MANOEL PAIVA
EWERTON PAIVA
BETO PAIVA

MODERNAPLUS

MATEMÁTICA PAIVA

MANUAL DO PROFESSOR

VOLUME III

ENSINO MÉDIO
3º ANO

Área de conhecimento:
Matemática e suas Tecnologias

Componente curricular:
Matemática

MODERNA

MANOEL PAIVA
Mestre em Educação Matemática pela
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.
Licenciado em Matemática pela Faculdade de Filosofia,
Ciências e Letras de Santo André (SP). Professor.

EWERTON PAIVA
Licenciado em Matemática pela Universidade
Federal Fluminense (RJ). Professor.

BETO PAIVA
Licenciado em Matemática pela
Universidade Federal Fluminense (RJ).
Professor e coordenador pedagógico.

MODERNA PLUS

MATEMÁTICA PAIVA

VOLUME III

ENSINO MÉDIO – 3º ANO

Área de conhecimento: Matemática e suas Tecnologias
Componente curricular: Matemática

MANUAL DO PROFESSOR

2ª edição
São Paulo, 2024

MODERNA

Edição executiva: Maria Cecília da Silva Veridiano
Edição de texto: Enrico Briese Casentini, João Alves de Souza Neto, Katia Tiemy Sido, Sergio Luiz de Lima Filho
Assistência editorial: Tadashi Horita
Gerência de planejamento editorial e revisão: Maria de Lourdes Rodrigues
Coordenação de revisão: Elaine C. del Nero, Mônica Rodrigues de Lima
Revisão: Ana Cortazzo, Sirlene Prignolato, Tatiana Malheiro, Diego Franco Gonçales, Lilian Comelli
Gerência de *design*, produção gráfica e digital: Patricia Costa
Coordenação de *design* e projetos visuais: Marta Cerqueira Leite
Projeto gráfico: Mariza de Souza Porto, Bruno Tonel, Fábio Luna
Capa: Everson de Paula, Paula Miranda Santos
Colagem digital: Everson de Paula
Fotos: photovideostock/E+/Getty Images; Roy Harris/Shutterstock; Roman Samborskyi/Shutterstock; Ragnar Schmuck/fStop/Getty Images
Coordenação de produção gráfica: Aderson Oliveira
Coordenação de arte: Wilson Gazzoni Agostinho
Edição de arte: Natália Demuri Manoel
Editoração eletrônica: Teclas Editorial, HiDesign Estúdio
Coordenação de pesquisa iconográfica: Sônia Oddi
Pesquisa iconográfica: Junior Rozzo, Mariana Alencar
Coordenação de *bureau*: Rubens M. Rodrigues
Tratamento de imagens: Ademir Francisco Baptista, Ana Isabela Pithan Maraschin, Denise Feitoza Maciel, Vânia Maia
Pré-impressão: Alexandre Petreca, Marcio H. Kamoto
Coordenação de produção industrial: Wendell Monteiro
Impressão e acabamento:

Organização dos objetos digitais: Maria Cecília da Silva Veridiano
Elaboração dos objetos digitais: Enrico Briese Casentini, João Alves de Souza Neto, Katia Tiemy Sido, Maria Cecília da Silva Veridiano, Sergio Luiz de Lima Filho

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Paiva, Manoel
Moderna plus matemática Paiva / Manoel Paiva, Ewerton Paiva, Beto Paiva. -- 2. ed. -- São Paulo : Moderna, 2024.

3º ano : ensino médio : volume III.
Componente curricular: Matemática.
Área de conhecimento: Matemática e suas tecnologias.
ISBN 978-85-16-13987-2 (aluno)
ISBN 978-85-16-13988-9 (professor)

1. Matemática (Ensino médio) I. Paiva, Ewerton. II. Paiva, Beto. III. Título.

24-227393 CDD-510.7

Índices para catálogo sistemático:

1. Matemática : Ensino médio 510.7

Cibele Maria Dias - Bibliotecária - CRB-8/9427

EDITORA MODERNA LTDA.
Rua Padre Adelino, 758 - Belenzinho
São Paulo - SP - Brasil - CEP 03303-904
Canal de atendimento: 0303 663 3762
www.moderna.com.br
2024
Impresso no Brasil

1 3 5 7 9 10 8 6 4 2

APRESENTAÇÃO

Caro estudante,

o Ensino Médio, cada vez mais alinhado às exigências contemporâneas, tem objetivos gerais que podem ser resumidos em formar cidadãos produtivos e criativos, com raciocínio analítico e capazes de se antecipar a inovações, que busquem novos conhecimentos em um processo de formação contínua, sendo conscientes de seus direitos e deveres e capazes de atuar com protagonismo no mundo do trabalho e no convívio social.

Elaboramos esta obra nesse contexto, destacando que a Matemática no Ensino Médio, além de ter um caráter formativo e instrumental, deve ser compreendida como ciência, com suas características estruturais específicas.

Assim, para atingir os objetivos gerais nesta obra, recorremos à progressão do pensamento científico, ao pensamento computacional, às relações interdisciplinares, à contextualização, ao uso de tecnologias, aos aspectos históricos e às múltiplas representações de um mesmo objeto matemático.

Esperamos contribuir para a sua formação, instigar seu espírito crítico e científico e despertar sua curiosidade para o vasto universo do qual conhecemos uma minúscula parte.

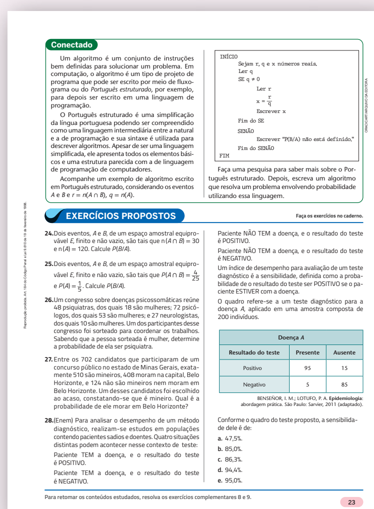
Os autores

ORGANIZAÇÃO DO LIVRO

Este livro foi elaborado para oferecer, de forma clara e objetiva, conteúdos matemáticos fundamentais para o Ensino Médio.

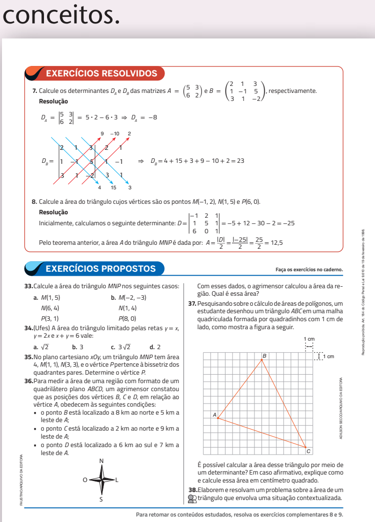
O boxe **Mentes brilhantes** apresenta realizações de pessoas ou povos que contribuíram com o desenvolvimento da Matemática ou da Ciência, além de textos sobre a História da Matemática ou Etnomatemática.

A **abertura** pretende estimular a reflexão sobre um problema contextualizado relacionado a conteúdos do capítulo.



O boxe **Conectado** apresenta atividades com o uso de tecnologias como *softwares* de Geometria dinâmica, planilhas eletrônicas entre outros.

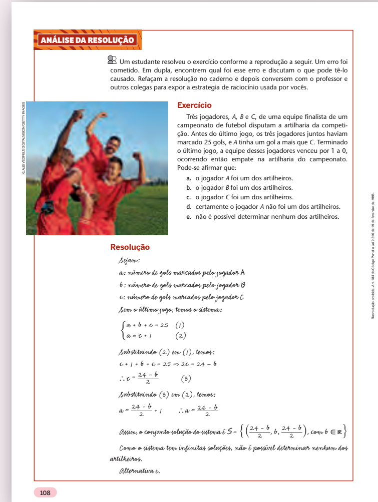
Os **Exercícios resolvidos** acompanham a teoria, auxiliando na compreensão dos conceitos.



Os **Exercícios propostos** têm o objetivo de verificar o aprendizado, por meio de uma aplicação mais imediata dos conteúdos, além de conexões com o cotidiano.

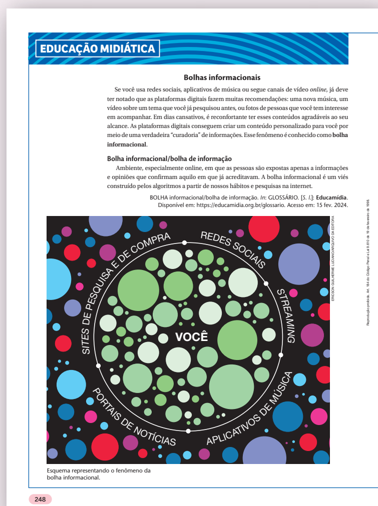
O boxe **Trabalho e juventudes** apresenta situações relacionadas ao mundo do trabalho ou às culturas juvenis conectadas ao conteúdo do capítulo.

O boxe **Análise da resolução** possibilita refletir sobre erros comuns na resolução de exercícios e mostra sua correção.

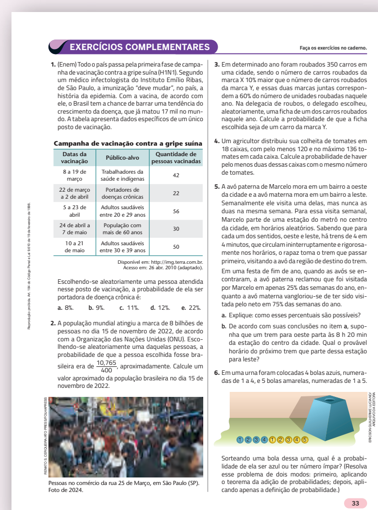


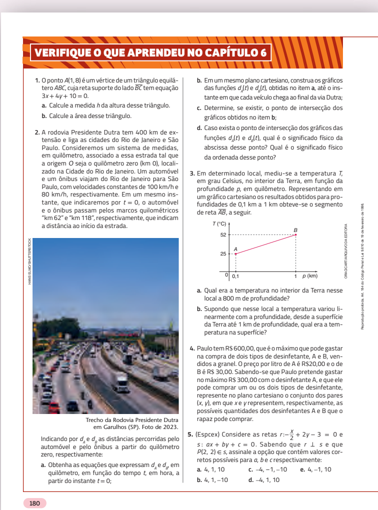
A seção **Matemática sem fronteiras** traz textos com situações de aplicação de conceitos estudados no capítulo.

A seção **Educação midiática** apresenta contextos e informações que visam explorar a importância da análise crítica de informações veiculadas nas mídias digitais.



Os **Exercícios complementares** oferecem questões de aprofundamento, com fixação e revisão dos assuntos abordados.





A seção **Verifique o que aprendeu no capítulo** traz exercícios e questões que possibilitam retomar os principais conteúdos do capítulo por meio de uma autoavaliação.

Ícones usados na coleção

Recursos tecnológicos

Produção de textos ou problemas

Atividade oral

Atividade em dupla ou em grupo

OBJETO DIGITAL Vídeo: Estatuto da Pessoa Idosa

OBJETIVOS DE DESENVOLVIMENTO SUSTENTÁVEL

Você já ouviu falar da **Agenda 2030**? Em 2015, a Organização das Nações Unidas (ONU) lançou os **Objetivos de Desenvolvimento Sustentável (ODS)**, com metas desafiadoras para acabar com a pobreza até 2030 e buscar um futuro sustentável para todos. Esses objetivos formam a base da chamada Agenda 2030.

Os 193 países que assinaram o documento, incluindo o Brasil, comprometeram-se a implementar esse plano de ação global, que envolve governos, empresas, instituições e sociedade civil. O monitoramento e a avaliação da agenda são fundamentais nos níveis global, nacional e regional, exigindo cooperação e engajamento de todos os setores da sociedade.

A seguir, apresentamos os 17 Objetivos de Desenvolvimento Sustentável.

ODS 1

ERRADICAÇÃO DA POBREZA

Acabar com a pobreza em todas as formas e em todos os lugares.

ODS 2

FOME ZERO E AGRICULTURA SUSTENTÁVEL

Erradicar a fome, alcançar a segurança alimentar, melhorar a nutrição e promover a agricultura sustentável.

ODS 3

SAÚDE E BEM-ESTAR

Garantir o acesso à saúde de qualidade e promover o bem-estar para todos, em todas as idades.

ODS 4

EDUCAÇÃO DE QUALIDADE

Garantir educação inclusiva, de qualidade e equitativa, promovendo aprendizado contínuo para todos.

ODS 5

IGUALDADE DE GÊNERO

Alcançar a igualdade de gênero e empoderar todas as mulheres e meninas.

ODS 6

ÁGUA POTÁVEL E SANEAMENTO

Garantir a disponibilidade e a gestão sustentável da água potável e do saneamento para todos.

ODS 7

ENERGIA LIMPA E ACESSÍVEL

Garantir o acesso a fontes de energia confiáveis, sustentáveis e modernas para todos.

ODS 8

TRABALHO DECENTE E CRESCIMENTO ECONÔMICO

Promover crescimento econômico inclusivo e sustentável, com emprego pleno e trabalho digno para todos.

RELEITURA DOS ÍCONES DA ONU POR VINICIUS ROSSIGNOL FELIPE

ODS 9

INDÚSTRIA, INOVAÇÃO E INFRAESTRUTURA

Construir infraestruturas resilientes, promover a industrialização inclusiva e sustentável e fomentar a inovação.

ODS 10

REDUÇÃO DAS DESIGUALDADES

Reduzir as desigualdades no interior dos países e entre países.

ODS 11

CIDADES E COMUNIDADES SUSTENTÁVEIS

Tornar as cidades e comunidades mais inclusivas, seguras, resilientes e sustentáveis.

ODS 12

CONSUMO E PRODUÇÃO RESPONSÁVEIS

Garantir padrões de consumo e de produção sustentáveis.

ODS 13

AÇÃO CONTRA A MUDANÇA GLOBAL DO CLIMA

Adotar medidas urgentes para combater as alterações climáticas e os seus impactos.

ODS 14

VIDA NA ÁGUA

Conservar e usar de forma responsável os oceanos, os mares e os recursos marinhos para o desenvolvimento sustentável.

ODS 15

VIDA TERRESTRE

Proteger, restaurar e promover o uso sustentável dos ecossistemas terrestres, gerindo florestas, combatendo a desertificação, revertendo a degradação dos solos e preservando a biodiversidade.

ODS 16

PAZ, JUSTIÇA E INSTITUIÇÕES EFICAZES

Promover sociedades pacíficas e inclusivas para o desenvolvimento sustentável, garantindo o acesso à justiça e construindo instituições eficazes e responsáveis em todos os níveis.

ODS 17

PARCERIAS E MEIOS DE IMPLEMENTAÇÃO

Reforçar os meios de implementação e revitalizar a parceria global para o desenvolvimento sustentável.

Fonte: ORGANIZAÇÃO DAS NAÇÕES UNIDAS. **Sobre o nosso trabalho para alcançar os Objetivos de Desenvolvimento Sustentável no Brasil**. Disponível em: https://brasil.un.org/pt-br/sdgs. Acesso em: 22 set. 2024.

Neste livro, você encontrará indicações dos ODS quando houver propostas, temas ou conceitos com os quais eles podem estar relacionados.

RELEITURA DOS ÍCONES DA ONU POR VINICIUS ROSSIGNOL FELIPE

SUMÁRIO

SUMÁRIO DOS OBJETOS DIGITAIS

O conteúdo da **abertura** possibilita realizar uma atividade interdisciplinar com a área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias, o **TCT Saúde e as competências gerais 7** e **10**. Incentive os estudantes a pesquisarem sobre a eficácia de diferentes vacinas e a comentarem o que isso significa. Eles podem apresentar informações e dados estatísticos a fim de argumentar acerca da importância da vacinação para o indivíduo e para a sociedade.

CAPÍTULO 1

Probabilidade

A atividade pode ser moldada a fim de trabalhar o pluralismo de ideias que visem impedir o reducionismo e o anticientificismo abordando, também, aspectos que tratem a pós-verdade, pois é importante perceber e combater falsas informações que têm finalidade de moldar a opinião pública com apelo às emoções ou crenças pessoais em detrimento a fatos objetivos e científicos.

Para facilitar a identificação de pessoas que estavam infectadas pelo coronavírus Sars-Cov-2 durante a pandemia global da covid-19, foram desenvolvidos diferentes tipos de teste.

Um desses tipos de teste é chamado de teste rápido para covid-19, pode ser adquirido em farmácias, com valor mais acessível que testes laboratoriais, e o resultado é obtido minutos após o exame. Da pessoa testada, é coletada e depositada uma gota de sangue sobre uma fita com um reagente, que detecta a presença ou ausência de anticorpos do vírus no sangue.

Em casos positivos, o teste pode indicar se a pessoa está ou esteve infectada recentemente, ou se teve contato com o vírus, mas não está atualmente doente.

Segundo o Ministério da Saúde, nos estudos realizados para aprovação e disponibilização do teste para as pessoas, foi identificada uma especificidade (chance de identificar um resultado negativo) de 94% e 6% para resultado falso-positivo (a pessoa não apresenta anticorpos da doença, mas mesmo assim o teste identifica que ela apresenta esses anticorpos). Já a sensibilidade do teste (chance de identificar resultados positivos) foi de 85% e para resultado falso-negativo, 15%. Por isso, é preciso ter cautela com os resultados e, em casos de dúvida, procurar um profissional da saúde para fazer exames complementares que comprovem a presença ou não da doença.

Elaborado com base em: MINAS GERAIS. Secretaria do Estado de Saúde. **Guia covid-19**. SES-MG, Belo Horizonte: 2022. Disponível em: https://coronavirus.saude.mg.gov.br/images/2023/03/Guia_Covid.pdf. Acesso em: 9 set. 2024.

Além da teoria

1. Você já fez um teste rápido de covid-19 ou conhece alguém que já fez o teste? Comente com os colegas e o professor como foi.
2. Pesquise quais são os tipos de testes para detectar o vírus causador da covid-19 e quais são as especificidades e sensibilidades de cada um deles.
3. Suponha que em uma farmácia foram realizados 500 testes de covid-19 em certo mês, sendo que 300 pessoas realmente estavam infectadas com o coronavírus. Considerando as taxas de sensibilidade e de especificidade apresentadas no texto, determine quantas dessas pessoas podem apresentar resultado: positivo, falso-positivo, negativo e falso-negativo.

TILIALUCIDA/SHUTTERSTOCK

Simulação da realização de um teste rápido para covid-19.

Além da teoria: 1. Resposta pessoal.
2. Resposta pessoal.

3. positivo: 255 pessoas; falso-positivo: 12 pessoas; negativo: 188 pessoas; falso-negativo: 45 pessoas

Para que os estudantes entendam melhor a expressão "indenizado", no texto introdutório, o professor pode substituir o problema original pelo seguinte: Em uma festa junina, dois competidores disputavam um jogo em que lançavam um dado alternadamente. O vencedor seria aquele que acumulasse pelo menos 30 pontos nos lançamentos.

1. A origem da teoria das probabilidades

De acordo com o matemático Howard Eves, em 1654, em Paris, um jogador dos chamados jogos de azar, Chevalier de Méré, propôs ao matemático Blaise Pascal (1623-1662) algumas questões sobre possibilidades de vencer em jogos.

Uma das questões foi a seguinte: Um jogo de dados entre dois adversários chega ao fim quando um dos jogadores vence três partidas. Se esse jogo for interrompido antes do final, de que maneira cada um dos jogadores deverá ser indenizado?

As reflexões sobre esse e outros problemas propostos por De Méré levaram Pascal a se corresponder com o matemático Pierre de Fermat (1601-1665), o que desencadeou discussões a respeito dos princípios de uma nova teoria, que mais tarde veio a ser chamada de **teoria das probabilidades**. Outros matemáticos, anteriores a Pascal, já haviam se dedicado a cálculos probabilísticos; porém, sem aprofundamento ou formalização.

NEXUS 7/SHUTTERSTOCK

Quando um dos jogadores tinha 24 pontos e o outro tinha 18 pontos, o jogo foi interrompido. Como eles deveriam dividir o bolo, que era o prêmio ao vencedor?
Comente que a solução desse tipo de problema é tão complexa que provocou longas discussões entre alguns dos maiores matemáticos da história. Dessas discussões nasceu a teoria das probabilidades.

2. O conceito de probabilidade

Nosso dia a dia é permeado de incertezas: a do meteorologista ao prever a ocorrência de chuva em determinada região; a do candidato ao ponderar a possibilidade de sua eleição, entre outras.

A necessidade de ter algum controle sobre as incertezas motivou a elaboração da teoria das probabilidades, ferramenta capaz de medir a chance de um experimento aleatório produzir um resultado específico. A situação a seguir é um exemplo de como se pode medir essa chance.

Com o objetivo de angariar fundos para a festa de formatura, os estudantes promoveram a rifa de um *notebook*. Para isso, foram impressos 1.000 bilhetes, numerados de 1 a 1.000, dos quais apenas um seria premiado por sorteio. Carlos comprou 7 desses bilhetes, e Helena comprou 1.

É possível medir a chance de cada uma dessas pessoas ganhar o *notebook*. Como Carlos concorre com 7 dos 1.000 bilhetes, indicamos por $\frac{7}{1.000}$ a medida da chance de Carlos ganhar; analogamente, a medida da chance de Helena ganhar é $\frac{1}{1.000}$. Essas frações são chamadas de probabilidades de Carlos e Helena ganharem, respectivamente.

Esse exemplo ajuda a entender que probabilidade é um número que mede a chance de ocorrência de um resultado em um experimento aleatório.

A seguir, vamos formalizar os conceitos de **experimento aleatório** e de **probabilidade**.

JULIA NIKITINA/SHUTTERSTOCK

Comente o conceito de probabilidade por meio de situações em que ele aparece intuitivamente. Por exemplo, quando um jogador de um time de futebol se prepara para bater um pênalti, sabemos que a probabilidade de o gol ser marcado é maior do que não ser. Mas como determinar essa probabilidade? Apresente uma ideia dessa medida, comentando a introdução desse item (rifa do *notebook*).
Peça outros exemplos aos estudantes, discutindo a viabilidade das medidas que eles atribuem às possibilidades das ocorrências.

Experimento aleatório

Todo experimento cujo resultado depende exclusivamente do acaso é chamado de **experimento aleatório**.

Exemplos

a. O lançamento de uma ou mais moedas, no qual se considera apenas a face que ficar voltada para cima em cada moeda.

b. O lançamento de um ou mais dados, no qual se considera apenas a face que ficar voltada para cima em cada dado.

c. O sorteio de um bilhete de um total de mil bilhetes numerados de 1 a 1.000.

d. O sorteio de cinco bolas, com um algarismo em cada uma, que formarão um número premiado da loteria federal (cada bola é sorteada de um globo contendo dez bolas numeradas de 0 a 9).

Organize as ideias definindo experimento aleatório, espaço amostral de um experimento aleatório e evento de um espaço amostral.
Refaça alguns exemplos na lousa e retome-os sempre que possível, pois eles vão ilustrar aplicações da definição de probabilidade.

Espaço amostral e evento de um experimento aleatório

O conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento aleatório é chamado de **espaço amostral** desse experimento. Qualquer subconjunto do espaço amostral é chamado de **evento** desse espaço.

EDUARDO SANTALIESTRA/ARQUIVO DA EDITORA

Vamos analisar algumas situações.

a. No lançamento de uma moeda, temos como espaço amostral o conjunto $E = \{C, K\}$, em que C indica a face cara, e K, a face coroa. Indicando por $n(E)$ o número de elementos do espaço, temos $n(E) = 2$. O subconjunto $A = \{C\}$ é um evento de E, sendo $n(A) = 1$.

b. No lançamento de um dado, temos como espaço amostral o conjunto
$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, em que cada elemento indica o número de pontos de uma face. Note que $n(E) = 6$.
O subconjunto $B = \{1, 4\}$ é um evento de E, com $n(B) = 2$.

c. No lançamento de duas moedas, temos como espaço amostral o conjunto
$E = \{(C, C), (C, K), (K, C), (K, K)\}$ e, portanto, $n(E) = 4$. O subconjunto
$G = \{(C, C), (C, K), (K, C)\}$ é um evento de E, sendo $n(G) = 3$.

Nota:
É de fundamental importância que você entenda por que temos de considerar os dois pares ordenados (C, K) e (K, C) diferentes. Para facilitar o entendimento, imagine que uma moeda fosse vermelha e a outra, azul. Uma possibilidade de obter uma cara e uma coroa é cair cara na moeda vermelha e coroa na azul; outra possibilidade é cair coroa na moeda vermelha e cara na azul. Por isso:

$$(\underset{\text{moeda vermelha}}{C},\ \underset{\text{moeda azul}}{K}) \neq (\underset{\text{moeda vermelha}}{K},\ \underset{\text{moeda azul}}{C})$$

Observação

A menos que se especifique outro formato para o(s) dado(s), supomos sempre dado(s) cúbicos(s) com as faces numeradas de 1 a 6.

d. No lançamento de dois dados, temos como espaço amostral o conjunto:

$$E = \left\{\begin{matrix} (1, 1) & (1, 2) & (1, 3) & \dots & (1, 6) \\ (2, 1) & (2, 2) & (2, 3) & \dots & (2, 6) \\ (3, 1) & (3, 2) & (3, 3) & \dots & (3, 6) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ (6, 1) & (6, 2) & (6, 3) & \dots & (6, 6) \end{matrix}\right\}, \text{ em que } n(E) = 36$$

O subconjunto $H = \{(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)\}$ é um evento de E. Temos $n(H) = 4$.

Nota:
O número de elementos desse espaço amostral pode ser calculado pelo princípio fundamental da contagem. Observe:

$$(\underbrace{1^{\underline{o}} \text{ dado}}_{6},\ \underbrace{2^{\underline{o}} \text{ dado}}_{6}) \Rightarrow n(E) = 6 \cdot 6 = 36$$

número de possibilidades

FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

e. No sorteio de um entre mil bilhetes, numerados de 1 a 1.000, o espaço amostral é o conjunto:

$E = \{1, 2, 3, 4, 5, ..., 1.000\}$, em que $n(E) = 1.000$

O subconjunto $T = \{324, 325, 326, 327, 328\}$ é um evento de E, com $n(T) = 5$.

Espaço amostral equiprovável

Um dado foi lançado 1.000 vezes. O número de vezes que cada face ocorreu é chamado de **frequência absoluta** dessa face; a razão entre essa frequência absoluta e o número de vezes que foi realizado o experimento é chamada de **frequência relativa** dessa face. O quadro **Frequência absoluta e relativa do experimento** descreve o que ocorreu nesses 1.000 lançamentos.

Observe que as frequências relativas são valores muito próximos uns dos outros. Se aumentássemos o número de lançamentos do dado para 2.000, 3.000, 10.000 etc., as frequências relativas se aproximariam cada vez mais, tendendo a ficar iguais. Por isso, dizemos que o espaço amostral no lançamento desse dado é **equiprovável**.

Um espaço amostral é **equiprovável** se as frequências relativas de seus elementos tendem a um mesmo valor quando o número de experimentos aumenta indefinidamente.

Frequência absoluta e relativa do experimento

Face	Frequência absoluta	Frequência relativa
1	165	$\frac{165}{1.000} = 0{,}165$
2	168	$\frac{168}{1.000} = 0{,}168$
3	165	$\frac{165}{1.000} = 0{,}165$
4	163	$\frac{163}{1.000} = 0{,}163$
5	169	$\frac{169}{1.000} = 0{,}169$
6	170	$\frac{170}{1.000} = 0{,}170$
Frequência total	1.000	1

3. Definição de probabilidade

Sejam E um espaço amostral equiprovável, finito e não vazio, e A um evento desse espaço amostral. A probabilidade de ocorrer o evento A, indicada por $P(A)$, é definida por:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(E)},$$

em que $n(A)$ e $n(E)$ indicam, respectivamente, o número de elementos de A e de E.

Observação

Um evento A ocorre quando o resultado do experimento é um elemento de A.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. No lançamento de uma moeda, qual é a probabilidade de se obter a face cara voltada para cima?

Resolução

Indicando por C e K as faces cara e coroa, respectivamente, o espaço amostral desse experimento é:

$E = \{C, K\}$, em que $n(E) = 2$

O evento que esperamos ocorrer é $A = \{C\}$, em que $n(A) = 1$.

Logo: $P(A) = \frac{n(A)}{n(E)} = \frac{1}{2}$

A probabilidade pode ser apresentada na forma fracionária, decimal ou percentual. Assim, podemos indicar que, $P(A) = 0{,}5$ ou $P(A) = 50\%$.

Observação

A menos que se especifique, os dados serão considerados honestos, ou seja, o espaço amostral relacionado ao lançamento de um dado é considerado equiprovável. As moedas também serão consideradas honestas.

2. No lançamento de um dado, qual é a probabilidade de se obter, na face voltada para cima, um número de pontos menor que 3?

Resolução

O espaço amostral desse experimento é:

$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, em que $n(E) = 6$

O evento que esperamos ocorrer é $B = \{1, 2\}$, em que $n(B) = 2$.

Logo: $P(B) = \frac{n(B)}{n(E)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} = 33{,}333...\%$

Nesse caso, é preferível representar a probabilidade na forma fracionária, evitando a representação da dízima periódica.

No **exercício resolvido 4**, aproveite para fazer uma breve revisão sobre o princípio fundamental da contagem.

3. No lançamento de duas moedas, qual é a probabilidade de se obter, nas faces voltadas para cima, pelo menos uma cara?

Resolução

O espaço amostral desse experimento é:

$E = \{(C, C), (C, K), (K, C), (K, K)\}$, em que $n(E) = 4$

O evento que esperamos ocorrer é:

$G = \{(C, C), (C, K), (K, C)\}$, em que $n(G) = 3$

Logo: $P(G) = \dfrac{n(G)}{n(E)} = \dfrac{3}{4} = 75\%$

4. No lançamento de dois dados, qual é a probabilidade de se obter, nas faces voltadas para cima, a soma dos pontos igual a 5?

Resolução

O espaço amostral desse experimento é:

$$E = \begin{Bmatrix} (1, 1) & (1, 2) & (1, 3) & \cdots & (1, 6) \\ (2, 1) & (2, 2) & (2, 3) & \cdots & (2, 6) \\ (3, 1) & (3, 2) & (3, 3) & \cdots & (3, 6) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (6, 1) & (6, 2) & (6, 3) & \cdots & (6, 6) \end{Bmatrix},$$

em que $n(E) = 36$

O evento que esperamos ocorrer é:

$H = \{(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)\}$, em que $n(H) = 4$

Logo: $P(H) = \dfrac{n(H)}{n(E)} = \dfrac{4}{36} = \dfrac{1}{9}$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Faça os exercícios no caderno.

1. No lançamento de duas moedas, a probabilidade de se obter uma cara e uma coroa é: **1.** alternativa **d**

a. 25%
b. 30%
c. 40%
d. 50%
e. 75%

2. Uma moeda é lançada três vezes.

a. Indicando por C e K as faces cara e coroa, respectivamente, construa o espaço amostral E desse experimento.

b. Qual é a probabilidade de se obter pelo menos duas caras? **2. b.** $\frac{1}{2}$

c. Qual é a probabilidade de se obter no máximo duas caras? **2. c.** $\frac{7}{8}$

2. a. $E = \{(C, C, C), (C, C, K), (C, K, C), (K, C, C), (K, K, K), (K, K, C), (K, C, K), (C, K, K)\}$

3. No lançamento de dois dados, calcule a probabilidade de se obter, nas faces voltadas para cima:

a. soma dos pontos igual a 7; **3. a.** $\frac{1}{6}$

b. soma dos pontos igual a 6; **3. b.** $\frac{5}{36}$

c. soma dos pontos igual a 13; **3. c.** 0

d. soma dos pontos menor que 5; **3. d.** $\frac{1}{6}$

e. soma dos pontos menor que 13. **3. e.** 1

4. Um dado é lançado três vezes.

a. O espaço amostral E desse experimento é formado por ternos ordenados, que indicam o número de pontos obtidos em cada lançamento, por exemplo: (6, 6, 3). Usando o princípio fundamental da contagem, calcule o número de elementos desse espaço amostral. **4. a.** 216

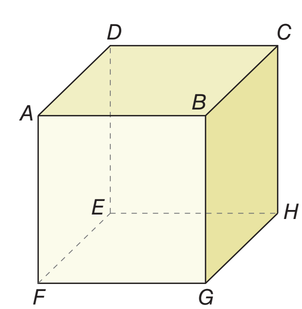
b. Calcule a probabilidade de se obter nos três lançamentos o mesmo número de pontos. **4. b.** $\frac{1}{36}$

5. Com o objetivo de avaliar a deficiência de vitaminas A e C na alimentação das crianças de determinada região, foram examinadas 800 crianças, constatando-se que, entre elas: 385 apresentavam deficiência de vitamina A, 428 apresentavam deficiência de vitamina C, e 47 não apresentavam deficiência dessas vitaminas. Agora, responda aos itens a seguir.

a. Selecionando, ao acaso, uma dessas crianças, qual é a probabilidade de ela ter deficiência das duas vitaminas, A e C? **5. a.** 7,5%

b. Pesquise que alimentos são importantes para uma alimentação balanceada e quais alimentos de sua região são as principais fontes de vitamina A e C. **5. b.** Resposta pessoal.

