2 + 4^2 \Rightarrow d^2 = 16 \Rightarrow d = 4$$

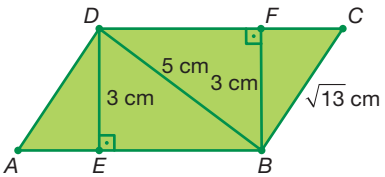
Logo: $A = \frac{4 \cdot 8}{2} = 16$. Portanto, a área do losango é 16 cm².

B. Indicando por D o comprimento da diagonal maior, temos:

$$(7)^2 = \left(\frac{D}{2}\right)^2 + \left(2\sqrt{6}\right)^2 \Rightarrow D^2 = 100 \Rightarrow D = 10$$

Logo: $A = \frac{10 \cdot 4\sqrt{6}}{2} = 20\sqrt{6}$. Portanto, a área do losango é $20\sqrt{6}$ cm².

10. A.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Aplicando o Teorema de Pitágoras nos triângulos BDF e BCF, temos:

$5^2 = 3^2 + (BE)^2 \Rightarrow (DF)^2 = 16 \Rightarrow DF = 4$

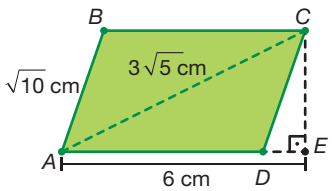
$\left(\sqrt{13}\right)^2 = 3^2 + (FC)^2 \Rightarrow (FC)^2 = 4 \Rightarrow FC = 2$

Por fim, calculamos a área A.

$$A = DC \cdot DE = (DF + FC) \cdot DE = 6 \cdot 3 = 18$$

Portanto, a área do paralelogramo é 18 cm².

B.



TATIANE GALHEIRO/ARQUIVO DA EDITORA

Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo AEC, temos:

$$\left(3\sqrt{5}\right)^2 = (CE)^2 + 6^2 \Rightarrow (CE)^2 = 9 \Rightarrow CE = 3$$

Como $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ tem o mesmo comprimento, vamos aplicar o Teorema de Pitágoras no triângulo DEC. Assim, temos:

$$\left(\sqrt{10}\right)^2 = 3^2 + (DE)^2 \Rightarrow (DE)^2 = 1 \Rightarrow DE = 1$$

Com isso, $AD = 5$ cm, pois $AD = AE - DE$. Logo: $A = 5 \cdot 3 = 15$. Portanto, a área do paralelogramo é 15 cm².

11. a) $A_{Quadra} = 16\text{ m} \cdot 27\text{ m} = 432\text{ m}^2$

$A_{Região\ amarela} = 16\text{ m} \cdot 9\text{ m} = 144\text{ m}^2$

$A_{Região\ azul} = A_{Quadra} - A_{Região\ amarela} = 432\text{ m}^2 - 144\text{ m}^2 = 288\text{ m}^2$

Agora, calculamos a quantidade mínima de tinta de cada cor.

$$Q_{Azul} = \frac{288}{18} = 16 \qquad Q_{Amarela} = \frac{144}{16} = 9$$

Portanto, serão necessários, no mínimo, 16 litros de tinta azul e 9 litros de tinta amarela.

b) • Tinta azul: $\frac{16}{3{,}6} \simeq 4{,}44$. Assim, são necessárias, no mínimo, 5 latas de tinta azul.

• Tinta amarela: $\frac{9}{3{,}6} \simeq 2{,}5$. Logo, são necessárias, no mínimo, 3 latas de tinta azul.

Cada lata de tinta custa R$ 29,50. Assim:

$$29{,}5 \cdot (5 + 3) = 236$$

Portanto, com a compra das tintas nessa etapa, serão gastos, no mínimo, R$ 236,00.

12. Inicialmente, vamos calcular a área do paralelogramo (A_P) e a área do losango (A_L). Para isso, calculamos inicialmente a altura do paralelogramo.

$$10^2 = 6^2 + (DC)^2 \Rightarrow DC = 8$$

$$A_P = 16 \cdot 8 = 128$$

$$A_L = \frac{10 \cdot 8}{2} = 40$$

Assim, a área do paralelogramo é 128 cm² e a área do losango, 40 cm².

Além disso, segue que:

• $FE = AB - DF = 16 - 8 = 8$

• o comprimento da altura do triângulo EFJ é igual a $\frac{IJ}{2} = \frac{8}{2} = 4$.

Logo, a área A_T do triângulo EFJ é:

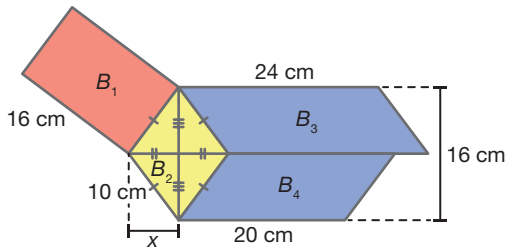
$$A_T = \frac{FE \cdot IJ}{2} = \frac{8 \cdot 4}{2} = 16$$

Sendo assim, a área A da figura é:

$$A = A_P + A_L - A_T = 128 + 40 - 16 = 152$$

Logo, a área da figura é 152 cm².

13.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

$$10^2 = 8^2 + x^2 \Rightarrow x^2 = 36 \Rightarrow x = 6$$

Indicando por B_1, B_2, B_3 e B_4, respectivamente, a área do retângulo em vermelho, do losango, do paralelogramo de base 24 cm e do paralelogramo de base 20 cm, temos:

• $B_1 = 16 \cdot 10 = 160$

• $B_2 = \frac{16 \cdot 2 \cdot 6}{2} = 96$

• $B_3 = 24 \cdot 8 = 192$

• $B_4 = 20 \cdot 8 = 160$

Logo, a área F da figura é:

$$F = B_1 + B_2 + B_3 + B_4 = 160 + 96 + 192 + 160 = 608$$

Portanto, a área da figura é 608 cm².

14. a) $21^2 + (5 + 3 + 13) \cdot 13 = 714$

Portanto, a área da figura obtida é 714 m².

b) O 9º termo da sequência é 34, pois 21 + 13 = 34. Assim:

$$34^2 + 714 = 1870$$

Portanto, a área da figura obtida é 1870 m².

15. A área A, em quilômetros, de um campo de futebol é:

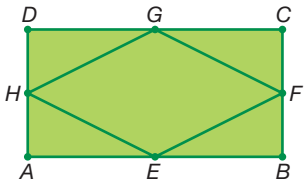
$$A = 0{,}068 \cdot 0{,}105 = 0{,}00714$$

Assim: $\frac{64\,939}{0{,}00714} \simeq 9\,095\,098$. Portanto, o desmatamento nesse período corresponde a, aproximadamente, 9 095 098 campos de futebol.

16. Um paralelogramo em que todos os ângulos são retos e todos os lados têm a mesma medida de comprimento é, na verdade, um quadrado. Assim: $A = (12)^2 = 144$. Portanto, a área desse paralelogramo é 144 cm².

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

17. Consideremos o losango *EFGH* formado pelos pontos médios do retângulo *ABCD*.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

O comprimento da diagonal maior e o da diagonal menor do losango *EFGH* são iguais aos comprimentos dos lados $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ do retângulo, respectivamente. Assim:

$$\left(6\sqrt{5}\right)^2 = \underbrace{(AB)^2}_{2\cdot BC}(BC)^2 \Rightarrow BC = 6$$

Além disso, $AB = 2 \cdot BC = 2 \cdot 6$ cm $= 12$ cm. Logo, a área A do retângulo é dada por: $A = \frac{FH \cdot EG}{2} = \frac{AB \cdot BC}{2} = 36$. Portanto, a área do losango *EFGH* é 36 cm².

18. A. $A = 0{,}5 \cdot 12 + 3 - 1 = 8$. Portanto, a área da figura é aproximadamente 8 u².

B. $A = 0{,}5 \cdot 14 + 18 - 1 = 24$. Portanto, a área da figura é aproximadamente 24 u².

19. $A = 0{,}5 \cdot 18 + 9 - 1 = 17$. Logo: $17 \cdot 72^2 = 88\,128$. Portanto, a área de Santa Catarina é aproximadamente 88 128 km².

20. As dimensões do retângulo são 4 cm e 2,5 cm. Assim, a área A da região é dada por: $A \simeq 4 \cdot 2{,}5 = 10$. Portanto, a área do retângulo é aproximadamente 10 cm².

21. **a)** As dimensões do retângulo são 4,6 cm e 3,2 cm. Assim:

$$4{,}6 \cdot 3{,}2 = 14{,}72$$

Logo, a área A da Amazônia Legal é:

$$A \simeq 14{,}72 \cdot 605^2 = 5\,387\,888$$

Portanto, a área da Amazônia Legal é aproximadamente 5 387 888 km².

b) $P = \frac{64\,939}{5\,387\,888} \simeq 0{,}012$

Portanto, a área desmatada da Amazônia Legal nesse período corresponde a, aproximadamente, 1,2% de sua área total.

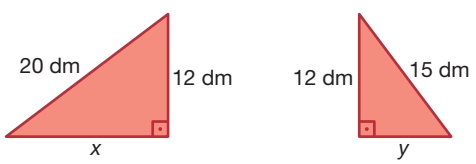
22. A. $p = \frac{20 + 16 + 18}{2} = 27$

$$A = \sqrt{27(27-20)(27-16)(27-18)} = \sqrt{18\,711} \simeq 136{,}8$$

Portanto, a área desse triângulo é, aproximadamente, 136,8 dm².

B. $A = \frac{12 \cdot 16}{2} = 96$. Portanto, a área desse triângulo é 96 dm².

C.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

$20^2 = 12^2 + x^2 \Rightarrow x^2 = 256 \Rightarrow x = 16$

$15^2 = 12^2 + y^2 \Rightarrow y^2 = 81 \Rightarrow y = 9$

Assim: $A = \frac{(16 + 9) \cdot 12}{2} = 150$. Portanto, a área do triângulo é 150 dm².

23. **a)** $A_{ocupada} = 8 \cdot 10{,}6 = 84{,}8$

Portanto, a área da superfície ocupada será 84,8 m².

b) $A_{parede} = 2\left(4 \cdot 18{,}6 + \frac{2{,}5 \cdot 10{,}6}{2}\right) - 8 = 167{,}3$

Portanto, serão necessários, no mínimo, 167,3 m² de madeira.

24. A. $p = \frac{5 + 7 + 4}{2} = 8$; $A = \sqrt{8(8-5)(8-7)(8-4)} = 4\sqrt{6}$.

Portanto, a área do triângulo é $4\sqrt{6}$ m².

B. $p = \frac{12 + 15 + 9}{2} = 18$; $A = \sqrt{18(18-12)(18-15)(18-9)} = 54$.

Portanto, a área do triângulo é 54 dm².

C. $p = \frac{2 + 3 + 4}{2} = \frac{9}{2}$; $A = \sqrt{\frac{9}{2}\left(\frac{9}{2} - 2\right)\left(\frac{9}{2} - 3\right)\left(\frac{9}{2} - 4\right)} = \frac{3\sqrt{15}}{4}$.

Portanto, a área do triângulo é $\frac{3\sqrt{15}}{4}$ km².

D. $p = \frac{14 + 16 + 10}{2} = 20$;

$A = \sqrt{20(20-14)(20-16)(20-10)} = 40\sqrt{3}$.

Portanto, a área do triângulo é $40\sqrt{3}$ cm².

25. Seja c o comprimento desconhecido do cateto e A a área do triângulo. Assim:

$$\left(2\sqrt{2}\right)^2 = \left(\sqrt{3}\right)^2 + c^2 \Rightarrow c^2 = 5 \Rightarrow c = \sqrt{5}$$

$$A = \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{5}}{2} = \frac{\sqrt{15}}{2}$$

Portanto, o comprimento do outro cateto é $\sqrt{5}$ cm e a área A do triângulo é $\frac{\sqrt{15}}{2}$ cm².

26. Indicando por a o comprimento do lado do triângulo, temos:

$$9\sqrt{3} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow a^2 = 36 \Rightarrow a = 6$$

Agora, calculamos o comprimento da altura h.

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow h = 3\sqrt{3}$$

Portanto, o comprimento da altura desse triângulo é $3\sqrt{3}$ cm.

27. $\operatorname{tg}(60°) = \frac{4\sqrt{3}}{MB} \Rightarrow MB = \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 4$

Assim, $BC = 17$ dm. Logo, a área A do trapézio é:

$$A = \frac{(BC + AD) \cdot AM}{2} = \frac{(17 + 13) \cdot 4\sqrt{3}}{2} = 60\sqrt{3}$$

Portanto, a área do trapézio *ABCD* é $60\sqrt{3}$ dm².

28. Verdadeira. Os triângulos *ABC* e *AFC* têm a mesma área, pois têm base $\overline{AC}$ comum e altura com mesmo comprimento. O mesmo ocorre com os triângulos *AED* e *AGD*. Já o triângulo *ACD* é comum ao triângulo *AFG* e ao pentágono *ABCDE*. Dessa maneira, como o triângulo *AFG* e o pentágono *ABCDE* são formados por triângulos com áreas equivalentes, eles têm a mesma área.

29. Indicando por u o comprimento do lado de um quadradinho da malha e por P a área do paralelogramo, temos:

$$P = 2u \cdot u \Rightarrow 10 = 2u^2 \Rightarrow u^2 = 5 \Rightarrow u = \sqrt{5}$$

Calculando a área A do tangram, obtemos:

$$A = (4u)^2 = \left(4\sqrt{5}\right)^2 = 80$$

Como a figura é composta de todas as peças do tangram, sua área é 80 cm².

30. Podemos decompor o polígono *ABCDEFGH* em dois triângulos retângulos (*AGH* e *BCD*), um retângulo (*ABDG*) e um trapézio (*DEFG*).

$$(AH)^2 = (AG)^2 + (HG)^2 \Rightarrow (AG)^2 = 4 \Rightarrow AG = 2$$

Indicando por A_1 e A_2, respetivamente, a área dos triângulos *AGH* e *BCD*, segue que:

$$A_1 = A_2 = \frac{2 \cdot 2}{2} = 2$$

Logo, a área de cada um desses triângulos é 2 cm².

Indicando por A_3 a área do retângulo *ABDG*, temos:

$$A_3 = 2 \cdot 2 = 4$$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Assim, $A_3 = 4\ cm^2$.

Indicando por A_4 a área do trapézio *DEFG*, temos:

$$A_4 = \frac{(6+5)\cdot 2}{2} = 11.$$

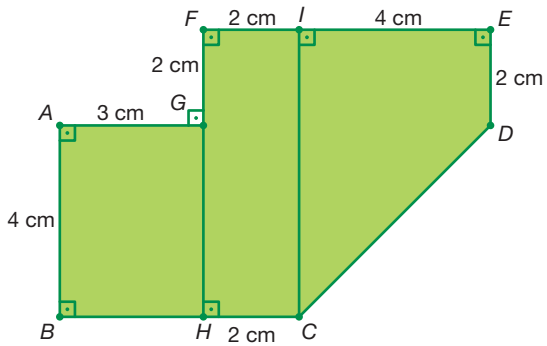
Logo, $A_4 = 11\ cm^2$.

$$A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = 2 + 2 + 4 + 11 = 19$$

Portanto, a área do polígono *ABCDEFGH* é 19 cm^2.

31. A. Podemos reconfigurar o polígono transladando o triângulo de lados $\sqrt{5}$ cm, $\sqrt{5}$ cm e 4 cm. Neste caso, obtemos um retângulo de dimensões 4 cm e 5 cm. Assim: $4 \cdot 5 = 20$. Portanto, a área do retângulo é 20 cm^2 e, consequentemente, a área do polígono é 20 cm^2.

B. Podemos decompor o polígono em um retângulo *AGHB*, um retângulo *FICH* e um trapézio *IEDC* conforme apresentado.



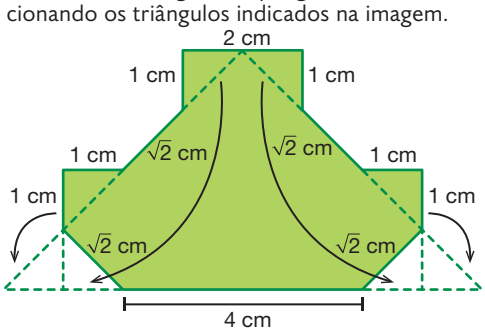
RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Indicando por A_1, A_2 e A_3 a área do retângulo *AGHB*, do retângulo *FICH* e do trapézio *IEDC*, respectivamente, temos:

$$A_1 = 3 \cdot 4 = 12$$
$$A_2 = 2 \cdot 6 = 12$$
$$A_3 = \frac{(6+2)\cdot 4}{2} = 16$$

Assim: $A = 12 + 12 + 16 = 40$. Portanto, a área do polígono é 40 cm^2.

C. Podemos reconfigurar o polígono transladando e rotacionando os triângulos indicados na imagem.



RONALDO INÁCIO/ARQUVO DA EDITORA

Nesse caso, obtemos um triângulo de altura 4 cm e base 8 cm, cuja área *A* é: $A = \frac{4 \cdot 8}{2} = 16$. Portanto, a área do triângulo é 16 cm^2 e, consequentemente, a área do polígono é 16 cm^2.

32. Calculando as áreas da arquibancada (A_a) e da pista (A_p), em metros quadrados, temos:

$$A_a = 2 \cdot \frac{(40+30)\cdot 4}{2} = 280$$
$$A_p = 30 \cdot 30 = 900$$

Assim, a área máxima disponível para o público, em metros quadrados, é dada por: $A = A_a + A_p = 1180$. Logo, o público máximo *P* é: $P = 6 \cdot 1180 = 7080$. Portanto, esse evento poderá receber um público máximo de 7 080 pessoas.

33. Calculando a área total do terreno, temos:

$$A_{Terreno} = \frac{100 \cdot 300}{2} = 15\,000$$

Sendo assim: $A_{Triângulo} = A_{Trapézio} = \frac{A_{total}}{2} = 7\,500\ m^2$.

Por outro lado:

$$A_{Triângulo} = \frac{x \cdot y}{2} \Rightarrow x \cdot y = 2 \cdot 7\,500 \Rightarrow x \cdot y = 15\,000$$

$$A_{trapézio} = \frac{(100+x)\cdot(300-y)}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot 7\,500 = 30\,000 + 300x - 100y - \underbrace{x \cdot y}_{15\,000} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 300x - 100y = 15\,000 - 30\,000 + 15\,000 \Rightarrow x = \frac{1}{3}y$$

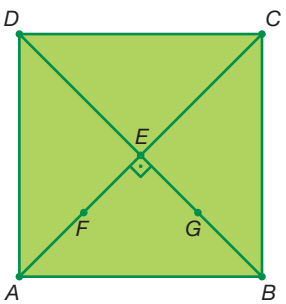
Assim:

$$x \cdot y = 15\,000 \Rightarrow \left(\frac{1}{3}y\right) \cdot y = 15\,000 \Rightarrow y^2 = 45\,000 \Rightarrow y = 150\sqrt{2}$$

$$x = \frac{1}{3}y \Rightarrow x = \frac{1}{3} \cdot 150\sqrt{2} \Rightarrow x = 50\sqrt{2}$$

Portanto, $x = 50\sqrt{2}$ m e $y = 150\sqrt{2}$ m.

34.



KEITHY MOSTACHI/ARQUIVO DA EDITORA

$$A = 9\ cm^2 \Rightarrow AB = 3\ cm$$

Além disso, *EF* = *EG*, pois os triângulos *EFG* e *EAB* são semelhantes. Logo, a área do triângulo *EFG* é: $A = \frac{\frac{3}{3} \cdot \frac{3}{3}}{2} = 0{,}5$.

Portanto, a área do triângulo *EFG* é 0,5 cm^2.

35. **a)** O quadrilátero *ABCD* foi decomposto em dois triângulos: *ABC* e *ADC*. O cálculo da área desses triângulos foi obtido por meio da fórmula de Herão.

b) Vamos aproximar a área desse trapézio pela área de um retângulo *A'B'C'D'* com:

- $A'B' = \frac{200 + 800}{2} = 500$
- $B'C' = \frac{500 + 500}{2} = 500$

Assim: $Área_{A'B'C'D'} = (A'B') \cdot (B'C') = 500 \cdot 500 = 250\,000$. Portanto, a área do trapézio é aproximadamente 250 000 m^2.

36. Vamos calcular as áreas das regiões destinadas ao plantio de flores (F_1) e de hortaliças (H_1) antes do remanejamento, ambas em metros quadrados.

- $A_{F_1} = \frac{(20+25)\cdot 10}{2} = 225$
- $A_{H_1} = \frac{10 \cdot 20}{2} = 100$

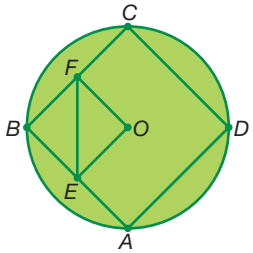
Agora, calculamos as áreas das regiões destinadas ao plantio de flores (F_2) e de hortaliças (H_2) depois do remanejamento, ambas em metros quadrados.

- $A_{F_2} = 10 \cdot 10 = 100$
- $A_{H_2} = \frac{15 \cdot 30}{2} = 225$
- $\frac{A_{F_2} - A_{F_1}}{A_{F_1}} = \frac{100 - 225}{225} \simeq -0{,}5556$
- $\frac{A_{H_2} - A_{H_1}}{A_{H_1}} = \frac{225 - 100}{100} = 1{,}25$

Logo, a área destinada ao plantio de flores diminuirá aproximadamente 55,56% e a área destinada ao plantio de hortaliças aumentará 125%. Portanto, a alternativa **e** é a correta.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

37.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

O losango *ABCD* é um quadrado e:

$(BC)^2 = (BO)^2 + (OC)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow (BC)^2 = 8 \Rightarrow BC = 2\sqrt{2}$

Assim, $BE = BF = \frac{1}{2} \cdot BC =$

$= \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} = \sqrt{2}$.

Além disso, $\overline{EO}$ é perpendicular a $\overline{AB}$, pois o triângulo *ABO* é isósceles. Analogamente, concluímos que $\overline{OF}$ é perpendicular a $\overline{BC}$. Diante disso, é fácil ver que *BEOF* é um quadrado de lado $\sqrt{2}$ cm. Logo, a área *A* do triângulo *OEF* é dada por:

$A = \frac{\left(\sqrt{2}\right)^2}{2} = 1$. Portanto, a área do triângulo *OEF* é 1 cm².

38. O algoritmo e o fluxograma referentes a essa tarefa estão apresentados na seção **Respostas**, no final da reprodução do **Livro do Estudante** deste volume.

40. Temos *AB* = 28 m e *CD* = 20 m. Para calcular a área do trapézio *ABCD*, precisamos calcular sua altura (*h*). Como os dois prédios distam entre si 15 m e como a diferença entre suas alturas é 80 m − 60 m = 20 m, então, pelo Teorema de Pitágoras, obtemos:

$$h^2 = (15)^2 + (20)^2 \Rightarrow h = \sqrt{625} = 25$$

Assim, $A = \frac{(28 + 20) \cdot 25}{2} \Rightarrow A = 600$, ou seja, a área dessa lona é 600 m². Logo, a alternativa **c** é a correta.

41. Pelo caso de semelhança **LAL**, os triângulos *APB* e *EPF* são semelhantes com razão de proporcionalidade $\frac{1}{2}$, pois *E* e *F* são, respectivamente, pontos médios dos segmentos $\overline{AP}$ e $\overline{BP}$. Assim: $EF = \frac{1}{2}AB \Rightarrow EF = 5$.

Do mesmo modo, os triângulos *CDP* e *GHP* são semelhantes com razão de proporcionalidade $\frac{1}{2}$. Assim:

$$GH = \frac{1}{2}DC \Rightarrow GH = 2$$

Os pontos *E*, *H*, *G* e *F* são, respectivamente, pontos médios dos segmentos $\overline{AP}$, $\overline{DP}$, $\overline{CP}$ e $\overline{BP}$. Então, pelo caso de semelhança **LAL**, os triângulos *APD* e *EPH* são semelhantes com razão de proporcionalidade $\frac{1}{2}$ e os triângulos *BPC* e *FPG* também são semelhantes com razão de proporcionalidade $\frac{1}{2}$. Como o trapézio *ABCD* é isósceles, temos:

$$AD = BC = 2EH = 2GF \Rightarrow EH = GF = \frac{1}{2}AD$$

$$(AD)^2 = 6^2 + \left(\frac{10 - 4}{2}\right)^2 \Rightarrow AD = 3\sqrt{5}$$

$$EH = GF = \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{5} = \frac{3\sqrt{5}}{2}$$

Área do novo jardim: $A = \frac{(5 + 2) \cdot \frac{6}{2}}{2} = 10{,}5$. Portanto, a área do novo jardim é 10,5 m².

42. A. $S = \frac{90 \cdot 70 \cdot \text{sen}30°}{2} = \frac{6\,300 \cdot 0{,}5}{2} = 1575$

Portanto, a área do triângulo é 1575 cm².

B. $S = \frac{85 \cdot 40 \cdot \text{sen}118°}{2} = \frac{85 \cdot 40 \cdot \text{sen}62°}{2} \simeq 1501{,}1$

Portanto, a área do triângulo é, aproximadamente, 1501,1 cm².

C. $S = \frac{60 \cdot 80 \cdot \text{sen}52°}{2} \simeq 1891{,}2$

Portanto, a área do triângulo é, aproximadamente, 1891,2 cm².

43. a) $S = \frac{36 \cdot 42 \cdot \text{sen}65°}{2} \simeq 684{,}9$

Portanto, a área do triângulo é, aproximadamente, 684,9 cm².

b) $S = \frac{90 \cdot 90 \cdot \text{sen}43°}{2} \simeq 2\,762{,}1$

Portanto, a área do triângulo é, aproximadamente, 2 762,1 cm².

44. Sejam *x* e *y* as dimensões do terreno retangular, de maneira que *x* > *y*. De acordo com a lei dos cossenos, temos:

$$x^2 = 40^2 + 50^2 - 2 \cdot 40 \cdot 50 \cdot \cos 60° \Rightarrow x \simeq 45{,}8$$

Assim, a área A_T do terreno triangular é:

$$A_T = \frac{40 \cdot 50 \cdot \text{sen}60°}{2} \simeq \frac{2\,000 \cdot 0{,}866}{2} = 866$$

Como as áreas dos terrenos são iguais, temos:

$$xy = 866 \Rightarrow y \simeq 18{,}9$$

Portanto, as dimensões do terreno retangular são aproximadamente 18,9 m e 45,8 m.

45. Como α é obtuso, $\text{sen}(180° - \alpha) = \text{sen}\alpha$, calculamos:

$83{,}1 = \frac{12 \cdot 16 \cdot \text{sen}\alpha}{2} \Rightarrow \text{sen}(180° - \alpha) \simeq 0{,}866 \Rightarrow$

$\Rightarrow 180° - \alpha \simeq 60° \Rightarrow \alpha \simeq 120°$

Portanto, a medida de α é, aproximadamente, 120°.

46. $\frac{b \cdot b \cdot \text{sen}\alpha}{2} = 3 \cdot \frac{a \cdot a \cdot \text{sen}\alpha}{2} \Rightarrow b^2 = 3 \cdot a^2 \Rightarrow \frac{b}{a} = \sqrt{3}$

47. Seja *x* a medida do outro lado do terreno. Assim:

$$x^2 = 80^2 + 90^2 - 2 \cdot 80 \cdot 90 \cdot \cos 70° \Rightarrow x \simeq 98$$

Assim, o comprimento total de arame utilizado na construção da cerca é dado por: $4 \cdot (80 + 90 + 98) = 1072$. Logo, foram utilizados, ao todo, aproximadamente 1072 m de arame.

Calculando a área cercada *S*, temos: $S = \frac{80 \cdot 90 \cdot \text{sen}70°}{2} \simeq 3384$.

Portanto, a área cercada tem aproximadamente 3 384 m².

48. a) $A = 7 \cdot \frac{48{,}2 \cdot 50}{2} = 8\,435$. Portanto, a área é 8 435 cm².

b) Seja *x* o comprimento do lado do triângulo. Sendo assim:

$x^2 = 145{,}5^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 \Rightarrow x \simeq 168 \qquad A \simeq \frac{3 \cdot 168 \cdot 48{,}5}{2} = 12\,222$

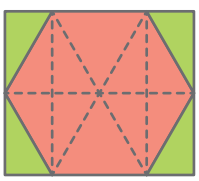
Portanto, a área é, aproximadamente, 12 222 cm².

c) Indicando por *a* o comprimento do lado do quadrado, temos:

$$104^2 = a^2 + a^2 \Rightarrow a^2 = \frac{104^2}{2} \Rightarrow a = 52\sqrt{2}$$

Assim: $A = 52\sqrt{2} \cdot 52\sqrt{2} = 5\,408$. Portanto, a área é 5 408 cm².

49. A área será coberta por lajotas do tipo:



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

Decompondo em triângulos, calculamos a proporção de cada formato de lajota.

- triângulos: $\frac{4}{16} = \frac{1}{4}$
- hexágonos: $\frac{12}{16} = \frac{3}{4}$

Agora, calculamos a área coberta por lajotas com formato de:

- triângulo equiláteros: $\frac{1}{4} \cdot 3\,000 = 750$
- hexágonos regulares: $\frac{3}{4} \cdot 3\,000 = 2\,250$

Portanto, serão usados 750 m² de lajotas com formato de triângulo equilátero e 2 250 m² de lajotas com formato de hexágono regular.

50. A. $p = \frac{15{,}3 + 14 + 12 + 15}{2} = 28{,}15$

$A = \sqrt{12{,}85 \cdot 14{,}15 \cdot 16{,}15 \cdot 13{,}15} \simeq 196{,}5$

Portanto, a área do polígono é aproximadamente 196,5 m².

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

B. $p = \dfrac{15 + 18 + 16 + 4{,}9}{2} = 26{,}95$

$A = \sqrt{11{,}95 \cdot 8{,}95 \cdot 10{,}95 \cdot 22{,}05} \simeq 160{,}7$

Portanto, a área do polígono é aproximadamente 160,7 m².

51. Indicando por A e B, respectivamente, a área da base da cerâmica antes e depois do cozimento, temos:

$A = 30 \cdot 15 = 450$ $\qquad$ $B = (0{,}8 \cdot 30) \cdot (0{,}8 \cdot 15) = 288$

Assim: $\dfrac{A - B}{A} = \dfrac{450 - 288}{450} = 0{,}36$. Logo, em relação à área original, a área ficou reduzida em 36%. Portanto, a alternativa **c** é a correta.

52. Indicando por k a razão entre o comprimento dos lados desses decágonos, temos que a razão entre suas áreas é k^2.

Assim: $k^2 = \left(\dfrac{9}{3}\right)^2 = 9$. Portanto, a razão entre a área desses dois decágonos é 9.

53. $\dfrac{b^2 - a^2}{a^2} = 6 \Rightarrow \left(\dfrac{b}{a}\right)^2 = 7$

Como $a > 0$ e $b > 0$, então $\dfrac{b}{a} > 0$. Consequentemente, $\dfrac{b}{a} = \sqrt{7}$.

Portanto, a razão de proporcionalidade entre o quadrado maior e o quadrado menor é $\sqrt{7}$ e a razão entre suas áreas é 7.

54. $R = \dfrac{74 \cdot 100}{10{,}3 \cdot 7{,}7} \simeq 93{,}3$.

Portanto, a razão é aproximadamente 93,3.

55. $\left(\dfrac{1}{8}\right)^2 = \dfrac{1}{64}$. Portanto, as áreas reais serão 64 vezes maiores do que as áreas do projeto.

a) $A_r = 64 \cdot \pi(0{,}05)^2 \Rightarrow A_r \simeq 0{,}5$

Portanto, a área roxa do tapete será aproximadamente 0,5 m².

b) $A_a = 64 \cdot \left(\pi(0{,}1)^2 - \pi(0{,}05)^2\right) \simeq 1{,}5$

Portanto, a área amarela do tapete será aproximadamente 1,5 m².

56. a) O triângulo AOB é isósceles. Assim: $AH = HB = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{8}{2} = 4$.

Além disso:

$(AO)^2 = (AH)^2 + (OH)^2 \Rightarrow (AO)^2 = 4^2 + 3^2 \Rightarrow (AO)^2 = 25$

Calculando a área A do círculo, obtemos:

$A = \pi r^2 = \pi(AO)^2 = 25\pi$.

Portanto, a área do círculo é 25π cm².

b) $(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2 \Rightarrow (2 \cdot OC)^2 = \left(2\sqrt{7}\right)^2 + \left(2\sqrt{2}\right)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow (OC)^2 = 9$

Assim: $A = \pi r^2 = \pi(OC)^2 = 9\pi$. Portanto, a área do círculo é 9π cm².

c) $(BC)^2 = (BO)^2 + (OC)^2 \Rightarrow 6^2 = (OC)^2 + (OC)^2 \Rightarrow (OC)^2 = 18$

Assim: $A = \pi r^2 = \pi(OC)^2 = 18\pi$. Portanto, a área do círculo é 18π cm².

57. A. $\dfrac{360°}{60°} = \dfrac{400 \cdot \pi}{A_s} \Rightarrow A_s = \dfrac{200\pi}{3}$

Portanto, a área do setor é $\dfrac{200\pi}{3}$ cm².

B. $\dfrac{360°}{48°} = \dfrac{\pi \cdot 144}{A_s} \Rightarrow A_s = 19{,}2\pi$

Portanto, a área desse setor circular é 19,2π cm².

C. $\dfrac{360°}{360° - 80°} = \dfrac{\pi \cdot 225}{A_s} \Rightarrow A_s = 175\pi$

Portanto, a área desse setor circular é 175π cm².

D. $\dfrac{360°}{360° - 72°} = \dfrac{\pi \cdot 196}{A_s} \Rightarrow A_s = 156{,}8\pi$

Portanto, a área desse setor circular é 156,8π cm².

58. $A_{C_1} = \pi \cdot r_1^2 \Rightarrow \dfrac{16}{3}\pi = \pi \cdot r_1^2 \Rightarrow r_1 = \sqrt{\dfrac{16}{3}}$

$A_{C_2} = \pi \cdot \left(1{,}5 \cdot \sqrt{\dfrac{16}{3}}\right)^2 \Rightarrow A_{C_2} = 12\pi$

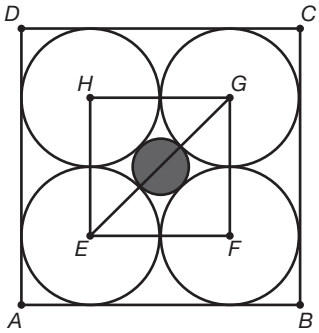
Portanto, a área de C_2 é 12π.

59. Indicando por A_1 e A_2 a área em centímetro da *pizza* partida em quatro pedaços e da *pizza* individual, respectivamente, temos:

• $A_1 = 100\pi$ $\qquad$ • $A_2 = \pi\left(\dfrac{d}{2}\right)^2 = \pi\dfrac{d^2}{4}$

Assim: $4A_2 = A_1 \Rightarrow 4\pi\dfrac{d^2}{4} = 100\pi \Rightarrow d = 10$. Logo, o diâmetro da *pizza* individual deve ter 10 cm. Portanto, a alternativa **c** é a correta.

60. Na imagem, H, E, F e G são os centros dos círculos.



KEITHY MOSTACHI/ARQUIVO DA EDITORA

$(EG)^2 = 2^2 + 2^2 \Rightarrow EG = 2\sqrt{2}$

Como $EG = 1 + 1 + d$, em que d é o diâmetro do círculo sombreado, segue que: $d = 2\sqrt{2} - 2$.

Logo, a área A do círculo sombreado é:

$$A = \pi\left(\frac{d}{2}\right)^2 \Rightarrow A = \pi\left(\frac{2\sqrt{2} - 2}{2}\right)^2 = \pi\left(3 - 2\sqrt{2}\right)$$

Logo, a área do círculo sombreado é $\pi\left(3 - 2\sqrt{2}\right)$. Portanto, a alternativa **a** é a correta.

61. Indicando por r o comprimento da haste desse pivô e por A a área da região circular, temos:

$A = \pi r^2 \Rightarrow 7\,850 = 3{,}14 \cdot r^2 \Rightarrow r = 50$

Portanto, a haste desse pivô tem aproximadamente 50 m de comprimento.

62. Área, em centímetros quadrados, de um semicírculo:

$$A_s = \frac{\pi \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^2}{2} = 9{,}8125$$

Área, em centímetros quadrados, do quadrado:

$A_q = 5^2 \Rightarrow A_q = 25$

Área do tapete: $A_t = 20 \cdot (4A_s + A_q) \simeq 1285$.

Portanto, foram utilizados aproximadamente 1285 cm² de tecido na confecção desse tapete.

63. Seja A_C e A_H a área em centímetros quadrados do círculo e do hexágono, respectivamente. Assim:

$A_C = \pi \cdot 5^2 = 25\pi$ $\qquad$ $A_H = \dfrac{6 \cdot 5^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{75\sqrt{3}}{2}$

Consequentemente, obtemos:

$$A_C - A_H = 25\pi - \frac{75\sqrt{3}}{2} = \frac{50\pi - 75\sqrt{3}}{2}$$

A área da região destacada em vermelho (A_V) é igual a $\dfrac{1}{6}$ dessa diferença.

$$A_V = \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{50\pi - 75\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{50\pi - 75\sqrt{3}}{12}$$

Portanto, a área destacada é $\dfrac{50\pi - 75\sqrt{3}}{12}$ cm².

64. a) Calculando a área A de cada um dos círculos, temos:

$A = \pi r^2 \Rightarrow A = 3{,}14 \cdot 100^2 = 31\,400$

Portanto, a área aproximada de cada círculo é 31400 cm².

b) Sejam A_3, A_4, A_5 e A_{10} as áreas em centímetros quadrados do triângulo, do quadrado, do pentágono e do decágono, respectivamente, e c_3, c_4, c_5 e c_{10} o comprimento em centímetro dos lados do triângulo, do quadrado, do pentágono e do decágono, respectivamente. Assim:

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

• $100^2 = \left(\frac{c_3}{2}\right)^2 + 50^2 \Rightarrow c_3^2 = 30\,000$

• $A_3 = \frac{c_3^2\sqrt{3}}{4} = \frac{30\,000\sqrt{3}}{4} \simeq 12\,990$

Logo, a área do triângulo é, aproximadamente, 12 990 cm².

• $100^2 = \left(\frac{c_4}{2}\right)^2 + (70{,}7)^2 \Rightarrow c_4^2 = 20\,006{,}04$

• $A_4 = 20\,006{,}04$

Logo, a área do quadrado é 20 006,04 cm².

• $100^2 = \left(\frac{c_5}{2}\right)^2 + (80{,}9)^2 \Rightarrow c_5^2 = 13\,820{,}76 \Rightarrow c_5 \simeq 117{,}56$

• $A_5 \simeq \frac{5 \cdot 117{,}56}{2} \cdot 80{,}9 \simeq 23\,777$

Logo, a área do pentágono é, aproximadamente, 23 777 cm².

• $100^2 = \left(\frac{c_{10}}{2}\right)^2 + (95{,}1)^2 \Rightarrow c_{10}^2 = 3\,823{,}96 \Rightarrow c_{10} \simeq 61{,}84$

• $A_{10} \simeq \frac{10 \cdot 61{,}84}{2} \cdot 95{,}1 \Rightarrow A_{10} \simeq 29\,405$

Logo, a área do decágono é, aproximadamente, 29 405 cm².

c) É possível notar, por exemplo, que a área do polígono inscrito se aproxima da área do círculo circunscrito.

65. $(OC)^2 = (OD)^2 + (DC)^2 \Rightarrow 2^2 = 1^2 + (DC)^2 \Rightarrow DC = \sqrt{3}$

$AC = 2 \cdot DC = 2\sqrt{3}$

Área da região em azul: $A = \pi \cdot 2^2 - \left(\frac{2\sqrt{3} \cdot 2}{2}\right) \Rightarrow A \simeq 9{,}10.$

Portanto, a área dessa região é aproximadamente 9,10 cm².

66. Sejam r_M e r_m o comprimento do raio do círculo maior e do círculo menor, respectivamente. Assim:

$$100\pi = \pi \cdot r_M^2 \Rightarrow r_M^2 = 100 \Rightarrow r_M = 10$$

$$48 = \frac{16 \cdot r_m}{2} \Rightarrow r_m = 6$$

Por fim, calculamos a área A da coroa circular indicada em verde.

$$A = \pi\left(r_M^2 - r_m^2\right) \Rightarrow A = \pi\left(10^2 - 6^2\right) = 64\pi$$

Portanto, a área da coroa circular é 64π cm².

67. A. $A = \frac{\pi \cdot 15^2}{2} - \left(\frac{\pi \cdot 10^2}{2} + \frac{\pi \cdot 5^2}{2}\right) = 50\pi$

Portanto, a área da região em azul é 50π cm².

B. Note que $DI = FI$. Assim:

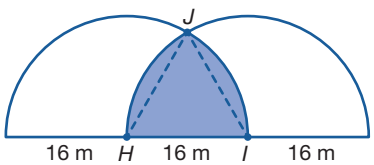
$$20^2 = (DI)^2 + (FI)^2 \Rightarrow 20^2 = 2(DI)^2 \Rightarrow DI = 10\sqrt{2}$$

Agora, calculamos a área da região em azul.

$$A = \frac{\pi\left(10\sqrt{2}\right)^2}{2} - \frac{20\sqrt{2} \cdot 10\sqrt{2}}{2} = 100\pi - 200$$

Portanto, a área da região em azul é $100(\pi - 2)$ m².

C.



RONALDO INÁCIO/ARQUIVO DA EDITORA

O triângulo HIJ é equilátero. Assim, a área A da região destacada em azul é:

$$A = 2 \cdot \frac{60}{360} \cdot \pi \cdot 16^2 - \frac{16^2\sqrt{3}}{4} = \frac{64}{3}\left(4\pi - 3\sqrt{3}\right)$$

Portanto, a área da região em azul é $\frac{64}{3}\left(4\pi - 3\sqrt{3}\right)$ m².

68. Ao reconfigurarmos a região em vermelho, obteremos um retângulo de dimensões 10 cm e 5 cm. Assim, a área A da região indicada em vermelho é dada por: $A = 10 \cdot 5 = 50$. Portanto, a área dessa região é 50 cm².

69. Como $180° - 140° = 40°$ e $40° = \frac{360°}{9}$, então a área A dessa região é dada pela diferença entre a área do círculo de raio OC e oito nonos da área da coroa circular determinada pela circunferência de raio OA e pela circunferência de raio OB.

$$A = \pi \cdot (OC)^2 - \frac{8}{9}\left(\pi\left((OB)^2 - (OA)^2\right)\right)$$

$$A = \pi \cdot (OA + AB + BC)^2 - \frac{8}{9}\left(\pi\left((OA + AB)^2 - (OA)^2\right)\right)$$

$$A = \pi \cdot (6 + 4 + 2)^2 - \frac{8}{9}\left(\pi\left((6 + 4)^2 - (6)^2\right)\right)$$

$$A = 144\pi - \frac{8}{9} \cdot 64\pi$$

$$A \simeq 273{,}5$$

Portanto, a área dessa região é aproximadamente 273,5 cm².

70. **a)** $64 = \pi \cdot \left(\frac{9}{2}\right)^2 \Rightarrow \pi = 64 \cdot \left(\frac{2}{9}\right)^2 \simeq 3{,}1605$

Portanto, a aproximação era 3,1605.

b) Sejam A_c e A_q a área do círculo de diâmetro d e do quadrado de lado a. Assim:

• $A_c = \left(d - \frac{1}{9}d\right)^2$ • $A_q = a^2$

Desse modo, temos: $A_c = A_q \Rightarrow \left(d - \frac{1}{9}d\right)^2 = a^2 \Rightarrow a = \frac{8}{9}d$.

71. **a)** Inicialmente, calculamos a área A_{f1} da faixa **1**.

$$A_{f1} = \pi\left(\frac{17}{2}\right)^2 - \pi(6{,}8)^2 = 81{,}6714$$

Logo, a área da faixa **1** é aproximadamente 81,6714 cm².

Agora, calculamos a área A_{f2} da faixa **2**.

$$A_{f2} = \pi(6{,}8)^2 - \pi(4{,}3)^2 = 87{,}135$$

Portanto, a área da faixa **2** é aproximadamente 87,135 cm².

b) Faixa **2**, pois sua área é maior do que a da faixa **1**.

Desenvolvimento sustentável (páginas 130 e 131)

2. 0,05 · 500 = 25. Logo, no mínimo, 25 vagas devem ser destinadas às pessoas idosas.

25 · 12,81 = 320,25. Portanto, 320,25 m² desse estacionamento devem ser destinados às pessoas idosas.

Acessando tecnologias (página 146)

1. Utilizando a estratégia apresentada na seção, porém construindo no passo **A**, temos:

- $AB = 6$ e indicando, no passo **D**, que o polígono tem 3 vértices, obtemos que a área é, aproximadamente, 15,59 cm².
- $AB = 2$ e indicando, no passo **D**, que o polígono tem 6 vértices, obtemos que a área é, aproximadamente, 10,39 m².
- $AB = 7$ e indicando, no passo **D**, que o polígono tem 5 vértices, obtemos que a área é, aproximadamente, 84,3 dm².
- $AB = 1$ e indicando, no passo **D**, que o polígono tem 12 vértices, obtemos que a área é, aproximadamente, 11,2 mm².

2. Um possível passo a passo para a construção do triângulo é apresentado a seguir.

A. Utilizando a ferramenta **Ponto**, marque o ponto A.

B. Selecione a ferramenta **Círculo dados Centro & Raio** e construa uma circunferência de centro A e raio 7.

C. Com a ferramenta **Ponto**, marque um ponto B sobre a circunferência.

D. Marque o ponto B' sobre a circunferência de maneira que $B\hat{A}B'$ tenha medida igual ao ângulo central do triângulo equilátero. Para isso, selecione a ferramenta **Ângulo com Amplitude Fixa** e clique sobre os pontos B e A, nessa ordem. Em seguida, na janela **Ângulo com Amplitude Fixa**, digite a medida do ângulo, nesse caso, 120°.

E. Marque o ponto B'' sobre a circunferência de maneira que $B'\hat{A}B''$ tenha medida igual ao ângulo central do triângulo equilátero. Para isso, repita o procedimento apresentado no item **D**, porém clicando sobre os pontos B' e A, nessa ordem.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

F. Selecione a ferramenta **Reta Tangente** e construa uma reta r tangente à circunferência passando pelo ponto B.

G. Repita o procedimento apresentado no item **F** para os pontos B' e B'', construindo, assim, as retas s e t, respectivamente.

H. Com a ferramenta **Interseção de Dois Objetos**, marque os pontos de interseção C, D e E entre as retas r e s, r e t, s e t, respectivamente. Para isso, clique nas retas duas a duas.

I. Selecione a ferramenta **Polígono** e clique sobre os pontos C, D, E e C, nessa ordem.

J. Com a ferramenta **Área**, clique sobre o triângulo construído.

A construção do pentágono pode ser feita de maneira análoga à apresentada, contudo a circunferência construída deve ter raio 3 e deve-se marcar 5 pontos sobre ela, de maneira que dois pontos consecutivos, juntamente com o centro da circunferência, formem ângulos cuja medida seja igual ao ângulo central do pentágono regular, ou seja, 72°.

Seguindo as estratégias apresentadas, obtemos que a área do triângulo é, aproximadamente, 254,61 cm^2 e a do pentágono, aproximadamente, 32,69 dm^2.

3. O algoritmo e o fluxograma referentes a essa atividade estão apresentados na seção **Respostas**, no final da reprodução do **Livro do Estudante** deste volume.

4. Resolução na página **MP092**.

Trabalho e juventudes (página 152)

1. Sugestão de resposta: A Matemática é importante para executar diversas etapas de seu trabalho, como calcular a área a fim de saber a quantidade de materiais necessários para a construção, estimar orçamentos, delimitar as medições do terreno, aplicar os conhecimentos relacionados às medidas de comprimento, aplicar noções de Geometria para erguer alicerces, calcular volume e porcentagem, entre outras funções.

Síntese do capítulo (página 157)

3. O ladrilhamento **II**, pois satisfaz as condições: as peças são polígonos regulares; a interseção de duas, se existir, é um lado ou um vértice; a distribuição de peças ao redor de cada um dos vértices do ladrilhamento é sempre a mesma.