6. Considerem o cubo $ABCDEFGH$ a seguir.



FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

a. Quantos triângulos têm vértices em três dos pontos A, B, C, D, E, F, G e H? (*Dica*: Cada escolha dos três vértices é uma combinação dos vértices do cubo.) **6. a.** 56

b. Escolhendo, ao acaso, um dos triângulos descritos no item **a**, qual é a probabilidade de que ele esteja contido em uma das faces do cubo? **6. b.** $\frac{3}{7}$

7. Elabore um problema sobre probabilidade cuja solução seja 53%. Em seguida, troque o problema elaborado com um colega para que um resolva o problema elaborado pelo outro. Por fim, analisem e discutam as resoluções. **7.** Resposta pessoal.

8. Para contar o número de carpas de um tanque, um piscicultor capturou 90 carpas e marcou-as com um pingo de tinta não tóxica, devolvendo-as a seguir ao tanque. Esperou algum tempo para que os peixes se espalhassem pelo tanque e, depois, capturou 50 carpas, constatando que entre elas havia 12 marcadas com o pingo de tinta. Qual é o número estimado de carpas no tanque? **8.** 375


ERNESTO REGHRAN/PULSAR IMAGENS

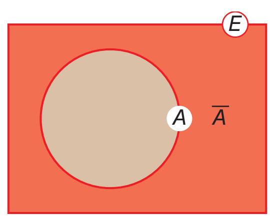
Tanques para piscicultura em Nova Aurora, PR. Foto de 2023.

Para retomar os conteúdos estudados, resolva os exercícios complementares 1 a 3.

Eventos complementares

Seja E o espaço amostral de um experimento aleatório e seja A um evento de E. Chama-se **evento complementar de A**, que se indica por $\overline{A}$, o evento formado pelos elementos que pertencem a E e não pertencem a A.

Representando por meio de um diagrama o complementar de A, temos:



FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

O círculo representa o evento A, e a região pintada em tom de vermelho representa o complementar de A.

Solicite aos estudantes que definam conjuntos complementares.
Defina eventos complementares.
Exemplifique a partir do espaço amostral, relativo ao lançamento de um dado. Pergunte: "Qual é o evento A correspondente à "ocorrência de uma face voltada para cima com um número par de pontos"? ($A = \{2, 4, 6\}$)"; "Qual é o conjunto $\overline{A}$ complementar de A (em relação a E)? ($\overline{A} = \{1, 3, 5\}$)".
Considerando os eventos A e $\overline{A}$ de um espaço amostral E, pergunte: "Qual é o conjunto resultado de $A \cup \overline{A}$? (E); Qual é o conjunto resultado de $A \cap \overline{A}$? ($\varnothing$)".

Note que:

$$A \cup \overline{A} = E$$
$$A \cap \overline{A} = \varnothing$$

Determinação do complementar de *A* por uma propriedade comum a seus elementos

Se uma propriedade p determina os elementos de um evento A, então a negação da propriedade p, que se indica por $\sim p$, determina os elementos do complementar de A.

$$A = \{x \in E \mid x \text{ satisfaz a propriedade } p\}$$
$$\overline{A} = \{x \in E \mid x \text{ satisfaz a propriedade } \sim p\}$$

Observação

$\sim p$ é lido como "não p".

Exemplos

a. Escolhe-se aleatoriamente uma bola de um conjunto que contém bolas azuis, bolas vermelhas e bolas verdes. Sendo E o espaço amostral desse experimento, vamos considerar o evento:

$$A = \{x \in E \mid \underbrace{x \text{ é a bola vermelha}}_{\text{propriedade } p}\}$$

Ao determinar o complementar por uma propriedade p, o estudante precisa estar ciente do significado de p; para isso, explore os exemplos apresentados. Dê uma atenção especial ao exemplo b, pois, provavelmente, o estudante vai dizer que o complementar de $x > 40$ é $x < 40$, e não $x \leqslant 40$ Corrija esse erro incentivando os estudantes a perceberem o porquê o correto é $x \leqslant 40$.

Antes de demonstrar as propriedades da probabilidade, apresente exemplos concretos. Por exemplo, para as propriedades **P1** e **P2**, sugerimos:
Escreva na lousa o espaço amostral $E = \{1,2,3,4,5,6\}$, do lançamento de um dado, e peça para os estudantes escreverem os eventos A "ocorrência da face com 9 pontos voltada para cima", e B "ocorrência da face voltada para cima com um número de pontos menor que 7". (O evento A é o conjunto vazio, ou seja, $A = \varnothing$ e, portanto, $n(A) = 0$, e o evento B é o próprio espaço amostral, ou seja, $B = E = \{1,2,3,4,5,6\}$ e, portanto, $n(B) = 6$.)
Como o evento A é impossível de ocorrer, e o evento B certamente ocorre, eles são chamados de evento impossível e evento certo, respectivamente.
Note que:
$P(A) = P(\varnothing) = \frac{0}{6} = 0$ e
$P(B) = P(E) = \frac{n(E)}{n(E)} = \frac{6}{6} = 1$
De maneira análoga, demonstre as outras duas propriedades:
$0 \leqslant P(A) \leqslant 1$ e
$P(A) = 1 - P(\overline{A})$.

Para obter o evento $\overline{A}$, basta negar a propriedade p que determina os elementos do evento A, isto é:

$$\overline{A} = \{x \in E \mid \underbrace{x \text{ não é bola vermelha}}_{\text{propriedade } \sim p}\}$$

Portanto:

$$\overline{A} = \{x \in E \mid x \text{ é bola azul ou verde}\}$$

b. Retira-se aleatoriamente uma ficha de uma urna que contém 100 fichas numeradas de 1 a 100. Sendo E o espaço amostral desse experimento, vamos considerar o seguinte evento:

$$A = \{x \in E \mid \underbrace{x > 40}_{\text{propriedade } p}\}$$

O evento $\overline{A}$ é aquele cujos elementos satisfazem a propriedade $\sim p$, isto é:

$$\overline{A} = \{x \in E \mid \underbrace{x \leqslant 40}_{\text{propriedade } \sim p}\}$$

Propriedades das probabilidades

Sendo E um espaço amostral finito e não vazio e A um evento de E, temos:

P1. $P(\varnothing) = 0$

P2. $P(E) = 1$

P3. $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$

P4. $P(A) = 1 - P(\overline{A})$ (ou, de modo equivalente, $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$)

Demonstrações

P1. $P(\varnothing) = \frac{n(\varnothing)}{n(E)} = \frac{0}{n(E)} = 0$

P2. $P(E) = \frac{n(E)}{n(E)} = 1$

P3. Sendo A um evento de E, isto é, $A \subset E$, temos:

$$\varnothing \subset A \subset E \Rightarrow n(\varnothing) \leqslant n(A) \leqslant n(E)$$

Portanto: $0 \leqslant n(A) \leqslant n(E)$
Dividindo cada membro dessa desigualdade por $n(E)$, temos:

$$\frac{0}{n(E)} \leqslant \frac{n(A)}{n(E)} \leqslant \frac{n(E)}{n(E)} \Rightarrow 0 \leqslant P(A) \leqslant 1$$

P4. Como $A \cup \overline{A} = E$ e $A \cap \overline{A} = \varnothing$, temos, pelo princípio aditivo da contagem:

$$n(A \cup \overline{A}) = n(A) + n(\overline{A}) - n(A \cap \overline{A}) \Rightarrow n(E) = n(A) + n(\overline{A})$$

Dividindo por $n(E)$ ambos os membros dessa igualdade, obtemos:

$$\frac{n(E)}{n(E)} = \frac{n(A)}{n(E)} + \frac{n(\overline{A})}{n(E)} \Rightarrow 1 = P(A) + P(\overline{A})$$

Logo, $P(A) = 1 - P(\overline{A})$ ou, de modo equivalente, $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

Observação

O evento $\varnothing$ é chamado de **evento impossível**, pois ele nunca ocorre.
O evento que coincide com o espaço amostral E é chamado de **evento certo**, pois ele sempre ocorre.

No **exercício resolvido 5**, explore com os estudantes a importância de seguir certas etapas de resolução. Além disso, associe as etapas do pensamento computacional na resolução de problemas de um mesmo tipo e que podem seguir certos procedimentos ou algoritmos.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

5. Em uma reunião com n professores, será escolhido um, ao acaso, para coordenar os trabalhos ali desenvolvidos.
Se a probabilidade de o escolhido ser professor de Matemática é $\frac{n-5}{9}$, qual é o número máximo de participantes que pode haver nessa reunião?

Resolução

Vamos resolver por etapas.

1. Compreender

Primeiro, podemos identificar o que foi pedido e as informações apresentadas. No caso, o número de participantes de uma reunião de professores, dada a probabilidade de um deles ser de Matemática.

2. Elaborar um plano

Precisamos traçar uma estratégia de resolução. Podemos escrever as informações apresentadas por meio de notações matemáticas e usar as propriedades da teoria das probabilidades.

3. Executar o plano

Seja o espaço amostral: $E = \{x \mid x \text{ é um professor participante da reunião}\}$ e o evento:

$A = \{y \in E \mid y \text{ é professor de Matemática}\}$.

É dado que: $P(A) = \frac{n-5}{9}$

Sabemos, pela propriedade P3, que $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$.

Assim, temos: $0 \leqslant \frac{n-5}{9} \leqslant 1 \Rightarrow 0 \leqslant n - 5 \leqslant 9$

Portanto: $5 \leqslant n \leqslant 14$

Logo, o número de participantes dessa reunião é, no máximo, 14.

4. Verificar

De fato, quando $n > 14$, temos $P(A) > 1$ (impossível).

Observe que se $n = 14$, então todos os professores da reunião são de Matemática, pois, neste caso, $P(A) = 1$.

6. Uma urna contém bolas coloridas. Retirando uma bola dessa urna, a probabilidade de se obter uma bola vermelha é 0,64. Qual é a probabilidade de se obter uma bola que não seja vermelha?

Resolução

Indicando por A o evento formado pelas bolas vermelhas, o complementar de A é o evento $\bar{A}$ formado pelas bolas não vermelhas.

Sabemos que: $P(A) + P(\bar{A}) = 1$

Logo: $P(\bar{A}) = 1 - P(A) \Rightarrow P(\bar{A}) = 1 - 0{,}64 = 0{,}36$

Portanto, a probabilidade de se obter uma bola que não seja vermelha é 0,36.

7. Uma urna contém apenas bolas brancas e bolas azuis. Retirando-se ao acaso uma bola da urna, a probabilidade de sair uma bola azul é o quádruplo da probabilidade de sair uma branca. Qual é a probabilidade de sair uma bola branca?

Resolução

Sendo os eventos $A = \{x \mid x \text{ é bola azul da urna}\}$ e $B = \{y \mid y \text{ é bola branca da urna}\}$, temos: $P(A) = 4P(B)$. Como a urna contém apenas bolas brancas e bolas azuis, concluímos que A e B são eventos complementares e, portanto, $P(A) + P(B) = 1$.

Assim, resolvendo o sistema $\begin{cases} P(A) = 4 \cdot P(B) \\ P(A) + (B) = 1 \end{cases}$,

obtemos $P(B) = \frac{1}{5}$, ou seja, a probabilidade de sair uma bola branca é $\frac{1}{5}$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Faça os exercícios no caderno.

9. Em um programa de auditório, o apresentador explica a um participante que três etiquetas, numeradas de 1 a 3, foram distribuídas em três envelopes. Cada envelope está lacrado e contém uma única etiqueta. O participante deve colocar os envelopes sobre uma mesa, tentando formar, da esquerda para a direita, a sequência crescente: 1, 2 e 3.

a. Calcule a probabilidade de que os três envelopes sejam colocados nas posições corretas, isto é, o primeiro da esquerda com o algarismo 1, o segundo com o 2 e o terceiro com o 3. **9. a.** $\frac{1}{6}$

b. Calcule a probabilidade de que sejam colocados apenas dois envelopes nas posições corretas.

9. b. 0 (evento impossível)

10. Sorteando uma das n pessoas de uma sala, a probabilidade de que essa pessoa seja mulher é $\frac{n-8}{20}$. Qual é o maior número possível de pessoas que podem estar nessa sala? **10.** 28 pessoas

11. Uma repartição do Detran tem a função de deferir ou indeferir os requerimentos de anulação de multas. Escolhendo-se, ao acaso, um dos requerimentos examinados por essa repartição em um dia de trabalho, em que todos os documentos foram julgados, a probabilidade de que o mesmo tenha sido deferido é $\frac{5}{27}$. Qual é a probabilidade de que esse requerimento tenha sido indeferido? **11.** $\frac{22}{27}$

12. Uma urna contém exatamente 6 etiquetas numeradas de 1 a 6. Ao retirar uma etiqueta dessa urna, qual é a probabilidade de se obter:

a. um número que seja múltiplo de 5 e de 3 ao mesmo tempo? **12. a.** 0

b. um número que seja divisor de 720? **12. b.** 1

13. De uma urna que contém 9 bolas, numeradas de 1 a 9, são sorteadas 3, uma de cada vez, repondo-se na urna cada bola retirada. Considera-se resultado desse experimento a sequência dos três números obtidos nas bolas das 1ª, 2ª e 3ª retiradas, respectivamente. Por exemplo, o terno a seguir é um resultado possível desse experimento: **13. b**. resposta possível: (1, 3, 5)

$$(\underbrace{6}_{1^{\text{a}}\text{ bola}}, \underbrace{5}_{2^{\text{a}}\text{ bola}}, \underbrace{6}_{3^{\text{a}}\text{ bola}})$$

a. Calcule o número de elementos do espaço amostral *E* desse experimento. **13. a.** 729

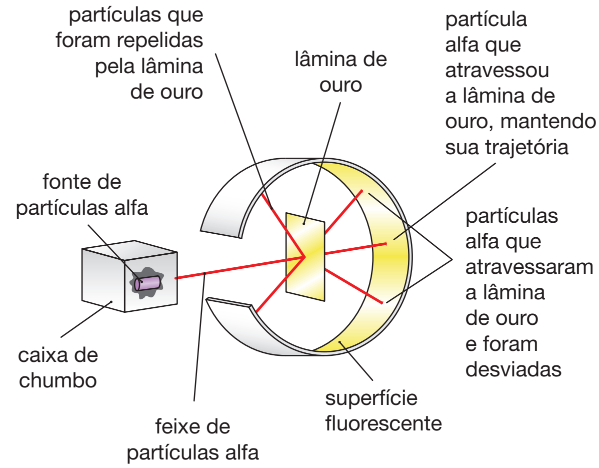
b. Dê exemplo de um resultado desse experimento em que o produto dos três números seja ímpar.

c. Quantos ternos ordenados do espaço amostral *E* satisfazem a condição do item **b**? **13. c.** 125

d. Qual é a probabilidade de se obter, nesse experimento, um terno ordenado em que o produto dos três números seja par? **13. d.** $\frac{604}{729}$

14. Um grupo de turistas é formado apenas por alemães e brasileiros. Escolhendo-se, ao acaso, uma pessoa desse grupo, a probabilidade de ser escolhido um alemão é o triplo da probabilidade de ser escolhido um brasileiro. Calcule a probabilidade de ser escolhido um brasileiro. **14.** 25%

15. O famoso experimento do físico e químico Ernest Rutherford (1871-1937), que levou à descoberta do núcleo atômico, baseou-se em fazer incidir um feixe de partículas alfa (partículas radioativas portadoras de carga elétrica positiva) sobre uma lâmina delgada de ouro, como mostra o esquema a seguir.



FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

Com o auxílio de um anteparo que emitia luminosidade instantânea ao ser atingido por uma partícula alfa, Rutherford estimou que uma em cada 10^5 dessas partículas ou era desviada ou era repelida pela lâmina de ouro.

Essa experiência mostrou que a probabilidade de uma partícula alfa atravessar a lâmina de ouro sem sofrer alteração em sua trajetória é: **15.** alternativa **e**

a. menor que 50%.

b. maior que 50% e menor que 78%.

c. maior que 78% e menor que 89%.

d. maior que 89% e menor que 99%.

e. maior que 99%.

16. Pedro concorre a uma vaga de trabalho em uma empresa. Após realizar vários testes de conhecimento e entrevistas, o rapaz estima que a probabilidade de conseguir o emprego é $\frac{x}{2}$, e de não conseguir é $\frac{x+2}{8}$.

Supondo que as estimativas de Pedro estejam corretas, a probabilidade de que consiga esse emprego é de:

a. 30%. **b.** 40%. **c.** 54%. **d.** 60%. **e.** 70%.

16. alternativa **d**

Para retomar os conteúdos estudados, resolva os exercícios complementares 4 e 5.

Este é um bom momento para realizar um trabalho em conjunto com a área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias. Antes da resolução do **exercício proposto 15**, convide o professor de Química para comentar o modelo atômico de Rutherford e a evolução dos modelos atômicos, desde os modelos filosóficos de Demócrito/Leucipo e Aristóteles até os modelos científicos de Dalton, Thomson, Rutherford, Rutherford--Bohr e James Chadwick.

4. Adição de probabilidades

Observamos, neste capítulo, que alguns conceitos estudados na teoria dos conjuntos têm aplicações importantes na teoria das probabilidades. Agora estudaremos mais uma aplicação que facilita significativamente a resolução de certos problemas de probabilidade. Para começar, vamos resolver o problema a seguir.

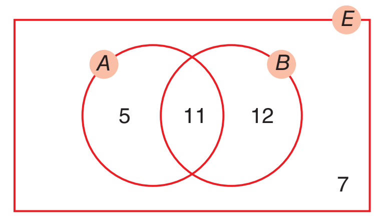
Em uma aula de Matemática, o professor realizou uma pesquisa perguntando quem havia assistido aos filmes *Estrelas além do tempo* ou *O jogo da imitação*, que contam importantes episódios da história de matemáticos do século XX.

Todos os estudantes responderam à pesquisa, e o resultado foi precisamente o seguinte:

- 16 estudantes assistiram ao filme *Estrelas além do tempo*;
- 23 estudantes assistiram ao filme *O jogo da imitação*;
- 11 estudantes assistiram aos dois filmes;
- 7 estudantes não assistiram a nenhum dos dois filmes.

Escolhendo ao acaso um dos estudantes da sala, qual é a probabilidade de que o estudante escolhido tenha assistido a *Estrelas além do tempo* **ou** a *O jogo da imitação*?

Para responder a essa questão, vamos indicar por E o espaço amostral do experimento "escolher um estudante da sala", por A o conjunto dos estudantes que assistiram a *Estrelas além do tempo* e por B o conjunto dos que assistiram a *O jogo da imitação*, conforme o diagrama.



ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

Note que o conjunto dos estudantes que assistiram a *Estrelas além do tempo* **ou** a *O jogo da imitação* é $A \cup B$ e que o conjunto dos estudantes que assistiram a *Estrelas além do tempo* **e** *O jogo da imitação* é $A \cap B$. Da teoria dos conjuntos, sabemos que:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

Portanto:

$$n(A \cup B) = 16 + 23 - 11 \Rightarrow n(A \cup B) = 28$$

Como $n(E) = n(A \cup B) + 7 = 35$, concluímos que a probabilidade, $P(A \cup B)$, de que o estudante escolhido tenha assistido a *Estrelas além do tempo* ou a *O jogo da imitação* é dada por:

$$P(A \cup B) = \frac{n(A \cup B)}{n(E)} = \frac{28}{35} = \frac{4}{5}$$

Se tiver oportunidade, assista aos filmes mencionados. Saiba mais a respeito deles:

Estrelas Além do Tempo

Com direção de Theodore Melfi e lançado em 2016, o filme conta a história de três matemáticas negras que trabalharam na NASA e foram fundamentais para cálculos relacionados a missões espaciais.

O jogo da imitação

Dirigido por Moorten Tykdum, esse filme de 2014 conta a história do matemático Alan Turing e seu projeto para decodificar o código que os alemães utilizavam para enviar mensagens a submarinos durante a Segunda Guerra Mundial.

Teorema da adição de probabilidades

Resolvendo genericamente o problema anterior, obtemos um importante resultado da teoria das probabilidades. Acompanhe.

Sendo A e B dois eventos de um espaço amostral equiprovável E, finito e não vazio, temos:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

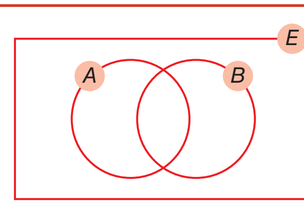
Dividindo por $n(E)$ ambos os membros dessa identidade, obtemos:

$$\frac{n(A \cup B)}{n(E)} = \frac{n(A)}{n(E)} + \frac{n(B)}{n(E)} - \frac{n(A \cap B)}{n(E)} \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Podemos agora enunciar o resultado a seguir, conhecido como **teorema da adição de probabilidades**.

Sendo A e B eventos de um espaço amostral equiprovável E, finito e não vazio, temos:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

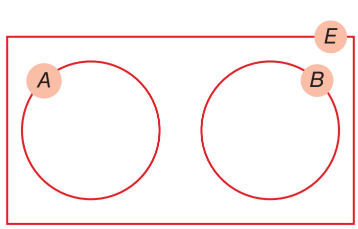


Observação

Esse teorema é aplicado quando queremos calcular a probabilidade de ocorrer um evento A ou um evento B, pois o conectivo "ou" indica a união dos dois eventos.

Eventos mutuamente exclusivos

Dois eventos, A e B, são mutuamente exclusivos se, e somente se, $A \cap B = \varnothing$.



OBJETO DIGITAL *Podcast*: **Qual a probabilidade de errar todas as questões do ENEM?**

ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

Nesse caso, temos $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(\varnothing)$; portanto:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Reflexão: Sim, pois podemos resolver esse exercício aplicando apenas a definição de probabilidade. O espaço amostral E do experimento é: $E = \{1,2,3,4,...,20\}$, com $n(E) = 20$. O evento A formado pelos elementos de E que são múltiplos de 2 ou de 3 é: $A = \{2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20\}$, com $n(A) = 13$. Assim, concluímos que: $P(A) = \frac{n(A)}{n(E)} = \frac{13}{20}$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

8. Uma urna contém exatamente vinte bolas, numeradas de 1 a 20. Retira-se ao acaso uma bola da urna. Qual é a probabilidade de se obter uma bola com um número múltiplo de 2 ou de 3?

Resolução

O espaço amostral do experimento é:

$$E = \{1, 2, 3, 4, ..., 20\},\ n(E) = 20$$

Consideremos dois eventos: um deles caracterizado pela propriedade anterior ao conectivo **ou**, e o outro caracterizado pela propriedade posterior ao conectivo **ou** do enunciado, isto é:

$$A = \{x \in E \mid x \text{ é múltiplo de } 2\} =$$
$$= \{2, 4, 6, ..., 20\},\ n(A) = 10$$

$$B = \{y \in E \mid y \text{ é múltiplo de } 3\} =$$
$$= \{3, 6, 9, ..., 18\},\ n(B) = 6$$

Queremos a probabilidade de ocorrer A ou B, ou seja, $P(A \cup B)$. Para isso, precisamos de $A \cap B$:

$$A \cap B = \{6, 12, 18\},\ n(A \cap B) = 3$$

Logo, temos:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow P(A \cup B) = \frac{10}{20} + \frac{6}{20} - \frac{3}{20} = \frac{13}{20}$$

Reflexão

É possível solucionar o exercício resolvido **8** sem usar o teorema da adição de probabilidades?

9. Em um aeroporto foi feita uma pesquisa com 80 mulheres e 60 homens que iriam embarcar em um dos voos. Constatou-se que 30 mulheres e 20 homens viajariam de avião pela primeira vez e que os demais já haviam voado antes.

Escolhendo um desses passageiros ao acaso:

a. qual é a probabilidade de se escolher uma mulher ou um passageiro que vai voar pela primeira vez?

b. qual é a probabilidade de se escolher uma mulher que já voou antes ou um homem que vai voar pela primeira vez?

Resolução

Quando há o cruzamento de várias informações, uma maneira eficiente de organizá-las é por meio de um quadro.

Passageiros, por sexo, que já voaram de avião ou não

	Mulheres	Homens
Viajarão de avião pela primeira vez	30	20
Já voaram de avião antes	50	40

Elaborado para fins didáticos.

Observando que o espaço amostral E do experimento é formado pelas 140 pessoas entrevistadas, respondemos aos itens.

a. Sendo A o evento formado pelas mulheres entrevistadas, temos que $n(A) = 80$; e, sendo B o evento dos passageiros que vão viajar de avião pela primeira vez, temos que $n(B) = 50$. Observando que $n(A \cap B) = 30$, concluímos que:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow P(A \cup B) = \frac{80}{140} + \frac{50}{140} - \frac{30}{140}$$
$$\therefore P(A \cup B) = \frac{100}{140} = \frac{5}{7}$$

Logo, a probabilidade de se escolher uma mulher ou um passageiro que vai voar pela primeira vez é $\frac{5}{7}$.

b. Sendo C o evento formado pelas mulheres que já voaram antes, temos que $n(C) = 50$; e, sendo D o evento formado pelos homens que vão voar pela primeira vez, temos que $n(D) = 20$. Observando que C e D são eventos mutuamente exclusivos, isto é, $C \cap D = \varnothing$, concluímos que:

$$P(C \cup D) = P(C) + P(D) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow P(C \cup D) = \frac{50}{140} + \frac{20}{140}$$
$$\therefore P(C \cup D) = \frac{70}{140} = \frac{1}{2}$$

Logo, a probabilidade de se escolher uma mulher que já voou antes ou um homem que vai voar pela primeira vez é $\frac{1}{2}$.

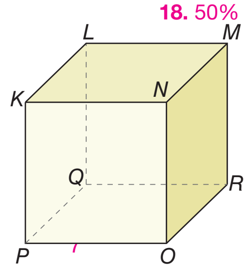
EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Faça os exercícios no caderno.

17. Na lista de chamada de uma turma, os estudantes são numerados de 1 a 20. Para uma chamada oral, o professor sorteou um desses números. Qual é a probabilidade de que o número sorteado seja par ou múltiplo de 3? (Resolva esse problema de dois modos: primeiro, aplicando o teorema da adição de probabilidades; depois, aplicando apenas a definição de probabilidade.) **17.** $\frac{13}{20}$

18. Um serviço de *streaming* disponibiliza para seus assinantes filmes nacionais e estrangeiros. Os títulos dos filmes nacionais se distribuem em 80 policiais, 180 romances e 210 comédias; e os estrangeiros se distribuem em 330 policiais, 480 romances e 320 comédias. Um assinante escolheu, aleatoriamente, um desses filmes para assistir. Calcule a probabilidade de o escolhido ser um filme policial ou um filme nacional. **18.** 50%

19. Escolhendo-se aleatoriamente uma reta que passe por dois vértices distintos quaisquer do cubo *KLMNOPQR*, qual é a probabilidade de que ela contenha uma aresta do cubo ou passe pelo vértice *K*? **19.** $\frac{4}{7}$



FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

20. Para um *show* de *rock*, os organizadores estimam que a probabilidade de que sejam vendidos pelo menos 46.000 ingressos é 70% e de que sejam vendidos no máximo 46.000 ingressos é 55%. De acordo com essas estimativas, calcule a probabilidade de que sejam vendidos exatamente 46.000 ingressos para esse evento. **20.** 25%

21. Escolhendo-se, aleatoriamente, um dos refrigeradores expostos em uma loja, a probabilidade de que ele seja da marca X é $\frac{3}{5}$, e a probabilidade de que seja branco é $\frac{3}{4}$. Sabendo que a probabilidade de o escolhido ser da marca X e ser branco é $\frac{7}{10}$, calcule a probabilidade de esse refrigerador ser da marca X ou ser branco. **21.** $\frac{13}{20}$

22. Uma pesquisa feita com um grupo de pessoas revelou que cada uma delas é leitora do jornal A ou do jornal B. Escolhendo-se uma dessas pessoas ao acaso, a probabilidade de que ela seja leitora do jornal A é $\frac{7}{10}$, e a probabilidade de que seja leitora do jornal B é $\frac{5}{8}$. Qual é a probabilidade de que a pessoa escolhida seja leitora do jornal A e do jornal B? **22.** $\frac{13}{40}$ ou 32,5%

23. Elabore um problema envolvendo o teorema da adição de probabilidades e algum evento cuja probabilidade seja de 26%. Em seguida, troque o problema elaborado com um colega para que um resolva o problema elaborado pelo outro. Por fim, analisem e discutam as resoluções. **23.** Resposta pessoal.

Para retomar os conteúdos estudados, resolva os exercícios complementares 6 e 7.

5. Probabilidade condicional

Com o propósito de conhecer a frequência com que os habitantes dos municípios de Platápolis e Aristópolis vão ao teatro, realizou-se uma pesquisa com 1.000 pessoas adultas de cada um desses municípios. Todos os entrevistados responderam à pergunta: Você foi ao teatro pelo menos uma vez no ano passado? A tabela a seguir apresenta os dados obtidos nessa pesquisa.

Quantidade de pessoas que foram ou não ao teatro, por município

	Foram ao teatro pelo menos uma vez	Não foram ao teatro nenhuma vez
Platápolis	648	352
Aristópolis	792	208

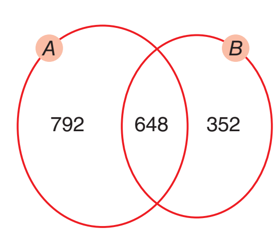
Elaborado para fins didáticos.

Vista interna do teatro Amazonas, Manaus (AM). Foto de 2023.

MARCOS AMEND/PULSAR IMAGENS

Escolhendo-se uma das pessoas entrevistadas, ao acaso, constata-se que ela foi ao teatro pelo menos uma vez no ano passado. Qual é a probabilidade de que a pessoa escolhida seja habitante do município de Platápolis?

Vamos considerar como evento *A* aquele formado pelas pessoas entrevistadas que foram ao teatro pelo menos uma vez no ano passado, e como evento *B* aquele formado pelas pessoas entrevistadas habitantes de Platápolis, conforme sugere o diagrama. Assim, devemos calcular a probabilidade *P* de ocorrer *B*, dado que já ocorreu *A*.

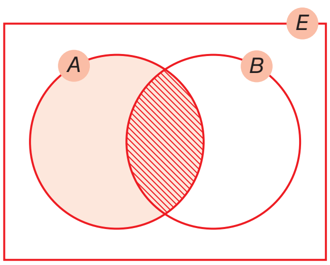


ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

Observe que algum elemento de B só pode ocorrer na intersecção de A e B, pois é dado que A já ocorreu. Assim, o evento A passa a ser o espaço amostral para o cálculo da probabilidade P pedida e, portanto:

$$P = \frac{n(A \cap B)}{n(A)} \Rightarrow P = \frac{648}{1.440} = 0,45 = 45\%$$

Resolução genérica



FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

Generalizando o raciocínio aplicado na situação anterior, vamos considerar um experimento aleatório com um espaço amostral equiprovável E, finito e não vazio. Ao realizar o experimento, constata-se que ocorreu um evento não vazio A. Qual é a probabilidade de ter ocorrido também um elemento de outro evento B?

A probabilidade de ocorrer o evento B dado que ocorreu o evento A é indicada por $\boldsymbol{P(B/A)}$ e é calculada por:

$$\boxed{P(B/A) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)} \qquad (1)}$$

Observação

$P(B/A)$ é lido como "probabilidade de B dado A".

O número $P(B/A)$ é a probabilidade de ocorrer B condicionada à ocorrência de A. Esse número pode ser expresso, também, em função das probabilidades de $A \cap B$ e de A, bastando, para isso, dividir por $n(E)$ o numerador e o denominador da fração do segundo membro da igualdade (1), isto é:

$$P(B/A) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)} \Leftrightarrow P(B/A) = \frac{\frac{n(A \cap B)}{n(E)}}{\frac{n(A)}{n(E)}}, \text{ ou seja:}$$

$$\boxed{P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \qquad (2)}$$

Assim, temos duas identidades equivalentes, (1) e (2), para o cálculo da probabilidade condicional $P(B/A)$.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

10. Em uma sala estão reunidos 20 homens e 20 mulheres. Entre os homens, 3 são administradores, 8 são engenheiros e os demais, economistas. Entre as mulheres, 7 são administradoras, 8 são economistas e as demais, engenheiras. Um desses profissionais foi escolhido ao acaso para ler a pauta da reunião. Sabendo que a pessoa escolhida foi uma mulher, qual é a probabilidade de que ela seja economista?

Resolução

Primeiro, organizamos em uma tabela todas as informações fornecidas pelo enunciado.