4. Triângulos equiláteros, quadrados e hexágonos regulares.

5. Um possível passo a passo é: 1. Decomponha o hexágono regular em seis triângulos equiláteros. 2. Calcule a área do triângulo equilátero aplicando a fórmula $A = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$, em que l indica o comprimento do lado do triângulo. 3. Multiplique o resultado obtido no passo **2** por 6.

6. a) Verdadeiro. Sugestão de resposta: Como todo quadrado é um losango, segue que sua área é igual à metade do produto de suas diagonais.

b) Falso. Sugestão de resposta: Os pontos médios dos lados de um retângulo de área R determinam um paralelogramo de área $\frac{R}{2}$.

c) Verdadeiro. Sugestão de resposta: Como em um triângulo equilátero o ângulo entre dois de seus lados mede 60°, sua área A é dada por:

$$A = \frac{l \cdot l \cdot \operatorname{sen}60°}{2} = \frac{l^2 \cdot \operatorname{sen}60°}{2}$$

7. Não, pois a área A_V do setor circular vermelho é igual a $A_V = \frac{\alpha \cdot \pi \cdot r^2}{360°}$. Já a área A_A do setor circular azul é dada por:

$$A_A = \frac{\alpha \cdot \pi \cdot (2r)^2}{360°} = \frac{\alpha \cdot \pi \cdot 4r^2}{360°} = 4\frac{(\alpha \cdot \pi \cdot r^2)}{360°} = 4A_V$$

Portanto, a área do setor circular vermelho é igual a um quarto da área do setor circular azul.

CAPÍTULO 5 MATRIZES, DETERMINANTES E SISTEMAS LINEARES

Abertura do capítulo

1. Multiplicar o número de linhas pelo número de colunas.

3. 8 294 400 *pixels* no total $(3\,840 \times 2\,160)$.

Questões

B. Não, pois A e B são matrizes não nulas e $A - B = C$, então $B - A = -C$.

D. Substituindo $k = 4$, na solução $\left(\frac{1-k}{3}, \frac{-11+5k}{3}, k\right)$, temos:

- $x = \frac{1-4}{3} = -1$
- $y = \frac{-11+5\cdot 4}{3} = 3$

A solução particular para $k = 4$ é $(-1, 3, 4)$.

Exercícios e problemas

1. Analisando a quantidade de linhas e de colunas das matrizes de cada item, temos:

a) 2×2 **b)** 5×3 **c)** 1×4 **d)** 2×4

2. a) 7 períodos; 18 grupos.

b) 8 elementos; 18 elementos.

c) • C • Au • I

d) • Zn: período: 4; grupo: 12.
• Cℓ: período: 3; grupo: 17.
• Db: período: 7; grupo: 5.

3. a) $\begin{bmatrix} 7 & 24 \\ 57 & 14 \\ 97 & 213 \\ 161 & 251 \end{bmatrix}$

b) • O total de títulos do cinema brasileiro lançados em 2023 e o total de títulos do cinema estrangeiro lançados em 2023.
• As quantidades de títulos do cinema brasileiro lançados por gênero em 2023 e o seu total.
• A quantidade de títulos de ficção do cinema brasileiro lançados em 2023.

4. Analisando os elementos da matriz A, temos:

a) $a_{11} = 0$ **b)** $a_{13} = 5{,}7$ **c)** $a_{31} = \pi$ **d)** $a_{24} = \sqrt{7}$

5. a) $a_{11} = 1 - 1 = 0$ $\quad a_{21} = 2 - 1 = 1$
$a_{12} = 1 - 2 = -1$ $\quad a_{22} = 2 - 2 = 0$
Logo, $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

b) $b_{11} = (1+1)^2 = 4$ $\quad b_{21} = (2+1)^2 = 9$
$b_{12} = (1+2)^2 = 9$ $\quad b_{22} = (2+2)^2 = 16$
$b_{13} = (1+3)^2 = 16$ $\quad b_{23} = (2+3)^2 = 25$
Logo, $B = \begin{bmatrix} 4 & 9 & 16 \\ 9 & 16 & 25 \end{bmatrix}$.

c) $c_{11} = 1$ $\quad c_{21} = 2 + 1 = 3$
$c_{22} = 2$ $\quad c_{31} = 3 + 1 = 4$
$c_{12} = 1 + 2 = 3$ $\quad c_{32} = 3 + 2 = 5$
Logo, $C = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$.

6. a) Temos $m \times n = 7$. Como $m, n \in \mathbb{N}^*$, segue que $m = 1$ e $n = 7$ ou $m = 7$ e $n = 1$. Assim, a matriz é de ordem 1×7 ou 7×1.

b) $m \times n = 20$ e $m, n \in \mathbb{N}^*$. Assim, se:

- $m = 1$, então $n = 20$.
- $m = 2$, então $n = 10$.
- $m = 4$, então $n = 5$.
- $m = 5$, então $n = 4$.
- $m = 10$, então $n = 2$.
- $m = 20$, então $n = 1$.

Portanto, as possíveis ordens para a matriz são: 1×20, 20×1, 2×10, 10×2, 4×5 ou 5×4.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

7. $a_{11} = 1^2 - 3 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = -1$ $\quad a_{21} = 2^2 - 3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 3$
$a_{12} = 1^2 - 3 \cdot 2 + 1 \cdot 2 = -3$ $\quad a_{22} = 2^2 - 3 \cdot 2 + 2 \cdot 2 = 2$
Logo, $A = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$.

8. Diagonal principal: $2 + 6 + (-1) + (-6) = 1$.
Diagonal secundária: $10 + 0 + (-4) + (-5) = 1$.
Diferença entre a soma das diagonais: $1 - 1 = 0$.

9. **a)** A matriz tem apenas uma linha, logo é a matriz linha.
b) Todos os elementos são iguais a zero, logo é a matriz nula.
c) A quantidade de linhas é igual à quantidade de colunas, logo é a matriz quadrada.
d) A quantidade de linhas é igual à quantidade de colunas e os elementos abaixo da diagonal principal são nulos, logo é a matriz quadrada e triangular.
e) A quantidade de linhas é igual à quantidade de colunas; os elementos acima e abaixo da diagonal principal são nulos; e os elementos da diagonal principal são iguais a 1. Logo, é a matriz quadrada, triangular, diagonal e identidade.
f) A matriz tem apenas uma coluna, logo é a matriz coluna.

10.
- Matriz A: $5 + (-9) = -4$.
- Matriz B: $-1 + 5 + 3 = 7$.
- Matriz C: $2 + 3 + 7{,}4 = 12{,}4$.
- Matriz D: $-1 - 2{,}5 - 0{,}5 = -4$.

11. Sugestão de resposta: $\begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{bmatrix}$

12. **a)** Verdadeira. **b)** Verdadeira.
c) Falsa, pois nem toda matriz quadrada é triangular superior, porém toda matriz triangular superior (ou inferior) é quadrada.
d) Falsa, pois uma matriz só é denominada nula quando todos os seus elementos forem iguais a 0.
e) Verdadeira.

13. A matriz M tem na sua diagonal principal a cor preta, ou seja, seus elementos são nulos, pois $i = j$. A parte triangular inferior da matriz, onde $i > j$, é inteira determinada pelo *pixel* cinza, e a parte triangular superior da matriz, onde $i < j$, é inteira determinada pelo *pixel* branco. Como se trata de uma matriz quadrada, a quantidade de elementos triangulares inferiores é igual à de elementos triangulares superiores.
Logo, as alternativas **b** e **c** estão incorretas, pois o número de *pixels* pretos é igual à quantidade de elementos da diagonal principal. As alternativas **d** e **e** estão incorretas, pois a diagonal é formada somente por *pixels* pretos.
Portanto, a alternativa **a** é correta.

14. **a)** x e y são determinados diretamente pela igualdade das matrizes.
Portanto, $x = -3$ e $y = 7$.
b) $\begin{cases} 2x - 1 = 3y \\ 2x = 4 \\ 5y + 3 = 4x \end{cases}$
Logo, $x = 2$ e $y = 1$.

15. **a)** Roraima, Amazonas, Acre, Rondônia e Mato Grosso.
b) Roraima.
c) $2{,}6 \times 442 = 1149{,}2$. Portanto, a distância é aproximadamente 1149 km.
d) Guiana e Venezuela.
e) $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$
f) Não. Não. Porque há elementos abaixo e acima da diagonal principal que não são nulos.
g) Traço na matriz: $0 + 0 + 0 + 0 + 0 = 0$.

16. Transportando ordenadamente os elementos das linhas da matriz para as colunas da transposta:
a) $A^t = \begin{bmatrix} -4 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -8 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & -6 \\ 1 & 5 & -6 & 7 \end{bmatrix}$ **b)** $B^t = \begin{bmatrix} 1 & -2 & \frac{5}{2} \\ -2 & 0 & 6 \\ \frac{5}{2} & 6 & 13 \end{bmatrix}$

17. A matriz B é simétrica, já que $B = B^t$.

18. **a)** $A = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 6 \\ 1 & -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 4 & -8 \end{bmatrix}$
b) $B = \begin{bmatrix} 10 & 18 \\ -9 & 15 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -7 & 0 \\ 12 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 & 18 \\ -21 & 19 \end{bmatrix}$
c) $C = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -8 \\ 0 & -6 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -5 & -1 \\ -6 & 0 & 10 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -9 \\ -6 & -6 & 11 \\ 4 & 2 & -1 \end{bmatrix}$
d) $D = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 9 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -4 & 10 \\ -1 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & -14 \\ 7 & -3 \end{bmatrix}$

19. Resolução na página **MP093**.

21. **a)** Resolução na página **MP093**.
b) Conforme a matriz T, o plano **I** teve o maior número de vendas no bairro **B** (74) e o plano **II** vendeu mais no bairro **A** (65).

22. **a)** $-A = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -5 & 0 \end{bmatrix}$
b) $-B = \begin{bmatrix} -1 & \pi \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$
c) $-C = \begin{bmatrix} -1 & 0{,}5 & 1 \\ -\sqrt[3]{-6} & -2 & -10 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}$
d) $-D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
e) $-E = \begin{bmatrix} 4 & -2{,}4 & -3 \\ 0 & 9{,}1 & -44 \end{bmatrix}$
f) $-F = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & -2 \\ -5{,}2 & 4 \\ -\frac{2}{3} & \frac{4}{7} \end{bmatrix}$

23. **a)** $B + B = \begin{bmatrix} 8 & -2 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8 & -2 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & -4 \\ -10 & 2 \end{bmatrix}$
b) $B + A = \begin{bmatrix} 8 & -2 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & -2 \\ -7 & 5 \end{bmatrix}$
c) $A + A^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 8 \end{bmatrix}$
d) $A - B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 8 & -2 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$

24. **a)** $M = \begin{bmatrix} 19 & 18 & 18 & 18 & 18 \\ 22 & 24 & 23 & 22 & 22 \\ 25 & 25 & 25 & 25 & 24 \\ 21 & 20 & 21 & 21 & 20 \end{bmatrix}$ $\quad N = \begin{bmatrix} 28 & 29 & 28 & 29 & 29 \\ 35 & 34 & 32 & 31 & 30 \\ 34 & 34 & 34 & 33 & 31 \\ 33 & 32 & 33 & 33 & 32 \end{bmatrix}$
b) A variação de temperatura de cada dia é dada pela matriz $B = N - M$.
c) $B = N - M = \begin{bmatrix} 9 & 11 & 10 & 11 & 11 \\ 13 & 10 & 9 & 9 & 8 \\ 9 & 9 & 9 & 8 & 7 \\ 12 & 12 & 12 & 12 & 12 \end{bmatrix}$
d) A maior variação de temperatura nessa data era em Goiânia (12 °C); a menor, em Cuiabá (8 °C).
e) No dia 1.

25. $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 0 & -7 & 8 \\ -1 & 3 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 2 \\ 0 & -8 & 8 \\ -1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

27. **a)** $-3 \cdot \begin{bmatrix} -1 & \pi & \frac{1}{6} \\ 0 & -4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -3\pi & -\frac{1}{2} \\ 0 & 12 & -6 \end{bmatrix}$
b) $\frac{2}{3} \cdot \begin{bmatrix} -6 & 3x \\ 0 & 1 \\ 9x^2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 2x \\ 0 & \frac{2}{3} \\ 6x^2 & -\frac{4}{3} \end{bmatrix}$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

28. A veracidade de cada igualdade enunciada nessa tarefa está mostrada na seção **Respostas**, no final da reprodução do **Livro do Estudante** deste volume.

29. $\begin{bmatrix} 4x-y & 2 \\ -4z-5 & 4-y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 0 \end{bmatrix}$

$\begin{cases} 4x-y=3 \\ -4z-5=7 \Rightarrow x=\frac{7}{4},\ y=4 \text{ e } z=-3 \\ 4-y=0 \end{cases}$

30. $18 \cdot C = 18 \cdot \begin{bmatrix} 0{,}9 & 0{,}8 & 1{,}1 \\ 5 & 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16{,}2 & 14{,}4 & 19{,}8 \\ 90 & 126 & 144 \end{bmatrix}$

31. a) $A = \begin{bmatrix} 0 \cdot 1 + 2 \cdot 2 & 0 \cdot 3 + 2 \cdot 5 \\ (-6) \cdot 1 + 3 \cdot 2 & (-6) \cdot 3 + 3 \cdot 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 10 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$

b) Resolução na página **MP093**.

c) Resolução na página **MP093**.

d) $D = \left[6 \cdot (-4) + 8 \cdot 2 + \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} + 2 \cdot 7\right] = [9]$

e) $E = \begin{bmatrix} 2 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) \\ 1 \cdot 2 + 0 \cdot (-1) \\ (-1) \cdot 2 + 3 \cdot (-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -5 \end{bmatrix}$

f) $F = \begin{bmatrix} (-1) \cdot 2 & (-1) \cdot 3 \\ 0 \cdot 2 & 0 \cdot 3 \\ 4 \cdot 2 & 4 \cdot 3 \\ 7 \cdot 2 & 7 \cdot 3 \\ 1 \cdot 2 & 1 \cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 0 & 0 \\ 8 & 12 \\ 14 & 21 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

g) $G = \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 3 \\ 0 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + (-2) \cdot 3 \\ 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 + 1 \cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$

h) Resolução na página **MP093**.

32. a) Como A tem duas colunas e m representa a quantidade de linhas de B, então m é igual a 2.

b) A matriz C tem ordem igual à quantidade de linhas da matriz A e à quantidade de colunas da matriz B, logo a ordem de C é 3×4.

33. • $A \cdot B = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{2} \\ 4 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 & -29 \\ 11 & -\frac{23}{2} \end{bmatrix}$

• $B \cdot A = \begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{2} \\ 4 & -5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{7}{2} & -\frac{11}{2} \\ 23 & 19 \end{bmatrix}$

35. a) $C = A \cdot B = \begin{bmatrix} 20 & 10 & 8 \\ 21 & 5 & 12 \\ 19 & 9 & 10 \\ 19 & 9 & 10 \\ 18 & 10 & 10 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 70 \\ 68 \\ 66 \\ 66 \\ 64 \end{bmatrix}$

b) O Palmeiras obteve 70 pontos (c_{11}); o Flamengo, 66 pontos (c_{41}).

36. a) $r_{12} = 3 \cdot (-6) + (-2) \cdot (-3) = -12$

b) $r_{21} = (-1) \cdot 1 + 4 \cdot 5 = 19$

c) $r_{23} = (-1) \cdot 0 + 4 \cdot 2 = 8$

37. a) $A \cdot B = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -4 & 6 & 9 \\ 10 & -7 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 9 & 45 \\ 18 & -19 & -18 \end{bmatrix}$

b) $A^t \cdot C = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & -4 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$

c) $C \cdot B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -4 & 6 & 9 \\ 10 & -7 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & 12 & 18 \\ 20 & -14 & 0 \end{bmatrix}$

d) $(A + C) \cdot B = \left(\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\right) \cdot \begin{bmatrix} -4 & 6 & 9 \\ 10 & -7 & 0 \end{bmatrix} =$

$= \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -4 & 6 & 9 \\ 10 & -7 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 21 & 63 \\ 38 & -33 & -18 \end{bmatrix}$

38. $\begin{cases} 1 \cdot x + (-2) \cdot 1 = -5 \\ 1 \cdot 3 + (-2) \cdot y = 2 \end{cases} \Rightarrow x = -3 \text{ e } y = \frac{1}{2}$

39. $A_{p \times q} \cdot B_{3 \times r} \Rightarrow (A \cdot B)_{p \times r}$ e $(A \cdot B)_{p \times r} \cdot C_{4 \times s} \Rightarrow \left((A \cdot B) \cdot C\right)_{p \times s}$

Para que a multiplicação entre $(A \cdot B)$ por C seja válida, r deve ser igual ao número de linhas de C; como a ordem da multiplicação das matrizes é igual a 5×3, concluímos que $p = 5$, $q = 3$, $r = 4$ e $s = 3$.

40. Para resolver os itens desta tarefa, indicamos X por $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.

a) $A \cdot X = I_2$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 3a + 2c = 1 \\ a + 4c = 0 \end{cases} \text{ e } \begin{cases} 3b + 2d = 0 \\ b + 4d = 1 \end{cases}$$

Logo, $a = \frac{2}{5}$, $b = -\frac{1}{5}$, $c = -\frac{1}{10}$, $d = \frac{3}{10}$ e $X = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{10} & \frac{3}{10} \end{bmatrix} = A^{-1}$.

b) Temos $B = I_3$. Como $B \cdot I_3 = I_3 \cdot B = B = I_3$, então:

$$B^{-1} = I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

c) $C \cdot X = I_2$

$$\begin{bmatrix} -12 & 6 \\ 18 & -9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -12a + 6c = 1 \\ 18a - 9c = 0 \end{cases} \text{ e } \begin{cases} -12b + 6d = 0 \\ 18b - 9d = 1 \end{cases}$$

Logo, os sistemas não têm solução, ou seja, não existe C^{-1}.

d) $D \cdot X = I_2$

$$\begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 8 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 4a + 4c = 1 \\ 8a = 0 \end{cases} \text{ e } \begin{cases} 4b + 4d = 0 \\ 8b = 1 \end{cases}$$

Logo, $a = 0$, $b = \frac{1}{8}$, $c = \frac{1}{4}$, $d = -\frac{1}{8}$ e $X = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{8} \end{bmatrix} = D^{-1}$.

41. $\begin{bmatrix} m & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & n \\ -\frac{1}{2} & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{cases} mn - 6 = 0 \\ n = 1 \end{cases} \Rightarrow m = 6 \text{ e } n = 1$$

Assim, $m + n = 7$.

42. a) $C = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 & 53 & 11 & 29 & 19 & 53 & 2 \\ 71 & 13 & 7 & 67 & 13 & 73 & 53 \end{bmatrix} =$

$= \begin{bmatrix} 383 & 277 & 79 & 451 & 141 & 577 & 273 \\ 305 & 211 & 61 & 355 & 109 & 451 & 218 \end{bmatrix}$

b) A veracidade da afirmação enunciada nesse item está mostrada na seção **Respostas**, no final da reprodução do **Livro do Estudante** deste volume.

c) Número primo é o número natural que tem somente dois divisores distintos: o 1 e ele mesmo.

d) $A \cdot X = I_2$

$$\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 4a + 5c = 1 \\ 3a + 4c = 0 \end{cases} \text{ e } \begin{cases} 4b + 5d = 0 \\ 3b + 4d = 1 \end{cases}$$

Logo, $a = 4$, $b = -5$, $c = -3$, $d = 4$ e $X = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} = A^{-1}$.

$$A^{-1} \cdot M = \begin{bmatrix} 43 & 29 & 71 & 71 & 3 & 53 & 2 & 17 & 67 \\ 3 & 7 & 3 & 71 & 71 & 3 & 11 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

A mensagem é MISSAO#FRACASSADA#, ou seja, "missão fracassada".

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

43. a) $X = \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ 4 & 5 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 11 & 9 \\ 23 & -8 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 & 6 \\ 27 & -3 \\ 8 & 3 \end{bmatrix}$

b) $X = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 3 & 4 \\ -4 & 1 & 7 \\ 6 & 0 & -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -5 \\ -6 & 0 & 9 \end{bmatrix}$

44. $A \cdot X + B = \begin{bmatrix} 8 & 10 \\ 12 & 5 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 7 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 10 \\ 12 & 5 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} a + 2c & b + 2d \\ 3a + c & 3b + d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 7 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$

$\begin{cases} a + 2c = 8 \\ 3a + c = 5 \end{cases}$ e $\begin{cases} b + 2d = 7 \\ 3b + d = 6 \end{cases}$

Logo, $a = \frac{2}{5}$, $b = 1$, $c = \frac{19}{5}$, $d = 3$ e $X = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & 1 \\ \frac{19}{5} & 3 \end{bmatrix}$.

45. a) $\begin{cases} X + Y = \begin{bmatrix} 2 & 12 \\ 8 & -6 \end{bmatrix} \text{ (I)} \\ Y - X = \begin{bmatrix} 5 & -7 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \text{ (II)} \end{cases}$

Somando **I** e **II**, temos:

$$(X + Y) + (Y - X) = \begin{bmatrix} 2 & 12 \\ 8 & -6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & -7 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$2Y = \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 12 & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow Y = \begin{bmatrix} \frac{7}{2} & \frac{5}{2} \\ 6 & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

Substituindo em **I**, temos:

$$X + \begin{bmatrix} \frac{7}{2} & \frac{5}{2} \\ 6 & -\frac{3}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 12 \\ 8 & -6 \end{bmatrix} \Rightarrow X = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{19}{2} \\ 2 & -\frac{9}{2} \end{bmatrix}$$

b) $\begin{cases} X + Y = [3 \quad 5 \quad 2] \text{ (I)} \\ X - 2Y = [-3 \quad 0 \quad 8] \text{ (II)} \end{cases}$

Subtraindo **II** de **I**, temos:

$$(X + Y) - (X - 2Y) = [3 \quad 5 \quad 2] - [-3 \quad 0 \quad 8]$$

$$3Y = [6 \quad 5 \quad -6] \Rightarrow Y = \left[2 \quad \frac{5}{3} \quad -2\right]$$

Substituindo em **I**, temos:

$$X + \left[2 \quad \frac{5}{3} \quad -2\right] = [3 \quad 5 \quad 2] \Rightarrow X = \left[1 \quad \frac{10}{3} \quad 4\right]$$

46. $M \cdot X = N$

$\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 4a = 6 \\ 3a - b = 9 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{3}{2}$ e $b = -\frac{9}{2}$

Portanto, $X = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{9}{2} \end{bmatrix}$.

47. a) $\begin{bmatrix} 8 & 9 & 9 \\ 8 & 8{,}5 & 9{,}5 \\ 9{,}5 & 10 & 9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8{,}8 \\ 8{,}9 \\ 9{,}4 \end{bmatrix}$

$\begin{cases} 8x + 9y + 9z = 8{,}8 \\ 8x + 8{,}5y + 9{,}5z = 8{,}9 \\ 9{,}5x + 10y + 9z = 9{,}4 \end{cases} \Rightarrow x = 0{,}2,\ y = 0{,}3$ e $z = 0{,}5$

O trabalho **1**, o trabalho **2** e a prova têm, respectivamente, pesos 20%, 30% e 50%.

b) $7 \cdot 0{,}2 + 9 \cdot 0{,}3 + 8 \cdot 0{,}5 = 8{,}1$

c) Sugestões de respostas: No trabalho **1**: 8, no trabalho **2**: 8 e na prova: 10; no trabalho **1**: 9, no trabalho **2**: 9 e na prova: 9.

48. a) $\det A = -12$

b) $\det B = 48 + 0 - 18 - 12 - 0 + 126 = 144$

49. Traço da matriz A: $2 + 2 + x = 6 \Rightarrow x = 2$.

$\det A = -61$

Logo: $8 - 3 + 0 - 0 - 2y - 48 = -61 \Rightarrow y = 9$.

50. a) $A^t = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \Rightarrow \det A^t = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = \underbrace{ad - bc}_{\det A}$

b) $k \cdot A = \begin{bmatrix} ka & kc \\ kb & kd \end{bmatrix}$

$\det(k \cdot A) = \begin{vmatrix} ka & kc \\ kb & kd \end{vmatrix} = ka \cdot kd - kb \cdot kc =$

$= k^2 \cdot a \cdot d - k^2 \cdot b \cdot c = k^2 \cdot \underbrace{(ad - bc)}_{\det A}$

51. a) $\det A = 10 + 0 - 21 - 4 + 140 - 0 = 125$

b) $2 \cdot \det A = 2 \cdot 125 = 250$

c) $\det(2A) = \begin{vmatrix} 10 & 0 & -2 \\ 6 & 4 & -8 \\ -4 & 14 & 2 \end{vmatrix} = 80 + 0 - 168 - 32 + 1120 - 0 =$

$= 1000$

d) $\det(2A^t) = \begin{vmatrix} 10 & 6 & -4 \\ 0 & 4 & 14 \\ -2 & -8 & 2 \end{vmatrix} = 80 - 168 + 0 - 32 + 1120 - 0 =$

$= 1000$

52. • $\det A = \begin{vmatrix} 3 & x \\ x & x^2 \end{vmatrix} = 3 \cdot x^2 - x \cdot x = 2x^2$

• $\det B = \begin{vmatrix} 6x & x \\ 2x & 1 \end{vmatrix} = 6x \cdot 1 - x \cdot 2x = 6x - 2x^2$

Como $\det A = 3 \cdot \det B$, temos:

$$2x^2 = 3 \cdot (6x - 2x^2) \Rightarrow 4x^2 - 9x = 0$$

Logo, $x = 0$ ou $x = \frac{9}{4}$.

53. $M \cdot N = \begin{bmatrix} 2a & 8 & 3 \\ 6a & 6 & 2 \\ -3a & -3 & 1 \end{bmatrix}$

$\det(M \cdot N) = -360$, logo:

$$12a - 48a - 54a + 54a + 12a - 48a = -360 \Rightarrow a = 5$$

54. $\begin{vmatrix} 2x & 6 & -1 \\ 2(x-1) & 0 & -2 \\ 2 & 4 & -2x \end{vmatrix} = 24x^2 - 16x - 16$

$\begin{vmatrix} x & 1 & x \\ 0 & 3 & 5 \\ 2x & 4 & 2 \end{vmatrix} = -6x^2 - 4x$

$\frac{1}{4} \cdot (24x^2 - 16x - 16) = -6x^2 - 4x$

$$12x^2 - 4 = 0$$

Logo, $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ou $x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

55. Resolução na página **MP093**.

56. a) $\det A = 7 + 6 + 0 - 6 - 0 - 6 = 1$

b) Resolução na página **MP093**.

57. a) $\det B = 1 - 12 + 0 + 3 - 0 + 4 = -4$

b) $\det A^t = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -2 & 4 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 24 + 2 + 24 - 16 + 9 + 8 = 51$

c) Pelo Teorema de Binet, $\det(A \cdot C) = \det A \cdot \det C$. Além disso, $\det A = \det A^t$, assim:

$$\det C = -6 + 4 - 9 + 18 - 1 + 12 = 18$$

$$\det(A \cdot C) = \det A \cdot \det C = 51 \cdot 18 = 918$$

d) $\det(C \cdot B) = \det C \cdot \det B = 18 \cdot (-4) = -72$

58. a) Coeficientes: 4 e -12; termo independente: 17.

b) Coeficientes: 1 e $-\sqrt{3}$; termo independente: 0.

c) Coeficientes: -1 e -5; termo independente: 2.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

d) Coeficientes: 1 e 2; termo independente: -1.

e) Coeficientes: -3 e 1; termo independente: 0,5.

f) Coeficientes: $\frac{3}{2}$ e -4 ; termo independente: 4.

g) Coeficientes: $\frac{1}{4}$ e 1; termo independente: $\frac{1}{4}$.

h) Coeficientes: -2, 1 e -1; termo independente: -1.

59. **a)** Linear.

b) Como os expoentes das incógnitas são diferentes de 1, então a equação é não linear.

c) Linear.

d) Como o termo tem mais de uma incógnita, então a equação é não linear.

e) Linear.

f) Como o expoente de uma incógnita é diferente de 1, então a equação é não linear.

g) Como o 1º termo tem mais de uma incógnita, então a equação é não linear.

h) Linear.

60. **a)** $4 \cdot 1 - 2 + (-5) = -3 \neq 0$ **b)** $2 \cdot 1 - 3 \cdot 2 - (-5) = 1$

Portanto, a alternativa **b** é a correta.

61. **a)** Sugestão de resposta: $(4, 2)$ e $\left(6, \frac{19}{6}\right)$.

b) Sugestão de resposta: $(0, 0, 0)$ e $(1, 1, 4)$.

c) Sugestão de resposta: $(1, 0)$ e $(5, 1)$.

d) Sugestão de resposta: $(-1, -1)$ e $(-3, 1)$.

e) Sugestão de resposta: $(3, 0)$ e $(-1, -4)$.

f) Sugestão de resposta: $(1, 7, -13)$ e $(-4, -1, 0)$.

62. $5 \cdot (4\alpha) - 15 \cdot \alpha + (-3\alpha) = -4 \Rightarrow \alpha = -2$

63. As representações geométricas das equações lineares referentes aos itens dessa tarefa estão apresentadas na seção **Respostas**, no final da reprodução do **Livro do Estudante** deste volume.

a) Duas possíveis soluções reais: $(0, 6)$ e $(1, 3)$.

b) Duas possíveis soluções reais: $(0, 0)$ e $(5, -1)$.

c) Duas possíveis soluções reais: $(-1, 2)$ e $(0, 4)$.

d) Duas possíveis soluções reais: $(1, -1)$ e $(2, 1)$.

e) Duas possíveis soluções reais: $(1, -4)$ e $(5, 0)$.

f) Duas possíveis soluções reais: $(-3, -2)$ e $(-2, -3)$.

g) Duas possíveis soluções reais: $(-1, 2)$ e $(1, 0)$.

h) Duas possíveis soluções reais: $(-1, 1)$ e $(2, -1)$.

64. **a)** $\begin{cases} 5 \cdot (-1) + 5 + 0 = 0 \\ -1 - 4 \cdot 5 + 3 \cdot 0 = -21 \neq 0 \\ 2 \cdot (-1) - 2 \cdot 5 + 2 \cdot 0 = -12 \neq 0 \end{cases}$

$\begin{cases} 5 \cdot 0 + 0 + 0 = 0 \\ 0 - 4 \cdot 0 + 3 \cdot 0 = 0 \\ 2 \cdot 0 - 2 \cdot 0 + 2 \cdot 0 = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} 5 \cdot 1 - 2 - 3 = 0 \\ 1 - 4 \cdot (-2) + 3 \cdot (-3) = 0 \\ 2 \cdot 1 - 2 \cdot (-2) + 2 \cdot (-3) = 0 \end{cases}$

As ternas $(0, 0, 0)$ e $(1, -2, -3)$ são soluções do sistema e ele é homogêneo.

b) $\begin{cases} -1 + 2 \cdot 1 + (-1) = 0 \\ -(-1) + 1 + 2 \cdot (-1) = 0 \\ 4 \cdot (-1) - 1 - 5 \cdot (-1) = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} 1 + 2 \cdot (-2) + 4 = 1 \neq 0 \\ -1 + (-2) + 2 \cdot 4 = 5 \neq 0 \\ 4 \cdot 1 - (-2) - 5 \cdot 4 = -14 \neq 0 \end{cases}$

$\begin{cases} 0 + 2 \cdot 0 + 0 = 0 \\ -0 + 0 + 2 \cdot 0 = 0 \\ 4 \cdot 0 - 0 - 5 \cdot 0 = 0 \end{cases}$

As ternas $(-1, 1, -1)$ e $(0, 0, 0)$ são soluções do sistema e ele é homogêneo.

c) $\begin{cases} 0 + 2 \cdot 0 - 3 \cdot 0 = 0 \neq 1 \\ 3 \cdot 0 - 0 + 2 \cdot 0 = 0 \\ 2 \cdot 0 + 0 + 0 = 0 \neq 2 \end{cases}$

$\begin{cases} \frac{1}{16} + 2 \cdot \frac{21}{16} - 3 \cdot \frac{9}{16} = 1 \\ 3 \cdot \frac{1}{16} - \frac{21}{16} + 2 \cdot \frac{9}{16} = 0 \\ 2 \cdot \frac{1}{16} + \frac{21}{16} + \frac{9}{16} = 2 \end{cases}$

$\begin{cases} 0 + 2 \cdot 1 - 3 \cdot \frac{1}{3} = 1 \\ 3 \cdot 0 - 1 + 2 \cdot \frac{1}{3} = -\frac{1}{3} \neq 0 \\ 2 \cdot 0 + 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3} \neq 2 \end{cases}$

A terna $\left(\frac{1}{16}, \frac{21}{16}, \frac{9}{16}\right)$ é solução do sistema; ele é não homogêneo, pois não admite como solução a terna $(0, 0, 0)$.

65. **a)** $\begin{cases} 2x + 5y = 9 \\ -x + 7y = 5 \end{cases} \Rightarrow y = 1 \text{ e } x = 2$

Portanto, a solução do sistema é $(2, 1)$.

b) $\begin{cases} -x + y = 5 \\ -3x - y = 7 \end{cases} \Rightarrow y = 2 \text{ e } x = -3$

Portanto, a solução do sistema é $(-3, 2)$.

c) $\begin{cases} 2x + y = 8 \\ -x + y = -4 \end{cases} \Rightarrow y = 0 \text{ e } x = 4$

Portanto, a solução do sistema é $(4, 0)$.

d) $\begin{cases} 2x + 2y = 14 \\ x - y = 3 \end{cases} \Rightarrow x = 5 \text{ e } y = 2$

Logo, a solução do sistema é $(5, 2)$.

e) $\begin{cases} 2x + y = -8 \\ 3x - 3y = 6 \end{cases} \Rightarrow x = -2 \text{ ou } y = -4$

Logo, a solução do sistema é $(-2, -4)$.

f) $\begin{cases} x - 3y = 15 \cdot (2) \\ -2x + 4y = -20 \end{cases} \Rightarrow y = -5 \text{ e } x = 0$

Portanto, a solução do sistema é $(0, -5)$.

As representações geométricas referentes aos itens dessa tarefa estão apresentadas na seção **Respostas**, no final da reprodução do **Livro do Estudante** deste volume.

66. Seja x a quantidade paga por pessoa e y a despesa total.

$$\begin{cases} 55x = y \\ 50(x - 7) + 510 = y \end{cases}$$

Logo, $x = 32$ e $y = 1760$.

A solução do sistema é $(32, 1760)$. Portanto, a alternativa **d** é a correta.

67. Indicando os preços de cada blusa, calça, pares de sapato e bolsa, respectivamente, pelas letras B, C, S e X, temos:

- $2B + 2C + 3S + X = 380$
- $C = 2B$
- $2X = 3B + C + S$
- $S = B + C$

$$S = B + C \Rightarrow S = 3B$$

$$2X = 3B + C + S \Rightarrow 2X = 8B \Rightarrow X = 4B$$

$$2B + 2C + 3S + X = 380 \Rightarrow 2B + 4B + 9B + 4B = 380 \Rightarrow B = 20$$

Logo:

$$C = 2B \Rightarrow C = 40$$

$$S = 20 + 40 \Rightarrow S = 60$$

$$2B + 2C + 3S + X = 380 \Rightarrow X = 80$$

Portanto, cada blusa custa R$ 20,00; cada calça, R$ 40,00; cada par de sapatos, R$ 60,00; e a bolsa custa R$ 80,00.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

68. Seja x a carne do tipo **A** e y a carne do tipo **B**.

$$\begin{cases} x + 5y = 204 \cdot (-4) \\ 4x + y = 190{,}90 \end{cases}$$

Logo, $y = 32{,}9$ e $x = 39{,}5$.

Assim, $39{,}5 \cdot 5 = 197{,}5$. Logo, Ana pagou R$ 197,50.

69. **a)** Sendo x e y as quantidades gastas de megabites assistindo a vídeos e compartilhando fotos, respectivamente, temos:

$$\begin{cases} x + y = 120 \\ x = 5y \end{cases} \Rightarrow y = 20 \text{ e } x = 100$$

Júlia gastou 20 MB compartilhando fotos e 100 MB assistindo a vídeos.

b) Como 1 GB (1000 MB) permite compartilhar 3300 fotos, então: $\frac{20}{1000} \cdot 3\,300 = 66$. Além disso, como 1 GB permite assistir a 500 minutos de vídeos, então: $\frac{100}{1000} \cdot 500 = 50$.

Portanto, Júlia compartilhou 66 fotos e assistiu a vídeos durante 50 minutos.

70. **a)** $\begin{cases} x + y = 2\,000 \\ x = y + 688 \end{cases}$

b) $(y + 688) + y = 2\,000 \Rightarrow y = 656$

$x = 656 + 688 \Rightarrow x = 1344$

Portanto, a postagem teve 1344 curtidas e 656 compartilhamentos.

71. Seja x o preço de uma caneta e y o preço de uma borracha.

Assim: $\begin{cases} 2x + 3y = 11 \\ 3x + 2y = 13 \end{cases} \Rightarrow y = 1{,}4$

Portanto, a borracha custa R$ 1,40. Logo, a alternativa **c** é a correta.

72. O ponto $(-3, 1)$ é o ponto de interseção entre as retas.

a) $\begin{cases} -3 \cdot (-3) + 4 \cdot 1 = 9 + 4 = 13 \\ -3 - 5 \cdot 1 = -8 \neq 8 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 4 \cdot (-3 + 1) + 5 = -8 + 5 = -3 \\ 7 \cdot (-3 - 1) + 14 = -28 + 14 = -14 \neq 28 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2 \cdot (-3) - 1 - 7 = -6 - 8 = -14 \neq 0 \\ -5 \cdot (-3) + 2 \cdot 1 = 15 + 2 = 17 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 5 \cdot (-3) + 8 \cdot 1 = -15 + 8 = -7 \\ -2 \cdot (-3) + 3 \cdot 1 = 6 + 3 = 9 \end{cases}$

Portanto, a alternativa **d** é a correta.

73. **a)** Substituindo $\left(0, \frac{3}{2}\right)$, $\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right)$ e $\left(\frac{31}{12}, 0\right)$ nos sistemas indicados, temos:

- $\begin{cases} 240 \cdot 0 + 180 \cdot \frac{3}{2} = 270 \\ 0 = 0 \end{cases}$
- $\begin{cases} 240 \cdot \frac{3}{4} + 180 \cdot \frac{1}{2} = 270 \\ 0{,}3 \cdot \frac{3}{4} + 1{,}1 \cdot \frac{1}{2} = 0{,}775 \end{cases}$
- $\begin{cases} 0 = 0 \\ 0{,}3 \cdot \frac{31}{12} + 1{,}1 \cdot 0 = 0{,}775 \end{cases}$

Logo, a alternativa **II** é a correta.

b) $\left(0, \frac{3}{2}\right)$: $C = 2{,}3 \cdot 0 + 3{,}8 \cdot \frac{3}{2} = 5{,}7$

$\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right)$: $C = 2{,}3 \cdot \frac{3}{4} + 3{,}8 \cdot \frac{3}{2} \simeq 3{,}63$

$\left(\frac{31}{12}, 0\right)$: $C = 2{,}3 \cdot \frac{31}{12} + 3{,}8 \cdot 0 \simeq 5{,}94$

Logo, a função assume um mínimo quando $x = \frac{3}{4}$ e $y = \frac{1}{2}$.

- $\frac{3}{4} \cdot 200 \text{ mL} = 150 \text{ mL}$
- $\frac{1}{2} \cdot 400 \text{ g} = 200 \text{ g}$

O custo da refeição será o mínimo se ela for composta de 150 mL de leite de soja e 200 g de salada de frutas.

74. **a)** $\begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 4 & -4 & 7 \\ -0{,}5 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 & -1 \\ 1 & \sqrt{7} & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ \sqrt{7} \end{bmatrix}$

f) $\begin{bmatrix} -1 & 0 & -3{,}5 \\ 0 & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$

75. **a)** SPI **b)** SPD **c)** SI **d)** SPD **e)** SPD **f)** SI **g)** SPD **h)** SPI

As representações geométricas referentes aos itens dessa tarefa estão apresentadas na seção **Respostas**, no final da reprodução do **Livro do Estudante** deste volume.

76. Denotando por x, y e z, respectivamente, as quantidades de vitórias, empates e derrotas, temos:

$$\begin{cases} 3x + y = 27 \\ \frac{2}{3}(15 - y) = x \end{cases} \Rightarrow x = 8 \text{ e } y = 3$$

$$x + y + z = 15 \Rightarrow 8 + 3 + z = 15 \Rightarrow z = 4$$

O time obteve 8 vitórias, 3 empates e 4 derrotas.

77. $\begin{cases} x + y = 3 \\ -2x + \alpha y = 0 \end{cases} \Rightarrow y = \frac{6}{2 + \alpha}$

Na igualdade $y = \frac{6}{2 + \alpha}$, para $\alpha = -2$, o número real y não está definido.

Logo, o sistema é SI, se $\alpha = -2$.

78. **a)** Sistema representado pelas retas r e t, o sistema tem uma solução: $(-2, 5)$.

b) Sistema representado pelas retas r e s, o sistema não tem solução.

c) Sistema representado pelas retas s e u, o sistema tem uma solução: $(2, 1)$.

d) Sistema representado pelas retas t e u, o sistema tem infinitas soluções. Algumas possíveis respostas: $(-2, 5)$; $(0, 3)$; $(2, 1)$; $(3, 0)$.

e) Sistema representado pelas retas u e r, o sistema tem uma solução: $(-2, 5)$.

79. As representações geométricas referentes aos itens dessa tarefa estão apresentadas na seção **Respostas**, no final da reprodução do **Livro do Estudante** deste volume.

a) SPD. Solução do sistema: $(7, 27)$.

b) SPI

c) SPD. Solução do sistema: $(2, 3)$.

d) SPI

e) SI

f) SPD. Solução do sistema: $(2, 3)$.

g) SPD. Solução do sistema: $(2, 2)$.

h) SPD. Solução do sistema: $(-2, -2)$.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

80. a) $\begin{cases} 8A + 12B = 324 \\ A + B = 33 \end{cases}$

b) $\begin{cases} B = -\frac{2}{3}A + 27 \text{ (reta } r\text{)} \\ B = -A + 33 \text{ (reta } s\text{)} \end{cases}$

Como $m_r \neq m_s$, o sistema é SPD.

c) $\begin{cases} 8A + 12B = 324 \\ A + B = 33 \end{cases} \Rightarrow A = 18 \text{ e } B = 15$

Foram vendidas 18 unidades do sanduíche de frango e 15 unidades do sanduíche vegetariano.

81. $\begin{cases} y = (a-1)x + 2 \text{ (reta } r\text{)} \\ y = 2x + b \text{ (reta } s\text{)} \end{cases}$

a) SPI: $m_r = m_s$ e $n_r = n_s$.

$$\begin{cases} a - 1 = 2 \\ 2 = b \end{cases} \Rightarrow a = 3 \text{ e } b = 2$$

b) SPD: $m_r \neq m_s$.

$$a - 1 \neq 2 \Rightarrow a \neq 3$$

O número b pode ser qualquer número real.

c) SI: $m_r = m_s$ e $n_r \neq n_s$.

$$\begin{cases} a - 1 = 2 \\ 2 \neq b \end{cases} \Rightarrow a = 3 \text{ e } b \neq 2$$

82. a) $\begin{cases} y = \frac{1}{3}x - 2 \\ y = \frac{1}{3}x - 1 \end{cases}$

$m_r = m_s$ e $n_r \neq n_s$, não existe solução.

b) $\begin{cases} y = \frac{2}{3}x + 1 \\ y = -\frac{5}{2}x + 2 \end{cases}$

$m_r \neq m_s$, a solução é $x = \frac{6}{19}$ e $y = \frac{23}{19}$.

c) $\begin{cases} y = \frac{1}{2}x + 2 \\ y = -2x - 4 \end{cases}$

$m_r \neq m_s$, a solução é $x = -\frac{12}{5}$ e $y = \frac{4}{5}$.

d) $\begin{cases} y = x - 4 \\ y = \frac{x}{4} + 1 \end{cases}$

$m_r \neq m_s$, a solução é $x = \frac{20}{3}$ e $y = \frac{8}{3}$.

e) $\begin{cases} y = -4x + 2 \\ y = -4x + 1 \end{cases}$

$m_r = m_s$ e $n_r \neq n_s$, não existe solução.

f) $\begin{cases} y = 3x - \frac{4}{5} \\ y = -x + 2 \end{cases}$

$m_r \neq m_s$, a solução é $x = \frac{7}{10}$ e $y = \frac{13}{10}$.

g) $\begin{cases} y = \frac{3}{8}x - \frac{5}{9} \\ y = -\frac{4}{9}x + \frac{11}{2} \end{cases}$

$m_r \neq m_s$, a solução é $x = \frac{436}{59}$ e $y = \frac{2\,353}{1\,062}$.

h) $\begin{cases} y = -7{,}4x + 8 \\ y = -7{,}4x + 9 \end{cases}$

$m_r = m_s$ e $n_r \neq n_s$, não existe solução.

83. Indicando por x a quantidade de etanol e por y, a de gasolina, temos:

$$\begin{cases} x + y = 40 \\ x = 3y \end{cases}$$

Logo, $x = 30$ e $y = 10$.

O carro foi abastecido com 30 L de etanol e 10 L de gasolina.

84. São correspondentes: o sistema **a** e o gráfico **IV**; o sistema **b** e o gráfico **I**; o sistema **c** e o gráfico **III**; o sistema **d** e o gráfico **II**.

85. Considerando x o preço de um lápis e y o preço de um estojo, temos: $\begin{cases} 2x + y = 10 \\ 3x - y = 5 \end{cases} \Rightarrow x = 3 \text{ e } y = 4.$

A soma dos preços dos dois produtos é de $3 + 4 = 7$, ou seja, R$ 7,00. Logo, a alternativa **d** é a correta.

86. $\begin{bmatrix} x & y & z \\ 2x & y & 3z \\ x & -y & 4z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + y + 3z = 1 \\ x - y + 4z = 1 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 3,\ y = -2 \text{ e } z = -1$

87. $\begin{cases} 2{,}5L + 1{,}6P = 26{,}70 \\ 4L + 3{,}5P = 54{,}00 \end{cases} \Rightarrow L = 3 \text{ e } P = 12$

1 kg de laranjas custa R$ 3,00 e 1 kg de peras custa R$ 12,00.

88. Representamos no *software* de cada um desses sistemas e, com a ajuda da ferramenta **Ponto de interseção**, determinamos sua solução.

a) O sistema é SI, pois, ao interpretarmos geometricamente, temos duas retas paralelas sem nenhum ponto de interseção, que é representado no *software* pelo ponto de interrogação (?).

b) O sistema é SPD, cuja solução é $(7{,}62;\ 3{,}92)$.

c) O sistema é SPD, cuja solução é $(-134;\ 48)$.

d) O sistema é SPI, porque, ao interpretarmos geometricamente, temos duas retas paralelas e coincidentes.

e) O sistema é SPD, cuja solução é $(3,\ 0)$.

f) O sistema é SI.

89. a) Indicando por c e h as massas atômicas do carbono e do hidrogênio, respectivamente, temos:

$$\begin{cases} 2c + 4h = 28 \\ 4c + 10h = 58 \end{cases} \Rightarrow c = 12 \text{ e } h = 1$$

A massa atômica do carbono é 12 u e a do hidrogênio é 1 u.

b) Não. Se obtivermos um sistema de equações a partir dessas informações, ele será possível e indeterminado.

90. a) $x = 0$ e $y = 3$, a solução do sistema é $(0,\ 3)$.

b) $x = \frac{1}{2}$ e $y = -2$, a solução do sistema é $\left(\frac{1}{2},\ -2\right)$.

c) $x = -3$ e $y = -5$, a solução do sistema é $(-3,\ -5)$.

d) $x = 0$ e $y = 3$, a solução do sistema é $(0,\ 3)$.

e) $x = -3$ e $y = -5$, a solução do sistema é $(-3,\ -5)$.

f) $x = \frac{1}{2}$ e $y = -2$, a solução do sistema é $\left(\frac{1}{2},\ -2\right)$.

Portanto, são equivalentes os sistemas **a** e **d**, **b** e **f**, **c** e **e**.