Quantidade de homens e mulheres, por profissão

	Homens	Mulheres
Administrador	3	7
Engenheiro	8	5
Economista	9	8

Depois, destacamos:

- $E = \{x \mid x \text{ participa da reunião}\}$
- $A = \{y \in E \mid y \text{ é mulher}\}$, $n(A) = 20$
- $B = \{z \in E \mid z \text{ é economista}\}$, $n(B) = 17$
- $A \cap B = \{w \in E \mid w \text{ é mulher e economista}\}$, $n(A \cap B) = 8$

Finalmente, concluímos que:

$$P(B/A) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)}$$

$$P(B/A) = \frac{8}{20}$$

$$\therefore P(B/A) = \frac{2}{5}$$

Portanto, a probabilidade de que a pessoa escolhida seja economista sabendo-se que ela é mulher é $\frac{2}{5}$.

Para trabalhar com o boxe **Conectado**, proponha uma pesquisa acerca do Português estruturado e verifique se alguns estudantes têm conhecimentos de linguagem de programação; se houver, proponha a eles que apresentem o uso de algoritmos em diferentes contextos e, se possível, mostrem aos colegas algum programa que tenham desenvolvido associando o algoritmo escrito na linguagem de programação com aquele escrito em português estruturado.

Conectado

Um algoritmo é um conjunto de instruções bem definidas para solucionar um problema. Em computação, o algoritmo é um tipo de projeto de programa que pode ser escrito por meio de fluxograma ou do *Português estruturado*, por exemplo, para depois ser escrito em uma linguagem de programação.

O Português estruturado é uma simplificação da língua portuguesa podendo ser compreendido como uma linguagem intermediária entre a natural e a de programação e sua sintaxe é utilizada para descrever algoritmos. Apesar de ser uma linguagem simplificada, ele apresenta todos os elementos básicos e uma estrutura parecida com a de linguagem de programação de computadores.

Acompanhe um exemplo de algoritmo escrito em Português estruturado, considerando os eventos A e B e $r = n(A \cap B)$, $q = n(A)$.

```
INÍCIO
      Sejam r, q e x números reais.
      Ler q
      SE q ≠ 0
            Ler r
            x = r/q
            Escrever x
      Fim do SE
      SENÃO
            Escrever "P(B/A) não está definido."
      Fim do SENÃO
FIM
```

ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

Faça uma pesquisa para saber mais sobre o Português estruturado. Depois, escreva um algoritmo que resolva um problema envolvendo probabilidade utilizando essa linguagem. **Conectado:** Resposta pessoal.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Faça os exercícios no caderno.

24. Dois eventos, A e B, de um espaço amostral equiprovável E, finito e não vazio, são tais que $n(A \cap B) = 30$ e $n(A) = 120$. Calcule $P(B/A)$. **24.** $P(B/A) = \frac{1}{4}$

25. Dois eventos, A e B, de um espaço amostral equiprovável E, finito e não vazio, são tais que $P(A \cap B) = \frac{4}{25}$ e $P(A) = \frac{1}{5}$. Calcule $P(B/A)$. **25.** $P(B/A) = \frac{4}{5}$

26. Um congresso sobre doenças psicossomáticas reúne 48 psiquiatras, dos quais 18 são mulheres; 72 psicólogos, dos quais 53 são mulheres; e 27 neurologistas, dos quais 10 são mulheres. Um dos participantes desse congresso foi sorteado para coordenar os trabalhos. Sabendo que a pessoa sorteada é mulher, determine a probabilidade de ela ser psiquiatra. **26.** $\frac{2}{9}$

27. Entre os 702 candidatos que participaram de um concurso público no estado de Minas Gerais, exatamente 510 são mineiros, 408 moram na capital, Belo Horizonte, e 124 não são mineiros nem moram em Belo Horizonte. Um desses candidatos foi escolhido ao acaso, constatando-se que é mineiro. Qual é a probabilidade de ele morar em Belo Horizonte? **27.** $\frac{2}{3}$

28. (Enem) Para analisar o desempenho de um método diagnóstico, realizam-se estudos em populações contendo pacientes sadios e doentes. Quatro situações distintas podem acontecer nesse contexto de teste:

Paciente TEM a doença, e o resultado do teste é POSITIVO.

Paciente TEM a doença, e o resultado do teste é NEGATIVO.

Paciente NÃO TEM a doença, e o resultado do teste é POSITIVO.

Paciente NÃO TEM a doença, e o resultado do teste é NEGATIVO.

Um índice de desempenho para avaliação de um teste diagnóstico é a sensibilidade, definida como a probabilidade de o resultado do teste ser POSITIVO se o paciente ESTIVER com a doença.

O quadro refere-se a um teste diagnóstico para a doença A, aplicado em uma amostra composta de 200 indivíduos.

	Doença *A*	
Resultado do teste	**Presente**	**Ausente**
Positivo	95	15
Negativo	5	85

BENSEÑOR, I. M.; LOTUFO, P. A. **Epidemiologia**: abordagem prática. São Paulo: Sarvier, 2011 (adaptado).

Conforme o quadro do teste proposto, a sensibilidade dele é de: **28.** alternativa **e**

a. 47,5%.

b. 85,0%.

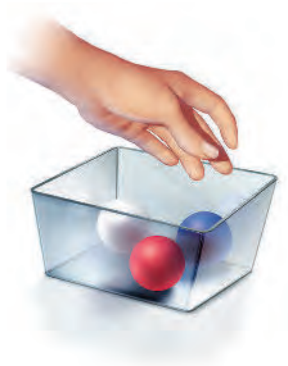
c. 86,3%.

d. 94,4%.

e. 95,0%.

Para retomar os conteúdos estudados, resolva os exercícios complementares 8 e 9.

Eventos independentes


ANDRÉ VAZZIOS/ARQUIVO DA EDITORA

Como o nome sugere, dois eventos são **independentes** quando a probabilidade de ocorrência de qualquer um deles é a mesma, tendo ocorrido ou não o outro; portanto, a probabilidade de ocorrer qualquer um dos eventos independe da ocorrência do outro. Essa ideia pode ser entendida por meio do problema a seguir.

Uma urna contém exatamente três bolas de mesmo tamanho, indiferenciáveis pelo tato: uma azul, uma branca e uma vermelha. Um experimento consiste em retirar aleatoriamente e sem olhar, duas bolas dessa urna da seguinte maneira: retira-se a primeira e registra-se sua cor; devolve-se a bola retirada à urna, misturando-a às demais; retira-se a segunda bola, registrando-se sua cor.

a. Qual é a probabilidade de se obter a bola vermelha na segunda retirada?

b. Sabendo que a primeira bola retirada não foi vermelha, qual é a probabilidade de que a segunda bola retirada seja vermelha?

Para responder a essas questões, vamos considerar como resultado do experimento o par ordenado (x, y), em que x é a cor da primeira bola retirada e y é a cor da segunda. Assim, o espaço amostral E do experimento é o conjunto de todos os pares ordenados possíveis formados por duas das três cores, azul (a), branca (b) e vermelha (v), podendo haver repetição de cores, isto é:

$$E = \{(\text{b, b}), (\text{b, a}), (\text{b, v}), (\text{a, a}), (\text{a, b}), (\text{a, v}), (\text{v, v}), (\text{v, a}), (\text{v, b})\}, \text{ com } n(E) = 9$$

Partindo dessas considerações, vamos às resoluções.

a. Sendo B o evento formado por todos os pares ordenados de E cujo segundo elemento é v, temos:

$$B = \{(\text{b, v}), (\text{a, v}), (\text{v, v})\}, \text{ com } n(B) = 3$$

Logo:

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(E)} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

Ou seja, a probabilidade de se obter a bola vermelha na segunda retirada é $\frac{1}{3}$.

b. Temos dois eventos a considerar: o evento A, formado por todos os pares ordenados de E cujo primeiro elemento **não** é v, e B (o mesmo do item **a**), formado por todos os pares ordenados de E cujo segundo elemento é v. Assim:

$$A = \{(\text{b, b}), (\text{b, a}), (\text{b, v}), (\text{a, a}), (\text{a, b}), (\text{a, v})\}, \text{ com } n(A) = 6, \text{ e}$$
$$B = \{(\text{b, v}), (\text{a, v}), (\text{v, v})\}, \text{ com } n(B) = 3$$

Note que:

$$A \cap B = \{(\text{b, v}), (\text{a, v})\}, \text{ com } n(A \cap B) = 2$$

Como sabemos que ocorreu o evento A, concluímos que B só pode ocorrer na intersecção de A e B:

Reflexão: A demonstração pode ser feita do seguinte modo:

$P(B/A) = P(B) \Rightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(B)$ (1)
e

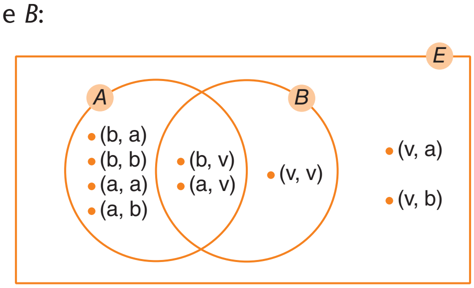
$\frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(B) \Rightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A)$ (2)

De (1) e (2), deduzimos que:

$P(B/A) = P(B) \Rightarrow \frac{(P \cap P)}{P(B)} = P(A)$ (3)

Observando que, por definição:

$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ (4)



FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

Portanto:

$$P(B/A) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Ou seja, a probabilidade de que a segunda bola retirada seja vermelha, dado que a primeira não foi vermelha, é $\frac{1}{3}$.

Reflexão

Como se demonstra que "se $P(B/A) = P(B)$, então $P(A/B) =$ $= P(A)$"?

conluímos de (3) e (4) que $P(B/A) = P(B) \Rightarrow P(A/B) = P(A)$

Comparando os resultados dos itens **a** e **b**, observamos que $P(B/A) = P(B) = \frac{1}{3}$, isto é, considerando ou não a ocorrência do evento A, a probabilidade de ocorrer B é a mesma. Por isso, dizemos que A e B **são eventos independentes**.

Sejam um espaço amostral E, finito e não vazio, e dois eventos A e B de E. Dizemos que A e B são eventos **independentes** se, e somente se:

$$P(B/A) = P(B) \text{ e } P(A/B) = P(A)$$

Notas:

1. Prova-se que: se $P(B/A) = P(B)$ se, e somente se, $P(A/B) = P(A)$. Assim, basta que se verifique uma dessas igualdades para afirmar que dois eventos, A e B, são independentes.
2. Dizemos que dois eventos são **dependentes** se a condição $P(B/A) = P(B)$ e $P(A/B) = P(A)$ não é obedecida. Por exemplo, no problema da introdução deste tópico, se não houvesse a reposição da primeira bola retirada, teríamos $P(B/A) \neq P(B)$; portanto, A e B seriam dependentes.
3. Ainda em relação ao problema introdutório deste tópico, os eventos independentes A e B têm intersecção não vazia. Logo, dizer que dois eventos são independentes não significa dizer que eles sejam mutuamente exclusivos.

31. a. $E = \{(C, C, C), (C, C, K), (C, K, C), (K, C, C), (C, K, K), (K, C, K), (K, K, C), (K, K, K)\}$, em que $n(E) = 8$
b. $A = \{(C, C, K), (C, K, C), (K, C, C), (C, K, K), (K, C, K), (K, K, C)\}$, em que $n(A) = 6$
c. $B = \{(C, C, C), (C, C, K), (C, K, C), (K, C, C)\}$, em que $n(B) = 4$
d. $A \cap B = \{(C, C, K), (C, K, C), (K, C, C)\}$, em que $n(A \cap B) = 3$
e. $P(B) = \frac{n(B)}{n(E)} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ e $P(B/A) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$
f. Sim, os eventos A e B são independentes, pois $P(B) = P(B/A)$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Faça os exercícios no caderno.

29. Dois eventos independentes, A e B, de um espaço amostral E são tais que $P(A) = \frac{3}{5}$ e $P(B) = \frac{2}{3}$. Calcule:

a. $P(A/B)$ 29. a. $\frac{3}{5}$

b. $P(B/A)$ 29. b. $\frac{2}{3}$

c. $P(A \cap B)$ 29. c. $\frac{2}{5}$

d. $P(A \cup B)$ 29. d. $\frac{13}{15}$

30. Os eventos independentes A e B do exercício anterior são mutuamente exclusivos? Por quê?

30. Não, pois $P(A \cap B) \neq 0$.

31. Uma moeda é lançada três vezes, considerando-se resultado o terno ordenado (x, y, z) das faces voltadas para cima obtidas no primeiro, no segundo e no terceiro lançamento, respectivamente.

a. Indicando por C e K as faces cara e coroa, respectivamente, construam o espaço amostral E desse experimento.

b. Representem o evento A formado pelos ternos ordenados de E com pelo menos uma cara e uma coroa.

c. Representem o evento B formado pelos ternos ordenados de E com pelo menos duas caras.

d. Representem o evento $A \cap B$.

e. Calculem as probabilidades: $P(B)$ e $P(B/A)$.

f. Os eventos A e B são independentes? Por quê?

Para retomar os conteúdos estudados, resolva os exercícios complementares 10 e 11.

6. Multiplicação de probabilidades

No lançamento de dois dados, qual é a probabilidade de se obter a face 6 nos dois?

Podemos resolver esse problema recorrendo à definição de probabilidade, como é feito a seguir.

BETO CELLI/ARQUIVO DA EDITORA

O espaço amostral E possui 36 elementos (pares ordenados), e o evento que satisfaz a condição do enunciado é $A = \{(6, 6)\}$ e, portanto, possui um único elemento.

Assim, concluímos que: $P(A) = \frac{n(A)}{n(E)} = \frac{1}{36}$

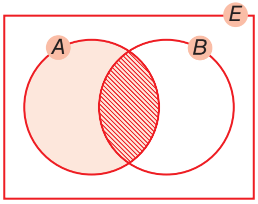
Neste item, apresentaremos uma propriedade, conhecida como **teorema da multiplicação de probabilidades**, que permite resolver esse problema de outro modo. Veremos que $P(A)$ pode ser calculada como o produto da probabilidade de ocorrer a face 6 em um dos dados pela probabilidade de ocorrer a face 6 no outro, isto é:

$$P(A) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

Apresente o teorema da multiplicação de probabilidades, retomando a definição de probabilidade condicional:
Sendo E um espaço amostral equiprovável, finito e não vazio, e A e B dois eventos de E, com $A \neq \varnothing$, vimos que:
$P\left(\frac{B}{A}\right) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$
de onde concluímos a identidade a seguir, conhecida como **teorema da multiplicação de probabilidades**:
$P(A \cap B) = P(A) \cdot P\left(\frac{B}{A}\right)$
Comente que esse teorema é aplicado em problemas que pedem a probabilidade de ocorrer um evento A **e** um evento B, pois o conectivo e indica a intersecção dos eventos e, portanto, indica também a multiplicação de probabilidades. Enfatize que se A e B forem eventos independentes, então esse teorema pode ser indicado, simplesmente, por: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$
Com a participação dos estudantes, refaça os **exercícios resolvidos** de **12** a **14**.

Para entender o teorema, acompanhe o raciocínio a seguir.

Seja E um espaço amostral equiprovável, finito e não vazio. Sejam A e B eventos de E, com $A \neq \varnothing$.



FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

Já foi apresentado que: $P(B/A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$

Assim:

$$\boxed{P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A)}$$

Essa identidade é conhecida como **teorema da multiplicação de probabilidades**.

Esse teorema é aplicado em problemas que pedem a probabilidade de ocorrer um evento A **e** um evento B, pois o conectivo "e" indica a intersecção dos eventos.

Se A e B forem eventos independentes, então:

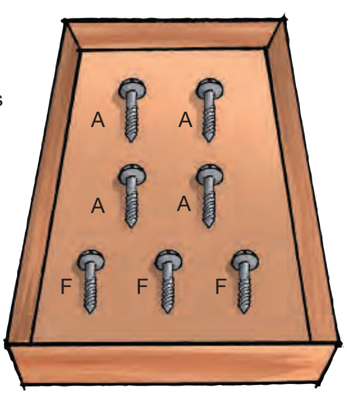
$$\boxed{P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)}$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

11. Uma caixa contém exatamente 7 parafusos: 4 de aço e 3 de ferro.

Retira-se ao acaso um parafuso da caixa, registra-se o metal de que é feito e repõe-se o parafuso na caixa, misturando-o aos demais. Em seguida, retira-se, novamente ao acaso, um parafuso da caixa e registra-se o metal que o compõe.

(Modelo didático sem escala e com cores fantasia.)



GEORGE TUTUMI/ARQUIVO DA EDITORA

Calcule a probabilidade de saírem:

a. o primeiro parafuso de aço e o segundo de ferro;

b. 2 parafusos de metais diferentes.

Resolução

a. Queremos que o primeiro parafuso seja de aço (A) e o segundo seja de ferro (F). A probabilidade de o primeiro parafuso ser de aço é $\frac{4}{7}$, e a probabilidade de o segundo ser de ferro é $\frac{3}{7}$ (observe que o número de parafusos da caixa continua o mesmo na segunda retirada, porque houve reposição do primeiro parafuso).

Assim, a probabilidade de obtermos a sequência

A **e** F é: $P = \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{7} = \frac{12}{49}$

pelo teorema da multiplicação de probabilidades

b. Interessa qualquer uma das duas sequências possíveis de parafusos de metais diferentes: A e F ou F e A. Temos, então:

A **e** F: $P_1 = \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{7} = \frac{12}{49}$

ou

F **e** A: $P_2 = \frac{3}{7} \cdot \frac{4}{7} = \frac{12}{49}$

Como o conectivo "ou" indica a adição das probabilidades, a probabilidade P de saírem parafusos de metais diferentes é dada por:

$$P = P_1 + P_2 = \frac{12}{49} + \frac{12}{49} = \frac{24}{49}$$

12. Uma caixa contém exatamente 7 parafusos: 4 de aço e 3 de ferro. Retiram-se ao acaso 2 parafusos dessa caixa, sucessivamente e **sem reposição**. Calcule a probabilidade de saírem:

a. o primeiro parafuso de aço e o segundo de ferro;

b. 2 parafusos de metais diferentes.

Resolução

a. Queremos que o primeiro parafuso seja de aço (A) e o segundo seja de ferro (F). A probabilidade de o primeiro parafuso ser de aço é $\frac{4}{7}$.

A probabilidade de o segundo ser de ferro é $\frac{3}{6}$ (diminuímos uma unidade no denominador porque não houve reposição do primeiro parafuso retirado).

Assim, a probabilidade de obtermos a sequência

$$\text{A } \mathbf{e} \text{ F é: } P = \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} = \frac{2}{7}$$

pelo teorema da multiplicação de probabilidades

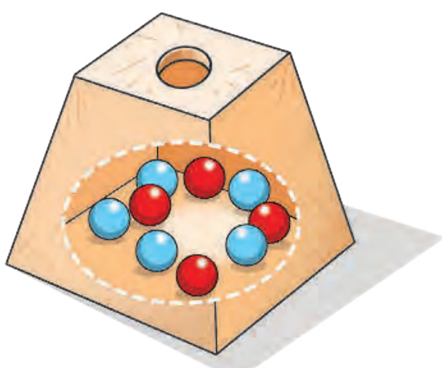
b. Interessa qualquer uma das duas sequências possíveis de parafusos de metais diferentes: A e F ou F e A. Temos, então:

$$\text{A } \mathbf{e} \text{ F}: P_1 = \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} = \frac{2}{7} \ \textbf{ ou } \ \text{F } \mathbf{e} \text{ A}: P_2 = \frac{3}{7} \cdot \frac{4}{6} = \frac{2}{7}$$

Como o conectivo "ou" indica a adição das probabilidades, a probabilidade P de saírem parafusos de metais diferentes é dada por:

$$P = P_1 + P_2 = \frac{2}{7} + \frac{2}{7} = \frac{4}{7}$$

13. Uma urna contém exatamente nove bolas: cinco azuis (A) e quatro vermelhas (V).



a. Retirando **simultaneamente** três bolas da urna, qual é a probabilidade de se obterem duas bolas azuis e uma vermelha?

b. Retirando **sucessivamente**, **sem reposição**, três bolas da urna, qual é a probabilidade de se obterem duas bolas azuis e uma vermelha?

Resolução

a. O espaço amostral E é formado por todos os conjuntos possíveis de três bolas da urna. Assim, temos:

$$n(E) = C_{9,\,3} = \frac{9!}{3!(9-3)!} = \frac{9!}{3! \cdot 6!} = 84$$

O evento A que nos interessa é formado por todos os conjuntos possíveis de três bolas da urna, sendo duas azuis e uma vermelha. Assim, temos:

$$n(A) = C_{5,\,2} \cdot C_{4,\,1} = 10 \cdot 4 = 40$$

Logo:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(E)} = \frac{40}{84} = \frac{10}{21}$$

b. Temos três sequências possíveis, com as respectivas probabilidades:

$$\text{AAV}: P_1 = \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} \cdot \frac{4}{7} = \frac{10}{63} \text{ ou}$$

$$\text{AVA}: P_2 = \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} \cdot \frac{4}{7} = \frac{10}{63} \text{ ou}$$

$$\text{VAA}: P_3 = \frac{4}{9} \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} = \frac{10}{63}$$

Logo, a probabilidade total é:

$$P = P_1 + P_2 + P_3 =$$

$$= \frac{10}{63} + \frac{10}{63} + \frac{10}{63} = \frac{30}{63} = \frac{10}{21}$$

SERRALHEIRO/ARQUIVO DA EDITORA

Propriedade das retiradas simultâneas

Comparando os itens **a** e **b** do exercício resolvido **13**, percebemos que a probabilidade de retirarmos **simultaneamente** as bolas da urna é igual à probabilidade de retirá-las **sucessivamente** e **sem reposição**. Esse resultado pode ser generalizado da seguinte maneira:

Sejam $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k$ elementos de um conjunto A com n elementos, sendo $n \geqslant k$. A probabilidade de se retirarem simultaneamente esses k elementos do conjunto A é igual à probabilidade de retirá-los sucessivamente e sem reposição.

Reforce a nota, incentivando os estudantes a transformarem os problemas de probabilidade que envolvam retiradas simultâneas em problemas equivalentes de retiradas sucessivas e sem reposição. Alerte, no entanto, que ao se supor retiradas sucessivas e sem reposição deve-se considerar a ordem dos elementos retirados.

Notas:

- Sugerimos que todo problema em que for pedida a probabilidade de retiradas simultâneas seja transformado em retiradas sucessivas e sem reposição.
- Nas retiradas sucessivas, a ordem dos elementos retirados deve ser considerada.

No **exercício resolvido 14**, chame a atenção para o fato de que a probabilidade de retirar as bolas simultaneamente é a mesma de retirá-las sucessivamente e sem reposição.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

14. Uma urna contém exatamente 11 bolas: 6 azuis e 5 vermelhas. Retirando-se simultaneamente 4 bolas, qual é a probabilidade de saírem 3 bolas azuis e 1 vermelha?

Resolução

Em vez de retirarmos as bolas **simultaneamente**, resolveremos um problema equivalente, retirando as bolas **sucessivamente e sem reposição**.

Assim, as sequências que nos interessam, com as respectivas probabilidades, são:

$$\text{AAAV: } P_1 = \frac{6}{11} \cdot \frac{5}{10} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{5}{8} = \frac{5}{66} \text{ ou}$$

$$\text{AAVA: } P_2 = \frac{6}{11} \cdot \frac{5}{10} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} = \frac{5}{66} \text{ ou}$$

$$\text{AVAA: } P_3 = \frac{6}{11} \cdot \frac{5}{10} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} = \frac{5}{66} \text{ ou}$$

$$\text{VAAA: } P_4 = \frac{5}{11} \cdot \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} = \frac{5}{66}$$

Logo, a probabilidade total é:

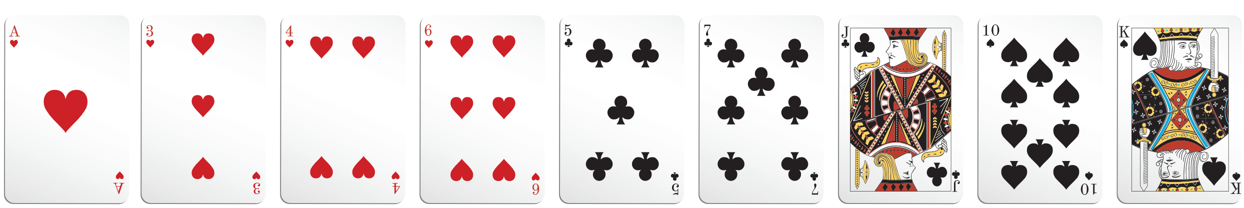
$$P = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = \frac{20}{66} = \frac{10}{33}$$

(*Observação*: Podemos calcular apenas P_1 e multiplicá-la por 4, pois todas as sequências têm a mesma probabilidade.)

15. Um mágico colocou em sua cartola 4 cartas de copas, 3 de paus e 2 de espadas. Em seguida, pediu a uma criança que retirasse simultaneamente 3 cartas da cartola. Calcule a probabilidade de a criança ter tirado:

a. 2 cartas de copas e 1 de paus;

b. 3 cartas de naipes distintos.



ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

Resolução

A probabilidade de a criança retirar as cartas simultaneamente é igual à probabilidade de retirá-las uma a uma, sucessivamente e sem reposição.

Indicando por C, P e E os naipes de copas, paus e espadas, respectivamente, temos:

a. Há três sequências possíveis de naipes: CCP, CPC e PCC, todas com a mesma probabilidade de ocorrer. Assim, a probabilidade P de ocorrer 2 cartas de copas e 1 de paus é dada por:

$$P = 3 \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{3}{7} = \frac{3}{14}$$

b. Há seis sequências de naipes distintos: CEP, CPE, ECP, EPC, PCE, PEC. Note que esse valor é igual ao número de permutações das letras C, P e E: $P_3 = 3! = 6$

Assim, há seis sequências possíveis de naipes distintos, todas com a mesma probabilidade de ocorrer. Logo, a probabilidade P de saírem três naipes distintos é dada por:

$$P = 6 \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} = \frac{2}{7}$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Faça os exercícios no caderno.

32. Uma urna contém precisamente 10 bolas: 3 verdes, 2 pretas e 5 azuis. Retirando 3 bolas da urna, uma de cada vez e com reposição, calcule a probabilidade de saírem:

a. a primeira bola verde, a segunda preta e a terceira azul; **32. a.** $\frac{3}{100}$

b. 3 bolas de cores diferentes; **32. b.** $\frac{9}{50}$

c. 3 bolas azuis. **32. c.** $\frac{1}{8}$

33. Uma urna contém 10 bolas, sendo precisamente: 3 verdes, 2 pretas e 5 azuis. Retirando 3 bolas da urna, uma de cada vez e sem reposição, calcule a probabilidade de saírem:

a. a primeira bola verde, a segunda preta e a terceira azul; **33. a.** $\frac{1}{24}$

b. 3 bolas de cores diferentes; **33. b.** $\frac{1}{4}$

c. 3 bolas azuis. **33. c.** $\frac{1}{12}$

34. Um estojo contém exatamente 9 canetas esferográficas: 5 de tinta azul e 4 de tinta vermelha.
Retirando aleatoriamente 5 canetas desse estojo, sucessivamente e sem reposição, calcule a probabilidade de se obter:

a. 4 de tinta azul e 1 de tinta vermelha; **34. a.** $\frac{10}{63}$

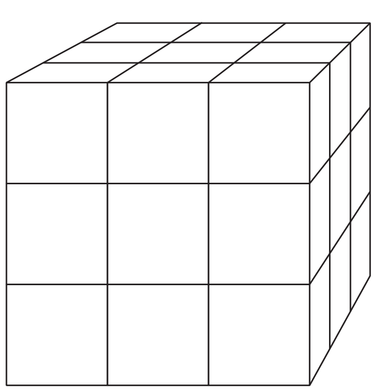
b. 3 de tinta azul e 2 de tinta vermelha; **34. b.** $\frac{10}{21}$

c. 5 de tinta azul; **34. c.** $\frac{1}{126}$

d. pelo menos uma de tinta vermelha. **34. d.** $\frac{125}{126}$

35. Uma moeda é lançada seis vezes sobre uma mesa. Considera-se resultado do experimento a sequência formada pelas faces da moeda voltadas para cima, cara (C) ou coroa (K), na ordem dos lançamentos. Qual é a probabilidade de ocorrer um resultado com 5 caras e 1 coroa? **35.** $\frac{3}{32}$

36. Utilizando 27 cubinhos brancos de mesmo tamanho, forma-se o cubo representado na figura a seguir, cujas seis faces serão pintadas de azul.



ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

Depois da pintura, deixa-se a tinta secar e separam-se os 27 cubinhos. Retirando-se simultaneamente três desses cubinhos, aleatoriamente, qual é a probabilidade de:

36. a. $\frac{1}{9}$

a. um deles não ter nenhuma face pintada? **36. b.** $\frac{8}{9}$

b. cada um deles ter pelo menos uma face pintada?

c. um deles ter três faces pintadas e cada um dos outros dois ter apenas duas faces pintadas?

d. um deles ter apenas uma face pintada, outro ter apenas duas faces pintadas e o outro ter três faces pintadas? **36. d.** $\frac{576}{2.925}$ **36. c.** $\frac{528}{2.925}$

37. b. $\frac{3}{14}$

37. Uma pessoa tem, no bolso, exatamente 2 moedas de R$ 1,00, 4 moedas de R$ 0,50 e 3 moedas de R$ 0,10. Essa pessoa retira, simultaneamente, 3 moedas do bolso. Considerando que a retirada de cada moeda seja equiprovável, calcule a probabilidade de: **37. a.** $\frac{2}{7}$

a. as moedas retiradas terem valores diferentes entre si;

b. saírem duas moedas de R$ 0,50 e uma de R$ 0,10;

c. as moedas retiradas totalizarem R$ 1,20. **37. c.** $\frac{1}{14}$

38. A probabilidade de faltar energia elétrica ao longo de cada mês em um determinado bairro é igual a 10%. Considerando o período de janeiro a março de um mesmo ano, qual é a probabilidade de faltar energia elétrica somente no mês de março?

38. 8,1%

39. Em uma determinada região constatou-se que a probabilidade de um habitante, escolhido aleatoriamente, ser aposentado, é igual a 20%. Escolhendo-se, aleatoriamente, um grupo de 5 habitantes dessa região, qual é a probabilidade de que exatamente três dos indivíduos escolhidos sejam aposentados? **39.** 5,12%

40. (Enem) Um morador de uma região metropolitana tem 50% de probabilidade de atrasar-se para o trabalho quando chove na região. Caso não chova, sua probabilidade de atraso é de 25%. Para um determinado dia, o serviço de meteorologia estima em 30% de probabilidade da ocorrência de chuva nessa região. Qual é a probabilidade de esse morador se atrasar para o serviço no dia para o qual foi dada a estimativa de chuva? **40.** alternativa **c**

a. 0,075

b. 0,150

c. 0,325

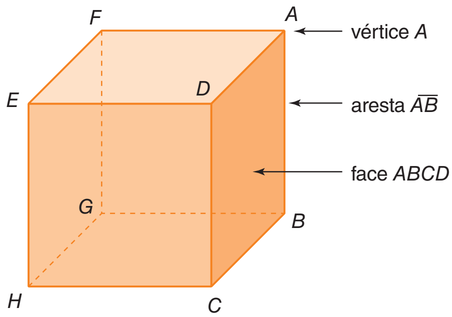
d. 0,600

e. 0,800

41. Elabore um problema envolvendo o teorema da multiplicação de probabilidades associado a alguma situação que envolva quatro retiradas sucessivas. Em seguida, troque o problema elaborado com um colega para que um resolva o problema elaborado pelo outro. Por fim, analisem e discutam as resoluções.

41. Resposta pessoal.

42. Reúna-se em dupla para resolver cada um dos itens a seguir de duas maneiras: primeiro, aplicando a definição de probabilidade; depois, aplicando o teorema da multiplicação de probabilidades.



FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

a. Sorteando-se simultaneamente dois vértices distintos do cubo *ABCDEFGH*, qual é a probabilidade de que os escolhidos sejam *A* e *B*? **42. a.** $\frac{1}{28}$

b. Sorteando-se simultaneamente três vértices distintos do cubo *ABCDEFGH*, qual é a probabilidade de que os escolhidos sejam *A*, *B* e *C*? **42. b.** $\frac{1}{56}$

c. Sorteando-se simultaneamente dois vértices distintos do cubo *ABCDEFGH*, qual é a probabilidade de que sejam extremos de uma mesma aresta? **42 c.** $\frac{3}{7}$

d. Sorteando-se simultaneamente duas arestas distintas do cubo *ABCDEFGH*, qual é a probabilidade de que sejam paralelas? **42. d.** $\frac{3}{11}$

Para retomar os conteúdos estudados, resolva os exercícios complementares 12 a 15.

Proponha aos estudantes que aprofundem o tema proposto no **Trabalho e juventudes** a fim de que pesquisem mais sobre como os conhecimentos matemáticos são utilizados por engenheiros de confiabilidade. Incentive-os a listar outros profissionais que utilizam conhecimentos estatísticos e o mercado de trabalho em que atuam.