91. O item **a** não está na forma escalonada, pois o primeiro coeficiente não nulo da 2ª equação não está à esquerda do primeiro coeficiente não nulo da 3ª equação; e o item **c** não está na forma escalonada porque a 1ª e a 3ª equação têm a mesma quantidade de coeficientes não nulos. Logo, as alternativas **b** e **d** são corretas.

92. a)
- $1 - A \neq 0 \Rightarrow A \neq 1$
- $B = 0$
- $C \neq 0$
- $D = 0$
- $E + 1 = 0 \Rightarrow E = -1$

b)
- $A - B \neq 0 \Rightarrow A \neq B$
- $1 - B = 0 \Rightarrow B = 1 \Rightarrow A \neq 1$
- $C \neq 0$
- $D = 0$
- $E = 0$
- $2 - C \neq 0 \Rightarrow C \neq 2$

93. a) $n > m$, ou seja, SPI.

Sendo $z = k \in \mathbb{R}$, temos:

$$\begin{cases} 2x - y + z = 4 \\ y + z = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - y = 4 - k \\ y = 3 - k \end{cases}$$

$2x - y = 4 - k \Rightarrow 2x - (3 - k) = 4 - k \Rightarrow x = \frac{7}{2} - k$

Portanto, a solução geral é $\left(\frac{7}{2} - k,\ 3 - k,\ k\right)$.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

b) $n = m$, ou seja, SPD.

- $3z = 12 \Rightarrow z = 4$
- $2y + z = 0 \Rightarrow y = -2$
- $-x + 2y - z = -9 \Rightarrow x = 1$

Portanto, a solução é $(1, -2, 4)$.

c) $n > m$, ou seja, SPI.

Sendo $w = k \in \mathbb{R}$, temos:

- $\begin{cases} x + y + z - w = 4 \\ -y - z + w = 0 \\ z + w = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 4 + k \\ -y - z = -k \\ z = -5 - k \end{cases}$
- $-y - z = -k \Rightarrow y = 5 + 2k$
- $x + y + z - w = 4 \Rightarrow x = 4$

Portanto, a solução geral é $(4, 5 + 2k, -5 - k, k)$.

94. Indicando por x e y a quantidade de gols feitos por Gil e por João, respectivamente, temos:

$$\begin{cases} x = y + 6 \\ (x + 1) = 3(y + 1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y = 6 \\ y = 2 \end{cases}$$

Logo, $y = 2$ e $x = 8$.

$x + 1 = 8 + 1 = 9$ e $y + 1 = 2 + 1 = 3$.

Gil terá feito 9 gols, e João, 3 gols.

95. a) $\begin{cases} 3x - y - 2z = 1 \\ x + 2y + z = 9 \\ 2x + y - z = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x - y - 2z = 1 \\ 7y + 5z = 26 \\ -\frac{18}{7}z = -\frac{18}{7} \end{cases}$

Logo, $x = 2$, $y = 3$ e $z = 1$.

b) $\begin{cases} 4x + y - 3z = 5 \\ 2x + y + z = 7 \\ 2x + 3y + 2z = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x + y - 3z = 5 \\ \frac{1}{2}y + \frac{5}{2}z = \frac{9}{2} \\ 9z = \frac{36}{2} \end{cases}$

Logo, $x = 3$, $y = -1$ e $z = 2$.

96. Indicando por x, y e z o total de passagens vendidas para Lisboa, Paris e Roma, respectivamente, temos:

$$\begin{cases} x + y + z = 78 \\ -2x + y - 2z = 0 \\ -x + 2z = 4 \end{cases} \Rightarrow z = 10,\ y = 52 \text{ e } x = 16.$$

Foram vendidas 62 passagens, conjuntamente, para Paris e Roma. Logo, a alternativa **d** é a correta.

97. Indicando por t_A o tempo de chegada do carro **A** ao ponto X, t_1 e t_2, respectivamente, os tempos de chegada do carro **B** antes e depois do aumento de 20% em sua velocidade inicial V_1, sendo $V_2 = 1{,}2 \cdot V_1$ e d a distância entre o carro **B** e o ponto X, temos:

- $t_1 = t_A + 10 \Rightarrow t_1 - t_A = 10$
- $\underbrace{V_2}_{1{,}2V_1} = \frac{d}{t_2} \Rightarrow 1{,}2\underbrace{V_1}_{\frac{d}{t_1}} = \frac{d}{t_2} \Rightarrow 1{,}2\frac{d}{t_1} = \frac{d}{t_2} \Rightarrow t_1 = 1{,}2t_2$
- $t_2 = t_A \Rightarrow t_2 - t_A = 0$

$$\begin{cases} 1{,}2t_2 - t_A = 10 \\ t_2 - t_A = 0 \end{cases} \Rightarrow t_A = 50$$

O carro **A** chegará ao ponto X em 50 segundos.

99. Considere x, y e z as quantidades de caixas amarelas, verdes e azuis, respectivamente.

$$\begin{cases} 2x + 2y + z = 12 \\ 8x + 20y + 10z = 72 \\ 10x + 16y + 14z = 84 \end{cases} \Rightarrow x = 4;\ y = 1;\ z = 2$$

A mãe comprou 4 caixas amarelas, 1 verde e 2 azuis.

100. Indicando por x, y e z cada uma das dimensões desse paralelepípedo, temos:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 18{,}1 \\ x + 4y + 2z = 29 \\ 2x + y + 3z = 33{,}1 \end{cases} \Rightarrow x = 7{,}2;\ y = 2{,}8;\ z = 5{,}3$$

$$V = 7{,}2 \cdot 2{,}8 \cdot 5{,}3 = 106{,}848$$

O volume desse paralelepípedo é 106,848 cm^3.

101. a) $\begin{cases} i_1 - i_2 - i_3 = 0 \\ -4i_1 - 5i_2 = -2 \\ 5i_2 - 4i_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow i_1 = \frac{9}{28};\ i_2 = \frac{1}{7};\ i_3 = \frac{5}{28}$

b) Sugestões de respostas: Fontes de energia elétrica: pilhas, baterias e usinas; condutores: cobre e ouro; dispositivos: aparelhos eletrônicos, eletrodomésticos, lâmpadas e motores.

102. a) $D = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -a \end{vmatrix} = a - 2$

- $a - 2 \neq 0 \Rightarrow a \neq 2$ (SPD)
- $a - 2 = 0 \Rightarrow a = 2$

$$\begin{cases} -x + y = 4 \\ 2x - 2y = -8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x + y = 4 \\ 0x + 0y = 0 \end{cases} \text{ (SPI)}$$

O sistema é SPD se $a \neq 2$ e SPI se $a = 2$.

b) $D = \begin{vmatrix} a + 1 & 0 \\ 4 & a \end{vmatrix} = a^2 + a$

- $a^2 + a \neq 0 \Rightarrow a_1 \neq 0$ ou $a_2 \neq -1$ (SPD)
- $a^2 + a = 0 \Rightarrow a_1 = 0$ ou $a_2 = -1$

Para $a = 0$: $\begin{cases} x = 3 \\ 4x = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ 0x = -8 \end{cases}$ (SI)

Para $a = -1$: $\begin{cases} 0x = 3 \\ 4x - y = 4 \end{cases}$ (SI)

O sistema é SPD se $a \neq 0$ e $a \neq -1$ e SI se $a = 0$ ou $a = -1$.

103. $\begin{cases} 5x - 6y = k_1 \\ -10x + 12y = k_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x - 6y = k_1 \\ 0x + 0y = 2k_1 + k_2 \end{cases}$

Portanto, $k_2 \neq -2k_1$.

104. $D = 1 - 1 - a + 1 - 1 - 1 - a + 1 = -2a$

- $-2a \neq 0 \Rightarrow a \neq 0$ (SPD)
- Sugestão de resposta: $a = 1$.

$$\begin{cases} x - y - z = 1 \\ -y + z = 12 \\ x + y - z = 9 \end{cases} \Rightarrow z = 16,\ y = 4 \text{ e } x = 21$$

Portanto, $a \neq 0$; Sugestão de resposta: Para $a = 1$, a solução é $(21, 4, 16)$.

105. $D = 3 + 6a$

- $3 + 6a \neq 0 \Rightarrow a \neq -\frac{1}{2}$ (SPD)
- $3 + 6a = 0 \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$

Para $a = -\frac{1}{2}$: $\begin{cases} 3x + \frac{1}{2}y = 2 \\ 6x + y = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + \frac{1}{2}y = 2 \\ 0x + 0y = b - 4 \end{cases}$

$b - 4 \neq 0 \Rightarrow b \neq 4$ (SI)

$b - 4 = 0 \Rightarrow b = 4$ (SPI)

O sistema é SPD se $a \neq -\frac{1}{2}$, SPI se $a = -\frac{1}{2}$ e $b = 4$ e SI se $a = -\frac{1}{2}$ e $b \neq 4$.

106. $D = 4 + 12 + 0 - 6a + 0 + 4 = 20 - 6a$

$$20 - 6a \neq 0 \Rightarrow a \neq \frac{10}{3}$$

107. $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 3x - y + z = 0 \\ -x + 5y - 10z = 0 \end{cases}$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -10 \end{vmatrix} = 10 - 1 - 15 + 1 - 5 + 30 = 20 \neq 0$$

O sistema é possível e determinado.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Educação midiática (páginas 180 e 181)

2. A matriz inversa pode ajudar na criptografia de informações. Em geral, sistemas e ferramentas de segurança digital, como os protocolos de HTTPS e aplicativos de mensagem instantânea, usam criptografia para proteger informações e dados pessoais dos usuários de internet.

Desenvolvimento sustentável (páginas 184 e 185)

1. Espera-se que os estudantes tenham compreendido que o controle da quantidade de sódio evita doenças relacionadas à pressão arterial, contribuindo para a manutenção da saúde do corpo.

2. $\begin{bmatrix} 6{,}48 & 0{,}51 \\ 1{,}42 & 1{,}40 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 780 \\ 500 \end{bmatrix}$

$$\begin{cases} 6{,}48a + 0{,}51b = 780 \\ 1{,}42a + 1{,}40b = 500 \end{cases} \Rightarrow a \simeq 100 \text{ e } b \simeq 255$$

Pão francês: 100 g; leite: 255 g.

3. $2\,000 - 780 = 1120$, logo 1220 mg de sódio.

Síntese do capítulo (página 215)

3. Matriz B, pois todos os elementos acima e abaixo da diagonal principal são nulos.

4. Uma matriz simétrica é uma matriz quadrada que é igual à sua transposta. Sugestão de resposta: $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 3 \\ 5 & 3 & 3 \end{bmatrix}$.

5. A informação do item **a** está incompleta. Para que a matriz B seja inversa da matriz A, ambas de ordem n, é preciso que $A \cdot B = I_n$ e $B \cdot A = I_n$. Logo, a alternativa **b** é a correta.

6. a) Verdadeira.
b) Falsa. Sugestão de correção: Uma matriz quadrada é dita matriz diagonal quando os elementos acima ou abaixo da diagonal principal são nulos.
c) Falsa. Sugestão de correção: A propriedade comutativa não é válida para a subtração de matrizes.
d) Verdadeira.

7. Não, pois, existindo a multiplicação de matrizes $A \cdot B$, temos as seguintes possibilidades: $A \cdot B \neq B \cdot A$, $A \cdot B = B \cdot A$ ou não existe $B \cdot A$.

8. A veracidade da igualdade enunciada nessa questão está mostrada na seção **Respostas**, no final da reprodução do **Livro do Estudante** deste volume.

9. SPD, pois as retas que representam as equações do sistema se cruzam em um único ponto.

10. Trocar a ordem das equações do sistema; substituir uma equação do sistema por outra equação, resultante de sua adição com outra equação do mesmo sistema multiplicada por um número diferente de zero; e multiplicar qualquer equação por um número diferente de zero.

CAPÍTULO 6 GEOMETRIA ANALÍTICA

Abertura do capítulo

1. Durante a fase nova, ocorre o eclipse solar; durante a fase cheia, ocorre o eclipse lunar.

2. Porque a órbita da Lua tem uma inclinação em relação à órbita da Terra ao redor do Sol.

3. A resposta depende do ano vigente.

Questões

A. O algoritmo e o fluxograma referentes a essa questão estão apresentados na seção **Respostas**, no final da reprodução do **Livro do Estudante** deste volume.

Exercícios e problemas

1. $A(3, 2)$, $B(-6, 0)$, $C(-1, -5)$, $D(4, -4)$, $E(-3, 3)$, $F(5, 6)$ e $G(-5, -6)$.

2. a) 1º e 4º quadrantes.
b) 3º e 4º quadrantes.
c) 2º quadrante.
d) 4º quadrante.

3. $A(-6, 8)$, $B(-3, -1)$ e $C(3, -1)$.

4. a) $A(1, 3)$, $B(2, -2)$, $C(5, 2)$ e $D(6, -1)$.
b) Sugestão de resposta: $(3, 1)$, $(4, 1)$ e $(5, 1)$.
c) $A'(-1, 3)$, $B'(-2, -2)$, $C'(-5, 2)$ e $D'(-6, -1)$.

6. O plano cartesiano com a indicação dos pontos referentes a essa tarefa está apresentado na seção **Respostas**, no final da reprodução do **Livro do Estudante** deste volume.

7. a) • Analisando as retas verticais, a longitude do ponto A é 20°.
• Analisando as retas horizontais, a latitude do ponto C é 40°.
• $F(60°, -40°)$; $E(-40°, -40°)$
b) O ponto B; sua longitude é −100° e a sua latitude é 0°.
c) O ponto G; suas coordenadas são $G(20°, -20°)$.

8. a) • $A(-2, -2)$ • $C(3, 3)$ • $E(1, -1)$
• $B(1, 1)$ • $D(-1, 1)$ • $F(2, -2)$
b) Na bissetriz do 1º e do 3º quadrante, a ordenada é igual à abscissa; na bissetriz do 2º e do 4º quadrante, a ordenada é o oposto da abscissa. Logo, $x = -9$ e $y = 7$.

9. Utilizando o Teorema de Pitágoras:

a) $AB = \sqrt{(2-1)^2 + (8-9)^2} = \sqrt{2}$

b) $CD = \sqrt{[-3-(-3)]^2 + (12-5)^2} = \sqrt{49} = 7$

c) $PQ = \sqrt{[-2-(-5)]^2 + (7-4)^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

d) $MN = \sqrt{(9-0)^2 + (0-12)^2} = \sqrt{225} = 15$

e) $EF = \sqrt{(5-2)^2 + (4-3)^2} = \sqrt{10}$

f) $GH = \sqrt{[-4-(-2)]^2 + (2-4)^2} = \sqrt{8}$

g) $RS = \sqrt{(1-4)^2 + (3-6)^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

h) $TU = \sqrt{[-6-(-6)]^2 + (12-8)^2} = 4$

10. a) Como A, B e C são colineares, logo um dos vértices será D, assim são formados três triângulos: ABD, ACD e BCD.
b) Determinando o comprimento do lado de cada triângulo, temos:
$\triangle ABD$

$$AB = \left|1 - \left(-\frac{3}{2}\right)\right| = \frac{5}{2}$$

$$BD = \sqrt{\left(\frac{5}{2} - 1\right)^2 + (0-2)^2} = \frac{5}{2}$$

$$AD = \sqrt{\left[\frac{5}{2} - \left(-\frac{3}{2}\right)\right]^2 + (0-2)^2} = 2\sqrt{5}$$

Logo, $\triangle ABD$ é isósceles, pois $AB = BD \neq AD$.
$\triangle ACD$

$$AC = \left|4 - \left(-\frac{3}{2}\right)\right| = \frac{11}{2}$$

$$CD = \sqrt{\left(\frac{5}{2} - 4\right)^2 + (0-2)^2} = \frac{5}{2}$$

Logo, $\triangle ACD$ é escaleno, pois $AC \neq AD$, $AD \neq CD$ e $AC \neq CD$.
$\triangle BCD$

$$BC = |4 - 1| = 3$$

$$BD = \sqrt{\left(\frac{5}{2} - 1\right)^2 + (0-2)^2} = \frac{5}{2}$$

Logo, $\triangle BCD$ é isósceles, pois $BD = CD \neq BC$.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

11. $\sqrt{(0-1)^2+(4-x)^2}=5\sqrt{2} \Rightarrow$
$\Rightarrow x^2-8x-33=0 \Rightarrow x_1=11$ ou $x_1=-3$.
Como Q está no 4º quadrante, então $x=-3$.

12. **a)** $AB=\sqrt{(12-0)^2+[4-(-1)]^2}=13$

$AC=\sqrt{(0-0)^2+\left[\frac{3}{2}-(-1)\right]^2}=\frac{5}{2}$

$BC=\sqrt{(0-12)^2+\left(\frac{3}{2}-4\right)^2}=\frac{10\sqrt{7}}{2}$

Portanto, $AB=13$ u.c.; $AC=\frac{5}{2}$ u.c.; $BC=\frac{10\sqrt{7}}{2}$ u.c.

b) $FG=\sqrt{(5-2)^2+\left(0-3\sqrt{3}\right)^2}=6$

$FH=\sqrt{(-1-2)^2+\left(0-3\sqrt{3}\right)^2}=6$

$GH=\sqrt{(-1-5)^2+(0-0)^2}=6$

Portanto, $FG=6$ u.c.; $FH=6$ u.c.; $GH=6$ u.c.

c) $LM=\sqrt{(3-4)^2+(1-6)^2}=\sqrt{26}$

$LN=\sqrt{(9-4)^2+(2-6)^2}=\sqrt{41}$

$MN=\sqrt{(9-3)^2+(2-1)^2}=\sqrt{37}$

Portanto, $LM=\sqrt{26}$ u.c.; $LN=\sqrt{41}$ u.c.; $MN=\sqrt{37}$ u.c.

d) $PQ=\sqrt{(5-1)^2+(6-3)^2}=5$

$PR=\sqrt{(5-1)^2+(0-3)^2}=5$

$QR=\sqrt{(5-5)^2+(0-6)^2}=6$

Portanto, $PQ=5$ u.c.; $PR=5$ u.c.; $QR=6$ u.c.

e) $ST=\sqrt{(6-3)^2+(7-4)^2}=3\sqrt{2}$

$SU=\sqrt{(8-3)^2+(10-4)^2}=\sqrt{61}$

$TU=\sqrt{(8-6)^2+(10-7)^2}=\sqrt{13}$

Portanto, $ST=3\sqrt{2}$ u.c.; $SU=\sqrt{61}$ u.c.; $TU=\sqrt{13}$ u.c.

f) $VX=\sqrt{(2-0)^2+(3-1)^2}=2\sqrt{2}$

$VZ=\sqrt{(4-0)^2+(6-1)^2}=\sqrt{41}$

$XZ=\sqrt{(4-2)^2+(6-3)^2}=\sqrt{13}$

Portanto, $VX=2\sqrt{2}$ u.c.; $VZ=\sqrt{41}$ u.c.; $XZ=\sqrt{13}$ u.c.

13. **a)** $AB=\sqrt{[2-(-1)]^2+(6-2)^2}=5$

$AC=\sqrt{[5-(-1)]^2+(2-2)^2}=6$

$BC=\sqrt{(5-2)^2+(2-6)^2}=5$

$h^2+3^2=5^2 \Rightarrow h=4$

• Perímetro: $5+6+5=16$.

• Área: $\frac{6\cdot 4}{2}=12$.

O perímetro desse triângulo é 16 u.c. e a área é 12 u.a.

b) $DE=\sqrt{(6-2)^2+(1-4)^2}=5$

$DF=\sqrt{(2-2)^2+(1-4)^2}=3$

$EF=\sqrt{(2-6)^2+(1-1)^2}=4$

• Perímetro: $5+4+3=12$.

• Área: $\frac{4\cdot 3}{2}=6$.

O perímetro desse triângulo é 12 u.c. e a área é 6 u.a.

c) $GH=\sqrt{[-2-(-2)]^2+(4-1)^2}=3$

$GI=\sqrt{[-6-(-2)]^2+(1-1)^2}=4$

$HI=\sqrt{[-6-(-2)]^2+(1-4)^2}=5$

• Perímetro: $4+3+5=12$.

• Área: $\frac{4\cdot 3}{2}=6$.

O perímetro desse triângulo é 12 u.c. e a área é 6 u.a.

d) $JK=\sqrt{(-4-0)^2+(0-3)^2}=5$

$JL=\sqrt{(4-0)^2+(0-3)^2}=5$

$KL=\sqrt{[4-(-4)]^2+(0-0)^2}=8$

$h^2+4^2=5^2 \Rightarrow h=3$

• Perímetro: $5+8+5=18$.

• Área: $\frac{8\cdot 3}{2}=12$.

O perímetro desse triângulo é 18 u.c. e a área é 12 u.a.

14. Calculamos cada uma das distâncias:

$AR=\sqrt{(-1-5)^2+[1-(-2)]^2}=3\sqrt{5}$

$BR=\sqrt{(-1-2)^2+(1-2)^2}=\sqrt{10}$

$CR=\sqrt{(-1-1)^2+[1-(-5)]^2}=2\sqrt{10}$

$DR=\sqrt{[-1-(-2)]^2+[1-(-3)]^2}=\sqrt{17}$

$ER=\sqrt{[-1-(-3)]^2+(1-3)^2}=2\sqrt{2}$

As distâncias aproximadas são, respectivamente, 335 km, 158 km, 316 km, 206 km e 141 km.

a) As cidades que recebem o sinal são B, D e E, já as cidades que não recebem o sinal são A e C.

b) $FR=\sqrt{(-1-3)^2+[1-1]^2}=4$

$4\times 50=20$

A distância seria de 20 km. Portanto, a cidade F receberia o sinal de transmissão.

c) Sugestão de resposta: $H(0, -4)$.

15. $AB=|2-5|=3$

$AC=|1-4|=3$

$A=\frac{AB\cdot AC}{2} \Rightarrow A=\frac{3\cdot 3}{2} \Rightarrow A=4{,}5$

A área do triângulo é 4,5 u.a.

16. $AB=\sqrt{(2-0)^2+(0-3)^2}=\sqrt{13}$

$AC=\sqrt{(-7-0)^2+(-6-3)^2}=\sqrt{130}$

$BC=\sqrt{(-7-2)^2+(-6-0)^2}=\sqrt{117}$

Temos $AC^2=AB^2+BC^2$.

Logo, os pontos A, B e C são vértices de um triângulo retângulo com hipotenusa $\overline{AC}$.

Assim, o ponto D deve estar duas unidades para a esquerda e três unidades para cima do ponto C, ou seja, suas coordenadas são: $(-7-2, -6+3)=(-9, -3)$.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

17. a) $\begin{cases} MP = OP \\ NP = OP \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{(x-3)^2 + (y-6)^2} = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \sqrt{(x-4)^2 + (y-3)^2} = \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases}$

$x = \frac{1}{2}$ e $y = \frac{7}{2}$

Assim, $P\left(\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right)$.

b) $\begin{cases} AP = CP \\ BP = CP \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{(x-2)^2 + (y-4)^2} = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \sqrt{(x-5)^2 + (y-3)^2} = \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases}$

$x = \frac{19}{7}$ e $y = \frac{8}{7}$

Portanto, $P\left(\frac{19}{7}, \frac{8}{7}\right)$.

c) $\begin{cases} QP = SP \\ RP = SP \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{(x-4)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \sqrt{(x-0)^2 + (y-3)^2} = \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases}$

$x = 2$ e $y = \frac{3}{2}$

Assim, $P\left(2, \frac{3}{2}\right)$.

d) $\begin{cases} TP = VP \\ UP = VP \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{(x-1)^2 + (y-5)^2} = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} = \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases}$

$x = -\frac{9}{2}$ e $y = \frac{7}{2}$

Assim, $P\left(-\frac{9}{2}, \frac{7}{2}\right)$.

18. a) A imagem referente a esse item está apresentada na seção **Respostas**, no final da reprodução do **Livro do Estudante** deste volume.

b) $PQ = \sqrt{(3-5)^2 + (7-4)^2} = \sqrt{13} \simeq 3{,}6$

$QR = \sqrt{(1-3)^2 + (2-7)^2} = \sqrt{29} \simeq 5{,}4$

$PR = \sqrt{(1-5)^2 + (2-4)^2} = \sqrt{20} \simeq 4{,}5$

A distância aproximada das mesas P e Q, Q e R e P e R são: 3,6 m, 5,4 m e 4,5 m, respectivamente.