TRABALHO E JUVENTUDES — Engenheiro de confiabilidade

Quando compramos um produto ou contratamos um determinado serviço, esperamos que esses produtos e serviços sejam confiáveis, ou seja, que funcionem adequadamente por um determinado período. Você sabe qual é o profissional que atua para garantir essa confiabilidade?

O engenheiro de confiabilidade é um profissional da área de Exatas que trabalha com a previsão, prevenção e gerenciamento de falhas em diferentes produtos, possibilitando assim um aumento da eficiência de processos de produção de uma indústria, por exemplo. Ele identifica, por exemplo, o menor tempo em que as máquinas precisarão ser desligadas, consertadas ou apresentarão algum defeito, avaliando o melhor momento para que uma máquina seja substituída ou consertada e impacte da menor maneira o possível a produção industrial. O objetivo é garantir que um produto atenda, de forma consistente, às expectativas do cliente para executar a função ou as funções pretendidas em um determinado período de tempo sob condições especificadas.

Conhecimentos estatísticos e de probabilidade estão sempre presentes no dia a dia de um engenheiro de confiabilidade, pois é utilizando cálculos e análises probabilísticas que esse profissional pode ter um melhor entendimento de até quando conseguirá utilizar algum produto antes que este apresente defeitos, ou ainda, traçar possíveis soluções para imprevistos que possam ocorrer no cotidiano.

Quer saber mais sobre a profissão de engenheiro de confiabilidade? Faça uma pesquisa na internet e compartilhe com os colegas um resumo das informações que você obteve.

ROMAN SAMBORSKYI/SHUTTERSTOCK

As pessoas engenheiras de confiabilidade utilizam conhecimentos avançados de probabilidade.

Trabalho e juventudes: Pesquisa pessoal.

Para complementar o trabalho com essa seção, incentive os estudantes acessarem o **Vídeo: Estatuto da Pessoa Idosa** a fim de conhecerem aspectos desse documento e de abordar o **ODS 3**.

MATEMÁTICA SEM FRONTEIRAS

Ao estudar a expectativa de vida e a probabilidade de morte, pode-se propor aos estudantes que conversem sobre o processo de envelhecimento e o respeito e valorização da pessoa idosa.

Expectativa de vida

OBJETO DIGITAL **Vídeo: Estatuto da Pessoa Idosa**

ODS 3

Periodicamente, o IBGE (Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística) faz projeções socioeconômicas sobre a população brasileira. Entre outros resultados, esse estudo apresenta dois importantes indicadores: a expectativa de vida e a probabilidade de morte, definidos a seguir.

- A **expectativa de vida** (ou esperança de vida ou vida média) é o número médio de anos que um indivíduo de idade x esperaria viver a partir dessa idade. Particularmente, se $x = 0$, tem-se a expectativa de vida ao nascimento.
- A **probabilidade de morte** entre duas idades inteiras, x e $x + n$, em ano, é o quociente entre o número de óbitos ocorridos entre as pessoas dessas idades e o número de pessoas vivas na idade x.

No trabalho com essa seção, pode-se promover a integração com a área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas por meio da participação do professor de Geografia. A temática permite explorar as projeções feitas pelo IBGE e os aspectos envolvidos nesse estudo sobre a população brasileira em âmbito nacional e na região dos estudantes. Sugerimos que oriente os estudantes a lerem o texto e resolverem, em grupos, os exercícios ao final da seção.

SVETIKD/E+/GETTY IMAGES

Segundo o IBGE, a expectativa de vida dos brasileiros ao nascer será de 81,3 anos em 2050.

Em políticas públicas, esses dois indicadores são muito importantes. Por exemplo, se uma região apresenta alta probabilidade de morte na infância, isso pode indicar desnutrição, deficiência no saneamento básico, deficiência no atendimento médico-hospitalar etc. Nesses casos, o poder público pode intervir melhorando o acesso à rede hospitalar, incrementando a merenda escolar e promovendo a ampliação e/ou a instalação da rede de água e esgotos. Se a região apresenta alto índice de expectativa de vida, isso exigirá mais investimentos na área de saúde da pessoa idosa, terá reflexos na previdência social etc.

Esses indicadores auxiliam também nas áreas do setor privado. As empresas que trabalham com seguro de vida, por exemplo, precisam saber qual é a probabilidade de o segurado morrer durante o período de vigência do seguro.

Para explicar melhor, vamos considerar a tabela, que apresenta um estudo hipotético da probabilidade de morte, em determinada região, para três faixas etárias.

Probabilidade de morte

Idade (em anos)	Probabilidade
De 20 a 29	0,015
De 30 a 39	0,023
De 40 a 49	0,040

Elaborado para fins didáticos.

Oriente os estudantes a consultar as páginas 6 e 7 para saber mais sobre este e os demais Objetivos de Desenvolvimento Sustentável.

O contexto da **atividade 2** possibilita uma atividade interdisciplinar com a área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas.
De acordo com projeções do IBGE, o Brasil deverá atingir o "crescimento populacional zero" por volta de 2039. A partir desse ano, espera-se que a população comece a diminuir devido à queda nas taxas de fecundidade e ao aumento da mortalidade em uma população envelhecida. Com o envelhecimento da população, os governos precisam adotar várias medidas de planejamento que envolvem questões de saúde pública, mercado de trabalho e de previdência social. Algumas consequências para os jovens de hoje que o envelhecimento da população traz estão associadas à pressão sobre os sistemas de saúde e de previdência, mudanças no mercado de trabalho e a importância de um planejamento de carreira, financeiro e de saúde preventiva.

Com as probabilidades de morte nessas faixas etárias consecutivas, podemos calcular a probabilidade de uma pessoa de 20 anos, moradora dessa região, estar viva aos 49 anos do seguinte modo:

$$P = \overbrace{(1 - 0{,}015)}^{\text{probabilidade de a pessoa viver de 20 a 29 anos}} \cdot \overbrace{(1 - 0{,}023)}^{\text{probabilidade de a pessoa viver de 30 a 39 anos}} \cdot \overbrace{(1 - 0{,}040)}^{\text{probabilidade de a pessoa viver de 40 a 49 anos}}$$

$$P = 0{,}985 \cdot 0{,}977 \cdot 0{,}960 \approx 0{,}924 = 92{,}4\%$$

Atividades

Faça as atividades no caderno.

1. Reúna-se com um colega e respondam às seguintes questões, de acordo com a tabela apresentada no texto.

a. Qual é a probabilidade de uma pessoa de 20 anos dessa região estar viva aos 39 anos? **1. a.** $\approx 0{,}962 = 96{,}2\%$

b. Qual é a probabilidade de uma pessoa de 30 anos dessa região estar viva aos 49 anos? **1. b.** $\approx 0{,}938 = 93{,}8\%$

c. Qual é a probabilidade de uma pessoa de 20 anos dessa região morrer antes dos 50 anos? **1. c.** $\approx 7{,}6\%$

2. Leia o texto a seguir e, depois, converse com o professor e os colegas sobre as questões propostas.

Com o aumento da expectativa de vida dos cidadãos, desafios são enfrentados pelo governo no que diz respeito à criação de políticas públicas que supram a necessidade dessa população envelhecida. Contel [Fabio Betioli Contel, do Departamento de Geografia Humana da Faculdade de Filosofia, Letras e Ciências Humanas (FFLCH) da USP] disserta sobre esse impacto: "Os principais fatores que preocupam desse aumento da expectativa de vida são, em primeiro lugar, a Previdência Social pública. As pessoas começam a viver mais, elas pagam a Previdência Social até uma certa época e depois elas vão aproveitar a sua velhice com a sua aposentadoria. Essa conta é cada vez mais complicada para ser fechada em função das pessoas estarem vivendo mais".

[...] Outro fator que também gera impacto para o governo é a diminuição do mercado de trabalho. Com indivíduos fora da idade ativa, entre 18 a 55 anos, o País precisa encontrar diferentes formas de utilizar a população em idade de aposentadoria.

"Não é uma notícia ruim, mas é algo que surpreende, porque existe toda uma infraestrutura criada, existe toda uma dimensão das cidades para esse número de população que ainda vai crescer. Tudo depende de como as políticas públicas vão ser encaminhadas para que essa diminuição do crescimento não se torne um ônus para o País.", conclui.

BRASIL terá redução populacional antes do previsto, aponta IBGE. **Jornal da USP**, 10 set. 2024. Disponível em: https://jornal.usp.br/?p=802744. Acesso em: 22 out. 2024.

a. Com base no novo perfil da população, que providências de planejamento os governos devem tomar quanto à saúde pública, ao mercado de trabalho e à previdência social?

b. Que consequências o envelhecimento da população traz para o futuro do jovem de hoje? Que providências de planejamento ele deve tomar para garantir uma boa qualidade de vida?

Antes da resolução do **exercício complementar 1**, proponha que o professor de Biologia comente sobre algumas das grandes epidemias e pandemias que acometeram a humanidade, como peste de Atenas, peste negra, gripe espanhola, Aids, Ebola, H1N1 e, recentemente, covid-19. O texto **Grandes epidemias da história** (disponível em: https://brasilescola.uol.com.br/curiosidades/grandes-epidemias-da-historia.htm. Acesso em: 30 set. 2024) também traz informações interessantes acerca do tema.

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

Faça os exercícios no caderno.

1. (Enem) Todo o país passa pela primeira fase de campanha de vacinação contra a gripe suína (H1N1). Segundo um médico infectologista do Instituto Emílio Ribas, de São Paulo, a imunização "deve mudar", no país, a história da epidemia. Com a vacina, de acordo com ele, o Brasil tem a chance de barrar uma tendência do crescimento da doença, que já matou 17 mil no mundo. A tabela apresenta dados específicos de um único posto de vacinação.

Campanha de vacinação contra a gripe suína

Datas da vacinação	Público-alvo	Quantidade de pessoas vacinadas
8 a 19 de março	Trabalhadores da saúde e indígenas	42
22 de março a 2 de abril	Portadores de doenças crônicas	22
5 a 23 de abril	Adultos saudáveis entre 20 e 29 anos	56
24 de abril a 7 de maio	População com mais de 60 anos	30
10 a 21 de maio	Adultos saudáveis entre 30 e 39 anos	50

Disponível em: http://img.terra.com.br. Acesso em: 26 abr. 2010 (adaptado).

Escolhendo-se aleatoriamente uma pessoa atendida nesse posto de vacinação, a probabilidade de ela ser portadora de doença crônica é: **1.** alternativa **c**

a. 8%. **b.** 9%. **c.** 11%. **d.** 12%. **e.** 22%.

2. A população mundial atingiu a marca de 8 bilhões de pessoas no dia 15 de novembro de 2022, de acordo com a Organização das Nações Unidas (ONU). Escolhendo-se aleatoriamente uma daquelas pessoas, a probabilidade de que a pessoa escolhida fosse brasileira era de $\frac{10,765}{400}$, aproximadamente. Calcule um valor aproximado da população brasileira no dia 15 de novembro de 2022. **2.** 215.300.000 pessoas

RENATO S. CERQUEIRA/ATO PRESS/FOLHAPRESS

Pessoas no comércio da rua 25 de Março, em São Paulo (SP). Foto de 2024.

3. Em determinado ano foram roubados 350 carros em uma cidade, sendo o número de carros roubados da marca X 10% maior que o número de carros roubados da marca Y, e essas duas marcas juntas correspondem a 60% do número de unidades roubadas naquele ano. Na delegacia de roubos, o delegado escolheu, aleatoriamente, uma ficha de um dos carros roubados naquele ano. Calcule a probabilidade de que a ficha escolhida seja de um carro da marca Y. **3.** $\frac{2}{7}$

4. Um agricultor distribuiu sua colheita de tomates em 18 caixas, com pelo menos 120 e no máximo 136 tomates em cada caixa. Calcule a probabilidade de haver pelo menos duas dessas caixas com o mesmo número de tomates. **4.** 100%

5. a. Resposta no final do livro.

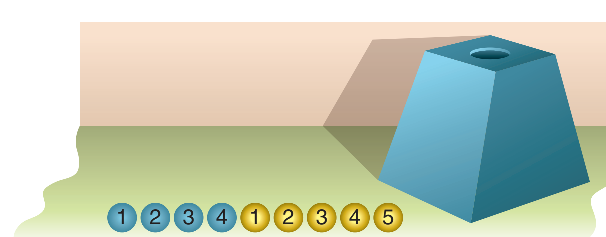
5. A avó paterna de Marcelo mora em um bairro a oeste da cidade e a avó materna mora em um bairro a leste. Semanalmente ele visita uma delas, mas nunca as duas na mesma semana. Para essa visita semanal, Marcelo parte de uma estação do metrô no centro da cidade, em horários aleatórios. Sabendo que para cada um dos sentidos, oeste e leste, há trens de 4 em 4 minutos, que circulam ininterruptamente e rigorosamente nos horários, o rapaz toma o trem que passar primeiro, visitando a avó da região de destino do trem.

Em uma festa de fim de ano, quando as avós se encontraram, a avó paterna reclamou que foi visitada por Marcelo em apenas 25% das semanas do ano, enquanto a avó materna vangloriou-se de ter sido visitada pelo neto em 75% das semanas do ano.

a. Explique: como esses percentuais são possíveis?

b. De acordo com suas conclusões no item **a**, suponha que um trem para oeste parta às 8 h 20 min da estação do centro da cidade. Qual o provável horário do próximo trem que parte dessa estação para leste? **5. b.** 8 h 23 min

6. Em uma urna foram colocadas 4 bolas azuis, numeradas de 1 a 4, e 5 bolas amarelas, numeradas de 1 a 5.



ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

Sorteando uma bola dessa urna, qual é a probabilidade de ela ser azul ou ter número ímpar? (Resolva esse problema de dois modos: primeiro, aplicando o teorema da adição de probabilidades; depois, aplicando apenas a definição de probabilidade.) **6.** $\frac{7}{9}$

7. Entre os automóveis estocados no pátio de uma montadora, escolhe-se um ao acaso. A probabilidade de que o automóvel escolhido tenha freio ABS é $\frac{5}{8}$, a probabilidade de que tenha direção hidráulica é $\frac{2}{3}$, e a probabilidade de que tenha freio ABS ou direção hidráulica é $\frac{5}{6}$. Calcule a probabilidade de esse automóvel ter freio ABS e direção hidráulica. **7.** $\frac{11}{24}$

8. (Enem) Numa escola com 1.200 alunos foi realizada uma pesquisa sobre o conhecimento desses em duas línguas estrangeiras, inglês e espanhol. Nessa pesquisa constatou-se que 600 alunos falam inglês, 500 falam espanhol e 300 não falam qualquer um desses idiomas. Escolhendo-se um aluno dessa escola ao acaso e sabendo-se que ele não fala inglês, qual a probabilidade de que esse aluno fale espanhol?

8. alternativa **a**

a. $\frac{1}{2}$

b. $\frac{5}{8}$

c. $\frac{1}{4}$

d. $\frac{5}{6}$

e. $\frac{5}{14}$

9. Em uma sala estão reunidos homens e mulheres, cada um atuando em apenas uma das profissões: engenheiro(a) civil, economista e administrador(a) de empresas. Dentre os homens, 3 são administradores, 8 são engenheiros e os demais economistas; dentre as mulheres, 7 são administradoras, 8 economistas e as demais engenheiras. Um desses profissionais foi escolhido ao acaso para ler a pauta da reunião, sendo $\frac{1}{2}$ a probabilidade de ter sido escolhida uma mulher. Dado que a probabilidade de que a pessoa escolhida atue em engenharia, se for um homem, é $\frac{8}{13}$, calcule o número de homens e o número de mulheres na reunião.

9. 20 homens e 20 mulheres.

10. Um dado é lançado duas vezes, considerando-se como resultado o par ordenado (x, y), em que x é o número de pontos obtidos na face voltada para cima no primeiro lançamento e y é o número de pontos obtidos na face voltada para cima no segundo lançamento.

a. Calcule o número de elementos do espaço amostral E desse experimento. **10. a.** 36

b. Determine o evento A formado pelos pares ordenados de E cujo primeiro elemento é 3. Calcule $P(A)$.

c. Determine o evento B formado pelos pares ordenados de E cujo segundo elemento é 2. Calcule $P(B)$.

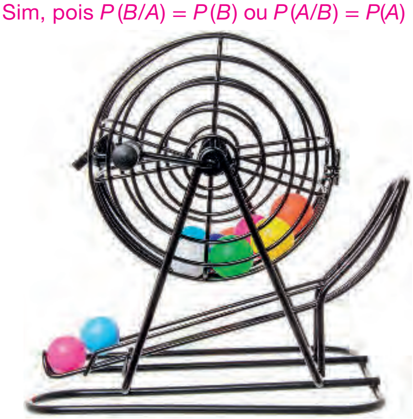
10. b. $A = \{(3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6)\}$; $P(A) = \frac{1}{6}$

d. Calcule a probabilidade de se obter a face com 2 pontos no segundo lançamento do dado, sabendo que no primeiro lançamento obteve-se a face com 3 pontos. **10. d.** $\frac{1}{6}$

e. Os eventos A e B são independentes? Por quê?

11. Um experimento consiste em sortear uma bolinha de um globo que contém 10 bolinhas, identificadas com os números naturais de 1 a 10, havendo um único número em cada bolinha.

10. e. Sim, pois $P(B/A) = P(B)$ ou $P(A/B) = P(A)$



PHOTOSYNC/SHUTTERSTOCK

Supondo que todas as bolinhas tenham a mesma probabilidade de ser sorteadas, considere os seguintes eventos relacionados a esse experimento:

A. O número da bolinha sorteada é par.

B. O número da bolinha sorteada é maior que 6.

C. O número da bolinha sorteada é múltiplo de 5.

Responda aos itens seguintes. **11. a.** Sim, são independentes.

a. A e B são eventos independentes? Justifique.

b. B e C são eventos independentes? Justifique.

11. b. Não são independentes.

12. Em um programa de auditório, o apresentador colocou 3, 4, 3, 3 e 2 fichas nas urnas A, B, C, D e E, respectivamente, tendo cada ficha o desenho de um carro ou de uma banana. Em cada uma das duas urnas A e D, foram colocadas exatamente duas fichas com o desenho do carro e, em cada uma das demais, apenas uma ficha com o carro foi colocada.

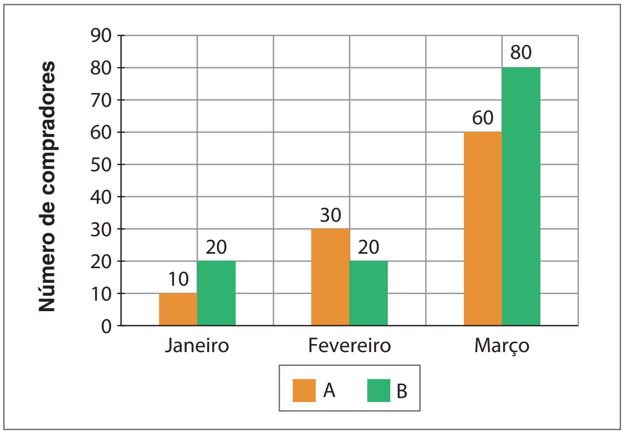
Um participante, concorrendo a um carro 0 km, deverá retirar aleatoriamente uma única ficha da urna A. Se ela tiver o desenho de uma banana, o participante estará eliminado; se apresentar o desenho do carro, ele passará para a urna seguinte, retirando uma única ficha. Se tirar o carro na urna B, passará para a urna C, e assim por diante, valendo as mesmas regras para cada urna, até se esgotarem todas.

Se o participante retirar uma ficha com o carro em todas as urnas, ele ganhará o carro. Qual é a probabilidade de o participante perder o carro? **12.** $\frac{53}{54} \approx 98\%$

10. c. $B = \{(1, 2), (2, 2), (3, 2), (4, 2), (5, 2), (6, 2)\}$; $P(B) = \frac{1}{6}$

O contexto do **exercício complementar 14** possibilita abordar o **TCT Saúde** e a **competência geral 8**. Incentive os estudantes a pesquisarem sobre o assunto e apresentarem como podem prevenir a osteoporose o outras doenças que, geralmente, são associadas aos processos de envelhecimento, mas que podem ser atenuadas com hábitos de vida saudável.

13. (Enem) Uma loja acompanhou o número de compradores de dois produtos, A e B, durante os meses de janeiro, fevereiro e março do ano anterior. Com isso, obteve este gráfico:



ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

A loja sorteará um brinde entre os compradores do produto A e outro brinde entre os compradores do produto B. Qual a probabilidade de que os dois sorteados tenham feito suas compras em fevereiro do ano anterior? **13.** alternativa **a**

a. $\frac{1}{20}$ **c.** $\frac{5}{22}$ **e.** $\frac{7}{15}$

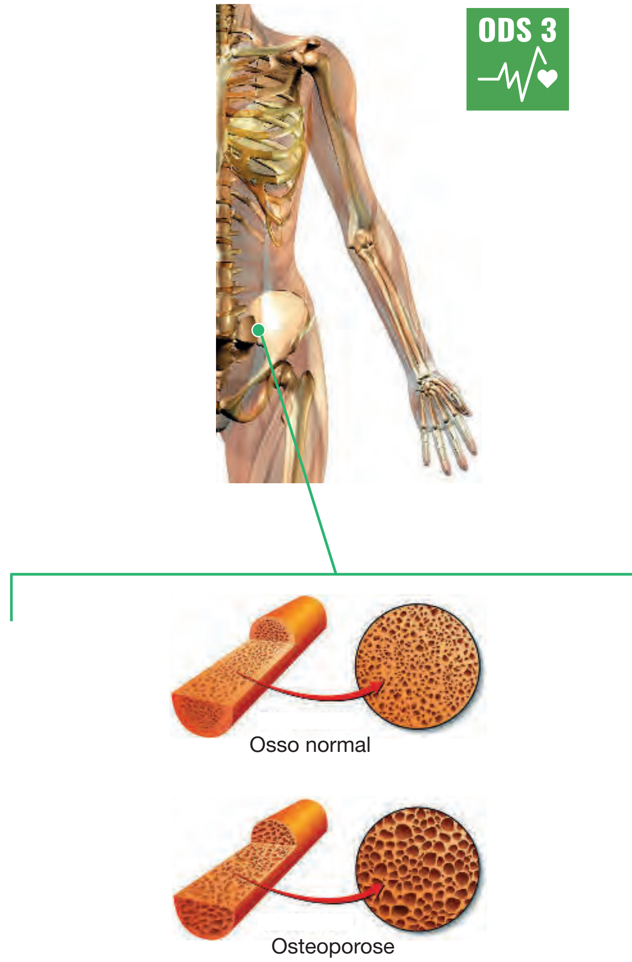
b. $\frac{3}{342}$ **d.** $\frac{6}{25}$

14. Se uma pessoa realiza pouca atividade física ou ingere pouco cálcio durante as primeiras décadas de vida, ela corre o risco de sofrer uma acentuada diminuição de sua massa óssea a partir dos 50 anos de idade. Essa diminuição da massa óssea é chamada de osteoporose, e suas consequências são o enfraquecimento e a fragilidade dos ossos, com maior possibilidade de fraturas, causadas até por pequenas quedas ou traumas. As mulheres, em consequência da diminuição dos níveis dos hormônios sexuais femininos após a menopausa, têm maior risco que os homens de desenvolver essa doença. **14. b.** $\frac{16}{39} \approx 41\%$ **14. c.** $\frac{19}{39} \approx 48{,}7\%$

"É comum associar a osteoporose à velhice, já que a doença, caracterizada pela perda de massa óssea e deterioração esquelética, é mais comum na faixa etária acima dos 50 anos – uma em cada três mulheres nesse grupo sofre dela; entre os homens, a proporção é de um em cada cinco. Mas isso não quer dizer que pessoas com menos idade estão livres. A enfermidade pode afetar também os mais jovens, e mesmo que não afete, a prevenção deve começar bem mais cedo do que se pensa."

MEDEIROS, T. Prevenção da osteoporose deve começar na juventude. **Portal Drauzio Varella.** 21 out. 2012; Disponível em: https://drauziovarella.uol.com.br/mulher/prevencao-da-osteoporose-deve-comecar-na-juventude/. Acesso em: 17 jul. 2024.

ODS 3



LINDA BUCKLIN/SHUTTERSTOCK

ROB3000/SHUTTERSTOCK

Representação de um osso normal e de um osso com osteoporose. Modelo didático sem escala e com cores fantasia.

Considere uma amostra aleatória de 80 mulheres na pós-menopausa e 50 homens acima dos 50 anos. Escolhendo-se uma pessoa ao acaso dessa amostra: **14. a.** $\frac{1}{13} \approx 7{,}7\%$

a. qual é a probabilidade de que a pessoa escolhida seja um homem que sofra de osteoporose?

b. qual é a probabilidade de que a pessoa escolhida seja uma mulher que não sofra de osteoporose?

c. qual é a probabilidade de que a pessoa escolhida seja um homem que sofra de osteoporose ou uma mulher que não sofra dessa doença?

15. Em um jogo envolvendo sorteio, o jogador assinala em um cartão 5, 6 ou 7 números escolhidos entre os números de 01 a 80. Depois de os outros jogadores fazerem suas escolhas, são sorteados 5 desses oitenta números. Os jogadores que tiverem assinalado no cartão os cinco números sorteados dividem o prêmio máximo.
Elabore um algoritmo em português estruturado que possibilite determinar qual é a probabilidade de serem sorteados todos o números de um cartão com escolha mínima (5 números) e de um com escolha máxima (7 números). **15.** Resposta no final do livro.

ANÁLISE DA RESOLUÇÃO

Na *Análise da resolução*, vamos explorar determinados erros cometidos com frequência em alguns tópicos de Matemática. Uma questão resolvida é apresentada, em que um erro é cometido. Vocês devem apontar o erro e corrigir a resolução. Só leiam o comentário, na seção *Respostas*, depois de terem tentado descobrir o erro e corrigi-lo.

Um estudante resolveu o exercício conforme a reprodução a seguir. Um erro foi cometido. Apontem o erro e refaçam a resolução no caderno, corrigindo-a.

Exercício

Em uma caixa, A, havia 3 peças defeituosas e 5 perfeitas; em outra caixa, B, havia 2 peças defeituosas e 3 perfeitas. Duas peças foram retiradas aleatoriamente, uma de cada caixa, constatando-se que apenas uma das peças era defeituosa. Qual é a probabilidade de que a peça defeituosa tenha sido retirada da caixa A?

Resolução

Sejam:

D: as peças defeituosas

P: as peças perfeitas

Caixa A	Caixa B
D D D	D D
P P P P P	P P P

• probabilidade de retirar uma peça defeituosa da caixa A: $\frac{3}{8}$

• probabilidade de retirar uma peça perfeita da caixa B: $\frac{3}{5}$

Como apenas uma das duas peças retiradas é defeituosa, a probabilidade de que ela tenha vindo da caixa A é dada por:

$$\frac{3}{8} \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{40}$$

Análise da resolução: Os estudantes deverão corrigir a resolução. Esta seção tem como objetivos despertar o senso crítico, estimular a investigação e levar a aprender com os erros.

Sendo:
$E = \{(x, y) \mid x$ é a peça da caixa A e y é a peça da caixa B$\}$
$G = \{(m, n) \in E \mid$ uma das duas peças é perfeita e a outra é defeituosa$\}$
$H = \{(r, s) \in E \mid s$ é a peça perfeita da caixa B$\}$
O estudante deveria ter calculado a probabilidade condicional $P(H/G)$, mas ele calculou $P(H \cap G)$, errando, portanto, a resposta.
Para o cálculo de $P(H/G)$, observamos que $n(G) = 5 \cdot 2 + 3 \cdot 3 = 19$ e $n(G \cap H) = 3 \cdot 3 = 9$.
Logo:

$$P(H/G) = \frac{n(G \cap H)}{n(G)} = \frac{9}{19}$$

VERIFIQUE O QUE APRENDEU NO CAPÍTULO 1

Além do processo de avaliação promovido pelo professor, é importante que você, estudante, realize uma autoavaliação. O objetivo desse instrumento é mensurar seu nível de aprendizagem em relação ao assunto desenvolvido no capítulo. Para ajudá-lo nessa tarefa, apresentamos as seguintes questões.

1. (Enem) José, Paulo e Antônio estão jogando dados não viciados, nos quais, em cada uma das seis faces, há um número de 1 a 6. Cada um deles jogará dois dados simultaneamente. José acredita que, após jogar seus dados, os números das faces voltadas para cima lhe darão uma soma igual a 7. Já Paulo acredita que sua soma será igual a 4 e Antônio acredita que sua soma será igual a 8. **1.** alternativa **d**

Com essa escolha, quem tem a maior probabilidade de acertar sua respectiva soma é

a. Antônio, já que sua soma é a maior de todas as escolhidas.

b. José e Antônio, já que há 6 possibilidades tanto para escolha de José quanto para a escolha de Antônio, e há apenas 4 possibilidades para a escolha de Paulo.

c. José e Antônio, já que há 3 possibilidades tanto para a escolha de José quanto para a escolha de Antônio, e há apenas 2 possibilidades para a escolha de Paulo.

d. José, já que há 6 possibilidades para formar sua soma, 5 possibilidades para formar a soma de Antônio e apenas 3 possibilidades para formar a soma de Paulo.

e. Paulo, já que sua soma é a menor de todas.

2. Um grupo de pessoas é formado por 5 homens e 4 mulheres. Sorteando-se quatro pessoas desse grupo, em qualquer ordem, qual é a probabilidade de serem sorteados dois homens e duas mulheres? 2. $\frac{10}{21}$

3. Numa urna foram colocadas 30 bolas: 10 bolas azuis numeradas de 1 a 10, 15 bolas brancas numeradas de 1 a 15 e 5 bolas cinza numeradas de 1 a 5. Ao retirar-se aleatoriamente uma bola da urna, calcule a probabilidade de obter-se uma bola branca ou com número par. Resolva esse problema de duas maneiras: 1ª maneira, usando o teorema da adição de probabilidades; 2ª maneira, usando apenas a definição de probabilidade.

a. $\frac{29}{30}$ b. $\frac{7}{15}$ c. $\frac{1}{2}$ d. $\frac{11}{15}$ e. $\frac{13}{15}$

3. alternativa **d**

4. Sorteando-se dois vértices distintos do octógono convexo, calcule a probabilidade de que eles:
   a. sejam extremos de um mesmo lado do polígono (resolva esse item de duas maneiras: 1ª maneira aplicando a definição de probabilidade; 2ª maneira aplicando o teorema da multiplicação de probabilidades); 4. a. $\frac{2}{7}$
   b. sejam extremos de uma mesma diagonal do polígono. 4. b. $\frac{5}{7}$

As atividades propostas nessa seção podem compor um instrumento de avaliação e de autoavaliação da aprendizagem. Incentive os estudantes a resolverem e, depois, comparar as respostas e estratégias de resolução com os colegas.

Ferramenta de estudo

Ao término da resolução das questões, você deve copiar no caderno a ficha a seguir, que lhe fornecerá uma visão geral sobre o seu desempenho neste capítulo. Você deve assinalar com um X a cada célula se a resposta for "sim".

A ficha de autoavaliação é apresentada neste momento, mas você pode copiá-la e preenchê-la sempre que considerar necessário verificar sua aprendizagem, adequando o número de colunas ao número de exercícios.

Se teve dificuldades ou não resolveu algum exercício, retome os conteúdos abordados no capítulo. Após algumas tentativas, anote as dúvidas e converse com um colega que possa ajudá-lo. Se mesmo assim a dúvida persistir, pergunte ao professor na aula seguinte. Gerencie bem seu tempo de estudo em casa e estabeleça metas diárias alcançáveis, planejando seus estudos, passo a passo.

Ficha de Autoavaliação

Sobre o exercício...	1	2	3	4
Li, compreendi o texto, identifiquei os dados principais do problema e consegui resolvê-lo.				
Li, compreendi o texto, identifiquei os dados principais do problema, mas não consegui resolvê-lo sozinho. Pedi ajuda.				
Li, compreendi o texto, identifiquei os dados principais do problema, mas não consegui resolvê-lo sozinho. Não pedi ajuda. Até agora não sei resolvê-lo.				
Tive dificuldade para compreender o texto do problema e não soube relacionar os dados. Pedi ajuda.				
Tive dificuldade para compreender o texto do problema e não soube relacionar os dados. Não pedi ajuda. Até agora não sei resolvê-lo.				
Não consegui resolvê-lo.				

MODELO

ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

O objetivo desse infográfico é estimular um debate sobre o Enem, especialmente em relação à nota média na prova de Matemática em cada ano. O infográfico pode ser explorado em parceria com o professor de Geografia, envolvendo a área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas, ao discutir aspectos sociais e econômicos que podem influenciar na participação dos estudantes no Enem e nos resultados obtidos por eles em uma análise regional e nacional.

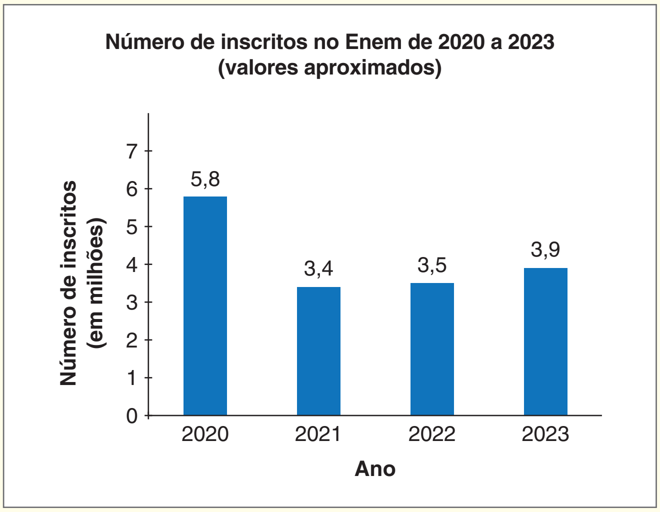
CAPÍTULO 2

Estatística

FOTOS: SWAVO/SHUTTERSTOCK; VECTOR TRADITION/SHUTTERSTOCK

O Enem

O Exame Nacional do Ensino Médio (Enem) é uma avaliação desenvolvida pelo Ministério da Educação. Em parceria com o governo federal, o programa visa examinar as competências e as habilidades dos estudantes.



ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

Elaborado com base em: INSTITUTO NACIONAL DE ESTUDOS E PESQUISAS EDUCACIONAIS ANÍSIO TEIXEIRA. **3,9 milhões estão inscritos no Enem 2023**. Brasília, DF: Inep, 2023. Disponível em: https://www.gov.br/inep/pt-br/assuntos/noticias/enem/3-9-milhoes-estao-inscritos-no-enem-2023. Acesso em: 29 jul. 2024.

JOSE ALDENIR/THENEWS2/ZUMA PRESS/ALAMY/FOTOARENA

Estudantes aguardam abertura dos portões em local de prova do Enem. Natal, RN. Foto de 2022.

Apresente o ***Podcast:* O que é TRI e como ela afeta sua nota na prova do Enem?** e converse com os estudantes a respeito da Teoria da Resposta ao Item, utilizada em provas como o Enem.

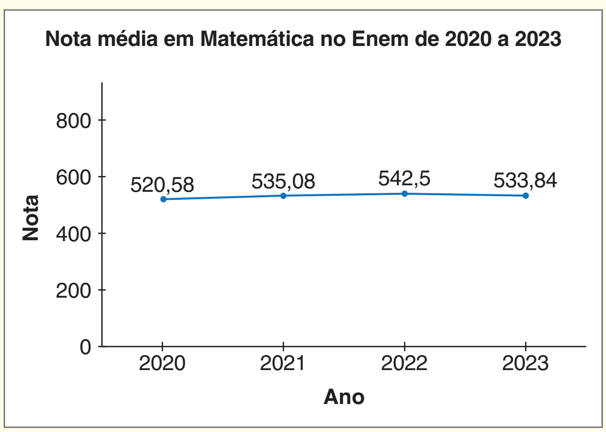
Nota de corte

A nota de corte para o ingresso em determinado curso superior é a menor nota que o candidato deve obter no Enem para ficar entre os potencialmente selecionados.

Atenção!

A nota de corte é apenas uma referência para auxiliar o candidato no monitoramento de sua inscrição, não sendo garantia de seleção para a vaga ofertada. O sistema não faz o cálculo em tempo real e a nota de corte é modificada de acordo com a nota dos inscritos. A nota de corte é informada pelo sistema durante o período de inscrição.

ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA



Elaborado com base em: INSTITUTO NACIONAL DE ESTUDOS E PESQUISAS EDUCACIONAIS ANÍSIO TEIXEIRA. **Portal de Dados Abertos**. Brasília, DF: Inep, [2024]. Disponível em: https://www.gov.br/inep/pt-br/acesso-a-informacao/dados-abertos. Acesso em: 29 jul. 2024.

A nota do Enem é o critério básico para quem deseja ingressar no ensino superior por meio dos programas do governo: Sisu, Fies e Prouni. Mas o que são esses programas? Como se inscrever em cada um deles? Essas dúvidas, se já não forem, logo serão questões de boa parte dos estudantes. Por isso entendemos que esse momento deve ser aproveitado para esclarecê-las.
O endereço a seguir fornece informações sobre os três programas.
BRASIL. Acesso único. **Portal Único de Acesso ao Ensino Superior**. Ministério da Educação, 2024. Disponível em: https://acessounico.mec.gov.br/. Acesso em: 3 out. 2024.

A avaliação das escolas de Ensino Médio e o ingresso em cursos superiores

Dois importantes objetivos do Enem são avaliar a qualidade dessa etapa do ensino nas escolas brasileiras e selecionar os estudantes para ingressar em cursos de nível superior em universidades públicas.

Uma sugestão para essa abertura é pedir aos estudantes que discutam, em grupos, as questões propostas no boxe **Além da teoria**.

OBJETO DIGITAL *Podcast*: O que é TRI e como ela afeta sua nota na prova do Enem?

Além da teoria

2. De 2020 para 2021: ≈ 2,8%; De 2021 para 2022: ≈ 1,4%; De 2022 para 2023: ≈ –1,6%

Considerando os dois gráficos da abertura, responda aos itens seguintes.

1. Qual foi a taxa média de variação no número anual de inscritos no Enem de 2020 a 2023?
2. Calcule o percentual de aumento na nota média de Matemática no Enem de 2020 para 2021, de 2021 para 2022 e de 2022 para 2023.

Além da teoria: 1. ≈ –633 mil candidatos

Os conceitos básicos da Estatística podem ser apresentados a partir de situações criadas na própria sala de aula. Por exemplo: Considerando o universo dos estudantes da sala, escolha uma amostra de cinco estudantes e pergunte o número de pessoas que moram na casa de cada um (ou a idade de cada um), anotando esses números na lousa, na ordem em que os estudantes responderem. A partir daí, defina universo estatístico, amostra e variável estatística.
Detenha-se um pouco mais na explicação do conceito de variável estatística, pedindo exemplos de variável quantitativa discreta e contínua e de variável qualitativa.

1. Noções de Estatística

Ao estimar a variação do Produto Interno Bruto (PIB) para o ano seguinte, os economistas fundamentam-se em dados numéricos colhidos na indústria, no comércio e nos serviços. Ao estabelecer a prioridade de uma obra pública, os governantes são respaldados por dados numéricos que atestam a necessidade da obra. Até mesmo na simples compra de um eletrodoméstico, tomamos por base os dados numéricos de uma pesquisa de preços.

De uma maneira ou de outra, nosso cotidiano é permeado por referências quantitativas. Nos itens a seguir, trataremos os dados numéricos por meio da metodologia da Estatística.

Exemplos:
- Número de livros lidos por estudante da sala. (Variável quantitativa discreta.)
- Bairro onde mora cada estudante da sala. (Variável qualitativa.)
- Tempo gasto no percurso entre a escola e a casa de cada estudante da sala. (Variável quantitativa contínua.)

O que é Estatística


SYLDAVIA/ISTOCK/GETTY IMAGES

Pessoa provando a comida que acabou de preparar.

Ao preparar uma sopa, Adriana prova uma colherada para avaliar o teor de sal. Não é preciso tomar toda a sopa da panela para avaliar o tempero.

O mesmo princípio que orienta Adriana é um dos fundamentos da Estatística, que é a ciência da indução lógica, isto é, das generalizações de características observadas em uma parte da coletividade que se deseja conhecer.

A Estatística é uma ciência fundamentada na teoria das probabilidades e em um conjunto de técnicas e métodos de pesquisa que abrange, entre outros temas, planejamento de experimentos, coleta e organização de dados, representação de dados numéricos por meio de tabelas e gráficos, análise de dados, previsões e tomadas de decisões em situações de incerteza com base na análise de dados. Ela pode ser aplicada nas mais diversas áreas do conhecimento, desde análises sobre temas do cotidiano até pesquisas científicas.

Podemos ter contato com essa ciência, por exemplo, ao ver nos noticiários a previsão do tempo, os resultados de pesquisas eleitorais, a porcentagem de eficácia de um remédio ou as previsões de inflação para o ano seguinte.

Vivemos em um mundo de números. Saber relacionar números com fatos ajuda-nos a acompanhar as rápidas transformações do dia a dia, assim como facilita a interpretação crítica de resultados de pesquisas estatísticas, dificultando o engano induzido por resultados falseados.

Ordenando os números escritos na lousa, do menor para o maior ou do maior para o menor, defina rol.
O contexto apresentado para os conceitos preliminares da Estatística pode ser trabalhado promovendo a integração com a área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas. Se possível, proponha a participação do professor de Geografia e sugira aos estudantes que respondam à pergunta da pesquisa mencionada, favorecendo uma reflexão para o posicionamento diante dos processos econômicos e culturais envolvidos na vida de um cidadão. Rodas de conversa sobre a importância do estudo no desenvolvimento profissional de cada um podem ser instrumentos enriquecedores na evolução do aprendizado.

Conceitos preliminares

Em fevereiro de 2024 foi divulgado o resultado de uma pesquisa de opinião *Percepção dos brasileiros sobre o trabalho por aplicativo*, realizada pelo Inteligência em Pesquisa e Consultoria (Ipec). Um dos questionamentos foi sobre como os brasileiros concordam com algumas frases sobre o trabalho por aplicativo.

O quadro a seguir mostra o percentual de resposta a cada alternativa oferecida.

O quanto os brasileiros concordam totalmente com as seguintes frases sobre trabalho por aplicativo?

Frases	Percentual de entrevistados que concordam totalmente
É uma oportunidade para quem fica desempregado	71%
Oferece boas condições de segurança para o trabalhador	25%
É uma oportunidade para quem é jovem	53%
Oferece boa remuneração para o trabalhador	23%

Fonte: IPEC. **Percepção sobre trabalho por aplicativo**. São Paulo: Ipec; Rio de Janeiro: ITS, 2024. Disponível em: https://itsrio.org/pt/publicacoes/pesquisa-nacional-sobre-a-percepcao-dos-brasileiros-sobre-o-trabalho-por-aplicativo-2024/. Acesso em: 29 ago. 2024.

Reflexão: Resposta pessoal. Caso haja estudantes que conheçam pessoas que trabalhem por aplicativo, peça que compartilhem as experiências com os colegas. Esse tipo de interação possibilita desenvolver aspectos da competência geral 6, pois os estudantes podem valorizar a diversidade de saberes e experiências que lhes permitam entender relações do mundo do trabalho.

Essas respostas permitiram ao Ipec, por exemplo, chegar à seguinte conclusão: um quarto da população acredita totalmente que o trabalho por aplicativo oferece boas condições de segurança para o trabalhador.

Observando que essa conclusão se refere ao universo de todos os brasileiros, algumas questões podem surgir naturalmente:

- O Ipec teria entrevistado toda a população brasileira para chegar a essa conclusão?
- Como são realizadas pesquisas como essa?

Entenderemos que nem sempre é necessário entrevistar toda a população para chegar a uma conclusão confiável. Nesse caso, as respostas foram obtidas por **amostragem**, ou seja, foi escolhido um subconjunto da população que a representa, chamado de **amostra**, e a pesquisa foi feita com essa amostra.

A seguir, são apresentados os conceitos básicos para a realização de uma pesquisa e o tratamento dos dados coletados.

Reflexão

Como você responderia a cada frase dessa pesquisa? Converse com os professores e os colegas sobre suas respostas.

Notas:

1. A pesquisa foi feita com uma amostra de 2.005 brasileiros, com 18 anos ou mais, via telefone. Por meio de uma seleção adequada da amostra, garantiu-se uma margem de erro de 2 pontos percentuais.
2. A margem de erro diz respeito a um cálculo que estima a quantidade de erros no resultado de uma pesquisa. No caso da pesquisa, que tem margem de erro de 2%, isso significa que os percentuais podem variar em 2% para mais ou 2% para menos.

Universo estatístico (ou população estatística)

Na coleta de dados sobre determinado assunto, chama-se **universo estatístico**, ou **população estatística**, o conjunto formado por todos os elementos que possam oferecer dados relativos ao assunto em questão.

Pesquisa censitária

A pesquisa censitária consiste em um processo de levantamento de dados que abrange todos os elementos do universo estatístico.


EDSON GRANDISOLI/PULSAR IMAGENS

Mulher respondendo a questionário de pesquisa. Foto de 2023.

Incentive os estudantes a pesquisar acerca do Censo Demográfico para comentarem a relevância da continuidade de pesquisas estatísticas, como as realizadas pelo IBGE, para compreender aspectos econômicos, ambientais, sociais etc.

Utilize o **Mapa clicável: Quilombos** para orientar uma conversa e ampliação acerca da importância de comunidades quilombolas. Aproveite para propor uma pesquisa a fim de conhecer mais sobre aspectos históricos, culturais e econômicos dessas comunidades.

Exemplos

a. O Censo demográfico é um estudo conduzido pelo Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE) que fornece informações sobre a população brasileira. O universo estatístico (ou população estatística) é, nesse caso, o conjunto de todas as pessoas que habitam o país.

b. O departamento de controle de qualidade de uma fábrica de lâmpadas faz, diariamente, um teste por amostragem das unidades produzidas no dia. Nesse procedimento, o universo estatístico é o conjunto de todas as lâmpadas produzidas em um dia.

Nota:

O Censo Demográfico de 2022, realizado pelo Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), apresentou uma das pesquisas mais abrangentes e complexas conduzidas no Brasil. Essa edição do censo marcou o retorno da coleta de dados em grande escala após a pandemia do covid-19, que havia adiado a pesquisa originalmente planejada para 2020.

Um destaque importante do Censo 2022 foi a inclusão, pela primeira vez, de um levantamento específico sobre a população quilombola. Essa iniciativa histórica do IBGE visou compreender melhor as condições de vida, a distribuição geográfica e as características socioeconômicas das comunidades quilombolas. O reconhecimento oficial dessas comunidades por meio da coleta de dados no censo representa um avanço significativo na promoção da visibilidade e no atendimento às demandas específicas dessa parcela da população, contribuindo para o desenvolvimento de políticas públicas mais inclusivas e equitativas.

OBJETO DIGITAL Mapa clicável: Quilombos

Reflexão

Quando uma empresa quer testar a durabilidade de uma lâmpada, é possível fazer uma pesquisa censitária? Justifique sua resposta.

Comente com os estudantes que há casos em que não é viável coletar dados de toda a população. Por exemplo, em teste de resistência de capacetes ou teste de durabilidade de uma lâmpada não é possível avaliar todos os produtos, por isso o controle de qualidade avalia apenas uma amostra que foi produzido nas mesmas condições de um determinado lote dos produtos. Se julgar necessário, proponha aos estudantes que deem mais exemplos.

Pesquisa amostral

Quando o universo estatístico é muito vasto ou quando não é possível coletar dados de todos os elementos desse universo, seleciona-se um subconjunto dele, chamado **amostra**, no qual os dados para a pesquisa são coletados.

Para que os resultados sejam confiáveis, a amostra deve ser representativa, isto é, deve ter as características essenciais da população e não deve apresentar tendências distintas das do universo estatístico. Para isso, adotam-se alguns critérios que a tornem imparcial.

Exemplo

Um partido político quer conhecer a tendência do eleitorado quanto à preferência entre dois candidatos ao governo de determinado estado. Para isso, encomenda uma pesquisa a um instituto especializado.

O universo estatístico (ou população estatística), nesse caso, é o conjunto de todos os eleitores que votam nesse estado. Para a realização da pesquisa, os técnicos do instituto escolhem algumas regiões do estado e, nesses locais, entrevistam os eleitores. Os eleitores entrevistados formam a amostra da pesquisa.

A escolha das regiões deve obedecer a critérios que procurem aproximar o máximo possível as tendências da amostra às tendências do universo estatístico, como:

- as regiões escolhidas devem estar igualmente distribuídas pelo estado;
- os entrevistados devem estar proporcionalmente distribuídos pelas várias classes sociais;
- a quantidade de entrevistados em cada região deve ser proporcional ao número de eleitores dessa região.

Amplitude de uma amostra de dados numéricos

Acompanhe a situação a seguir.

Em uma pesquisa, foram coletados os preços, em real, do copo de determinada marca de iogurte, em diversos supermercados, obtendo-se a seguinte amostra:

3,28 3,35 3,26 3,30 3,20 3,38 3,28 3,29 3,30 3,25 3,26 3,32

Observando que o maior e o menor preço dessa amostra são, respectivamente, R$ 3,38 e R$ 3,20, dizemos que a **amplitude** da amostra é a diferença entre esses valores: R$ 3,38 − R$ 3,20 = R$ 0,18. Isso significa que, de um supermercado para outro, entre os pesquisados, a maior variação de preço para esse copo de iogurte é 18 centavos. Note, portanto, que a amplitude indica a variabilidade dos dados.

Assim, podemos definir: sendo a e b, respectivamente, o menor e o maior elemento de uma amostra de dados numéricos, chama-se **amplitude da amostra** o número $b - a$.

Coleta de dados de pesquisas estatísticas

A coleta de dados é uma etapa fundamental na realização de uma pesquisa estatística, pois é a partir dela que se obtém as informações necessárias para a análise e interpretação dos resultados. Existem diferentes métodos de coleta de dados, entre os mais comuns estão as enquetes, os questionários (presenciais e *on-line*) e a análise de documentos. A seguir, vamos estudar cada um deles.

- **Enquetes**

As enquetes são uma forma prática e rápida de coletar dados sobre opiniões ou comportamentos específicos. Geralmente, são compostas de perguntas diretas e objetivas, como questões de múltipla escolha. As enquetes podem ser aplicadas de forma presencial, por telefone, ou *on-line*. Esse método é ideal para pesquisas que demandam respostas rápidas e muitos participantes; porém, o nível de aprofundamento das respostas tende a ser mais superficial.

- **Questionários presenciais**

Os questionários presenciais são utilizados em pesquisas mais detalhadas, nas quais o pesquisador tem contato direto com os participantes. Esse método permite a aplicação de perguntas abertas, em que os entrevistados podem elaborar suas respostas, proporcionando ao pesquisador a possibilidade de esclarecer dúvidas e incentivar a participação de todos. No entanto, esse método pode ser mais demorado e custoso, já que envolve o deslocamento dos pesquisadores e o tempo necessário para cada entrevista.


KRAKENIMAGES/SHUTTERSTOCK

Pesquisador coletando informações de modo presencial.

- **Questionários *on-line***

Com o avanço da tecnologia, os questionários *on-line* vêm sendo muito utilizados para a coleta de dados. Eles podem ser distribuídos por *e-mail*, pelas redes sociais ou pelos *sites* específicos de pesquisa. A vantagem desse método é a facilidade e o baixo custo para alcançar muitas pessoas em diferentes localidades. Além disso, as respostas são registradas automaticamente, facilitando a tabulação dos dados. Porém, é importante considerar a possibilidade da falta de controle sobre quem responde ao questionário.

- **Análise de documentos**

Este método consiste na coleta de dados a partir de documentos já existentes, como relatórios, artigos, livros, registros oficiais, entre outros. A análise de documentos é útil em pesquisas históricas, jurídicas ou organizacionais, em que os dados podem ser extraídos de fontes primárias e secundárias já disponíveis. A vantagem desse método é que ele permite o acesso a uma grande quantidade de informações de maneira econômica e sem a necessidade de envolver diretamente os participantes. No entanto, a qualidade da análise dependerá da precisão e relevância dos documentos selecionados.

Cada método de coleta de dados tem suas vantagens e é adequado para diferentes tipos de pesquisa. A escolha do método deve ser feita considerando o objetivo da pesquisa, o público-alvo, o tempo e os recursos financeiros disponíveis. É importante que os dados sejam coletados de forma ética, garantindo a privacidade e o consentimento dos participantes, além de ser analisados com rigor metodológico para assegurar a validade dos resultados.

Variável estatística

O objetivo de uma pesquisa estatística pode ser, por exemplo, obter a estatura média dos jogadores de basquetebol de um campeonato, ou classificar as pessoas adultas de uma comunidade segundo seu estado civil. Nesse contexto, os atributos "estatura" e "estado civil" são chamados de **variáveis estatísticas**. No primeiro exemplo, o atributo "estatura" é expresso por números (medidas) e, no segundo, o "estado civil" não é expresso por números, mas por uma característica que não se pode medir (solteiro, casado, viúvo, em união estável ou divorciado). Por isso, dizemos que a variável "estatura" é **quantitativa** e a variável "estado civil" é **qualitativa**. De modo geral, definimos:

- **Variáveis estatísticas** são atributos, numéricos ou não, pesquisados em cada elemento de uma amostra.
- **Variáveis estatísticas qualitativas** são aquelas expressas por qualidades não numéricas.
- **Variáveis estatísticas quantitativas** são aquelas expressas por números, que indicam contagem ou medida.

Variáveis quantitativas discretas e variáveis quantitativas contínuas

No dia a dia, temos contato com essas variáveis e conseguimos diferenciá-las, mesmo desconhecendo suas definições. Por exemplo, sabemos que é impossível haver 4,5 pessoas em uma sala, mas é perfeitamente possível que o comprimento de uma sala seja 4,5 m. Isso porque a quantidade de pessoas só pode ser expressa por um número natural, enquanto a variável comprimento pode ser expressa por qualquer número real não negativo. Assim, dizemos que a quantidade de pessoas é uma variável **discreta**, e o comprimento é uma variável **contínua**.

De modo geral, **variável quantitativa discreta** é aquela cujos possíveis valores podem ser ordenados de modo que qualquer um deles tenha sucessor e/ou antecessor em uma sequência finita ou infinita. Na maioria dos casos, as variáveis quantitativas discretas resultam de contagem de unidades e, portanto, são **números naturais**.

MICROSCAN/PHOTOTAKE/IMAGEPLUS

Os glóbulos vermelhos, ou hemácias, estão presentes no sangue, e sua principal função é levar oxigênio aos tecidos. (Imagem obtida por microscopia eletrônica de varredura e ampliada 3.600 vezes, aproximadamente.)

Exemplos

a. Os possíveis valores da variável "número de gols marcados por cada jogadora de futebol em um campeonato" são números naturais: 0, 1, 2, 3 etc.; logo, essa variável é discreta.

b. Outras variáveis discretas são: número de professores de uma escola, número de glóbulos vermelhos em determinada quantidade de sangue, número de carros que passam diariamente por um posto de pedágio etc.

Variável quantitativa contínua é aquela que pode assumir qualquer valor de um intervalo real limitado ou ilimitado. Na maioria dos casos, as variáveis contínuas resultam da mensuração de grandezas, como comprimento, área, volume, tempo, temperatura, massa, pressão etc. e, portanto, podem ser expressas por **quaisquer números reais** de determinado intervalo.

MIKE WORKMAN/SHUTTERSTOCK

Quanto maior a profundidade alcançada pelo mergulhador, maior a pressão sentida por ele. Mergulhador na Ilha Tavewa, Fiji. Foto de 2024.

Exemplos

a. A variável "estatura", em metro, dos estudantes de um colégio pode ser expressa por qualquer valor do intervalo real em que os extremos são os números que expressam a menor e a maior estatura observada nos estudantes. (Isso não significa que todos os valores do intervalo serão obtidos nessa pesquisa, mas que os valores desse intervalo podem ser obtidos.)

b. Outros exemplos de variáveis contínuas são: volume interno de um recipiente, área de um terreno, tempo de viagem, temperatura de uma região, pressão sentida por um mergulhador etc.

Nota:

Para classificar uma variável em discreta ou contínua, consideramos o conjunto dos valores que podem ser assumidos pela variável, e não apenas os valores assumidos efetivamente por ela em uma pesquisa.

Organização e representação de dados

Em uma pesquisa, a organização e a representação dos dados coletados são necessárias para facilitar a leitura e a análise. A seguir, estudaremos que, quando a variável é quantitativa discreta, seus valores podem ser organizados em sequências. E, mais adiante, analisaremos a representação de dados em tabelas e gráficos, que são as formas mais usuais de representação de dados, adotadas em relatórios, jornais, revistas, internet etc.

Rol

Uma maneira simples de organizar dados numéricos coletados em uma pesquisa é dispô-los em sequências chamadas **rol**.

Rol é toda sequência de dados numéricos tal que cada termo, a partir do segundo:

- é maior ou igual a seu antecessor, ou
- é menor ou igual a seu antecessor.

Exemplo

Em uma amostra de sete dias, os números de atendimentos diários em um posto de saúde foram: 28, 25, 32, 18, 29, 32, 25.

Apresentando esses dados em rol, temos:

(18, 25, 25, 28, 29, 32, 32) ou (32, 32, 29, 28, 25, 25, 18)

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Faça os exercícios no caderno.

1. Considere as situações a seguir.

(1) O diretor de determinada instituição de ensino analisou todas as matrículas dos estudantes e concluiu que 26% delas eram de estudantes do Ensino Médio. **1.** (1) e (2)

(2) Um instituto de pesquisa deseja avaliar as intenções de voto dos eleitores de uma cidade em uma eleição municipal que se aproxima. Para isso, foi selecionado uma amostra com 1.000 pessoas.

(3) O Censo Agropecuário realizado pelo IBGE no Brasil é feito com todos os produtores da agropecuária do país, servindo de base para políticas agrícolas e de desenvolvimento rural.

Dentre as situações apresentadas, quais são exemplos de pesquisa censitária?

2. Em uma pesquisa foram coletados os preços do etanol, em real, em diversos postos de combustível, obtendo-se a seguinte amostra: **2.** 4,50 − 3,80 = 0,70

3,90; 4,50; 3,75; 4,25; 3,99; 4,09; 3,80; 4,45

Determine a amplitude dessa amostra.

3. Classifique as variáveis a seguir em qualitativa ou quantitativa.

a. salário **3. a.** quantitativa

b. quantidade de irmãos **3. b.** quantitativa

c. gênero **3. c.** qualitativa

d. tipo de alimento **3. d.** qualitativa

4. A elaboração de um instrumento de coleta de dados é um passo essencial em qualquer pesquisa estatística, pois define como as informações serão obtidas dos participantes. Reúna-se com alguns colegas, escolham um tema que vocês desejam investigar. Depois, definam o objetivo da pesquisa e listem as variáveis que serão investigadas. Para cada variável, elaborem questões específicas que o instrumento de coleta de dados deve responder. Em seguida, escolham o tipo de instrumento. Após isso, revisem o instrumento para verificar a clareza das perguntas e a adequação ao objetivo da pesquisa. Por fim, compartilhem o instrumento de coleta de dados que vocês elaboraram com os demais colegas. **4.** Resposta pessoal.

2. Distribuição de frequências – Tabelas e gráficos

Escolhendo 10, 20 ou 25 estudantes da turma, peça a estatura de cada um, em centímetro (essa escolha do número de estudantes tem o objetivo de facilitar o cálculo da frequência relativa). Anotando na lousa as estaturas dos estudantes, em centímetro, defina classe unitária e construa a tabela de distribuição de frequência e de frequência relativa.

Represente os dados dessa tabela por meio dos gráficos: de linha, de barras horizontais, de barras verticais e de setores. Explique a especificidade de cada gráfico:
- O gráfico de linha é usado, principalmente, para representar dados numéricos observados ao longo do tempo, mas pode ser usado também em qualquer situação em que os dados numéricos da variável são apresentados em ordem crescente.
- O gráfico de barras é recomendado quando se pretende comparar classes, numéricas ou nominais.
- O gráfico de setores só pode ser usado quando a reunião dos setores constituir o todo (100%) do que se deseja representar.

A análise dos dados numéricos de uma amostra é facilitada pela representação dos dados em uma tabela ou em um gráfico. Para isso, os elementos da amostra são separados em **classes**, que são subconjuntos disjuntos da amostra.

Exemplos

a. Uma amostra de pares de sapatos produzidos por uma indústria em determinado período pode ser agrupada em classes representadas por um único número, referente ao tamanho do sapato: 38, 39, 40, 41, 42 e 43. Uma classe representada por um único número é chamada de **classe unitária**.

b. Uma amostra das estaturas, em centímetro, de pessoas adultas de certa região pode ser separada em classes não unitárias representadas por **intervalos reais**: [140, 150[, [150, 160[, [160, 170[, [170, 180[, [180, 190[e [190, 200]. Dizemos que uma análise estatística é feita com dados agrupados, quando esses dados são separados em intervalos reais.

Vamos a seguir à construção da tabela e do gráfico em situações que apresentam a amostra separada em classes unitárias ou em classes representadas por intervalos reais.

Distribuição de frequências em classes unitárias

Tabela

Para uma pré-avaliação do desempenho dos candidatos em um exame vestibular, foi selecionada uma amostra de 80 avaliações. Depois de corrigidas, as notas foram organizadas em uma tabela, chamada de **tabela de distribuição de frequências**, em que:

- a amostra foi separada em classes determinadas pelas notas das avaliações;
- a quantidade de notas de uma mesma classe é chamada de **frequência** (F) dessa classe;
- a soma das frequências de todas as classes é chamada de **frequência total** (F_t) da amostra;
- dividindo a frequência F de uma classe pela frequência total F_t, obtém-se a **frequência relativa** da classe.

Observe:

Desempenho dos candidatos

Classe (nota)	Frequência (número de candidatos)	Frequência relativa
4	8	10%
5	17	21,25%
6	24	30%
7	20	25%
8	11	13,75%
	Frequência total: $F_t = 80$	

Elaborado para fins didáticos.

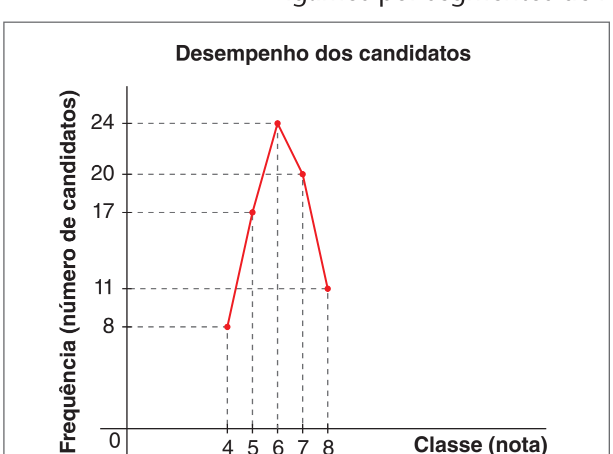
Vamos ao cálculo da frequência relativa de cada classe:

- a frequência relativa da nota 4 é: $\frac{8}{80} = 0,1 = 10\%$
- a frequência relativa da nota 5 é: $\frac{17}{80} = 0,2125 = 21,25\%$
- a frequência relativa da nota 6 é: $\frac{24}{80} = 0,3 = 30\%$
- a frequência relativa da nota 7 é: $\frac{20}{80} = 0,25 = 25\%$
- a frequência relativa da nota 8 é: $\frac{11}{80} = 0,1375 = 13,75\%$

Os dados dessa tabela podem também ser descritos por gráficos de diferentes tipos, conforme mostrado a seguir.

Gráfico de linha

Marcamos os pontos determinados pelos pares ordenados (classe, frequência) e os ligamos por segmentos de reta.



FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

Elaborado para fins didáticos.

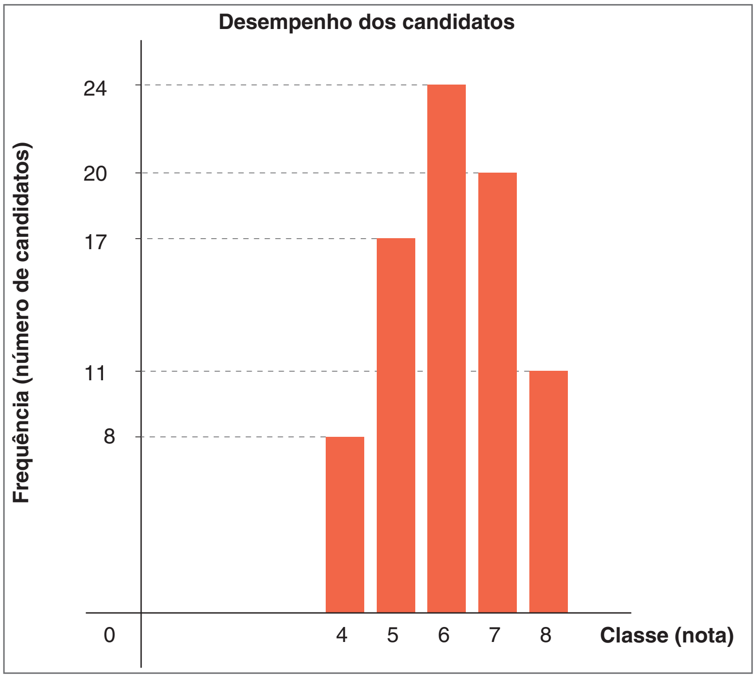
Nesse tipo de gráfico, apenas os extremos dos segmentos de reta que compõem a linha oferecem informações sobre o comportamento da amostra.