19. a) $AB = \sqrt{(4-(-2))^2 + (2-1)^2} = \sqrt{37} \simeq 6{,}1$

$BC = \sqrt{(3-4)^2 + (-2-2)^2} = \sqrt{17} \simeq 4{,}1$

$AC = \sqrt{(3-(-2))^2 + (-2-1)^2} = \sqrt{34} \simeq 5{,}8$

A menor distância entre os pontos representados nesse plano é aproximadamente 4,1 u.c.

b) Perímetro: $6{,}1 + 4{,}1 + 5{,}8 = 16$.

$$(h)^2 + (2{,}05)^2 = (6{,}1)^2 \Rightarrow h \simeq 5{,}75$$

Área: $\frac{4{,}1 \cdot 5{,}75}{2} \simeq 11{,}79$.

O perímetro desse triângulo é 16 u.c. e a área é aproximadamente 5,75 u.a.

20. Considere a torre $X(x, y)$, assim $AX = BX = CX$.

$$\begin{cases} AX = BX \\ CX = BX \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{(x-30)^2 + (y-20)^2} = \sqrt{(x-70)^2 + (y-20)^2} \\ \sqrt{(x-60)^2 + (y-50)^2} = \sqrt{(x-70)^2 + (y-20)^2} \end{cases}$$

$$x = 50 \text{ e } y = 30$$

A torre deve estar localizada no ponto de coordenada $(50, 30)$. Logo, a alternativa **e** é a correta.

21. a) $M_{\overline{AB}}\left(\frac{4+1}{2}, \frac{3+7}{2}\right) = M_{\overline{AB}}\left(\frac{5}{2}, 5\right)$

b) $M_{\overline{AB}}\left(\frac{2+(-4)}{2}, \frac{-1+5}{2}\right) = M_{\overline{AB}}(-1, 2)$

c) $M_{\overline{AB}}\left(\frac{-7+(-2)}{2}, \frac{-9+0}{2}\right) = M_{\overline{AB}}\left(-\frac{9}{2}, -\frac{9}{2}\right)$

d) $M_{\overline{AB}}\left(\frac{15+(-7)}{2}, \frac{6+8}{2}\right) = M_{\overline{AB}}(4, 7)$

22. $M_{\overline{PQ}}\left(\frac{0+4}{2}, \frac{1+(-3)}{2}\right) \Rightarrow M_{\overline{PQ}}(2, -1)$

$RM_{\overline{PQ}} = \sqrt{(2-5)^2 + (-1-3)^2} = 5$

O comprimento da mediana em relação ao lado $\overline{PQ}$ é 5 u.c.

23. a) Sim, pois $M_{\overline{AC}}\left(\frac{-2+4}{2}, \frac{7+(-5)}{2}\right) = M_{\overline{AC}}(1, 1)$.

b) • $M_{\overline{AB}}\left(\frac{-2+1}{2}, \frac{7+1}{2}\right) = M_{\overline{AB}}\left(-\frac{1}{2}, 4\right)$

• $M_{\overline{BC}}\left(\frac{1+4}{2}, \frac{1+(-5)}{2}\right) = M_{\overline{BC}}\left(\frac{5}{2}, -2\right)$

24. a) Os pontos C e D devem dividir o segmento AB nas proporções $\frac{AC}{CB} = \frac{1}{2}$ e $\frac{AD}{DB} = 2$, respectivamente.

Coordenadas do ponto C:

$\frac{AC}{CB} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{x_C - x_A}{x_B - x_C} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{x_C - 0}{9 - x_C} = \frac{1}{2} \Rightarrow x_C = 3$

$\frac{AC}{CB} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{y_C - y_A}{y_B - y_C} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{y_C - 0}{12 - y_C} = \frac{1}{2} \Rightarrow y_C = 4$

Coordenadas do ponto D:

$\frac{AD}{DB} = 2 \Rightarrow \frac{x_D - x_A}{x_B - x_D} = 2 \Rightarrow \frac{x_D - 0}{9 - x_D} = 2 \Rightarrow x_D = 6$

$\frac{AD}{DB} = 2 \Rightarrow \frac{y_D - y_A}{y_B - y_D} = 2 \Rightarrow \frac{y_D - 0}{12 - y_D} = 2 \Rightarrow y_D = 8$

Assim, $C(3, 4)$ e $D(6, 8)$.

b) $AB = \sqrt{9^2 + 12^2} = 15$

A distância é dada por: $15 \cdot 120 = 1800$.

Portanto, a distância é 1800 m.

25. Considere os pontos A e B de coordenadas $A(x, 0)$; $B(0, y)$.

$3 = \frac{x+0}{2} \Rightarrow x = 6$ $\qquad$ $4 = \frac{0+y}{2} \Rightarrow y = 8$

Assim, $A(6, 0)$ e $B(0, 8)$.

26. $-3 = \frac{-6+x}{2} \Rightarrow x = 0$ $\qquad$ $-2 = \frac{y+(-8)}{2} \Rightarrow y = 4$

27. $x_G = \frac{x_P + x_Q + x_R}{3} \Rightarrow 2 = \frac{-2+5+x}{3} \Rightarrow x = 3$

$y_G = \frac{y_P + y_Q + y_R}{3} \Rightarrow -4 = \frac{1+(-6)+y}{3} \Rightarrow y = -7$

28. Indicando por (x_Q, y_Q) o ponto Q, temos:

$\frac{PQ}{QR} = \frac{2}{5} \Rightarrow \frac{x_Q - (-3)}{1 - x_Q} = \frac{2}{5} \Rightarrow x_Q = -\frac{13}{7}$

$\frac{PQ}{QR} = \frac{2}{5} \Rightarrow \frac{y_Q - 5}{3 - y_Q} = \frac{2}{5} \Rightarrow y_Q = \frac{31}{7}$

Assim, $Q\left(-\frac{13}{7}, \frac{31}{7}\right)$.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

29. a) $M_{\overline{BC}}\left(\frac{-5+(-3)}{2}, \frac{-5+1}{2}\right) = M_{\overline{BC}}(-4, -2)$

$AM_{\overline{BC}} = \sqrt{(-4-0)^2 + [-2-(-1)]^2} = \sqrt{17}$

$M_{\overline{AC}}\left(\frac{0+(-3)}{2}, \frac{-1+1}{2}\right) = M_{\overline{AC}}\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$

$BM_{\overline{AC}} = \sqrt{\left(-\frac{3}{2}-(-5)\right)^2 + (0-5)^2} = \frac{\sqrt{149}}{2}$

$M_{\overline{AB}}\left(\frac{0+(-5)}{2}, \frac{-1+(-5)}{2}\right) = M_{\overline{AB}}\left(-\frac{5}{2}, -3\right)$

$CM_{\overline{AB}} = \sqrt{\left[-\frac{5}{2}-(-3)\right]^2 + (-3-1)^2} = \frac{\sqrt{65}}{2}$

b) $G\left(\frac{0+(-5)+(-3)}{3}, \frac{-1+(-5)+1}{3}\right) = G\left(-\frac{8}{3}, -\frac{5}{3}\right)$

30. • $2 = \frac{-5+x_B}{2} \Rightarrow x_B = 9$ • $\frac{3}{2} = \frac{-5+x_C}{2} \Rightarrow x_C = 8$

• $3 = \frac{2+y_B}{2} \Rightarrow y_B = 4$ • $1 = \frac{2+y_C}{2} \Rightarrow y_C = 0$

Assim, $B(9, 4)$ e $C(8, 0)$.

31. a) $G\left(\frac{-4+(-2)+2}{3}, \frac{-1+4+3}{3}\right) \Rightarrow G\left(-\frac{4}{3}, 2\right)$

b) $GC = \sqrt{\left[2-\left(-\frac{4}{3}\right)\right]^2 + (3-2)^2} = \frac{\sqrt{109}}{3}$

32. a) • $P\left(\frac{4+7}{2}, \frac{10+4}{2}\right) = P\left(\frac{11}{2}, 7\right)$

• $Q\left(\frac{4+1}{2}, \frac{10+4}{2}\right) = Q\left(\frac{5}{2}, 7\right)$

• $R\left(\frac{1+7}{2}, \frac{4+4}{2}\right) = R(4, 4)$

b) • $G\left(\frac{4+1+7}{3}, \frac{10+4+4}{3}\right) = G(4, 6)$

• $H\left(\frac{\frac{11}{2}+\frac{5}{2}+4}{3}, \frac{7+7+4}{3}\right) = H(4, 6)$

33. a) A veracidade da afirmação feita nessa tarefa está mostrada na seção **Respostas**, no final da reprodução do **Livro do Estudante** deste volume.

34. a) $X = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ -3 & -7 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \det X = -7 - 5 + 3 - 7 + 15 + 1 = 0$

b) $Y = \begin{vmatrix} 5 & 9 & 1 \\ 4 & 7 & 1 \\ 3 & 6 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow \det Y = 35 + 24 + 27 - 21 - 36 - 30 = -1$

c) $Z = \begin{vmatrix} 4 & 6 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \\ -8 & 0 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow \det Z = 12 - 48 + 24 + 12 = 0$

d) $W = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 12 & 9 & 1 \\ 7 & 4 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow \det W = 45 + 14 + 48 - 63 - 24 - 20 = 0$

e) $E = \begin{vmatrix} 2 & 6 & 1 \\ -4 & -8 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow \det E = -16 - 12 + 8 - 16 + 24 + 4 = -8$

f) $F = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow \det F = -4 + 4 = 0$

g) $G = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 1 \\ 6 & 3 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow \det G = -24 - 9 - 5 + 12 + 6 + 15 = -5$

h) $H = \begin{vmatrix} 6 & 3 & 1 \\ 7 & 4 & 1 \\ 5 & 5 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow \det H = -20 - 30 - 21 + 24 + 15 + 35 = 3$

Portanto, as alternativas **a**, **c**, **d** e **f** apresentam os pontos alinhados.

35. $\begin{vmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 1 & 7 & 1 \\ 7 & r & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow 28 - 7 + r - 49 + 1 - 4r = 0$

$-3r - 27 = 0 \Rightarrow r = -9$

36. Pontos A, B e E:

$\begin{vmatrix} -3 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -6 - 2x - y - 2x - 2 + 3y = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow -4x + 2y - 8 = 0$

Pontos C, D e E:

$\begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 3x + 2y - x - 6 = 0 \Rightarrow 2x + 2y - 6 = 0$

Utilizando um sistema de equações, temos:

$\begin{cases} -4x + 2y = 8 \\ 2x + 2y = 6 \end{cases} \Rightarrow x = -\frac{1}{3} \text{ e } y = \frac{10}{3}$

Portanto, $E\left(-\frac{1}{3}, \frac{10}{3}\right)$.

37. O algoritmo e o fluxograma referentes a essa tarefa estão apresentados na seção **Respostas**, no final da reprodução do **Livro do Estudante** deste volume.

38. a) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a & \frac{11}{2} & 1 \\ 14 & 7 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 7a - 77 = 0 \Rightarrow a = 11$

b) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 9 & 12 & 1 \\ x_T & y_T & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -12x_T + 9y_T = 0 \Rightarrow y_T = \frac{4}{3}x_T$

Como $ST = 20$, obtemos:

$\sqrt{{x_T}^2 + {y_T}^2} = 20 \Rightarrow {x_T}^2 + \left(\frac{4}{3}x_T\right)^2 = 400 \Rightarrow x_T = 12 \text{ ou } x_T = -12$

Como T está no 1º quadrante, $x_T = 12$. Substituindo em $y_T = \frac{4}{3}x_T$, obtemos $y_T = 16$.

Portanto, $T(12, 16)$ e há a ocorrência de um eclipse solar.

39. A. $\begin{vmatrix} -4 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 4 + 9 + 4 + 3 - 6 + 8 = 22$

$A = \frac{1}{2}|22| \Rightarrow A = 11$

A área do triângulo é 11 u.a.

B. $\begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \\ 7 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -2 + 21 + 20 - 7 - 15 + 8 = 25$

$A = \frac{1}{2}|25| \Rightarrow A = \frac{25}{2}$

A área do triângulo é $\frac{25}{2}$ u.a.

40. Ao indicar os pontos do quadrilátero em um plano cartesiano, é possível identificar dois triângulos: ABC e ACD. Assim, temos:

$A_{ABCD} = A_{ABC} + A_{ACD}$

$A_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 5 & 3 & 1 \\ 7 & 4 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow A_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot |14| + \frac{1}{2} \cdot |6| = 10$

A área da região determinada pelo quadrilátero $ABCD$ é 10 u.a.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

41. Sendo A, B e C os vértices do triângulo, obtemos os seguintes sistemas:

$$\begin{cases} \frac{x_A + x_B}{2} = 1 \\ \frac{x_A + x_C}{2} = 3 \\ \frac{x_B + x_C}{2} = 1 \end{cases} \text{ e } \begin{cases} \frac{y_A + y_B}{2} = 2 \\ \frac{y_A + y_C}{2} = 4 \\ \frac{y_B + y_C}{2} = -1 \end{cases}$$

Assim, temos o triângulo com as seguintes coordenadas: $A(3, 7)$; $B(-1, -3)$; $C(3, 1)$.

$$A = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 7 & 1 \\ -1 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{2} \cdot (-9 + 21 - 1 + 9 + 7 - 3) = 12$$

A área da região determinada por esse triângulo é 12 u.a.

42. Temos as seguintes regiões triangulares: A_{ABC}, A_{ACD}, A_{AED} e A_{AEF}. Desse modo, $A = A_{ABC} + A_{ACD} + A_{AED} + A_{AEF}$. Logo:

$$A = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & -3 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot |-7| + \frac{1}{2} \cdot |-7| + \frac{1}{2} \cdot |7| + \frac{1}{2} \cdot |-9| = 15$$

A área da figura é 15 u.a.

43. A. $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 4x + 2y - 2x - 8 = 0 \Rightarrow 2(x + y - 4) = 0$

A equação geral da reta é $x + y - 4 = 0$.

B. $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -3 & 2 & 1 \\ 1 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2x + y - 18 - 2 + 3y - 6x = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4(y - x - 5) = 0$

A equação geral da reta é $y - x - 5 = 0$.

C. $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -\sqrt{3} & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow y + \sqrt{3}x = 0$

A equação geral da reta é $\sqrt{3}x + y = 0$.

D. $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -2 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -2x + 2y + 6 - 2x + 3y - 4 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow -4x + 5y + 2 = 0$

A equação geral da reta é $-4x + 5y + 2 = 0$.

E. $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -x + 2y - 2 = 0$

A equação geral da reta é $-x + 2y - 2 = 0$.

F. $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2 - 2x + y - x + 2y - 2 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3(-x + y) = 0$

A equação geral da reta é $-x + y = 0$.

44. a) Temos: (x, y), $(0, 6)$ e $(-3, -9)$, logo:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 0 & 6 & 1 \\ -3 & -9 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 6x - 3y + 18 + 9x = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow 3(5x - y + 6) = 0$

A equação geral da reta é $5x - y + 6 = 0$.

b) $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 5 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 5y + 3x = 0$

A equação geral da reta é $3x + 5y = 0$.

c) Temos: (x, y), $(0, 2)$ e $(3, 2)$. Logo,

$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2x + 3y - 6 - 2x = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3(y - 2) = 0$

A equação geral da reta é $y - 2 = 0$.

d) Temos: (x, y), $(12, 0)$ e $(12, 4)$. Assim,

$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 12 & 0 & 1 \\ 12 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 12y + 48 - 12y - 4x = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow -4(x - 12) = 0$

A equação geral da reta é $x - 12 = 0$.

45. $\begin{vmatrix} p & 2p + 1 & 1 \\ 1 & 6 & 1 \\ 0 & \frac{22}{5} & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 6p + \frac{22}{5} - (2p + 1) - \frac{22}{5}p = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow -\frac{2}{5}p + \frac{17}{5} = 0 \Rightarrow p = \frac{17}{2}$

46. a) $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow y - 6x = 0$

A equação geral da reta é $y = 6x$.

b) • Se $x_1 = 3$, então $y_1 = 6 \cdot 3 \Rightarrow y_1 = 18$.

• Se $x_2 = -2$, então $y_2 = 6 \cdot (-2) \Rightarrow y_2 = -12$.

47. Os únicos pontos que pertencem à reta são $(-3, 1)$, $(0, 4)$ e $(2, 6)$. Indicando esses pontos por A, B e C, respectivamente, temos:

$$AP = \sqrt{(-5 - (-3))^2 + (5 - 1)^2} = \sqrt{20}$$

$$BP = \sqrt{(-5 - 0)^2 + (5 - 4)^2} = \sqrt{26}$$

$$CP = \sqrt{(-5 - 2)^2 + (5 - 6)^2} = 5\sqrt{2}$$

O ponto $(-3, 1)$ tem distância menor do que 5 km. Portanto, a alternativa **e** é a correta.

48. a) $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 5 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2x - y + 15 + 2 - 5y - 3x = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow -x - 6y + 17 = 0$

A equação geral da reta é $-x - 6y + 17 = 0$.

b) $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 0 & -4 & 1 \\ 1 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -4x + y + 4 - 6x = 0 \Rightarrow -10x + y + 4 = 0$

A equação geral da reta é $-10x + y + 4 = 0$.

c) $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -12 & -7 & 1 \\ -5 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -9x + 7y - 59 = 0$

A equação geral da reta é $-9x + 7y - 59 = 0$.

d) $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 8 & -3 & 1 \\ -4 & -6 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow -3x - 4y - 48 - 12 - 8y + 6x = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3(x - 4y - 20) = 0$

A equação geral da reta é $x - 4y - 20 = 0$.

e) $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 6 & 3 & 1 \\ -2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 6 - 4x - 6y + 3x - 2y + 24 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow -x - 8y + 30 = 0$

A equação geral da reta é $-x - 8y + 30 = 0$.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

f) $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 6 - 6x - 3x + 2y = 0 \Rightarrow -9x + 2y + 6 = 0$

A equação geral da reta é $-9x + 2y + 6 = 0$.

49. $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 5 & -39 & 1 \\ -3 & 9 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -39x - 3y + 45 - 117 - 5y - 9x = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 8(-6x - y - 9) = 0$

A equação de r é $y = -6x - 9$. Logo, a alternativa **d** é a correta.

50. a) $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 0 & 1500 & 1 \\ 2000 & 1800 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 1500x + 2000y - 3000000 - 1800x = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 100(-3x + 20y - 30000) = 0$

A equação da reta é $y = 0{,}15x + 1500$.

b) • Se $x_1 = 1500$, então $y_1 = 1500 + 0{,}15 \cdot 1500 = 1725$.

• Se $x_2 = 2800$, então $y_2 = 1500 + 0{,}15 \cdot 2800 = 1920$.

c) $2500 = 1500 + 0{,}15 \cdot x \Rightarrow x = \frac{20000}{3}$

51. Para representar uma reta no plano cartesiano, basta determinar dois pontos pertencentes a ela. Sendo assim, determinaremos dois pontos em cada um dos itens a seguir para obter a representação das retas indicadas.

a) Se $x = 0$, então $y = -4$; se $x = \frac{4}{3}$, então $y = 0$.

b) Se $x = -2$, então $y = 4$; se $x = 0$, então $y = 2$.

c) Se $x = -\sqrt{3}$, então $y = 0$; se $x = 0$, então $y = 1$.

d) Se $x = -4$, então $y = 0$; se $x = 0$, então $y = 2$.

e) Se $x = -\frac{1}{2}$, então $y = -2$; se $x = 0$, então $y = -1$.

f) Se $x = -2$, então $y = -4$; se $x = 0$, então $y = -2$.

As representações geométricas das retas referentes aos itens dessa tarefa estão apresentadas na seção **Respostas**, no final da reprodução do **Livro do Estudante** deste volume.

52. Dado um ponto $P(x, y)$, devemos encontrar as distâncias PA e PB que satisfaçam a condição de $PA = 2PB$.

$\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = 2 \cdot \sqrt{(x-30)^2 + (y-0)^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 + y^2 = 4x^2 - 240x + 3600 + 4y^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 - 80x + 1600 + y^2 = 0 \Rightarrow (x-40)^2 + (y-0)^2 = 20^2$

Logo, o bombeiro precisa estar sobre uma circunferência de centro $(40, 0)$ e raio igual a 20 metros. Assim, a maior distância que dois bombeiros poderiam ter entre eles é 40 m. Portanto, a alternativa **b** é a correta.

53. a) Para $y = 0$: $4x - 3(0) + 12 = 0 \Rightarrow x = -3$.

Assim, $A(-3, 0)$.

Para $x = 0$: $4(0) - 3y + 12 = 0 \Rightarrow y = 4$.

Logo, $B(0, 4)$.

b) $AB = \sqrt{[0 - (-3)]^2 + (4-0)^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} =$

$= \sqrt{25} = 5$

c) $x_M = \frac{0 + (-3)}{2} = -\frac{3}{2}$ $\qquad$ $y_M = \frac{4 - 0}{2} = 2$

Assim, $M\left(-\frac{3}{2}, 2\right)$.

54. $y_X = 0 \Rightarrow 3x_X + 120 = 0 \Rightarrow x_X = -40$

$X(-40, 0)$

$x_Y = 0 \Rightarrow -4y_Y + 120 = 0 \Rightarrow y_Y = 30$

$Y(0, 30)$

Como $\overline{AX} = \overline{XY} = \overline{YB}$, logo X é o ponto médio de $\overline{AY}$ e Y o ponto médio de $\overline{XB}$. Assim:

$A(x_A, y_A) = \left(\frac{0 + x_A}{2}, \frac{30 + y_A}{2}\right) = (-40, 0) \Rightarrow A(-80, -30)$

$B(x_B, y_B) = \left(\frac{-40 + x_b}{2}, \frac{0 + y_A}{2}\right) = (0, 30) \Rightarrow B(40, 60)$

Portanto, a alternativa **b** é a correta.

55. Os pontos L e K pertencem à reta r, assim:

$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -16 & 8 & 1 \\ 1 & -7 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 8x + y + 112 - 8 + 7x + 16y = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 15x + 17y + 104 = 0$

A equação geral da reta r é $15x + 17y + 104 = 0$.

Os pontos L e M pertencem à reta s. Assim, temos:

$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -16 & 8 & 1 \\ 19 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 8x + 19y - 32 - 152 - 2x + 16y = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 6x + 35y - 184 = 0$

A equação geral da reta s é $6x + 35y - 184 = 0$.

Os pontos K e M pertencem à reta t. Assim, temos:

$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & -7 & 1 \\ 19 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -7x + 19y + 2 + 133 - 2x - y = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 9(-x + 2y + 15) = 0$

A equação geral da reta t é $-x + 2y + 15 = 0$.

Os pontos N e L pertencem à reta u. Assim, temos:

$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ -16 & 8 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 5x - 16y + 16 + 80 - 2y - 8x = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow -3x - 18y + 96 = 0$

A equação geral da reta u é: $-3x - 18y + 96 = 0$.

56. Representando os pontos A e B em um plano cartesiano, é possível determinar as coordenadas dos outros dois vértices do quadrado, que são $C(2, 4)$ e $D(3, 1)$.

Pontos A e C: $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -4x + 2y = 0 \Rightarrow -2(2x - y) = 0.$

Logo, $2x - y = 0$.

Pontos B e D: $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 3x + 3y - 1 - 9 + y - x = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2(x + 2y - 5) = 0.$

Logo, $x + 2y - 5 = 0$.

57. a) Para $y = 0$: $2y - 6x + 3 = 0 \Rightarrow 2 \cdot 0 - 6x + 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$.

Portanto, o ponto é $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$.

b) Para $x = 0$: $2y - 6x + 3 = 0 \Rightarrow 2y - 6 \cdot 0 + 3 = 0 \Rightarrow y = -\frac{3}{2}$.

Portanto, o ponto é $\left(0, -\frac{3}{2}\right)$.

c) Esse item pode ter várias respostas. Os estudantes podem escolher, por exemplo, três diferentes valores de x e determinar o valor de y por meio da equação geral $2y - 6x + 3 = 0$. Uma possível resposta:

Se $x = 1$: $2y - 6 \cdot 1 + 3 = 0 \Rightarrow y = \frac{3}{2}$.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Assim, o ponto é $\left(1, \frac{3}{2}\right)$.