Esse tipo de gráfico é usado, principalmente, para representar dados observados ao longo do tempo. Certamente você já observou gráficos como esse, descrevendo o desempenho econômico de um país ou uma empresa ao longo do tempo.

Gráfico de barras

Barras verticais (colunas)

As frequências são indicadas em um eixo vertical. Marcamos os pontos determinados pelos pares ordenados (classe, frequência) e os ligamos ao eixo das classes por meio de barras verticais.



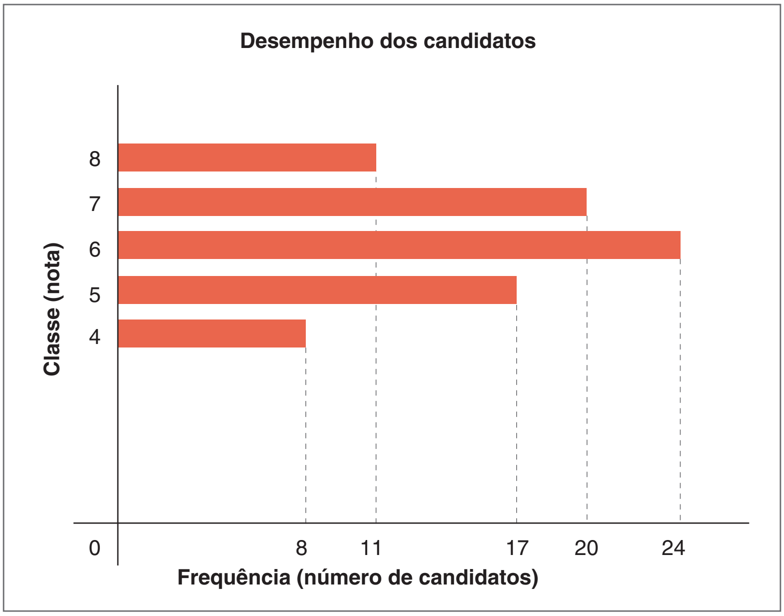
Elaborado para fins didáticos.

Barras horizontais

As frequências são indicadas em um eixo horizontal. Marcamos os pontos determinados pelos pares ordenados (frequência, classe) e os ligamos ao eixo das classes por meio de barras horizontais.

Observação

Nos gráficos de barras, a altura ou o comprimento das barras deve ser proporcional à frequência do dado associado.



Elaborado para fins didáticos.

O gráfico de barras é recomendado quando se pretende comparar classes. Pode ser um gráfico de **barras simples**, quando se pretende comparar classes individualmente, como no exemplo anterior, ou de **barras agrupadas**, quando se pretende comparar duas ou mais variáveis em cada classe considerada.

ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

Gráfico de setores

Dividimos um círculo em setores, com ângulos de medidas diretamente proporcionais às frequências das classes.

Observação

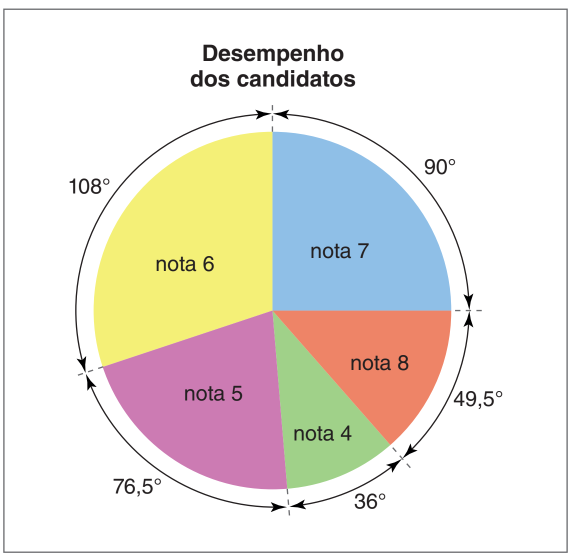
O valor de α resulta da seguinte regra de três:

Medida do ângulo central (em grau)		**Frequência (número de candidatos)**
360°	———	F_t
α	———	F

$$\therefore F_t \cdot \alpha = 360° \cdot F \Rightarrow \alpha = \frac{360°}{F_t} \cdot F$$

A medida α, em grau, do ângulo central que corresponde a uma classe de frequência F é dada por: $\alpha = \frac{360°}{F_t} \cdot F$.

Na situação do desempenho dos candidatos do exemplo:



Elaborado para fins didáticos.

- A medida do ângulo central que corresponde à nota 4 é:

$$\alpha = \frac{360°}{80} \cdot 8 = 36°$$

- A medida do ângulo central que corresponde à nota 5 é:

$$\alpha = \frac{360°}{80} \cdot 17 = 76{,}5°$$

- A medida do ângulo central que corresponde à nota 6 é:

$$\alpha = \frac{360°}{80} \cdot 24 = 108°$$

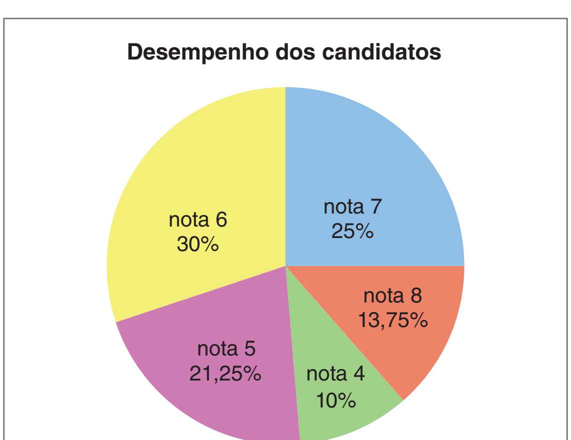
- A medida do ângulo central que corresponde à nota 7 é:

$$\alpha = \frac{360°}{80} \cdot 20 = 90°$$

- A medida do ângulo central que corresponde à nota 8 é:

$$\alpha = \frac{360°}{80} \cdot 11 = 49{,}5°$$

O modelo mais usual de gráfico de setores é o que apresenta em cada setor a frequência relativa da respectiva classe. Por exemplo, o gráfico a seguir é o mesmo representado anteriormente com as frequências relativas das classes.



Elaborado para fins didáticos.

A frequência relativa de cada classe pode ser obtida dividindo-se a medida, em grau, do arco de setor por 360°; por exemplo, o arco da classe "nota 5" mede 76,5°; então, a frequência relativa dessa classe é:

$$\frac{76{,}5°}{360°} = 0{,}2125 = 21{,}25\%$$

É importante destacar que o gráfico de setores só pode ser utilizado quando a reunião dos setores constituir o todo (100%) que se deseja representar.

Classes unitárias nominais (não numéricas)

Em muitas situações, as classes de uma distribuição de frequências podem ser nominais (não numéricas), como mostra a tabela.

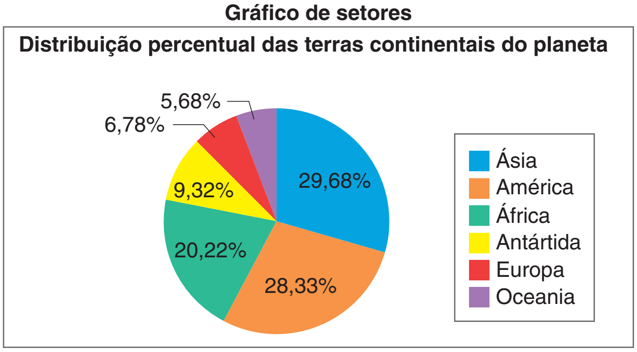
Cerca de 71% da superfície do planeta é coberta por águas oceânicas, e o restante é formado por terras emersas, divididas em seis continentes: África, América, Antártica, Ásia, Europa e Oceania. Considerando cada continente como uma classe unitária, a tabela apresentada e os gráficos a seguir descrevem e comparam suas extensões.

Continentes por área total

Continente	Área (km²)
Ásia	44.579.000
América	42.549.000
África	30.370.000
Antártica	14.000.000
Europa	10.180.000
Oceania	8.525.989
	Total: 150.203.989

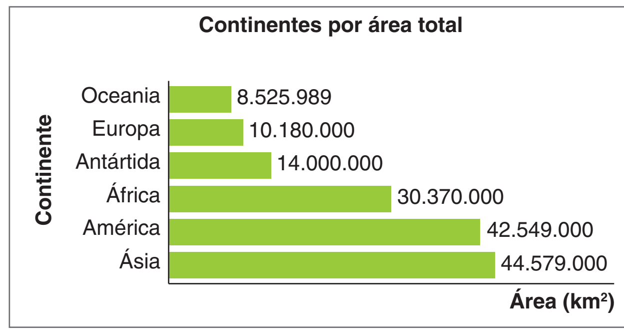
Fonte: GEO – BANCO DE DADOS MUNDIAL. Área total. Geo – **Banco de Dados Mundial**, [*S. l.*], 24 nov. 2013. Disponível em: https://geobancodedados.wordpress.com/2013/11/24/area-total/. Acesso em: 29 jul. 2024.

Gráfico de setores



Fonte: GEO – BANCO DE DADOS MUNDIAL. Área total. Geo – **Banco de Dados Mundial**, [*S. l.*], 24 nov. 2013. Disponível em: https://geobancodedados.wordpress.com/2013/11/24/area-total/. Acesso em: 29 jul. 2024.

Gráfico de barras horizontais



Fonte: GEO – BANCO DE DADOS MUNDIAL. Área total. Geo – **Banco de Dados Mundial**, [*S. l.*], 24 nov. 2013. Disponível em: https://geobancodedados.wordpress.com/2013/11/24/area-total/. Acesso em: 29 jul. 2024.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Faça os exercícios no caderno.

5. O controle de qualidade de uma empresa que fabrica caixas de leite fez a verificação do volume de determinada amostra. Os volumes, em litro, do conteúdo de vinte caixas de leite foram os seguintes:

0,98	1,00	1,01	0,98	0,99
0,99	1,01	1,01	1,00	0,99
1,00	1,02	0,98	0,99	1,00
0,99	1,00	1,01	0,98	0,99

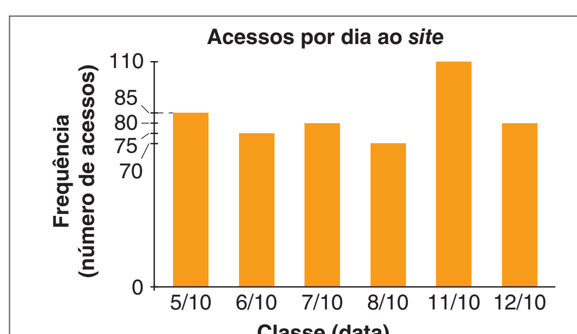
a. Calcule a amplitude dessa amostra. **5. a.** 0,04

b. A tabela apresenta a coluna correspondente às classes dessa amostra. Copie-a no caderno e complete-a com as colunas correspondentes às frequências de cada classe e às respectivas frequências relativas.
5. b. Resposta no final do livro.

Volume (em litro)
0,98
0,99
1,00
1,01
1,02

c. Construa os gráficos de barras verticais e de setores dessa distribuição. (Em cada arco do gráfico de setores, indique a frequência relativa da respectiva classe.) **5. c.** Resposta no final do livro.

6. O gráfico a seguir descreve a distribuição de frequências dos acessos a um *site* de uma loja *on-line* em determinado período.



Elaborado para fins didáticos.

6. a. 500 acessos

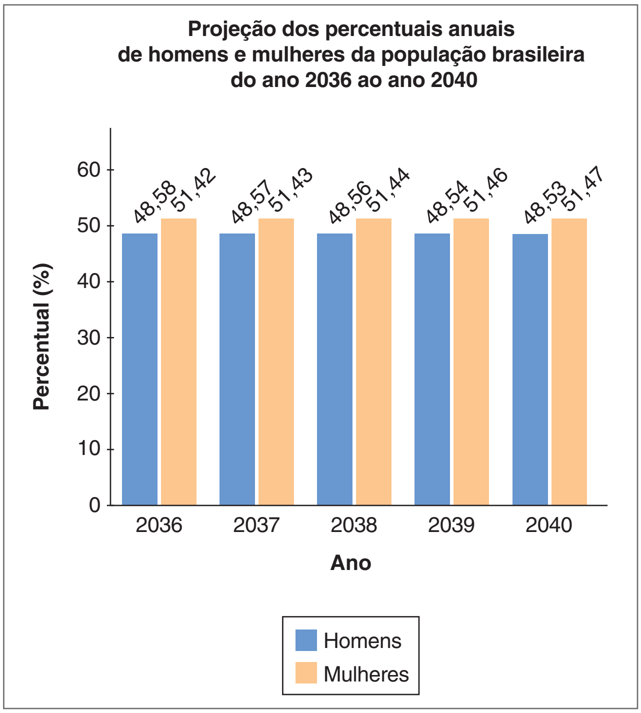
a. Quantos acessos o *site* teve nesse período?

b. Construa o gráfico de setores correspondente a essa distribuição. Em cada arco do gráfico de setores, indique a frequência relativa da respectiva classe. **6. b.** Resposta no final do livro.

ILUSTRAÇÕES: ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

O contexto do **exercício proposto 8** possibilita uma ampliação para abordar a violência de gênero. O Paquistão, em 2021, estava em 153º lugar (de 156) no Índice Global de Desigualdade de Gênero do Fórum Econômico Mundial, *ranking* que hierarquiza os países com mais casos de violência contra mulheres e pessoas LGBTQIA+.

7. De acordo com a projeção apresentada no gráfico, responda às questões.



Fonte: INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA. **Projeção da população do Brasil por sexo e idade para o período 1980-2050**. Brasília, DF: IBGE, 2008. Disponível em: https://seriesestatisticas.ibge.gov.br/series.aspx?no=10&op=0&vcodigo=POP302&t=revisao-2008-projecao-populacao-homens e https://seriesestatisticas.ibge.gov.br/series.aspx?no=10&op=0&vcodigo=POP302&t=revisao-2008-projecao-populacao-mulheres. Acesso em: 22 jul. 2024.

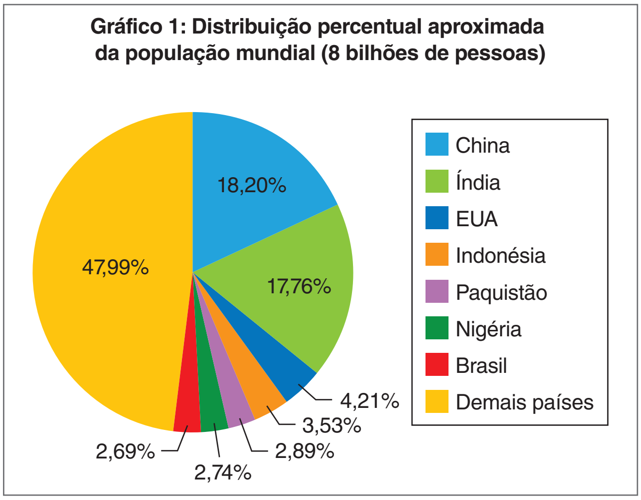
Para cada classe (ano) desse gráfico, estudamos os valores de duas variáveis (percentual de homens e percentual de mulheres). Esse tipo de representação é chamado de **gráfico comparativo** dos valores das variáveis. Podemos também comparar valores de três ou mais variáveis.

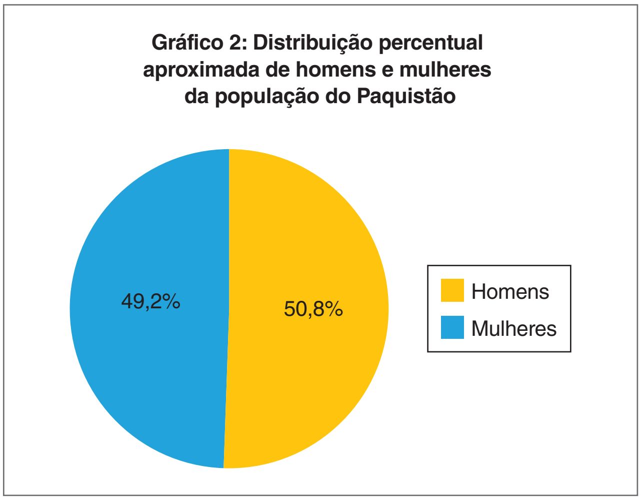
a. Em 2036, a população de mulheres será superior à de homens em quantos por cento? **7. a.** ≈ 2,84%

b. No ano 2040, a população de homens representará quantos por cento da população de mulheres? **7. b.** ≈ 94,29%

c. Construa o gráfico comparativo de linhas correspondente a esse gráfico comparativo de colunas. (Se possível, faça essa construção usando um programa de computador.) **7. c.** Resposta no final do livro.

8. O gráfico 1 apresenta o percentual de habitantes de cada um dos sete países mais populosos do mundo e o percentual de habitantes dos demais países juntos, em relação aos 8 bilhões de habitantes do planeta. O gráfico 2 apresenta dados relativos ao Paquistão.





ILUSTRAÇÕES: ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

Fonte: COUNTRY METERS. População mundial. [*S. l.*]: **Country Meters**, [2024]. Disponível em: https://countrymeters.info/pt. Acesso em: 22 jul. 2024.

8. b. Resposta no final do livro.

a. Calcule o número aproximado de mulheres que compõem a população do Paquistão. **8. a.** 113.750.400 mulheres

b. Construa o gráfico de barras verticais com as frequências relativas das classes representadas pelos países mais populosos e pelos demais países.

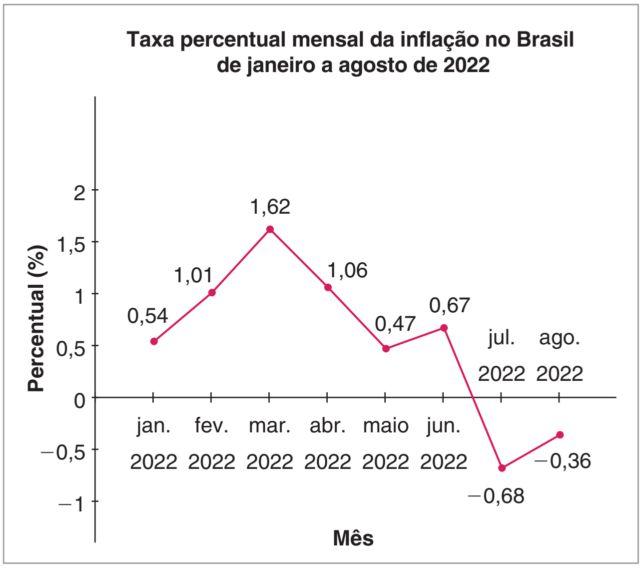
c. Construa o gráfico de barras horizontais com as frequências absolutas das classes representadas pelos países mais populosos e pelos demais países.

9. Reúnam-se em grupos para desenvolverem uma pesquisa estatística. Primeiro, definam o tema, depois, formulem uma pergunta que será utilizada para coletar os dados da pesquisa. Em seguida, entrevistem os colegas dos outros grupos, anotem as respostas de cada um e organizem os dados coletados em uma tabela de frequência. Com base na tabela de frequência, construam um gráfico de barras ou um gráfico de setores que represente visualmente os dados obtidos. Por fim, após a construção do gráfico, escrevam um breve parágrafo analisando os resultados. Compartilhem essa análise com os demais grupos. **9.** Resposta pessoal.

8. c. Resposta no final do livro.

Aproveite o contexto dos **exercícios propostos 10** e **11** e solicite aos estudantes uma pesquisa acerca de como a inflação impacta o orçamento familiar ou a remuneração dos trabalhadores quando ela não é recalculada considerando a inflação.

10. A taxa de inflação, em determinado período, indica a variação percentual média de preços em uma região ou um país; por exemplo, se em um país a taxa de inflação em determinado mês foi 0,5%, isso significa que o preço dos produtos em análise aumentou, em média, 0,5% nesse mês. A inflação pode ser indicada por diversos índices, entre eles o Índice Nacional de Preços ao Consumidor Amplo (IPCA), criado com o objetivo de oferecer a variação dos preços no comércio e na prestação de serviços para o consumidor final. O IPCA é considerado o índice oficial de inflação no Brasil. O gráfico a seguir apresenta os dados da inflação brasileira de janeiro a agosto de 2022, com base no IPCA. O percentual apresentado em cada mês do gráfico é a taxa acumulada durante o mês.



Taxa percentual mensal da inflação no Brasil de janeiro a agosto de 2022

Fonte: INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA. **Projeção da população do Brasil por sexo e idade para o período 1980-2050**. Brasília, DF: IBGE, 2008. Disponível em: https://seriesestatisticas.ibge.gov.br/series.aspx?no=10&op=0&vcodigo=POP302&t=revisao-2008-projecao-populacao-homens e https://seriesestatisticas.ibge.gov.br/series.aspx?no=10&op=0&vcodigo=POP302&t=revisao-2008-projecao-populacao-mulheres. Acesso em: 22 jul. 2024.

Considerando apenas o intervalo de tempo adotado no gráfico, responda às questões a seguir.

a. Em que período, entre dois meses consecutivos, houve maior alta na taxa de inflação?
10. a. Entre fevereiro e março de 2022.

b. Em que mês a taxa de inflação ficou pela primeira vez abaixo de 0,5%? **10. b.** Em maio de 2022.

c. Quando a taxa de inflação é negativa em determinado mês, dizemos que houve deflação nesse mês. Em que meses do período considerado houve deflação?
10. c. Em julho de 2022 e agosto de 2022.

d. Observando que de março de 2022 a maio de 2022 o gráfico é decrescente, podemos concluir que os preços médios dos produtos diminuíram ao longo desse período? **10. d.** não

e. Se no início do mês de janeiro de 2022 um produto custava R$ 10,00 e esse preço variou de acordo com a taxa da inflação até o fim de abril de 2022, qual era o preço desse produto no final de abril?

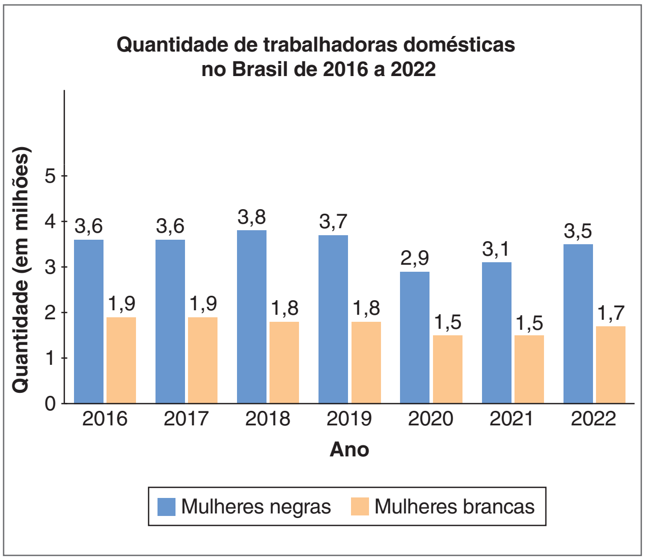
f. Qual foi a taxa acumulada da inflação do início de janeiro de 2022 ao final de abril de 2022?

10. e. aproximadamente R$ 10,43 **10. f.** aproximadamente 4,3%

11. De acordo com o Instituto de Pesquisa Econômica Aplicada (IPEA), em 2022, o trabalho doméstico remunerado no Brasil continuava sendo uma das principais ocupações para as mulheres, especialmente para as mulheres negras. Embora tenha sido criada uma lei que iguala os direitos das trabalhadoras domésticas aos das demais categorias profissionais, a precarização do trabalho persiste, assim como suas consequências sobre as desigualdades de gênero e raça.

ODS 5

Observe o gráfico a seguir que apresenta a quantidade de trabalhadoras domésticas no Brasil de 2016 a 2022. Oriente os estudantes a consultar as páginas 6 e 7 para saber mais sobre este e os demais Objetivos de Desenvolvimento Sustentável.



Quantidade de trabalhadoras domésticas no Brasil de 2016 a 2022

Fonte: INSTITUTO DE PESQUISA ECONÔMICA APLICADA. **Retrato das Desigualdades de Gênero e Raça 2024**. [*S. l.*]: Ipea, [2024]. Disponível em: https://www.ipea.gov.br/portal/retrato/indicadores/tabelas-completas. Acesso em: 10 set. 2024.

11. a. 35,72%

De acordo com o gráfico, responda às questões a seguir.

a. Em 2018, a quantidade de trabalhadoras domésticas negras foi superior à quantidade de trabalhadoras domésticas brancas em quantos por cento?

b. Construa o gráfico comparativo de linhas correspondente a esse gráfico comparativo de colunas.
11. b. Resposta no final do livro.

c. Em sua opinião, o que contribui para a permanência da precarização do trabalho doméstico no Brasil, especialmente entre as mulheres negras, mesmo após a criação da Lei da Empregada Doméstica?

11. c. Mesmo com a criação da Lei da Empregada Doméstica, a falta de fiscalização e as barreiras culturais dificultam a implementação de seus direitos, mantendo essas trabalhadoras em condições desiguais em relação a outras categorias.

Para retomar os conteúdos estudados, resolva os exercícios complementares 1 a 3.

Distribuição de frequências em classes não unitárias – Dados agrupados

Para a representação tabular ou gráfica de variáveis quantitativas, podemos agrupar os dados da amostra em classes definidas por intervalos reais, conforme descrito a seguir.

Tabela

Para avaliar o tamanho de seus peixes, um piscicultor retirou dos açudes uma amostra de vinte carpas e mediu o comprimento delas, em centímetro, obtendo os seguintes resultados:

STEFAN LAMBAUER/ISTOCK/GETTY IMAGES

As carpas são peixes que podem chegar a ter mais de 1 m de comprimento e a viver mais de 60 anos.

49	52	56	52	50
54	57	60	48	59
48	49	57	53	55
51	53	52	55	57

Com base na tabela de distribuição de frequência da estatura dos estudantes, proposta no tópico **Distribuição de frequências em classes unitárias**, conceitue classe não unitária (dados agrupados), amplitude de classe e histograma. Ressalte que, em um histograma:
• Os extremos de cada intervalo de classe não precisam ser elementos da amostra, mas, caso sejam, deve-se tomar o cuidado de não permitir que um mesmo elemento da amostra pertença a duas classes simultaneamente. Por isso, o ideal é que sejam escolhidos intervalos de classe abertos à direita, com exceção do último intervalo (aquele que tiver no extremo direito o maior número).
• Podemos construir histogramas com classes de amplitudes diferentes, porém, nesse caso, a altura de cada retângulo não será a frequência da classe (a altura de cada retângulo será $\frac{F}{\Delta x}$, em que F e Δx são, respectivamente, a frequência e a amplitude da classe; por isso, é mais simples adotar a mesma amplitude para todas as classes).

Para representar esses dados em uma **tabela de distribuição de frequências**, com classes não unitárias, os procedimentos usuais são:

(1) Calcular a amplitude da amostra, que é a diferença entre o maior e o menor elemento da amostra:

$$(60 - 48) \text{ cm} = 12 \text{ cm}$$

(2) Escolher um intervalo fechado, de comprimento maior ou igual à amplitude da amostra, que contenha a amostra, isto é, todos os elementos dela devem pertencer ao intervalo escolhido. Por exemplo, escolhemos o intervalo fechado [48, 60], que tem comprimento igual a 12 e contém a amostra.

(3) Dividir o intervalo escolhido no item (2) em subintervalos de mesmo comprimento, fechados à esquerda e abertos à direita, exceto o subintervalo de extremos maiores, que deve ser fechado. Por exemplo, como o quociente de 12 por 4 é igual a 3, vamos dividir o intervalo do item (2) nos 4 subintervalos de comprimento igual a 3: [48, 51[, [51, 54[, [54, 57[e [57, 60]. Esses subintervalos são chamados de **classes**, e o comprimento de cada um é chamado de **amplitude** da respectiva classe.

(4) Agrupar os elementos da amostra nas classes a que pertencem, definidas no item (3):

- 48, 48, 49, 49 e 50 pertencem à classe [48, 51[;
- 51, 52, 52, 52, 53 e 53 pertencem à classe [51, 54[;
- 54, 55, 55 e 56 pertencem à classe [54, 57[;
- 57, 57, 57, 59 e 60 pertencem à classe [57, 60].

O número de elementos da amostra que pertencem a uma mesma classe é a frequência F dessa classe; por exemplo, a frequência da classe [48, 51[é 5, pois 5 elementos da amostra pertencem a essa classe.

A soma das frequências de todas as classes é a frequência total F_t da amostra; nesse caso, 20.

A frequência relativa $F\%$ de uma classe é dada por $\frac{F}{F_t}$.

Assim, podemos construir esta tabela de distribuição de frequências:

Tamanho dos peixes

Classe (comprimento em centímetro)	Frequência (quantidade de peixes)	*F*%
[48, 51[	5	25%
[51, 54[	6	30%
[54, 57[	4	20%
[57, 60]	5	25%
	$F_t = 20$	

Elaborado para fins didáticos.

Notas:

1. No item (2) dos procedimentos, em vez do intervalo [48, 60], poderíamos ter escolhido outro intervalo que contém a amostra, por exemplo [47,5; 60,5] ou [47, 61].
2. Poderiam ter sido escolhidos outros intervalos para representar as classes; por exemplo, poderíamos ter dividido o intervalo [48, 60] em 5 intervalos de classe, e não em 4.
3. Os extremos de cada intervalo de classe não precisam ser elementos da amostra, mas, caso sejam, deve-se tomar o cuidado de não permitir que um mesmo elemento da amostra pertença a duas classes simultaneamente. Por isso, nesse exemplo, foram escolhidos intervalos de classe abertos à direita, com exceção do último intervalo.
4. Embora não seja obrigatório, é conveniente que, em duas classes consecutivas, o extremo à direita (aberto) da primeira classe coincida com o extremo à esquerda (fechado) da segunda.

Histograma

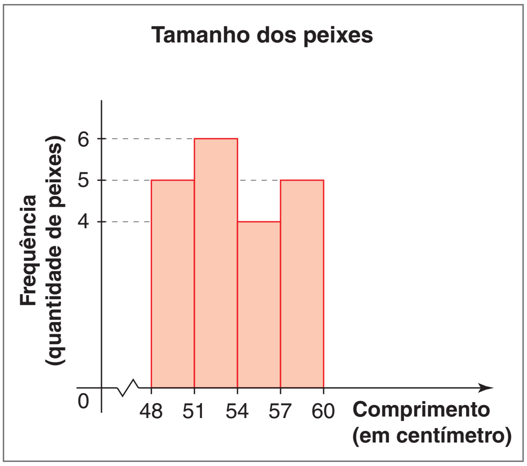
Os dados da tabela de distribuição de frequências anterior podem também ser descritos pelo gráfico a seguir, chamado de **histograma**, em que:

- as frequências são indicadas no eixo coordenado vertical, e as classes, no eixo coordenado horizontal;
- as bases dos retângulos coincidem com os intervalos representantes das respectivas classes;
- as alturas dos retângulos representam as frequências das respectivas classes.

O histograma é usado na representação de uma distribuição de frequências em que as classes são intervalos reais. Para classes unitárias, usamos os gráficos de linha, de barras ou de setores.

Nota:

Em um histograma, as áreas dos retângulos devem ser proporcionais às respectivas frequências. Assim, se fossem adotadas classes de amplitudes diferentes entre si, as alturas dos retângulos não seriam as frequências das respectivas classes. Por isso, é conveniente adotar classes de mesma amplitude.



FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

Elaborado para fins didáticos.

Observação

O símbolo —√— indica que a representação do intervalo [0, 48] está fora de escala em relação à representação dos intervalos de classe.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

1. Institutos como o Instituto de Pesos e Medidas (IPEM) desempenham um papel fundamental na fiscalização e na garantia de que os produtos vendidos no mercado estão em conformidade com as normas estabelecidas. Uma das principais funções do IPEM é verificar se a massa indicada nas embalagens dos produtos corresponde ao conteúdo real que elas contêm. Essa verificação é essencial para proteger os direitos dos consumidores e assegurar que eles estejam recebendo exatamente o que foi anunciado. Para essa fiscalização, o IPEM seleciona amostras de produtos de diferentes lotes diretamente nos pontos de venda. Essas amostras são levadas para laboratórios especializados, onde são submetidas a testes rigorosos para medir a massa real e compará-la com a massa declarada pelo fabricante na embalagem. É importante destacar que há uma margem de tolerância estabelecida. Isso significa que a massa real do produto pode ter um pequeno desvio em relação à massa declarada na embalagem.
Em uma fiscalização, foram coletados 18 pacotes de café para análise. As massas, em grama, desses pacotes são:

506	498	520	503	510
506	508	490	485	495
495	504	494	490	
500	500	480	485	

Construa uma tabela de distribuição de frequências dessa amostra, com 6 classes de mesma amplitude, e o respectivo histograma.

Resolução

(1) Calculamos a amplitude da amostra:

$$(520 - 480)\text{ g} = 40\text{ g}$$

(2) Escolhemos um intervalo fechado, de comprimento maior ou igual à amplitude da amostra, que contenha a amostra.