Se $x = -2$: $2y - 6 \cdot (-2) + 3 = 0 \Rightarrow y = -\frac{15}{2}$.

Assim, o ponto é $\left(-2, -\frac{15}{2}\right)$.

Se $x = -\frac{1}{3}$: $2y - 6 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) + 3 = 0 \Rightarrow y = -\frac{5}{2}$.

Assim, o ponto é $\left(-\frac{1}{3}, -\frac{5}{2}\right)$.

58. $kx - 5y + 4 = 0 \Rightarrow k \cdot 7 - 5 \cdot 5 + 4 = 0 \Rightarrow k = 3$
Portanto, $k = 3$.

59. Para resolver essa tarefa, note que a função associada a essa reta é decrescente, pois $y = -x + 3$ e seu gráfico passa pelo ponto de coordenadas $(0, 3)$. Portanto, a alternativa **B** é a correta.

60. a) $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2 & 24 & 1 \\ 5 & 60 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 24x + 5y + 120 - 120 - 2y - 60x = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3(-12x + y) = 0$

A equação geral da reta é $-12x + y = 0$.

b) Para $x = 9$ e $y = 110$, temos:

$-12x + y \Rightarrow -12 \cdot 9 + 110 = 2 \neq 0$.

O ponto $C(9, 110)$ não pertence à reta r.

c) $x = 8 \Rightarrow -12 \cdot 8 + y = 0 \Rightarrow y = 96$

d) $y = 156 \Rightarrow -12x + 156 = 0 \Rightarrow x = 13$

Síntese do capítulo (página 247)

4.
- $m > 0$
- $m < 0$
- $m = 0$
- O ponto P não pertence ao eixo y para qualquer valor real de m.

5. Uma reta é dita orientada quando sobre ela referenciamos um sentido de percurso, chamado positivo. O sentido inverso ao positivo é chamado negativo.

6. Sugestão de resposta: Por meio da fórmula:

$$CD = \sqrt{(x_C - x_D)^2 + (y_C - y_D)^2}$$

7. É o ponto que separa o segmento de reta em duas partes com comprimentos iguais.

8. Os postes A e B serão instalados de forma que a distância entre os postes sejam as mesmas. Logo: $MA = AB = BN$.
O ponto médio de $\overline{MB}$ é A e o ponto médio de $\overline{AN}$ é B, assim:

$$A = \left(\frac{x_B - 5}{2}, \frac{y_B + 8}{2}\right)$$

$$B = \left(\frac{7 + x_A}{2}, \frac{2 + y_A}{2}\right)$$

Que formam o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \frac{x_B - 5}{2} = x_A \\ \frac{y_B + 8}{2} = y_A \\ \frac{7 + x_A}{2} = x_B \\ \frac{2 + y_A}{2} = y_B \end{cases} \Rightarrow A(-1, 6) \text{ e } B(3, 4)$$

9. O baricentro corresponde ao ponto em que se cruzam as três medianas de um triângulo. Esse ponto representa o centro de equilíbrio de um triângulo.

10. O circuncentro corresponde ao centro de uma circunferência que passa pelos vértices de um triângulo.

11. Sugestão de resposta: Na computação gráfica e na construção civil.

12. Podemos escrever na forma $ax + by + c = 0$, em que a, b e c são os coeficientes, sendo a e b não nulos simultaneamente.

CAPÍTULO 7 TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS

Abertura do capítulo

2. De maneira sucessiva, divide-se cada quadrado em nove quadrados congruentes e remove-se o quadrado central.

3. Cada face do Cubo de Sierpiński é semelhante a um Tapete de Sierpiński.

Questões

C. Sim, pois a figura $A'B'C'D'$ é a imagem da figura $ABCD$ por reflexão em torno de r e a transformação de reflexão é isométrica.

D. Sim, pois a figura $A'B'C'$ é a imagem da figura ABC por rotação de centro X e a transformação de rotação é isométrica.

E. Sim, pois a figura $A'B'C'$ é a imagem da figura ABC por translação associada ao vetor u e a transformação de translação é isométrica.

Exercícios e problemas

1. A alternativa **A** é a correta, pois nela cada ponto da figura $A'B'C'D'$ tem um ponto correspondente em $ABCD$, tal que esses pontos correspondentes são simétricos em relação a r.

2. a) $A(-3, 1)$, $B(-3, 3)$, $C(-1, 2)$, $D(-2, 5)$, $E(-5, 4)$ e $F(-5, 2)$.

b)
- $A''(-3, -1)$, $B''(-3, -3)$, $C''(-1, -2)$, $D''(-2, -5)$, $E''(-5, -4)$ e $F''(-5, -2)$.
- $A'(3, 1)$, $B'(3, 3)$, $C'(1, 2)$, $D'(2, 5)$, $E'(5, 4)$ e $F'(5, 2)$.

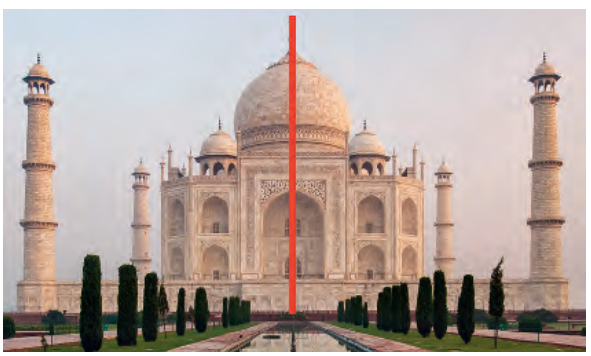
3. A alternativa **B** é a correta.

5. Inicialmente, trace as retas r e s. Em seguida, marque os pontos X e Y sobre a reta r. Depois, construa uma circunferência de centro X e uma de centro Y, de maneira que elas se intersectem. Os pontos de interseção dessas circunferências são A e B. Agora, marque os pontos W e Z sobre a reta s. Construa uma circunferência de centro em W e raio WA e uma circunferência de centro em Z e raio ZA. Essas circunferências se intersectam em dois pontos: um deles é o A, e o outro, C.

6. b) Sim. A reta r é vertical, passando pelo centro da imagem.

7. Sim. É possível identificar transformação de reflexão na fachada desse monumento em relação à reta vermelha apresentada a seguir.

MICHAEL MELFORD/DESIGN PICS EDITORIAL/UNIVERSAL IMAGES GROUP/GETTY IMAGES



Vista da fachada do Taj Mahal, em Agra, na Índia, em 2022.

8. As coordenadas dos vértices da imagem de $ABCD$ por rotação de 90° em torno do ponto $(0, 0)$ no sentido anti-horário são $A'(-1, 1)$, $B'(-2, 4)$, $C'(-4, 4)$ e $D'(-5, 2)$. Portanto, a alternativa **B** é a correta.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

9. a) $A(-1, 3)$, $B(0, 1)$, $C(4, 2)$, $D(3, 4)$ e $E(0, 4)$.

b) Seja $O = (0, 0)$. Inicialmente, obtemos os pontos A', B', C', D' e E', tais que:

- $AO = A'O$ e $A\hat{O}A' = 180°$;
- $BO = B'O$ e $B\hat{O}B' = 180°$;
- $CO = C'O$ e $C\hat{O}C' = 180°$;
- $DO = D'O$ e $D\hat{O}D' = 180°$;
- $EO = E'O$ e $E\hat{O}E' = 180°$.

Nesse caso, temos: $A'(1, -3)$, $B'(0, -1)$, $C'(-4, -2)$, $D'(-3, -4)$ e $E'(0, -4)$.

c) A imagem referente a esse item está apresentada na seção **Respostas**, no final da reprodução do **Livro do Estudante** deste volume.

10. a) Transformação de reflexão e de rotação.

b) Sim. Na figura **A**.

11. Não. Aplicando transformações sobre a figura apresentada, é necessário utilizar, além da transformação de rotação, a transformação de reflexão.

12. A imagem referente a esse item está apresentada na seção **Respostas**, no final da reprodução do **Livro do Estudante** deste volume.

13. A alternativa **A** é a correta, pois nela temos:

$$AA' = BB' == CC' = DD' = EE' = u$$

Além disso, na figura **B** temos:

$$AA' = BB' = CC' = DD' = EE' \neq u$$

14. Seja x o comprimento do vetor associado à translação e $O = (0, 0)$. Assim:

$$x^2 = (AO)^2 + (OA')^2 \Rightarrow x^2 = 4^2 + 3^2 \Rightarrow x = 5$$

Portanto, o comprimento do vetor associado à transformação é 5 u.c.

15. Para construir a imagem de ABC por T_v, inicialmente, determinamos o comprimento do vetor v, que nesse caso é 2. Com isso, construímos $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$, tal que:

$$AA' = BB' = CC' = 2 \text{ u.c.}$$

Por fim, traçamos $\overline{A'B'}$, $\overline{B'C'}$ e $\overline{A'C'}$ e obtemos o triângulo $A'B'C'$.

A imagem referente a esse item está apresentada na seção **Respostas**, no final da reprodução do **Livro do Estudante** deste volume.

16. Aplicando ao polígono $ABCDE$ a reflexão em torno do eixo y, obtemos o polígono $A_1B_1C_1D_1E_1$, tal que $A_1(0, 4)$, $B_1(2, 2)$, $C_1(1, 1)$, $D(-1, 2)$ e $E_1(-2, 2)$. Agora, aplicando a $A_1B_1C_1D_1E_1$ uma translação associada ao vetor v, obtemos o polígono $A'B'C'D'E'$, tal que $A'(0, -1)$, $B'(2, -3)$, $C'(1, -6)$, $D'(-1, -3)$ e $E'(-2, -3)$.

17. A imagem referente a esse item está apresentada na seção **Respostas**, no final da reprodução do **Livro do Estudante** deste volume.

18. a) É possível identificar transformações de reflexão, rotação e translação.

19. a) Uma possibilidade é aplicar uma rotação de 180° em torno do ponto B – após aplicarmos essa transformação, obtemos o polígono $A_1B_1C_1D_1$, tal que $A_1(5, -3)$, $B_1(3, -1)$, $C_1(1, -6)$ e $D_1(5, -5)$ – seguida de uma reflexão em torno do eixo x. O resultado é o polígono $A'B'C'D'$.

A representação do polígono $A'B'C'D'$ está apresentada na seção **Respostas**, no final da reprodução do **Livro do Estudante** deste volume.

b) Outra possibilidade para obter o polígono $A'B'C'D'$ é aplicar sobre $ABCD$ uma reflexão em torno do eixo y seguida de uma translação associada ao vetor $v = \overrightarrow{XY}$, tal que $X = (-3, -1)$ e $Y = (3, 1)$.

20. a) Transformação de rotação, transformação de translação e transformação de reflexão seguida de translação.

21. A construção do triângulo ABC deve ser realizada aplicando procedimentos semelhantes aos apresentados na tarefa resolvida **R2** da página **264**.

O triângulo e sua ampliação, referentes à construção solicitada nessa tarefa, estão apresentados na seção **Respostas**, no final da reprodução do **Livro do Estudante** deste volume.

22. a) Sim. Sugestões de resposta: Homotetia, rotação, translação e reflexão.

b) Sim. Para construir a figura **1a** é possível aplicar, por exemplo, uma homotetia seguida de uma reflexão. Já no caso da figura **1b**, é possível, por exemplo, aplicar uma rotação.

Acessando tecnologias (páginas 257 a 259)

1. Inicialmente, construa com a ferramenta **Segmento com Comprimento Fixo** um segmento de reta com 5 unidades de comprimento e, em seguida, com a ferramenta **Polígono Regular**, construa o pentágono de lado 5. Por fim, para construir a imagem solicitada, selecione a ferramenta **Reflexão em Relação a uma Reta** e clique sobre o pentágono e sobre o eixo x, nessa ordem.

A imagem referente a essa tarefa está apresentada na seção **Respostas**, no final da reprodução do **Livro do Estudante** deste volume.

2. Inicialmente, marque o ponto A. Para isso, digite $A = (1, 4)$ no campo **Entrada...**. Analogamente, marque os pontos B, C, D, E e F. Em seguida, construa o quadrado $ABCD$ usando a ferramenta **Polígono**. Na sequência, construa a reta r usando a ferramenta **Reta**. Para isso, após selecionar a ferramenta, clique sobre os pontos E e F. Por fim, construa a imagem solicitada, selecionando a ferramenta **Reflexão em Relação a uma Reta** e clicando sobre o quadrado e sobre a reta r, nessa ordem.

A imagem referente a essa tarefa está apresentada na seção **Respostas**, no final da reprodução do **Livro do Estudante** deste volume.

3. Inicialmente, construa o hexágono regular usando a ferramenta **Polígono Regular** e o ponto X usando a ferramenta **Ponto**. Para obter a imagem desse hexágono por rotação de centro X e ângulo de:

- 30° no sentido anti-horário, selecione a ferramenta **Rotação em Torno de um Ponto** e clique sobre o hexágono e o ponto X, nessa ordem. Em seguida, na janela **Rotação em Torno de um Ponto**, defina o ângulo como 30° e mantenha o sentido da rotação como anti-horário.
- 60° no sentido horário, selecione a ferramenta **Rotação em Torno de um Ponto** e clique sobre o hexágono e o ponto X, nessa ordem. Em seguida, na janela **Rotação em Torno de um Ponto**, defina o ângulo como 60° e altere o sentido da rotação para horário.
- 270° no sentido anti-horário, selecione a ferramenta **Rotação em Torno de um Ponto** e clique sobre o hexágono e o ponto X, nessa ordem. Em seguida, na janela **Rotação em Torno de um Ponto**, defina o ângulo como 270° e mantenha o sentido da rotação como anti-horário.

As imagens referentes a essa tarefa estão apresentadas na seção **Respostas**, no final da reprodução do **Livro do Estudante** deste volume.

4. Inicialmente, marque o ponto X. Para isso, digite $X = (1, 2)$ no campo **Entrada...**. Analogamente, marque os pontos A,

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

B e *C*. Depois, selecione a ferramenta **Rotação em Torno de um Ponto** e clique sobre o triângulo e sobre o ponto *X*, nessa ordem. Por fim, na janela **Rotação em Torno de um Ponto**, defina o ângulo como sendo 72° e altere o sentido da rotação para horário.

A imagem referente a essa tarefa está apresentada na seção **Respostas**, no final da reprodução do **Livro do Estudante** deste volume.

5. a) $(9, 2)$

b) $A(3, 3)$ e $B(7, 4)$; $C(2, 0)$ e $D(7, 0)$

c) Note que $XB = XD$. Usando a ferramenta **Rotação em Torno de um Ponto**, construa o ponto *E*, de maneira que ele seja a imagem de *X* por rotação de 90° em torno do centro *B* no sentido horário. O ponto obtido será $E(5, 2)$.

O quadrado construído, referente a esse item, está apresentado na seção **Respostas**, no final da reprodução do **Livro do Estudante** deste volume.

Nesse caso, $Y = B$ e $Z = D$.

6. Inicialmente, construa com a ferramenta **Segmento com Comprimento Fixo** um segmento de reta com 3 unidades de comprimento e, em seguida, com a ferramenta **Polígono Regular**, construa o pentágono de lado 3. Marque os pontos $O(5, 0)$ e $P(2, -2)$ e, depois, com a ferramenta **Vetor**, construa o vetor *v*. Por fim, selecione a ferramenta **Translação por um Vetor** e clique sobre o pentágono e sobre o vetor, nessa ordem.

A imagem referente a essa tarefa está apresentada na seção **Respostas**, no final da reprodução do **Livro do Estudante** deste volume.

7. São quatro possibilidades de vetores: 1ª) $u = \overrightarrow{OU}$, tal que $O(0, 0)$ e $U(-5, 1)$; 2ª) $w = \overrightarrow{OW}$, tal que $O(0, 0)$ e $W(-6, -6)$; 3ª) $v = \overrightarrow{OV}$, tal que $O(0, 0)$ e $V(-7, -2)$; e 4ª) $t = \overrightarrow{OT}$, tal que $O(0, 0)$ e $T(-2, -4)$. Para realizar a construção, inicialmente, marque o ponto *A*. Para isso, digite $A = (2, 0)$ no campo **Entrada...**. Analogamente, marque os pontos *B*, *C* e *D*. Em seguida, com a ferramenta **Vetor**, construa um entre os possíveis vetores. Por fim, selecione a ferramenta **Translação por um Vetor** e clique sobre o polígono e sobre o vetor, nessa ordem.

As imagens referentes às possibilidades indicadas estão apresentadas na seção **Respostas**, no final da reprodução do **Livro do Estudante** deste volume.

8. Uma possibilidade é aplicar T_u, tal que $u = \overrightarrow{XD}$, sobre o ponto *Y* e sobre o ponto *X*. Nesse caso, a imagem de *Y* é $W = F$ e a imagem de *X* é $Z = D$. Para realizar a construção no *software*, selecione a ferramenta **Vetor** e, em seguida, clique sobre os pontos *X* e *D*, nessa ordem. Depois, selecione a ferramenta **Transformação por um Vetor** e clique sobre o ponto *Y* e sobre o vetor $\overrightarrow{XD}$, nessa ordem. Por fim, usando a ferramenta **Polígono**, clique sobre os pontos *X*, *D*, *F*, *Y* e *X*, nessa ordem.

A imagem referente a essa tarefa está apresentada na seção **Respostas**, no final da reprodução do **Livro do Estudante** deste volume.

Trabalho e juventudes (página 262)

1. Os artistas plásticos criam obras de arte de autoria própria, como telas e esculturas. Também trabalham com a criação de desenhos artísticos para empresas de comunicação visual, atuam em escolas e universidades e se dedicam à restauração de peças e a pinturas e desenhos de arte urbana.

Acessando tecnologias (página 266)

1. Inicialmente, marque o ponto *A*. Para isso, digite $A = (2, 3)$ no campo **Entrada...**. Em seguida, usando a ferramenta **Segmento com Comprimento Fixo**, construa um segmento de reta com 5 unidades de comprimento. Depois, usando a ferramenta **Polígono Regular**, construa o quadrado *ABCD* de lado 5. Finalmente, selecione a ferramenta **Homotetia** e clique sobre o quadrado e sobre o ponto *A* (nesse caso, usamos *A* como o centro da homotetia). Para construir a:

- ampliação, digite 2 na janela **Homotetia**.
- redução, digite $\frac{1}{4}$ na janela **Homotetia**.

As imagens solicitadas, referentes a essa tarefa, estão apresentadas na seção **Respostas**, no final da reprodução do **Livro do Estudante** deste volume.

2. Inicialmente, marque o ponto *A*. Para isso, digite $A = (1, 1)$ no campo **Entrada...**. Em seguida, com a ferramenta **Segmento com Comprimento Fixo**, construa um segmento de reta com 3 unidades de comprimento. Depois, com a ferramenta **Polígono Regular**, construa o hexágono de lado 3. Selecione a ferramenta **Homotetia**, clique sobre o hexágono e sobre o ponto *A* e, por fim, digite −2 na janela **Homotetia**.

As imagens solicitadas, referentes a essa tarefa, estão apresentadas na seção **Respostas**, no final da reprodução do **Livro do Estudante** deste volume.

3. Sugestão de resposta: Use os pontos apresentados na dica para construir o polígono *ABCDEF*. Em seguida, obtenha a reflexão desse polígono em torno da reta $\overrightarrow{AD}$. Faça três rotações da figura obtida até o momento em torno do ponto *A*. Essas rotações devem ser, respectivamente, 90°, 180° e 270° no sentido anti-horário. Por fim, selecione a figura toda e aplique uma homotetia de razão 0,3 e centro *A*.

A representação da construção referente a essa tarefa está apresentada na seção **Respostas**, no final da reprodução do **Livro do Estudante** deste volume.

Síntese do capítulo (página 267)

3. Sugestão de resposta: Obras de arte e fachadas de prédios.

4. a) Verdadeira.

b) Falsa. Sugestão de correção: No plano, uma rotação de centro *A* e ângulo α é uma transformação geométrica que a cada ponto *X* faz corresponder um ponto *X'* tal que $AX = AX'$ e $X\hat{A}X' = \alpha$.

c) Falsa. Sugestão de correção: Um vetor é um segmento de reta orientado que tem comprimento, direção e sentido.

5. Sugestão de resposta: Marque o ponto *X* e, com auxílio da régua, trace a reta *r*. Em seguida, marque dois pontos quaisquer *A* e *B* sobre a reta *r*. Com o compasso, construa uma circunferência de centro *A* passando por *X* e uma segunda circunferência de centro *B* passando por *X*. O ponto em que essas circunferências se intersectam, além de *X*, é o simétrico do ponto *X* em relação à reta *r*.

6. Uma possibilidade é, inicialmente, determinar o comprimento *c* do vetor e, em seguida, construir os segmentos $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$ e $\overline{DD'}$, tais que $AA' = BB' = CC' = DD' = c$. Por fim, trace os segmentos $\overline{A'B'}$, $\overline{B'C'}$, $\overline{C'D'}$ e $\overline{A'D'}$.

7. Sim, os polígonos apresentados são congruentes, pois é possível traçar uma reta *r* vertical de tal maneira que o polígono *OPQRSTU* seja imagem do polígono *CDEFGHI* por reflexão em torno da reta *r*.

8. $\frac{FJ}{AE} = \frac{11}{5} = 2{,}2$

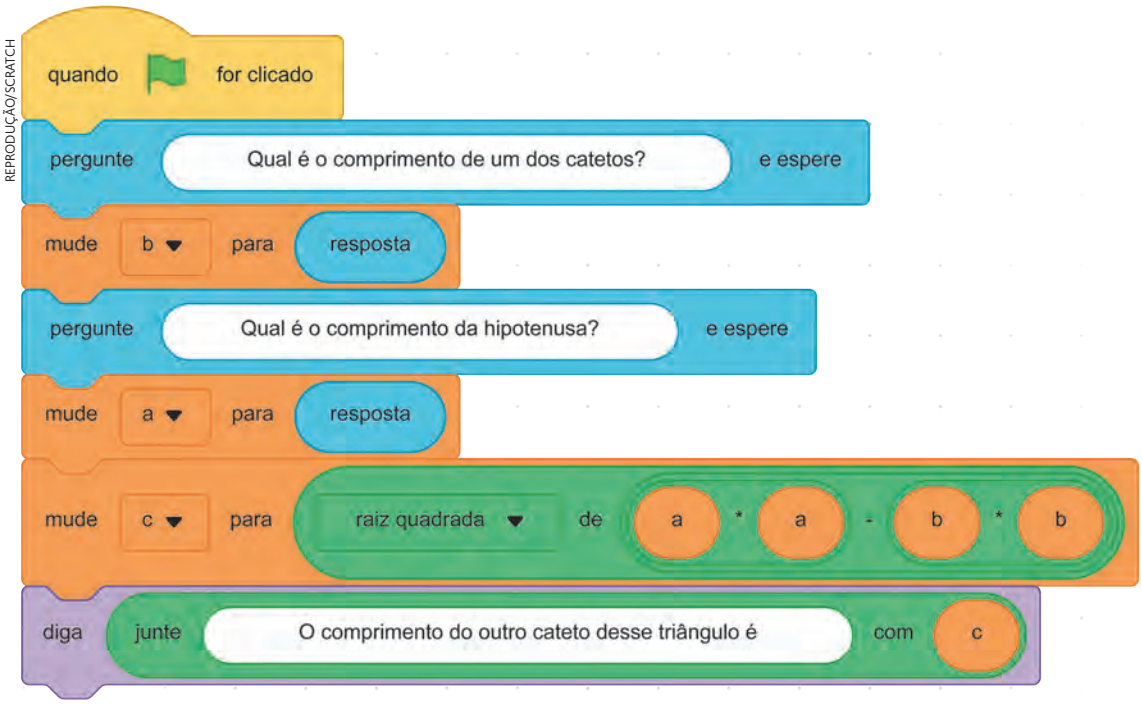
Portanto, a razão de proporcionalidade é 2,2.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Resoluções referentes ao capítulo **1** – **Acessando tecnologias (páginas 35 e 36)**

2. Sugestão de resposta:

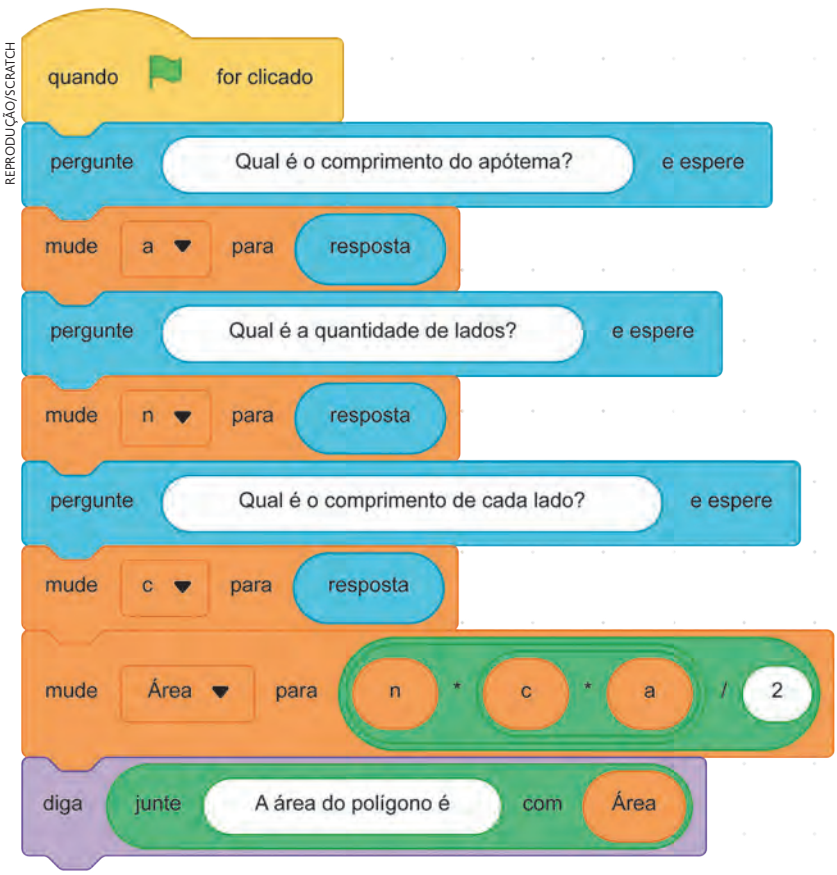
REPRODUÇÃO/SCRATCH



Resoluções referentes ao capítulo **4** – **Acessando tecnologias (página 146)**

4. Sugestão de um possível algoritmo para resolver o problema proposto:

REPRODUÇÃO/SCRATCH



Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Resoluções referentes ao capítulo **5**.

19. $X = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -7 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & -8 \\ 0 & 3 \\ 10 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 3 & -1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 13 \\ 2 & -9 \\ -15 & 3 \end{bmatrix}$

$Y = \begin{bmatrix} -2 & 4 & -1 \\ 1 & 0{,}5 & 3{,}4 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & -4 & 0 \\ -1 & 2{,}5 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 4 & -7 \\ 10 & 7 & 3 \\ 2 & 3{,}5 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 12 & -8 \\ 12 & 5 & 2{,}4 \\ 0 & 5{,}5 & -3 \end{bmatrix}$

21. a) $T = \underbrace{\begin{bmatrix} 15 & 25 & 22 & 19 \\ 23 & 16 & 18 & 21 \end{bmatrix}}_{J} + \underbrace{\begin{bmatrix} 18 & 24 & 22 & 25 \\ 20 & 21 & 19 & 23 \end{bmatrix}}_{F} + \underbrace{\begin{bmatrix} 22 & 25 & 20 & 23 \\ 22 & 20 & 26 & 19 \end{bmatrix}}_{M} = \begin{bmatrix} 55 & 74 & 64 & 67 \\ 65 & 57 & 63 & 63 \end{bmatrix}$

31. b) $B = \begin{bmatrix} (-1)\cdot 1 + 5\cdot 0 + (-2)\cdot 0 & (-1)\cdot 2 + 5\cdot 2 + (-2)\cdot 0 & (-1)\cdot 1 + 5\cdot 0 + (-2)\cdot 1 \\ 0\cdot 1 + 6\cdot 0 + 4\cdot 0 & 0\cdot 2 + 6\cdot 2 + 4\cdot 0 & 0\cdot 1 + 6\cdot 0 + 4\cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 8 & -3 \\ 0 & 12 & 4 \end{bmatrix}$

c) $C = \begin{bmatrix} 1\cdot(-1) + (-2)\cdot 2 + 0\cdot 0 & 1\cdot 2 + (-2)\cdot(-3) + 0\cdot(-9) & 1\cdot 0 + (-2)\cdot(-9) + 0\cdot(-1) \\ (-2)\cdot(-1) + 3\cdot 2 + 9\cdot 0 & (-2)\cdot 2 + 3\cdot(-3) + 9\cdot(-9) & (-2)\cdot 0 + 3\cdot(-9) + 9\cdot(-1) \\ 0\cdot(-1) + 9\cdot 2 + 1\cdot 0 & 0\cdot 2 + 9\cdot(-3) + 1\cdot(-9) & 0\cdot 0 + 9\cdot(-9) + 1\cdot(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 8 & 18 \\ 8 & -94 & -36 \\ 18 & -36 & -82 \end{bmatrix}$

h) $H = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 2 \\ 3 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5\cdot 2 + 0\cdot 1 & 5\cdot 1 + 0\cdot 2 \\ 2\cdot 2 + 2\cdot 1 & 2\cdot 1 + 2\cdot 2 \\ 3\cdot 2 + (-1)\cdot 1 & 3\cdot 1 + (-1)\cdot 2 \\ (-1)\cdot 2 + 0\cdot 1 & (-1)\cdot 1 + 0\cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 5 \\ 6 & 6 \\ 5 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$

55. Sugestão de resposta: Para obter a matriz B, vamos adicionar à segunda linha da matriz A a primeira linha multiplicada por 3.

$$\begin{matrix} \cdot 3 \\ \oplus \end{matrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -3 & 1 & 4 \\ 0 & 6 & 8 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -5 & 7 \\ 0 & 6 & 8 \end{bmatrix}$$

Nesse caso, $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -5 & 7 \\ 0 & 6 & 8 \end{bmatrix}$. Portanto, pelo Teorema de Jacobi, $\det A = \det B$.

56. b)

$$\begin{matrix} \oplus \\ \cdot(-1) \end{matrix}\begin{bmatrix} 7 & 1 & 3 \\ 6 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \oplus \\ \cdot(-3) \end{matrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \cdot(-2) \\ \oplus \end{matrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS COMENTADAS

BRACKMANN, Christian Puhlmann. *Desenvolvimento do pensamento computacional através de atividades desplugadas na educação básica*. 2017. 226 f. Tese (Doutorado em Informática na Educação) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Centro de Estudos Interdisciplinares em Novas Tecnologias na Educação, Programa de Pós-Graduação em Informática na Educação, Porto Alegre, 2017. Disponível em: https://lume.ufrgs.br/handle/10183/172208. Acesso em: 3 set. 2024.

Trabalho que busca verificar a possibilidade do desenvolvimento do pensamento computacional na Educação Básica por meio de atividades exclusivamente desplugadas, ou seja, sem o uso de aparatos eletrônicos.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. *Base Nacional Comum Curricular*. Versão final. Brasília: MEC, 2018a. Disponível em: https://www.gov.br/mec/pt-br/escola-em-tempo-integral/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal.pdf. Acesso em: 3 set. 2024.

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é o documento que norteia os currículos dos sistemas e das redes de ensino das Unidades Federativas e as propostas pedagógicas das escolas públicas e privadas, estabelecendo os principais conhecimentos, competências e habilidades que os estudantes devem desenvolver em cada etapa da Educação Básica.

BRASIL. Ministério da Educação. Conselho Nacional de ducação. Câmara de Educação Básica. Resolução nº 3, de 21 de novembro de 2018. Atualiza as Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio. *Diário Oficial da União*, Brasília, DF, 22 nov. 2018b. Disponível em: https://web.archive.org/web/20231025202209/http://portal.mec.gov.br/docman/novembro-2018-pdf/102481-rceb003-18/file. Acesso em: 3 set. 2024.

Essa resolução atualiza as Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio, publicadas em 2012.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. *Formação de professores do ensino médio, etapa I – caderno II*: o jovem como sujeito do ensino médio. Organização: Paulo Carrano, Juarez Dayrell. Curitiba: UFPR/Setor de Educação, 2013.

Nessa obra, voltada à formação de professores, são discutidos diversos temas relacionados ao Ensino Médio. Em um primeiro momento, discute-se o conceito de juventude com o objetivo de propor mudanças nas maneiras de conceber essa faixa etária. Esses textos buscam valorizar o papel do jovem como sujeito de sua história. Em seguida, os textos destacam temas como juventude e tecnologia, questão do mundo do trabalho e projeto de vida, além do papel da escola no processo de formação dos jovens.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. *Temas contemporâneos transversais na BNCC*: contexto histórico e pressupostos pedagógicos. Brasília: MEC/SEB, 2019. Disponível em: https://www.gov.br/mec/pt-br/escola-em-tempo-integral/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal.pdf. Acesso em: 10 set. 2024.

Esse documento apresenta o histórico dos temas contemporâneos transversais, sua divisão em seis grandes áreas e a importância desses temas para os currículos da Educação Básica.

BRASIL. Ministério da Saúde. Secretaria de Atenção à Saúde. Departamento de Ações Programáticas e Estratégicas. *Proteger e cuidar da saúde de adolescentes na atenção básica*. 2. ed. Brasília, 2018c. Disponível em: https://bvsms.saude.gov.br/bvs/publicacoes/proteger_cuidar_adolescentes_atencao_basica_2ed.pdf. Acesso em: 5 out. 2024.

Esse documento do Ministério da Saúde foi elaborado para auxiliar as Equipes de Atenção Básica/Saúde da Família no trabalho com adolescentes, propondo o cuidado com a saúde, a adoção de hábitos saudáveis e a atenção aos principais aspectos clínicos.

CENTRO DE INOVAÇÃO PARA A EDUCAÇÃO BRASILEIRA (CIEB). *Currículo de referência em tecnologia e computação*. out. 2018. Disponível em: https://curriculo.cieb.net.br/. Acesso em: 10 set. 2024.

O objetivo desse currículo é oferecer diretrizes e orientações que visam apoiar as escolas a incluir em suas propostas curriculares os temas tecnologia e computação, potencializando o uso da tecnologia na aprendizagem.

D'AMBROSIO, Ubiratan. *Etnomatemática*: elo entre as tradições e a modernidade. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2007.

O autor propicia uma análise do papel da Matemática na cultura ocidental e da noção de que a Matemática é apenas uma forma de Etnomatemática.

DAYRELL, Juarez (org.). *Por uma pedagogia das juventudes*: experiências educativas do Observatório da Juventude da UFMG. Belo Horizonte: Mazza Edições, 2016.

Juarez Dayrell é um pesquisador que investiga questões sobre a juventude e a educação, analisando a importância das culturas juvenis na construção de um cenário educativo mais democrático e significativo. Nessa obra, ele traz algumas experiências vivenciadas no projeto Observatório da Juventude, da Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG), que trabalha desde 2003 com a formação de professores e discussões envolvendo a juventude.

FIORIN, José Luiz. *Argumentação*. São Paulo: Contexto, 2015.

Esse livro é fundamental para quem busca compreender os mecanismos da argumentação e aprimorar suas habilidades de comunicação. O autor, um dos maiores especialistas em Linguística no Brasil, oferece uma análise profunda e abrangente do processo argumentativo, desde a construção de argumentos até a identificação de falácias.

GOMES, Erika Cirqueira; GOMES, Evandro Ferreira. O papel dos influenciadores digitais no relacionamento entre marcas e *millennials* na era pós-digital. *In*: XIX CONGRESSO DE CIÊNCIAS DA COMUNICAÇÃO NA REGIÃO NORDESTE, 2017, Fortaleza. *Anais*... Fortaleza, 2017. p. 8-9. Disponível em: https://portalintercom.org.br/anais/nordeste2017/resumos/R57-0751-1.pdf. Acesso em: 4 out. 2024.

Esse artigo visa conhecer os hábitos e comportamentos dos *millennials*, os nascidos entre 1982 e 1994, também chamados de nativos digitais, e compreender o papel que as redes de influência exercem nas decisões de compra dessa geração.

ILLERIS, Knud (org.). *Teorias contemporâneas da aprendizagem*. Porto Alegre: Penso, 2013.

Nessa obra, o pesquisador Knud Illeris reúne diferentes autores e teorias da aprendizagem que têm sido desenvolvidas na contemporaneidade e apresenta um conjunto de textos que tratam sobre o tema, buscando caminhos na compreensão sobre o conceito de educar e sobre como funciona o complexo processo de ensino e aprendizagem na atualidade.

LIBÂNEO, José Carlos. *Didática*. São Paulo: Cortez, 2013.

Esse livro aborda a prática educativa e o papel do professor nos processos de ensino e de aprendizagem. Libâneo enfatiza a necessidade de uma abordagem pedagógica crítica e reflexiva, e discute métodos e estratégias de ensino que visam ao desenvolvimento integral do estudante, integrando teoria e prática de forma a preparar cidadãos críticos e participativos.

LINHARES, Fernando R. da C. *O objetivo das visitas escolares a um observatório astronômico na visão dos professores*. 2011. 239 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte.

Nesse trabalho de dissertação de mestrado, foram abordadas questões relevantes que ainda não foram exploradas por pesquisadores da área da Educação em Astronomia, indicando melhorias para o ensino desse campo em observatórios astronômicos e outros espaços não formais, com a finalidade de popularizar a utilização desses espaços por parte dos professores e pedagogos, ampliando e enriquecendo o potencial educativo.

LOPES, Lidiane Schimitz; FERREIRA, André Luis Andrejew. Um olhar sobre a história nas aulas de matemática. *Abakós*, Belo Horizonte, v. 2, n. 1, p. 75-88, nov. 2013.

Nesse livro, os autores defendem o uso da História da Matemática como metodologia em sala de aula, realizando uma abordagem histórica dos conteúdos como meio de facilitar o entendimento da Matemática.

MIGUEL, Antônio; MIORIM, Maria Ângela. *História na Educação matemática*: propostas e desafios. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2008.

Nesse livro, os autores abordam a História da Matemática e a História da Educação Matemática, estabelecendo uma relação entre essas duas áreas e o modo pelo qual elas podem se relacionar com a Educação Matemática.

MORAN, José. Metodologias ativas para uma aprendizagem mais profunda. *In*: BACICH, Lilian; MORAN, José (org.). *Metodologias ativas para uma educação inovadora*: uma abordagem teórico-prática. Porto Alegre: Penso, 2018. p. 2-25.

Esse artigo apresenta práticas pedagógicas baseadas em metodologias ativas que valorizam o protagonismo dos estudantes.

ONUCHIC, Lourdes de La Rosa; ALLEVATO, Norma Suely Gomes. Pesquisa em resolução de problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. *Bolema*, Rio Claro, Unesp, ano 2011, v. 25, n. 41, p. 73-98, dez. 2011.

Esse trabalho apresenta o conhecimento acumulado sobre a Resolução de problemas na Educação Matemática, baseado nas pesquisas realizadas nos últimos anos pelo Grupo de Trabalho e Estudos em Resolução de Problemas, da Unesp de Rio Claro (SP).

POLYA, George. *A arte de resolver problemas*. Rio de Janeiro: Interciência, 1995.

Esse trabalho tece comentários a respeito das maneiras de resolver um problema, no qual o processo de solução é mais importante do que a própria solução em si.

PONTE, João Pedro da; BROCARDO, Joana; OLIVEIRA, Hélia. *Investigações matemáticas na sala de aula*. Belo Horizonte: Autêntica, 2016.

Nessa obra, os autores apresentam os possíveis modos de introduzir em sala de aula as práticas de investigação desenvolvidas por matemáticos, apontando as vantagens e desvantagens no trabalho com essa perspectiva. Também são analisados os papéis dos estudantes e professores em sala de aula ao lidar com problemas relacionados às áreas de Geometria,Estatística e Aritmética.

REIS, Ana Valéria Sampaio de Almeida; DAROS, Thuinie; TOMELIN, Karina Nones. *Layouts criativos para aulas inovadoras*. Maringá: B42, 2023.

Esse livro orienta educadores que desejam transformar o ambiente da sala de aula e implementar estratégias de ensino dinâmicas. As autoras propõem uma série de *layouts* para favorecer abordagens pedagógicas diversas. O objetivo é promover práticas de inovação, inspiração e cocriação entre professores e estudantes, incentivando os educadores a se tornar designers do ambiente educacional.

SOUZA, Maria Helena. *21 teoremas matemáticos que revolucionaram o mundo*. São Paulo: Planeta do Brasil, 2018.

Esse livro traz algumas curiosidades sobre a história dos teoremas, desde o início das necessidades humanas às relações estabelecidas com outras áreas de conhecimento. Trata-se de um passeio surpreendente, que traz curiosidades como o Teorema dos fractais e a possibilidade de medir distâncias a pontos inalcançáveis, como no Teorema de Tales.

STECANELA, Nilda. *Ler e escrever na EJA*: práticas interdisciplinares. Caderno de EJA. Caxias do Sul: Educs, 2013.

Esse livro oferece uma análise detalhada sobre a importância da interdisciplinaridade no processo de ensino e aprendizagem para a Educação de Jovens e Adultos (EJA). A autora explora como a integração entre diferentes disciplinas pode enriquecer as práticas pedagógicas, promovendo uma abordagem mais contextualizada e dinâmica.

VIOLÊNCIA escolar e *bullying*: relatório sobre a situação mundial. Brasília: Unesco, 2019.

Relatório que busca fornecer dados atualizados sobre a violência escolar e o *bullying*, destacando sua natureza, sua abrangência e seus impactos, assim como apresentar iniciativas para enfrentar esses problemas.

WING, Jeannette. Pensamento computacional: um conjunto de atitudes e habilidades que todos, não só cientistas da computação, ficaram ansiosos para aprender e usar. Tradução: Cleverson Sebastião dos Anjos. *Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia*, Ponta Grossa, v. 9, n. 2, p. 1-10, maio/ago. 2016. Disponível em: https://periodicos.utfpr.edu.br/rbect/article/download/4711/pdf. Acesso em: 3 set. 2024.

Esse artigo traz uma discussão a respeito do pensamento computacional, enfatizando sua importância como habilidade analítica que deve ser desenvolvida nos estudantes do Ensino Básico, auxiliando na resolução de quaisquer tipos de problemas.

ZIMER, Tania Teresinha Bruns. *Aprendendo a ensinar matemática nas séries iniciais do ensino fundamental*. 2008. 299 f. Tese (Doutorado em Educação) — Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2008. Disponível em: https://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/48/48134/tde-24062008-162627/publico/TeseTaniaBrunsZimer.pdf. Acesso em: 10 set. 2024.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS COMPLEMENTARES COMENTADAS

Nesta seção, apresentamos sugestões de livros, revistas, artigos, *podcasts*, filmes e *sites* que podem ser consultados com o objetivo de complementar os conteúdos tratados neste volume, bem como obter subsídio teórico-metodológico para o trabalho em sala de aula.

A medida de todas as coisas: a odisseia de sete anos e o erro encoberto que transformaram o mundo
ALDER, Ken. *A medida de todas as coisas*: a odisseia de sete anos e o erro encoberto que transformaram o mundo. Rio de Janeiro: Objetiva, 2003.

Nesse livro, o autor relata as expedições, que duraram sete anos, de Pierre François André Méchain e Jean Baptiste Joseph Delambre, que, com o intuito de medir o planeta e estabelecer um padrão comum de medida, seguiram em direções opostas. Nesse contexto, foi definida uma nova medida, o metro, sendo a décima milionésima parte da distância entre o Polo Norte e a linha do equador.

CAEM - Centro de Aperfeiçoamento do Ensino de Matemática João Affonso Pascarelli
Disponível em: https://www.ime.usp.br/caem/acervo.php. Acesso em: 10 set. 2024.

O Centro de Aperfeiçoamento do Ensino de Matemática (CAEM) do Instituto de Matemática e Estatística da USP oferece um acervo especializado para professores e estudantes de Matemática. Com uma vasta coleção de revistas, textos didáticos, materiais pedagógicos e vídeos, tanto nacionais quanto estrangeiros, o acervo é uma fonte valiosa para aprofundar o conhecimento matemático e aprimorar práticas de ensino.

Descartes (*Cartesius*, 1974)

Esse filme, dirigido por Roberto Rossellini, é uma cinebiografia da vida de René Descartes, filósofo e matemático francês do século XVII, famoso pela frase "Penso, logo existo". A obra explora suas contribuições à Geometria analítica e ao método cartesiano, além de destacar o lado humano e as angústias de Descartes.

Descobrindo a geometria fractal: para a sala de aula
BARBOSA, Ruy Madsen. *Descobrindo a geometria fractal*: para a sala de aula. 3. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2007. (Tendências em Educação Matemática).

O livro apresenta um estudo dos fractais voltado para a sala de aula, além de conter características artísticas sem perder a precisão e o rigor matemático.

EducaBrasil - Repositório Edubase (Unicamp)
Disponível em: https://edubase.sbu.unicamp.br/home. Acesso em: 10 set. 2024.

O Edubase é o repositório da Biblioteca Digital da Unicamp especializado em educação. Ele oferece acesso a uma vasta coleção de artigos acadêmicos, revistas, dissertações e teses relacionados à educação e ao ensino. Uma excelente fonte para quem deseja ampliar seus conhecimentos na área educacional.

Fundamentos de matemática elementar: geometria plana
DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. *Fundamentos de matemática elementar*: geometria plana. 9. ed. São Paulo: Atual, 2013.

Esse volume é composto de teorias e exercícios de aplicação, testes de vestibulares atualizados, selecionados criteriosamente e ordenados por grau de dificuldade, acompanhados das respostas correspondentes. Há ainda uma série de artigos sobre História da Matemática relacionados aos temas abordados.

Geometria euclidiana plana
BARBOSA, João Lucas Marques. *Geometria euclidiana plana*. 11. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012. (Coleção do Professor de Matemática).

Esse livro dá ao professor uma visão ampliada do que ele ensina em sala de aula, mostrando a Geometria euclidiana plana de um ponto de vista que vai além dos tópicos do Ensino Básico.

Museo virtual de mat3máticas (Mumat)
Disponível em: https://mumat.matcuer.unam.mx. Acesso em: 10 set. 2024.

O Museu de Matemáticas (Mumat) da Universidad Nacional Autónoma de México (Unam) é um portal interativo que busca aproximar as pessoas do fascinante universo da Matemática. O *site* oferece uma variedade de exposições, recursos didáticos, jogos e desafios matemáticos, com o objetivo de tornar o aprendizado mais acessível e divertido.

O livro dos códigos – A ciência do sigilo: do antigo Egito à criptografia quântica
SINGH, Simon. *O livro dos códigos* – A ciência do sigilo: do antigo Egito à criptografia quântica. 7. ed. Tradução: Jorge Calife. Rio de Janeiro: Record, 2010.

Esse livro trata de códigos e criptografia, bem como dos campos onde os códigos são e foram utilizados.

Planolândia (*Flatland: The Movie*, 2007)

Esse filme, baseado no romance de Edwin A. Abbott (1884), retrata um mundo bidimensional habitado por formas geométricas. A história acompanha Arthur Square e sua neta Hex, a qual questiona a rígida estrutura social onde o *status* é definido pelo número de lados das figuras — círculos, considerados perfeitos, governam a sociedade.

Revista do Professor de Matemática
Disponível em: https://rpm.org.br/. Acesso em: 9 set. 2024.

A revista abrange informações sobre a publicação da Sociedade Brasileira de Matemática. Ela é destinada àqueles que ensinam Matemática nas séries finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio. No *site*, estão disponíveis artigos, edições da revista e informações a respeito da publicação de artigos.

Sociedade Brasileira de Educação Matemática
Disponível em: https://www.sbembrasil.org.br/sbembrasil/. Acesso em: 10 set. 2024.

O *site* tem como finalidade congregar profissionais (pesquisadores, professores e estudantes) de Educação Matemática e de áreas afins.

Uma história da simetria na matemática
STEWART, Ian. *Uma história da simetria na matemática*. Tradução: Cláudio Carina. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

O livro apresenta a busca por soluções de equações algébricas, relatando essa história por meio de uma linha do tempo que vai desde a antiga Babilônia até chegar à Física do século XXI.

ISBN 978-85-16-13996-4