Se escolhêssemos o intervalo [480, 520], teríamos um inconveniente, pois, como o problema pede que a amostra seja separada em seis classes de comprimentos iguais, precisaríamos dividir o comprimento do intervalo escolhido por 6, o que resulta em uma dízima periódica ($40 : 6 = 6{,}666...$). Vamos, então, escolher um intervalo de comprimento tal que seu quociente por 6 seja um número com representação decimal finita. Por exemplo, escolhemos o intervalo [479, 521], que tem amplitude 42. (É conveniente escolher um intervalo de extremos relativamente próximos dos extremos da amostra.)

(3) Dividimos por 6 a amplitude 42 do intervalo escolhido, obtendo o comprimento 7 de cada um dos seis subintervalos em que será separada a amostra. Considerando esses subintervalos fechados à esquerda e abertos à direita, exceto o de extremos maiores que deve ser fechado, temos as classes:

[479, 486[, [486, 493[, [493, 500[, [500, 507[, [507, 514[e [514, 521].

(4) Agrupamos os elementos da amostra de acordo com as classes definidas:

- 480, 485 e 485 pertencem a [479, 486[;
- 490 e 490 pertencem a [486, 493[;
- 494, 495, 495 e 498 pertencem a [493, 500[;
- 500, 500, 503, 504, 506 e 506 pertencem a [500, 507[;
- 508 e 510 pertencem a [507, 514[;
- 520 pertence a [514, 521].

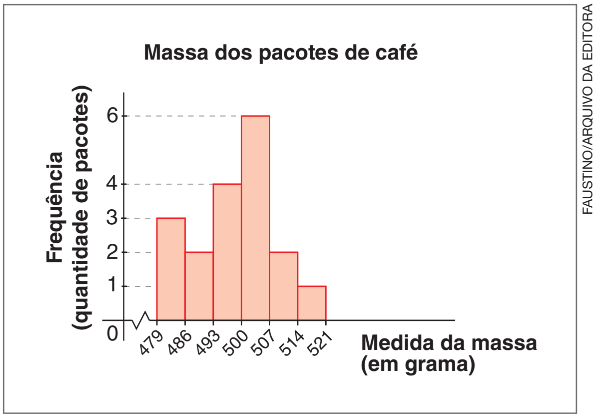
Assim, temos a tabela de distribuição de frequências:

Massa dos pacotes de café

Classe (massa em grama)	Frequência (quantidade de pacotes)
[479, 486[	3
[486, 493[	2
[493, 500[	4
[500, 507[	6
[507, 514[	2
[514, 521]	1
	$F_t = 18$

Elaborado para fins didáticos.

O histograma correspondente a essa distribuição é:



Elaborado para fins didáticos.

Segundo o Censo Agropecuário 2017, a agricultura familiar representa cerca de 77% dos estabelecimentos agropecuários e aquicultores nacionais. Esse contexto pode ser associado ao tema dos **exercícios propostos 12** a **14** a fim de abordar a alimentação saudável, a produção de alimentos no Brasil e aspectos da soberania alimentar. Além de relacionar com os **ODS 2** e **ODS 15**, favorecer o desenvolvimento do **TCT Educação Ambiental, Saúde** e **Vida Familiar e Social**.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Faça os exercícios no caderno.

12. Os inseticidas naturais são substâncias que combatem insetos e pragas sem usar produtos químicos, sendo feitos a partir de ingredientes naturais. São uma alternativa sustentável e menos agressiva ao meio ambiente do que os agrotóxicos convencionais. Para o estudo sobre a eficácia de um inseticida natural aplicado no cultivo de café, foram catalogadas, por amostragem, as produções da última safra de 20 produtores que utilizaram esse inseticida. Essa amostra é apresentada no quadro, em que os valores são expressos em tonelada.

12. b. Resposta no final do livro.

270	380	283	402	385
302	290	250	310	265
410	280	295	283	356
390	300	329	250	304

a. Qual é a amplitude dessa amostra? **12. a.** 160

b. Construa a tabela de distribuição de frequências dessa amostra com 6 classes de mesma amplitude.

c. Construa o histograma correspondente à tabela feita no item **b**.

12. c. Resposta no final do livro.

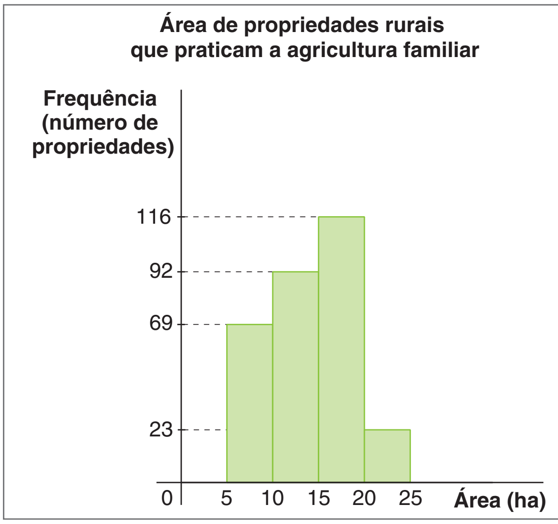
13. A agricultura familiar é um modelo de produção agrícola caracterizado pelo cultivo da terra e pela criação de animais realizados por pequenos proprietários rurais, utilizando predominantemente a mão de obra familiar. Esse tipo de agricultura desempenha um papel fundamental na segurança alimentar e na economia de muitas regiões, especialmente no Brasil, onde representa uma parte significativa da produção de alimentos.

ODS 2

ODS 15

Na agricultura familiar, as propriedades rurais são geralmente menores e a produção é diversificada, focando tanto no autoconsumo quanto na venda de excedentes em mercados locais. Além de gerar emprego e renda no campo, a agricultura familiar contribui para a preservação de práticas agrícolas tradicionais, o manejo sustentável dos recursos naturais e a conservação da biodiversidade.

O histograma de área de propriedades rurais consta de um estudo da prefeitura de um município sobre o número de propriedades rurais da região que praticam a agricultura familiar e a extensão delas, em hectare.



ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Elaborado para fins didáticos.

Dado que a tabela de distribuição de frequências que originou esse histograma considerou cada intervalo de classe aberto à direita e fechado à esquerda, exceto o intervalo de extremos maiores, que é fechado, classifique em verdadeira ou falsa cada uma das afirmações a seguir, relativas a esse município.

a. No histograma, foram consideradas 300 propriedades rurais. **13. a.** verdadeira

b. O número de propriedades rurais com menos de 15 ha cada uma é maior que o número de propriedades que têm 15 ha ou mais. **13. b.** verdadeira

c. É possível concluir que existem precisamente 116 propriedades rurais com exatamente 15 ha cada uma. **13. c.** falsa

d. É possível que não haja nenhuma propriedade com exatamente 15 ha. **13. d.** verdadeira

14. Pesquise dados atuais a respeito da agricultura familiar. Em seguida, elabore um problema sobre distribuição de frequências com dados agrupados envolvendo os dados da pesquisa. Em seguida, troque o problema elaborado com um colega para que um resolva o problema elaborado pelo outro. Por fim, analisem e discutam as resoluções. **14.** Resposta pessoal.

Para retomar os conteúdos estudados, resolva o exercício complementar 4.

3. Medidas estatísticas

A introdução às medidas estatísticas é contextualizada pelo Índice de Desenvolvimento Humano (IDH) e os indicadores usados em seu cálculo. Assim como na apresentação dos conceitos preliminares, essa é uma oportunidade de integração com a área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas. Em parceria com o professor de Geografia, é possível promover a reflexão sobre os indicadores utilizados no cálculo do IDH e sobre como esse índice se reflete na sociedade em que os estudantes estão inseridos.

Um indicador usado para o cálculo do Índice de Desenvolvimento Humano (IDH) de um país é a renda *per capita*, resultado da divisão de toda a renda do país, em determinado período, pelo número de habitantes. Porém, outros indicadores são considerados no cálculo do IDH, pois a renda *per capita* pode dar uma falsa ideia da riqueza de um povo, já que não mede as disparidades na distribuição da renda nacional.

DELFIM MARTINS/PULSAR IMAGENS

Vista aérea de Paraisópolis, comunidade de São Paulo (SP), contrastando com os edifícios de luxo ao redor, evidenciando de forma nítida a desigualdade social e econômica na cidade. Foto de 2020.

Por exemplo, se em 2023 a renda *per capita* anual do Brasil foi de R$ 1.893,00 podemos concluir que, naquele ano, cada uma das pessoas consideradas nesse cálculo alcançou essa renda? Podemos afirmar que a distribuição de renda foi equitativa?

A resposta para as duas perguntas é **não**, uma vez que se pode ter, por exemplo, metade da população não ganhando nada e cada cidadão da outra metade ganhando R$ 3.786,00; a renda *per capita* continuaria sendo R$ 1.893,00.

A renda *per capita* não é uma medida eficaz para avaliar a disparidade de renda de um país, pois ela apenas indica a média de renda por pessoa sem considerar como essa renda é distribuída entre a população. Para medir a desigualdade de distribuição de renda ou riqueza, utiliza-se o Coeficiente de Gini, desenvolvido pelo estatístico italiano Corrado Gini.

O Coeficiente de Gini é amplamente empregado em estudos de Economia, Sociologia e Políticas públicas para analisar a desigualdade econômica entre diferentes grupos de uma sociedade. Ele varia de 0 a 1, onde 0 representa uma situação de igualdade perfeita, em que todos os indivíduos têm exatamente a mesma renda, enquanto 1 indica desigualdade máxima, situação na qual uma única pessoa concentra toda a renda ou riqueza, e o restante da população não tem nada. Esse coeficiente é um dos parâmetros adotados pela Organização das Nações Unidas (ONU) para classificar cada país segundo o IDH.

O exemplo anterior ajuda a entender a necessidade de mais de um parâmetro para avaliar a distribuição dos valores de uma amostra de números. Alguns desses parâmetros são as **medidas estatísticas**, classificadas em **medidas de posição** e **medidas de dispersão**, que serão estudadas neste tópico.

Medidas de posição

Três funcionários de uma indústria testaram o tempo de duração de um tipo de lâmpada. Para isso, deixaram acesas, ininterruptamente, nove lâmpadas.

Os tempos de vida útil das lâmpadas, em um rol, em horas, foram:

890, 890, 890, 930, 950, 960, 970, 990 e 990

No rótulo das lâmpadas que serão vendidas, deve constar o tempo aproximado de vida útil de cada lâmpada. Para decidir sobre o número que melhor representava esse tempo, um dos engenheiros escolheu o número 890, o outro, 950, e o terceiro, 940, com os seguintes argumentos, respectivamente:

- o valor de maior frequência é 890; logo, o tempo de vida mais provável é 890 horas;
- o valor 950 é o melhor, por estar exatamente no ponto médio do rol;
- o valor 940 é o melhor, pois, adicionando os tempos de duração das nove lâmpadas e dividindo a soma por 9, obtém-se 940.

Observe que cada escolha está fundamentada em uma argumentação lógica e convincente. Em Estatística, os três números escolhidos pelos engenheiros são chamados, respectivamente, de **moda**, **mediana** e **média aritmética** da amostra de números. No tipo de escolha desse exemplo, é usual adotar a média aritmética, 940, como o valor representativo da amostra.

Moda, mediana e média aritmética são denominadas **medidas de posição** ou medidas de tendência central. Elas são usadas para resumir ou representar um conjunto de dados, pois visam identificar um valor em torno do qual os dados tendem a se concentrar.

Média aritmética

A média aritmética é a medida de posição mais conhecida e mais usada em nosso dia a dia. Acompanhe a situação a seguir para entender melhor seu conceito.

Os conteúdos de quatro baldes de água são: 3 L, 5 L, 2 L e 1 L. Se toda essa água fosse igualmente distribuída entre esses baldes, com quantos litros ficaria cada um?

A quantidade de água de cada balde seria o resultado da divisão entre a quantidade total de água e o número de baldes, nessa ordem, isto é:

$$\frac{3 + 5 + 2 + 1}{4} = 2{,}75$$

O resultado 2,75 L é chamado de média aritmética dos valores 3 L, 5 L, 2 L e 1 L.

Podemos entender a média aritmética de duas ou mais quantidades como o valor que cada uma teria se todas fossem iguais, mantendo-se a soma delas. Genericamente, definimos:

A **média aritmética** dos n números $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$, indicada por $\bar{x}$, é dada por:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n}{n}$$

Explique aos estudantes que, quanto mais concentrados (ou menos dispersos) os dados estiverem, mais representativa da amostra a média será.

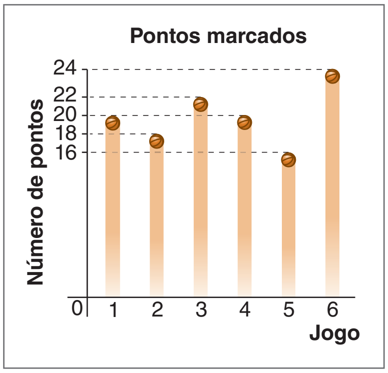
Exemplo

A distribuição dos pontos marcados por um jogador de basquetebol nos últimos seis jogos é dada pelo gráfico de pontos marcados.

Para calcular a média de pontos por jogo desse atleta nesse período, efetuamos:

$$\bar{x} = \frac{20 + 18 + 22 + 20 + 16 + 24}{6} \Rightarrow \bar{x} = 20$$

Então, esse atleta marcou, em média, 20 pontos por jogo nos últimos seis jogos.



Elaborado para fins didáticos.

Média aritmética ponderada

Considere dez baldes de água tais que cinco deles contêm 4 L cada um, três outros contêm 2 L cada um, e os dois restantes contêm 5 L cada um. Se toda essa água fosse igualmente distribuída entre esses baldes, com quantos litros ficaria cada um?

A quantidade de água de cada balde seria o resultado da divisão entre a quantidade total de água e o número de baldes, nessa ordem, isto é:

$$\frac{4 \cdot 5 + 2 \cdot 3 + 5 \cdot 2}{10} = 3{,}6$$

O resultado 3,6 L é chamado de média aritmética ponderada dos valores 4 L, 2 L e 5 L, com **pesos** (ou fatores de ponderação) 5, 3 e 2, respectivamente. Genericamente, definimos:

A **média aritmética ponderada** dos n números $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$, com pesos $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$, respectivamente, é o número $\bar{x}$ tal que:

$$\bar{x} = \frac{x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 + \ldots + x_n p_n}{p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_n}$$

No exercício resolvido a seguir, entenderemos como calcular a média aritmética de um conjunto de dados agrupados em intervalos reais.

Conectado: Um exemplo de algoritmo é indicado a seguir.
 # Definição das notas e pesos: **nota1** = 5.0 **nota2** = 6.5 **nota3** = 8.5 **peso1** = 1 **peso2** = 2 **peso3** = 3
 # Cálculo da soma ponderada das notas: **soma_ponderada** = (**nota1** * **peso1**) + (**nota2** * **peso2**) + (**nota3** * **peso3**)

EXERCÍCIO RESOLVIDO

2. A tabela a seguir mostra a distribuição de frequências dos tempos em que os estudantes de uma turma de Educação Física levam para correr determinado percurso.

Estudantes de uma turma de Educação Física

Classe (tempo em segundo)	Frequência (número de estudantes)
[894, 926[	4
[926, 944[	7
[944, 966[	9
[966, 984[	12
[984, 1.006]	8
	$F_t = 40$

Elaborado para fins didáticos.

Observação

Embora o mais usual seja adotar classes de mesma amplitude, nada impede que se adotem classes de amplitudes diferentes, como neste exercício.

Qual é o tempo médio, em segundos, que os estudantes levam para correr esse percurso?

Resolução

Quando as classes são representadas por intervalos reais, como nesse caso, para calcular a média tomamos o ponto médio x_M de cada classe e calculamos a **média aritmética ponderada** entre os valores x_M, atribuindo a cada um o peso igual à respectiva frequência da classe.

Observe a tabela a seguir.

Estudantes de uma turma de Educação Física

Classe (tempo em segundo)	Ponto médio (x_M)	Frequência (número de estudantes)
[894, 926[	$\frac{894 + 926}{2} = 910$	4
[926, 944[	$\frac{926 + 944}{2} = 935$	7
[944, 966[	$\frac{944 + 966}{2} = 955$	9
[966, 984[	$\frac{966 + 984}{2} = 975$	12
[984, 1.006]	$\frac{984 + 1.006}{2} = 995$	8
		$F_t = 40$

Elaborado para fins didáticos.

Calculando a média aritmética ponderada dos números 910, 935, 955, 975 e 995, com pesos 4, 7, 9, 12 e 8, respectivamente, temos:

$$\bar{x} = \frac{910 \cdot 4 + 935 \cdot 7 + 955 \cdot 9 + 975 \cdot 12 + 995 \cdot 8}{4 + 7 + 9 + 12 + 8}$$

$$\bar{x} = \frac{38.440}{40}$$

$$\bar{x} = 961$$

Logo, o tempo médio que os estudantes levam para correr esse percurso é 961 s.

Reflexão

O que é média geométrica?

A média geométrica de *n* números não negativos x_1, x_2, x_3, ..., x_n é o número *G*, tal que: $G = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot ... \cdot x_n}$

Exemplos:

a. A média geométrica entre 2 e 8 é o número *G* dado por: $G = \sqrt{2 \cdot 8} = 4$

b. A média geométrica entre 4, 3 e 75 é o número G dado por: $G = \sqrt[3]{4 \cdot 3 \cdot 75} \approx 9{,}65$

c. A média geométrica entre 1, 10, 5 e 72 é o número G dado por: $G = \sqrt[4]{1 \cdot 2 \cdot 8 \cdot 81} = \sqrt{1.296} = 6$

Conectado

Em momentos anteriores, você foi introduzido ao conceito de Português estruturado. Esse tipo de linguagem é uma simplificação da Língua Portuguesa, servindo como uma ponte entre a linguagem natural e a de programação. Sua sintaxe é utilizada para descrever algoritmos de maneira clara e objetiva.

Utilizando o Português estruturado, reúna-se com um colega e construam um algoritmo que calcule a média ponderada das notas 5,0; 6,5 e 8,5, atribuindo a elas os pesos 1, 2 e 3, respectivamente. Após a construção do algoritmo, compartilhem-no com os outros grupos.

 # Cálculo da soma dos pesos: **soma_pesos** = **peso1** + **peso2** + **peso3**
 # Cálculo da média ponderada: **media_ponderada** = **soma_ponderada** / **soma_pesos**
 # Exibição do resultado: Exiba: “A média ponderada é:”, **media_ponderada**

Moda

Nem sempre a média aritmética é o melhor elemento para a representação de uma amostra. Dependendo da situação, é possível que outro elemento seja a melhor escolha ou, até mesmo, que não exista média aritmética – é o caso de amostras cujos elementos não são números. Por exemplo, suponha que cada um de cinco medicamentos, A, B, C, D e E, indicados contra insônia tenha sido testado em um grupo de 2.000 pacientes e que os resultados sejam descritos no quadro.

Teste dos medicamentos contra insônia

Medicamento	Número de resultados positivos
A	1.200
B	1.400
C	1.100
D	1.200
E	1.700

Elaborado para fins didáticos.

Observe que o medicamento E corresponde à maior frequência na amostra de resultados positivos. Portanto, desconsiderando outros fatores, caso não haja contraindicação médica, a escolha do medicamento E é a melhor opção contra insônia. O medicamento E é chamado de **moda** da amostra, por ser o elemento de maior frequência.

Em uma amostra cujas frequências dos elementos **não** são todas iguais, chama-se **moda** e indica-se por *Mo* todo elemento ou todos os elementos de maior frequência.

Exemplos

a. Na amostra 2, 6, 4, 6, 4, 6 e 5, temos $Mo = 6$.

b. Na amostra 1, 4, 3, 7, 2, 7, 8 e 4, há duas modas (**amostra bimodal**): $Mo = 4$ e $Mo' = 7$.

c. Na amostra 1, 8, 3, 5, 0, 2, 7 e 4 não há moda, pois todos os elementos têm a mesma frequência.

Mediana

Em um escritório de contabilidade, trabalham cinco pessoas com salário médio de R$ 4.500,00, isto é, a média aritmética entre os cinco salários é R$ 4.500,00.

Essa informação pode dar a falsa ideia de que os cinco trabalhadores desse escritório têm salário próximo a R$ 4.500,00. Para perceber que apenas a média aritmética não é representativa dessa amostra, observe os salários dos cinco funcionários apresentados em rol:

R$ 1.850,00   R$ 1.900,00   R$ 1.920,00   R$ 7.550,00   R$ 9.280,00

Na verdade, os altos salários estão concentrados em um extremo do rol. Isso faz a média aritmética perder a tendência central e ficar mais próxima desse extremo que do extremo dos baixos salários. Por isso, nesse caso, além da média aritmética, convém informar o valor do centro do rol (R$ 1.920,00), chamado de **mediana** da amostra. Note como a amostra fica mais bem representada pelas informações:

- O salário médio dos cinco funcionários é R$ 4.500,00.
- A mediana é R$ 1.920,00.

Com essas informações, é possível afirmar que três funcionários têm salário menor ou igual a R$ 1.920,00 e que os outros dois têm salário maior ou igual a R$ 1.920,00. E, como a média aritmética é R$ 4.500,00, concluímos que há uma grande desigualdade de salários entre os extremos do rol.

Observe que uma vantagem da mediana em relação à média aritmética é que ela não é afetada por valores discrepantes da amostra.

Reflexão

Considerando os estudantes de sua classe, qual é a moda das idades desses estudantes? E mediana?

A resposta dependerá da idade dos estudantes.

Observação

Para determinar a mediana em uma amostra de números diferentes, a amostra deve ser colocada em rol, do número menor para o maior ou do maior para o menor. Nos dois róis, a mediana é a mesma.

Comente com os estudantes que, para um número par de dados, a mediana é o valor que divide a amostra em duas partes, de modo que 50% dos valores ficam abaixo da mediana e 50%, acima dela.

Os cálculos da moda e da mediana para dados agrupados em intervalos reais são feitos por métodos de Matemática superior e por isso não serão abordados nesta obra.

Podemos definir mediana, genericamente, da seguinte maneira:

Considerando n números, x_1, x_2, x_3, ..., x_n, dispostos em rol:

- sendo n ímpar, chama-se **mediana**, indicada por *Md*, o termo central do rol, isto é, o termo x_i com $i = \frac{n+1}{2}$;
- sendo n par, chama-se **mediana** (*Md*) a média aritmética entre os termos centrais desse rol, isto é, a média aritmética entre os termos x_i e x_{i+1}, com $i = \frac{n}{2}$.

Exemplos

a. No rol com número ímpar de termos, 2, 3, 9, 12, 25, 29, 34, a mediana é o termo central 12, isto é: $Md = 12$.

b. No rol com número par de termos, 3, 5, 14, 20, 27, 31, 32, 35, a mediana é a média aritmética entre os termos centrais, 20 e 27, isto é:

$$Md = \frac{20 + 27}{2} = 23{,}5$$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

3. A tabela mostra a distribuição de frequências das quantias pagas mensalmente a um sindicato pelos 250 operários de uma fábrica.

Quantias pagas mensalmente para o sindicato

Classe (em real por operário)	Frequência (número de operários)
12	100
15	80
18	50
22	20

Elaborado para fins didáticos.

a. Qual é a quantia média mensal paga por operário?

b. Qual é a moda da amostra formada pelas quantias pagas pelos operários dessa fábrica?

c. Qual é a mediana da amostra formada pelas quantias pagas pelos operários dessa fábrica?

Resolução

a. A quantia média $\overline{x}$ é a **média aritmética ponderada** entre as quantias R$ 12,00, R$ 15,00, R$ 18,00 e R$ 22,00, com pesos 100, 80, 50 e 20, respectivamente, isto é:

$$\overline{x} = \frac{12 \cdot 100 + 15 \cdot 80 + 18 \cdot 50 + 22 \cdot 20}{100 + 80 + 50 + 20} = \frac{3.740}{250} = 14{,}96$$

Logo, a quantia média paga ao sindicato mensalmente, por operário, é R$ 14,96.

b. A amostra tem 250 elementos, que são as quantias pagas por todos os operários. Como o elemento de maior frequência na amostra é R$ 12,00, concluímos que a **moda** (*Mo*) é R$ 12,00.

c. Para determinar a mediana, devemos representar a amostra em rol:

$$\underbrace{\text{R\$ 12,00; ...; R\$ 12,00}}_{\text{100 elementos}};\ \underbrace{\text{R\$ 15,00; ...; R\$ 15,00}}_{\text{80 elementos}};\ \underbrace{\text{R\$ 18,00; ...; R\$ 18,00}}_{\text{50 elementos}};\ \underbrace{\text{R\$ 22,00; ...; R\$ 22,00}}_{\text{20 elementos}}.$$

Como o rol tem um número par de termos (250), a mediana é a média aritmética entre os elementos centrais do rol, que são aqueles que ocupam a 125ª e a 126ª posições. Observando o rol, concluímos que os elementos dessas posições são R$ 15,00 e R$ 15,00; portanto, a mediana é dada por $Md = \frac{15 + 15}{2} = 15$, ou seja, a mediana é R$ 15,00.

TRABALHO E JUVENTUDES Cientista de dados

A profissão de cientista de dados emergiu como promissora e indispensável no cenário atual, no qual a tecnologia se faz presente em diversos campos. Esse profissional desenvolve habilidades únicas em estatística, programação e conhecimento de negócios, as quais podem capacitá-lo a desenvolver ideias e conduzir decisões estratégicas usando dados.

Uma parte importante do trabalho de um cientista de dados é a aplicação rigorosa de técnicas estatísticas. Desde a coleta e limpeza de dados até a análise e interpretação, a estatística tem um papel central em cada etapa do processo. Inicialmente, os cientistas de dados enfrentam o desafio de lidar com conjuntos de dados vastos e muitas vezes desorganizados, provenientes de diversas fontes, como transações comerciais, registros de clientes e até mesmo dados de redes sociais. Além disso, os cientistas de dados são responsáveis por comunicar suas conclusões de maneira clara e acessível para diferentes públicos de uma organização. Isso envolve traduzir resultados complexos em ideias que orientam desde estratégias empresariais, melhorias em produtos, serviços até otimizações de processos.

A demanda por cientistas de dados continua a crescer em diversos setores, incluindo varejo, saúde, finanças e tecnologia, pois as empresas estão cada vez mais conscientes da importância de aproveitar seus dados como uma ferramenta valiosa, e os cientistas de dados são fundamentais nesse processo de transformação digital.

Trabalho e juventudes: Pesquisa pessoal. A partir do **Trabalho e juventudes**, incentive os estudantes a pesquisar mais informações acerca do mercado de trabalho para o cientista de dados e profissões relacionadas à tecnologia da informação. Caso alguns estudantes trabalhem ou conheçam profissionais da área, incentive a compartilharem com os colegas da turma a experiência a fim de valorizar a diversidade de saberes e compreender aspectos do mundo do trabalho.

Assim, o profissional da área não apenas lida com dados, mas também celebra o poder transformador da estatística para revelar descobertas e impulsionar a inovação nas organizações modernas.

Quer saber mais sobre essa profissão? Faça uma pesquisa na internet e compartilhe com os colegas um resumo das informações que você encontrar.

LUIS ALVAREZ/DIGITALVISION/GETTY IMAGES

Cientistas de dados discutindo e analisando resultados para identificar padrões e *insights*, utilizando gráficos e algoritmos para embasar suas conclusões e otimizar decisões estratégicas.

15. c. Sabemos que 3,5 é o ponto médio do intervalo [3, 4]. Admitindo que o crescimento da planta nesse intervalo seja linear, a altura da planta, em centímetro, será o ponto médio do intervalo [4,8; 5,6], que é a média aritmética entre 4,8 e 5,6, ou seja, 5,2 cm.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Faça os exercícios no caderno.

15. Um botânico decidiu estudar o crescimento de uma planta ao longo de determinado período. Durante cinco dias consecutivos, sempre no mesmo horário, ele mediu a altura da planta. O quadro a seguir apresenta a altura *h*, em milímetro, da planta em função do tempo *t*, em dia.

Altura da planta em função do tempo

h	0	2	3,6	4,8	5,6	6,2
t	0	1	2	3	4	5

a. Construa o gráfico de linha correspondente a esse quadro. **15. a.** Resposta no final do livro.

b. Qual foi o crescimento médio diário da planta nesses cinco dias? **15. b.** 1,24 cm

c. Faça uma estimativa da altura da planta 3,5 dias depois de seu nascimento. Justifique o processo que você utilizou para a estimativa e compartilhe-o com os colegas.

16. (Enem) Os candidatos K, L, M, N e P estão disputando uma única vaga de emprego em uma empresa e fizeram provas de português, matemática, direito e informática. A tabela apresenta as notas obtidas pelos cinco candidatos.

Candidatos	Português	Matemática	Direito	Informática
K	33	33	33	34
L	32	39	33	34
M	35	35	36	34
N	24	37	40	35
P	36	16	26	41

Segundo o edital de seleção, o candidato aprovado será aquele para o qual a mediana das notas obtidas por ele nas quatro disciplinas for a maior.

O candidato aprovado será **16.** alternativa **d**

a. K. **b.** L. **c.** M. **d.** N. **e.** P.

17. Representando em rol as idades, em ano, de sete pessoas, obtêm-se: 6, 9, 10, x, $x + 3$, $x + 4$, 16.
Sabendo que nessa distribuição a média aritmética é igual à mediana, calcule a moda. **17.** 16

18. (Enem) Uma loja que vende sapatos recebeu diversas reclamações de seus clientes relacionadas à venda de sapatos de cor branca ou preta. Os donos da loja anotaram as numerações dos sapatos com defeito e fizeram um estudo estatístico com o intuito de reclamar com o fabricante.
A tabela contém a média, a mediana e a moda desses dados anotados pelos donos.

Estatísticas sobre as numerações dos sapatos com defeito

	Média	Mediana	Moda
Numerações dos sapatos com defeito	36	37	38

Para quantificar os sapatos pela cor, os donos representaram a cor branca pelo número 0 e a cor preta pelo número 1. Sabe-se que a média da distribuição desses "zeros" e "uns" é igual a 0,45.

Os donos da loja decidiram que a numeração dos sapatos com maior número de reclamações e a cor com maior número de reclamações não serão mais vendidas.

A loja encaminhou um ofício ao fornecedor dos sapatos, explicando que não serão mais encomendados os sapatos de cor **18.** alternativa **a**

a. branca e os de número 38.

b. branca e os de número 37.

c. branca e os de número 36.

d. preta e os de número 38.

e. preta e os de número 37.

19. Os levantamentos que determinam os níveis de audiência de emissoras televisivas são feitos por amostragem, por meio de entrevistas, telefonemas ou dispositivos conectados a certo número de televisores, que recolhem informações sobre o tempo em que a tevê permanece ligada e os canais sintonizados. A audiência é medida em pontos, e cada ponto indica determinado número de espectadores.
A tabela a seguir mostra a audiência de uma emissora durante dez horas consecutivas.

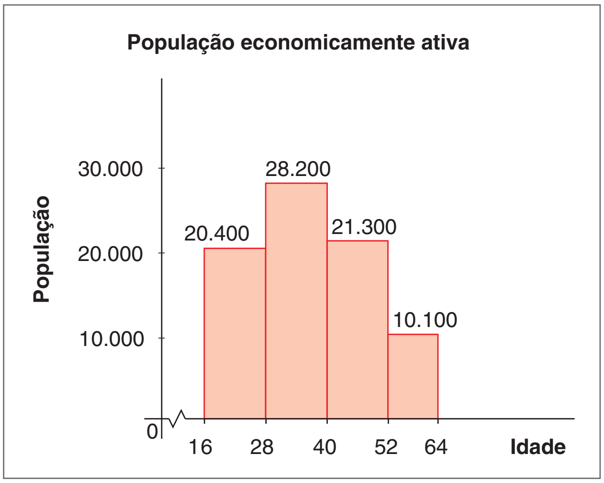
Audiência de uma emissora

Número de horas	Audiência (número de pontos)
3	18
4	19
2	20
1	21

Elaborado para fins didáticos.

Qual foi a média horária de pontos de audiência dessa emissora nesse período? **19.** 19,1

20. A distribuição da população economicamente ativa de um pequeno município, por grupos de idade, é descrita pelo gráfico a seguir.



Elaborado para fins didáticos.

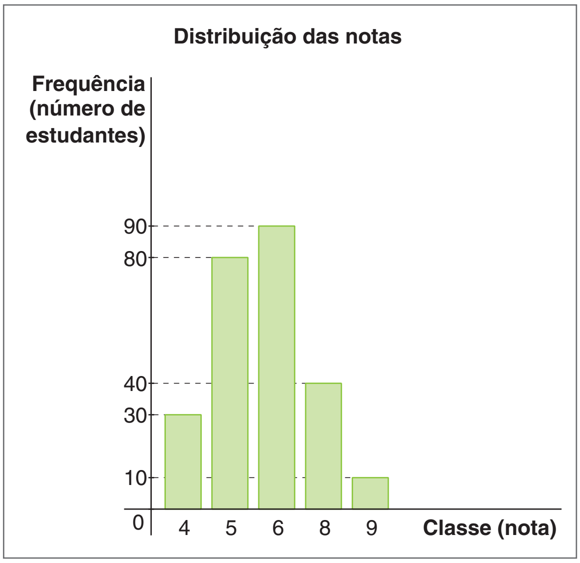
A idade média da população economicamente ativa desse município é: **20.** alternativa **e**

a. 35,165 anos.
b. 34,280 anos.
c. 37,200 anos.
d. 36,282 anos.
e. 37,165 anos.

Nota: A população economicamente ativa compreende o potencial de mão de obra com que o setor produtivo pode contar, isto é, a população ocupada (trabalhando) e a população desocupada (sem trabalho), mas disposta a trabalhar e que, para isso, tomou alguma providência efetiva em busca de trabalho.

21. Após a correção das avaliações de todas as turmas do 3º ano do Ensino Médio, um professor de Matemática construiu o gráfico de barras a seguir, representando a distribuição das notas nessa avaliação.

ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA



Elaborado para fins didáticos.

Em relação à média aritmética $\bar{x}$, à mediana *Md* e à moda *Mo* dessa distribuição, pode-se afirmar que:

21. alternativa **c**

a. $Md = Mo = \bar{x}$

b. $Md = Mo$ e $\bar{x} > Md$

c. $Md = Mo$ e $\bar{x} < Md$

d. $Md < Mo$ e $\bar{x} > Mo$

e. $Md > Mo$ e $\bar{x} > Md$

22. No elenco de jogadores de futebol de um clube, a distribuição de idades é dada pela tabela a seguir.

Números de jogadores por idade

Idade	Número de jogadores
19	2
21	2
23	3
25	4
28	4
30	5

Elaborado para fins didáticos.

Será sorteada, aleatoriamente, uma comissão de dois jogadores, que terão a mesma função na representação do elenco junto aos dirigentes. Qual é a probabilidade de os jogadores escolhidos terem idades diferentes e de a média aritmética de suas idades ser maior que a média aritmética das idades de todos os jogadores do elenco? **22.** $\frac{28}{95}$

23. (FGV) A média das alturas dos 6 jogadores em quadra de um time de vôlei é 1,92 m. Após substituir 3 jogadores por outros, a média das alturas do time passou para 1,90 m. Nessas condições, a média, em metros, das alturas dos jogadores que saíram supera a dos que entraram em: **23.** alternativa **b**

a. 0,03.

b. 0,04.

c. 0,06.

d. 0,09.

e. 0,12.

24. Três recipientes, A, B e C, contêm água sanitária, solução constituída de água e hipoclorito de sódio. A tabela a seguir mostra o volume de água sanitária em cada recipiente e a concentração de hipoclorito de sódio em cada solução.

Volume de água sanitária em cada recipiente e a concentração de hipoclorito de sódio em cada solução

Recipiente	Volume de água sanitária (litros)	Concentração de hipoclorito de sódio (%)
A	25	2,00
B	10	1,50
C	15	2,80

Elaborado para fins didáticos.

Misturando todo o conteúdo dos três recipientes, qual será a concentração de hipoclorito de sódio na solução assim obtida? **24.** 2,14%

25. Reúnam-se em grupos e façam uma pesquisa sobre um tema da escolhas de vocês que permita a coleta de dados quantitativos. Após definir o tema, coletem uma amostra com pelo menos 10 dados. Organizem os dados coletados em uma tabela de distribuição de frequência e, em seguida, construam um gráfico que represente a distribuição dos dados. Calcule a média, a moda e a mediana dos dados coletados, e, por fim, escrevam um breve texto interpretando os resultados obtidos, destacando o que os valores estatísticos indicam sobre o conjunto de dados e a distribuição observada.

25. Resposta pessoal.

26. Em todas as ciências, as médias são utilizadas para descrever fenômenos que envolvam medidas. Entre muitos exemplos, citamos três: em Geografia, estuda-se a densidade populacional, também chamada **densidade demográfica**; em Química, estuda-se a **densidade de uma amostra de matéria** (corpo); e, em Física, estuda-se a **velocidade média**. Pesquise na internet esses três conceitos; depois escreva um texto definindo cada um e exemplifique com um problema resolvido. **26.** Pesquisa e resposta pessoais. Você encontrará mais informações nas **Orientações Específicas** deste capítulo.

Para retomar os conteúdos estudados, resolva os exercícios complementares 5 a 8.

Uma pesquisa de mercado consiste na coleta de informações que identifiquem oportunidades e problemas pertinentes à área de atuação de uma organização comercial. As medidas de posição, média, mediana e moda, são fundamentais nesse tipo de pesquisa.

Para ter uma ideia sobre o assunto, assista ao vídeo **Olha o sanduíche**. Disponível em: https://m3.ime.unicamp.br/recursos/1144. Acesso em: 5 out. 2024.

Com a participação dos estudantes, refaça o exemplo introdutório (fundos de investimentos) deste item. A partir dele, defina desvio absoluto médio, variância e desvio-padrão. Os estudantes devem compreender que as medidas de dispersão mostram quanto os dados numéricos de uma amostra se distanciam entre si ou quanto eles se distanciam de um valor prefixado, como a média aritmética. A aplicação mais significativa dessas medidas é a comparação da dispersão de duas amostras, geralmente com o objetivo de determinar a mais regular (com menor dispersão). Enfatizar que a comparação da dispersão de duas amostras pode ser feita com o desvio absoluto médio, com a variância ou o desvio-padrão.

Medidas de dispersão

Em um rol de dados numéricos, a média aritmética, a moda e a mediana são referências de posição dos dados no rol, por isso são chamadas de **medidas de posição**. Essas medidas nada informam sobre o quanto esses dados estão próximos ou afastados de determinado valor; essas informações são obtidas por meio de outros parâmetros, que estudaremos neste tópico, chamados de **medidas de dispersão**. Vamos compreendê-las resolvendo o problema a seguir.

De janeiro a maio, dois fundos de investimentos, A e B, tiveram a mesma rentabilidade média mensal, conforme mostra a tabela a seguir.

Rentabilidade, em real, para cada R$ 1.000,00 aplicados

Mês	janeiro	fevereiro	março	abril	maio	Média
Fundo A	10	11	6	10	8	9
Fundo B	7	12	8	11	7	9

Elaborado para fins didáticos.

Um investidor pretende aplicar seu dinheiro em um desses fundos. Por ter um perfil conservador, esse investidor quer aplicar no fundo em que a rentabilidade mensal apresente menor dispersão em relação à média aritmética, ou seja, o fundo que teve o desempenho mais regular.

Como proceder, matematicamente, para determinar qual é o fundo de desempenho mais regular?

A comparação entre os desempenhos desses dois fundos de investimentos pode ser feita por meio de medidas estatísticas que indicam o quanto os elementos de uma amostra de números estão afastados da média aritmética. Essas medidas são conhecidas como: **desvio absoluto médio**, **variância** e **desvio-padrão**.

Calculando uma dessas medidas, em cada uma de duas amostras de um mesmo universo estatístico, será considerada menos dispersa a amostra que apresentar a menor medida. No caso dos fundos A e B, a amostra de rentabilidade menos dispersa, em relação à média aritmética, corresponde ao desempenho mais regular.

Desvio absoluto médio

No fundo de investimento A, a média mensal dos rendimentos nos 5 meses considerados na tabela anterior foi 9 reais, e esses rendimentos foram 10, 11, 6, 10 e 8 reais, de janeiro a maio, respectivamente.

Para determinar o quanto cada rendimento está afastado da média aritmética, basta calcular a diferença entre o rendimento e a média aritmética, nessa ordem; essa diferença é chamada de **desvio** do rendimento. Esses desvios são:

- $10 - 9 = 1$ (no mês de janeiro, o rendimento foi 1 real acima da média)
- $11 - 9 = 2$ (no mês de fevereiro, o rendimento foi 2 reais acima da média)
- $6 - 9 = -3$ (no mês de março, o rendimento foi 3 reais abaixo da média)
- $10 - 9 = 1$ (no mês de abril, o rendimento foi 1 real acima da média)
- $8 - 9 = -1$ (no mês de maio, o rendimento foi 1 real abaixo da média)

O módulo de cada um desses desvios é chamado de **desvio absoluto** do rendimento correspondente. No caso, temos os seguintes desvios absolutos:

- do rendimento de janeiro é $|10 - 9| = |1| = 1$
- do rendimento de fevereiro é $|11 - 9| = |2| = 2$
- do rendimento de março é $|6 - 9| = |-3| = 3$
- do rendimento de abril é $|10 - 9| = |1| = 1$
- do rendimento de maio é $|8 - 9| = |-1| = 1$

A média aritmética entre esses desvios absolutos é chamada de **desvio absoluto médio**, que se indica por *Dam*. Sendo Dam_A o desvio absoluto médio da amostra de rendimentos do fundo A, temos:

$$Dam_A = \frac{|1| + |2| + |-3| + |1| + |-1|}{5} = \frac{1 + 2 + 3 + 1 + 1}{5} = 1{,}6$$

Analogamente, calculamos Dam_B, isto é, o desvio absoluto médio da amostra de rendimentos do fundo B:

$$Dam_B = \frac{|7 - 9| + |12 - 9| + |8 - 9| + |11 - 9| + |7 - 9|}{5} = \frac{2 + 3 + 1 + 2 + 2}{5} = 2$$

Como o nome sugere, o desvio absoluto médio é a medida do afastamento médio dos elementos da amostra em relação à média aritmética. Assim, verificamos que, no período de janeiro a maio, os rendimentos do fundo A estiveram, em média, 1,6 real acima ou abaixo da média aritmética, e os rendimentos do fundo B estiveram, em média, 2 reais acima ou abaixo da média aritmética.

Como $Dam_A < Dam_B$, conclui-se que o fundo A teve um desempenho mais regular que o fundo B. Assim, o investidor conservador deve optar pelo fundo A.

Generalizando esses procedimentos para uma amostra qualquer de dados numéricos, definimos:

Reflexão: A soma dos desvios de qualquer amostra de números é igual a zero. Por isso, não usamos a média dos desvios como medida de dispersão da amostra.

Sendo $\bar{x}$ a média aritmética de uma amostra de números $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$, chama-se **desvio absoluto médio** dessa amostra o número representado por *Dam*, tal que:

$$Dam = \frac{|x_1 - \bar{x}| + |x_2 - \bar{x}| + |x_3 - \bar{x}| + ... + |x_n - \bar{x}|}{n}$$

Reflexão

Em vez de adotar a média dos módulos dos desvios como medida da dispersão de uma amostra de números, por que não adotar simplesmente a média dos desvios?

Variância

Outra medida que indica o afastamento dos elementos de uma amostra de números, em relação à média, é a **variância**, definida como a média aritmética entre os quadrados dos desvios dos elementos da amostra, ou seja:

Sendo $\bar{x}$ a média aritmética de uma amostra de números $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$, chama-se **variância** dessa amostra o número representado por σ^2, tal que:

$$\sigma^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + (x_3 - \bar{x})^2 + ... + (x_n - \bar{x})^2}{n}$$

Observação

O caractere σ é a letra grega sigma.

Assim, indicando por σ_A^2 e σ_B^2, respectivamente, as variâncias das amostras de rendimentos dos fundos A e B, descritos na tabela anterior, temos:

$$\sigma_A^2 = \frac{(10 - 9)^2 + (11 - 9)^2 + (6 - 9)^2 + (10 - 9)^2 + (8 - 9)^2}{5} =$$

$$= \frac{1^2 + 2^2 + (-3)^2 + 1^2 + (-1)^2}{5} = \frac{16}{5} = 3{,}2$$

e

$$\sigma_B^2 = \frac{(7 - 9)^2 + (12 - 9)^2 + (8 - 9)^2 + (11 - 9)^2 + (7 - 9)^2}{5} =$$

$$= \frac{(-2)^2 + 3^2 + (-1)^2 + 2^2 + (-2)^2}{5} = \frac{22}{5} = 4{,}4$$

Como $\sigma_A^2 < \sigma_B^2$, concluímos que o fundo de investimentos A teve, no período de janeiro a maio, um desempenho mais regular que o fundo B.

Desvio-padrão

Na interpretação da variância, pode surgir alguma dificuldade em relação à unidade de medida dos elementos da amostra. Por exemplo, quando os elementos da amostra representam capacidades em litro (L), a variância representa um resultado em L^2. Como essa unidade não tem significado físico, não é conveniente utilizar a variância nesse caso. Por causa de dificuldades como essa, definimos:

Observação

Enfatizamos que a comparação da dispersão de duas amostras de números pode ser feita por qualquer um dos índices: desvio absoluto médio, variância ou desvio-padrão. Como se observa neste exemplo, os três índices conduziram à mesma conclusão.

O **desvio-padrão** de uma amostra de números, representado por σ, é a **raiz quadrada da variância**.

Assim, indicando por σ_A e σ_B, respectivamente, os desvios-padrão das amostras de rendimentos dos fundos A e B descritos na tabela anterior, temos:

$$\sigma_A = \sqrt{3{,}2} \approx 1{,}79$$

e

$$\sigma_B = \sqrt{4{,}4} \approx 2{,}10$$

Como $\sigma_A < \sigma_B$, conclui-se que o fundo de investimentos A teve, no período de janeiro a maio, um desempenho mais regular que o fundo B.

Mentes brilhantes

Incentive os estudantes a pesquisar outras mulheres em posição de liderança ou que sejam influentes em sua área de atuação. Eles podem listar pessoas do município ou do Brasil e conversar sobre a importância da redução da desigualdade de gênero.

Estatística e liderança em pesquisas de opinião

Formada em Estatística pela Universidade de São Paulo (USP) e mestre em Ciências Políticas com concentração em pesquisas de opinião pública pela Universidade de Connecticut (EUA), Marcia Cavallari Nunes acumulou mais de 30 anos no Instituto Brasileiro de Opinião Pública e Estatística (Ibope), o mais conhecido instituto de pesquisas de opinião do país. Ocupou o cargo de CEO do Ibope Inteligência, a divisão da empresa voltada ao conhecimento do comportamento dos indivíduos e de suas relações familiares, sociais, políticas, de consumo e de utilização de serviços.

Ela foi a responsável, no instituto, pela amostra nacional para as eleições presidenciais de 1989, as primeiras após o retorno da democracia. Esteve, segundo a Revista Forbes Brasil, entre as 14 mulheres mais influentes que se destacaram no país em 2015. Está entre as mulheres brasileiras mais poderosas em 2016.

Segundo a publicação, as 56 personalidades selecionadas, entre profissionais das áreas de tecnologia, finanças, varejo, consultoria, pesquisa, indústria e moda, traduzem o real significado do empoderamento feminino.


GABRIELA BILO/ESTADÃO CONTEÚDO

Elaborado com base em: CONSELHO REGIONAL DE ESTATÍSTICA DA 3ª REGIÃO (CONRE-3). **Mulheres na estatística**. São Paulo: CONRE-3, [2024]. Disponível em: https://www.conre3.org.br/portal/mulheres-na-estatistica/. Acesso em: 25 jul. 2024.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Faça os exercícios no caderno.

27. A distribuição dos salários mensais entre os funcionários de um escritório é dada pela tabela a seguir.

Número de funcionários por salário

Salário (R$)	Número de funcionários
2.000,00	10
4.000,00	5
6.000,00	1
8.000,00	9
20.000,00	4
42.000,00	1

Elaborado para fins didáticos.

27. b. ≈ R$ 5.466,67
27. a. R$ 8.000,00

a. Qual é a média dos salários nesse escritório?

b. Qual é o desvio absoluto médio dessa distribuição?

c. Suponha que sejam contratados dois novos funcionários com salário de R$ 8.000,00 cada um. Qual seria o desvio absoluto médio da nova distribuição de salários? 27. c. ≈ R$ 5.125,00

28. Em uma fábrica de rolamentos, duas máquinas, A e B, fabricam esferas de aço, projetadas para ter 10 mm de diâmetro. Uma amostra de quatro esferas de cada máquina foi analisada para verificar se os inevitáveis erros de medida, produzidos no processo de fabricação, são aceitáveis. A tabela a seguir mostra as medidas, em milímetro, do diâmetro das esferas dessa amostra.

Diâmetro de quatro amostras de esferas de duas máquinas

Máquina	Diâmetro das esferas (em milímetro)				Diâmetro médio (em milímetro)
A	10,6	9,6	10,0	9,4	9,9
B	10,2	10,6	9,6	9,2	9,9

Elaborado para fins didáticos.

a. Calcule o desvio-padrão do conjunto de medidas de cada máquina. 28. a. A: 0,4; B: 0,5

b. Qual das duas máquinas apresentou, nessa amostra, maior dispersão de medidas em relação ao diâmetro médio? 28. b. máquina B

29. Gustavo e Lucas tiveram a mesma média no vestibular, conforme pode ser constatado nos boletins.

Boletim de Gustavo

Disciplina	Nota
Biologia	7,0
História	7,5
Geografia	8,0
Português	7,0
Inglês	6,0
Matemática	7,0
Física	6,5
Química	7,0

Boletim de Lucas

Disciplina	Nota
Biologia	7,0
História	6,5
Geografia	8,0
Português	6,5
Inglês	7,5
Matemática	7,5
Física	6,0
Química	7,0

Como eles disputavam a última vaga, foi adotada como critério de desempate a variância do conjunto de notas em todas as disciplinas: o candidato com desempenho mais regular teve direito à vaga. (Entende-se por desempenho mais regular aquele cujas notas apresentaram menor dispersão em relação à média aritmética.)

a. Calcule a média aritmética do conjunto de notas de cada candidato. 29. a. 7,0

b. Calcule a variância do conjunto de notas de cada candidato. 29. b. Gustavo: 0,3125; Lucas: 0,375

c. Qual dos candidatos teve o desempenho mais regular? Por quê? 29. c. Gustavo teve o desempenho mais regular, pois a dispersão de seu conjunto de notas foi menor.

30. Reúnam-se em grupos e façam uma pesquisa sobre um tema da escolha de vocês que permita a coleta de dados quantitativos. Após definir o tema, coletem uma amostra com pelo menos 10 dados. Organizem os dados coletados em uma tabela de frequência e, em seguida, calculem o desvio absoluto médio, a variância e o desvio-padrão dos dados coletados. Por fim, escrevam um breve texto interpretando os resultados obtidos.

Para retomar os conteúdos estudados, resolva os exercícios complementares 9 e 10.

30. Resposta pessoal.

Os números não mentem

Os números não mentem! Esse jargão, utilizado frequentemente na apresentação de dados estatísticos, é absolutamente correto. No entanto, quando isolados do contexto geral ao qual se referem, os números podem induzir a conclusões errôneas. Por isso, é necessária uma análise atenta e crítica ao observamos resultados estatísticos que podem beneficiar ou prejudicar pessoas, empresas, instituições etc.

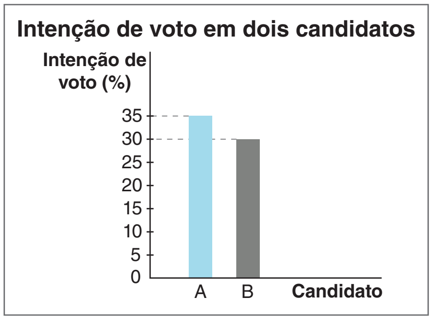
Uma empolgante notícia de jornal pode estar tentando convencer o leitor por meio de uma sequência de verdades que culminam com uma conclusão falsa. Um inocente gráfico apresentado como resultado de uma pesquisa pode induzir a um erro de avaliação.

Sugerimos a leitura do livro de Darrell Huff, **Como mentir com Estatística**. Neste livro o autor apresenta amostras enviesadas, gráficos dúbios e outras situações que podem induzir interpretações equivocadas de dados.

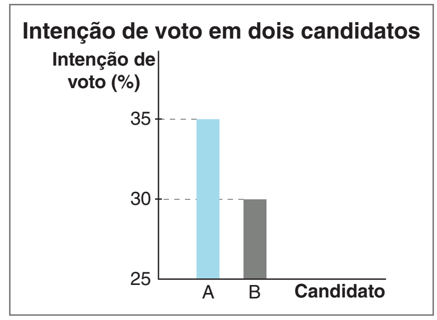
O conteúdo apresentado tem dois objetivos: contextualizar a teoria matemática por meio de situações reais e despertar a curiosidade dos estudantes para aplicações mais elaboradas. Nesse caso, exploramos o texto **Os números não mentem**, que alerta quanto ao posicionamento crítico diante dos dados estatísticos.
A leitura do texto é um convite à análise e à percepção de como os dados representados em gráficos estatísticos ou manchetes de jornal podem levar a conclusões equivocadas sobre os fatos.
Sugerimos orientar os estudantes a ler o texto e resolver, em grupos, os **exercícios propostos 31** e **32**.

Por exemplo, quando temos conhecimento de uma notícia afirmando que o desmatamento de uma região diminuiu de 40% ao ano para 20% ao ano, isso não é necessariamente uma boa notícia, pois essa região, da primeira para a segunda avaliação, pode ter perdido quase toda a área de floresta. Assim, embora os números sejam verdadeiros, eles nos induzem a acreditar que o meio ambiente ganhou nesse período. O que é falso!

Como outro exemplo, observe os gráficos a seguir, que dão as mesmas informações obtidas em uma pesquisa eleitoral sobre a intenção de voto em dois candidatos, A e B.



Elaborado para fins didáticos.



Elaborado para fins didáticos.

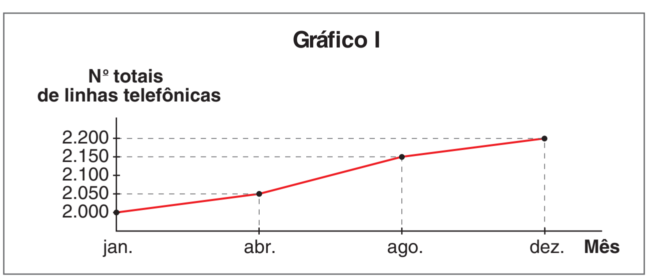
Embora os dois gráficos estejam corretos, o gráfico da direita nos induz a acreditar que o candidato A tem o dobro das intenções de voto do candidato B. O que é falso!

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Faça os exercícios no caderno.

31. alternativa **d.** A escolha de diferentes escalas pode causar uma aparente diferença de crescimento nos gráficos.

31. (Enem) Para convencer a população local da ineficiência da Companhia Telefônica Vilatel na expansão da oferta de linhas, um político publicou no jornal local o gráfico I, abaixo apresentado. A Companhia Vilatel respondeu publicando dias depois o gráfico II, onde pretende justificar um grande aumento na oferta de linhas. O fato é que, no período considerado, foram instaladas, efetivamente, 200 novas linhas telefônicas (imagem abaixo).



Analisando os gráficos, pode-se concluir que:

a. o gráfico II representa um crescimento real maior do que o do gráfico I.
b. o gráfico I apresenta o crescimento real, sendo o II incorreto.
c. o gráfico II apresenta o crescimento real, sendo o I incorreto.
d. a aparente diferença de crescimento nos dois gráficos decorre da escolha das diferentes escalas.
e. os dois gráficos são incomparáveis, pois usam escalas diferentes.

32. Resposta pessoal. As informações fornecidas são insuficientes para concluir que é mais seguro viajar no trecho paranaense do que no trecho catarinense. Isso ocorre porque foram considerados valores absolutos (número de acidentes), e não valores relativos (percentuais). Se no trecho paranaense a razão do número de carros que trafegam nesse trecho for maior que a razão calculada de maneira equivalente no trecho catarinense, então é mais seguro viajar de carro no segundo trecho.

32. Opinem criticamente sobre a seguinte notícia fictícia: "O número anual de acidentes automobilísticos no trecho da BR-116 que cruza o estado do Paraná é menor que o registrado no trecho dessa BR quando cruza o estado de Santa Catarina. Portanto, é mais seguro viajar de carro no trecho que cruza o estado do Paraná".

Essa seção possibilita explorar e evidenciar a violência contra grupos de pessoas, como as LGBTQIA+, favorecendo o desenvolvimento do **TCT Direitos Humanos** e da habilidade **EM13CHS102** de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas. Os estudantes podem pesquisar o tema a fim de conversarem com os colegas sobre a necessidade de políticas públicas e de ações individuais que visem a superação de toda forma de violência. Aproveite e apresente o **Infográfico clicável: Conquistas de direitos da população LGBTQIA+** para que conheçam mais sobre o movimento.

MATEMÁTICA SEM FRONTEIRAS

OBJETO DIGITAL Infográfico clicável: Conquistas de direitos da população LGBTQIA+

Dados sobre LGBTQIA+fobia no Brasil

LGBTQIA+: sigla que significa lésbicas, *gays*, bissexuais, transgêneros, *queer*, intersexos, assexual e mais. O sinal de mais (+) indica que há outras possibilidades de orientações sexuais e identidades/expressões de gênero que não estão representadas pela sigla, como pansexual, não binário etc.

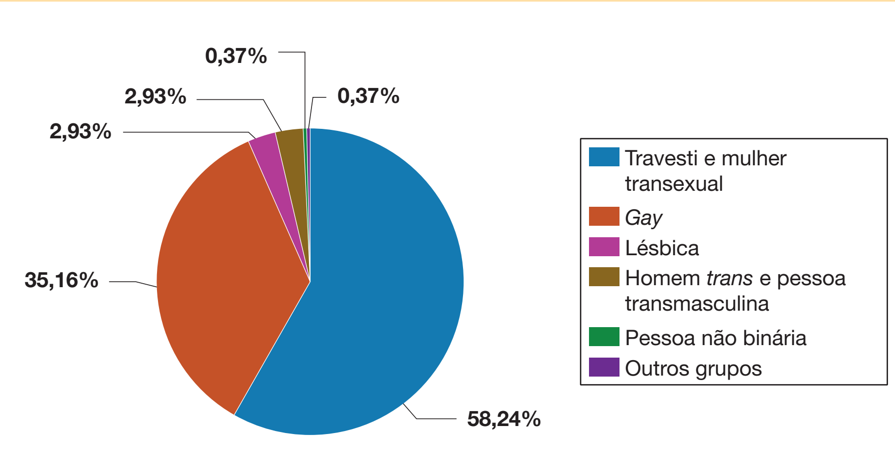
A pauta **LGBTQIA+** no Brasil tem sido discutida cada vez mais, tanto nas universidades e escolas, quanto na política e pela sociedade civil. Apesar disso, a realidade da comunidade LGBTQIA+ no Brasil ainda tem muitos desafios. Isso fica evidente, sobretudo, pelos dados sobre a violência que esse grupo enfrenta como uma consequência da LGBTQIA+fobia.

A LGBTQIA+fobia pode ser definida como o medo, a aversão, ou o ódio irracional a todas as pessoas que manifestem orientação sexual e/ou identidade/expressão de gênero diferente dos padrões heteronormativos, mesmo pessoas que não são LGBTQIA+, mas são percebidas como tais. Consiste em um problema social e político dos mais graves, mas que varia de intensidade e frequência, de sociedade para sociedade.

No Brasil, a LGBTQIA+fobia é um problema grave, que causa muitas mortes e violações de direitos humanos. O Observatório de Mortes e Violências LGBTQIA+ no Brasil divulgou um dossiê que revelou que durante o ano de 2022 ocorreram 273 mortes de LGBTQIA+ de forma violenta no país. Dessas mortes, 228 foram assassinatos, 30 suicídios e 15 outras causas. O gráfico a seguir apresenta esses dados, por grupo:

Mesmo dentro do grupo de pessoas LGBTQIA+, algumas sofrem maior discriminação. Os dados do gráfico apontam que travestis e mulheres trans são as que figuram mais nas estatísticas de morte por LGBTQIA+fobia. Promova uma atividade interdisciplinar com a área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas acerca desse fato, evidenciando, por exemplo, que o nível de preconceito, ódio e violência, geralmente, é maior quando a pessoa tem uma "passabilidade cisgênero" menor. Para orientar a conversa, proponha a leitura de textos como o indicado a seguir.
SCHEFFEL, N. Você já ouviu falar sobre passabilidade? **ECOA Uol**, 13 set. 2019. Disponível em: https://www.uol.com.br/ecoa/colunas/noah-scheffel/2021/09/13/voce-ja-ouviu-falar-sobre-passabilidade.htm. Acesso em: 3 out. 2024.

Distribuição percentual de mortes de LGBTQIA+ no Brasil, por grupo, em 2022



ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

Elaborado com base em: OBSERVATÓRIO DE MORTES E VIOLÊNCIA CONTRA LGBTI+ NO BRASIL. **Dossiê denuncia 273 mortes e violências de pessoas LGBT em 2022**. Disponível em: https://observatoriomorteseviolenciaslgbtibrasil.org/dossie/mortes-lgbt-2022/. Acesso em: 10 abr. 2024.

Em 13 de junho de 2019, o Supremo Tribunal Federal (STF) determinou que a discriminação e a violência LGBTQIA+fóbicas são uma forma de racismo e puníveis como tal pela lei.

Essa decisão foi baseada no artigo 5º da Constituição Federal, que em seu inciso XLI afirma que "a lei punirá qualquer discriminação atentatória dos direitos e liberdades fundamentais" e no XLII que "a prática do racismo constitui crime inafiançável e imprescritível, sujeito à pena de reclusão, nos termos da lei".

Ainda há muita resistência e falta de políticas públicas para garantir a segurança e a dignidade da população LGBTQIA+ no país. É comum que pessoas LGBTQIA+ se recusem a ir a uma delegacia. Muitas vivem em situação de vulnerabilidade, e o ambiente de uma delegacia pode intimidar ainda mais. Mas existem alternativas, como Comissões da Diversidade Sexual e de Gênero das OAB de cada estado, Núcleos Especializados de Prática Jurídicas nas universidades (que prestam assessoria gratuita a populações em situação de vulnerabilidade), ONGs LGBTQIA+ e ativistas de direitos humanos que podem ajudar nesse processo de denúncia.

Há estados e cidades que contam com Conselhos LGBTQIA+, Coordenações de Políticas LGBTQIA+ (ou de Diversidade Sexual e de Gênero), delegacias especializadas e canais de denúncia por telefone como o Disque 100 LGBT. Procure se informar em seu estado para utilizar todos os mecanismos que estão à sua disposição e, eventualmente, orientar uma vítima a efetivar uma denúncia.

Elaborado com base em: OBSERVATÓRIO DE MORTES E VIOLÊNCIA CONTRA LGBTI+ NO BRASIL. **Dossiê denuncia 273 mortes e violências de pessoas LGBT em 2022**. Disponível em: https://observatoriomorteseviolenciaslgbtibrasil.org/dossie/mortes-lgbt-2022/. Acesso em: 10 abr. 2024.

MORAIS, P. LGBTfobia no Brasil: fatos, números e polêmicas. **Politize!**, 5 maio 2018. Disponível em: https://www.politize.com.br/lgbtfobia-brasil-fatos-numeros-polemicas/. Acesso em: 21 mar. 2024.

ANTRA, ABGLT. **O que fazer em caso de violência LGBTIfóbica** – Cartilha de orientações à população LBGTI no combate à LGBTIfobia. Rio de Janeiro, 2020. Disponível em: https://antrabrasil.org/wp-content/uploads/2020/03/cartilha-lgbtifobia.pdf. Acesso em: 10 abr. 2024.

Atividades

2. b. Resposta no final do livro.

Faça as atividades no caderno.

1. O Artigo 5º da Constituição Federal Brasileira de 1988 diz o seguinte: **1.** Respostas pessoais.

> Todos são iguais perante a lei, sem distinção de qualquer natureza, garantindo-se aos brasileiros e aos estrangeiros residentes no País a inviolabilidade do direito à vida, à liberdade, à igualdade, à segurança e à propriedade [...].

Discuta com os colegas sobre de que maneira os direitos fundamentais estabelecidos por esse artigo podem estar assegurados, também, à população LGBTQIA+.

2. a. Travesti e mulher transexual.

2. De acordo com o gráfico:

a. Qual foi o grupo da população LGBTQIA+ de maior vulnerabilidade no Brasil em 2022?

b. Construa o gráfico de colunas com as frequências relativas das classes representadas pelos grupos da população LGBTQIA+.

3. Você ou algum conhecido já sofreu algum tipo de preconceito? Façam uma pesquisa sobre este tema. Organizem um questionário com as perguntas adequadas e definam o número de elementos para a amostra. Organizem os dados coletados em uma tabela de frequência e calculem as medidas centrais e as de dispersão dos dados coletados. Por fim, escrevam um texto interpretando os resultados obtidos e apresentem-no para os demais grupos.

3. Pesquisa e resposta pessoais.

4. Como você pode contribuir para a promoção da diversidade e da inclusão em sua família, em seu trabalho ou em sua comunidade?

4. Respostas pessoais.

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

Faça os exercícios no caderno.

1. A escola é onde as crianças e jovens cultivam amizades e formam grupos, passos fundamentais para a saúde mental do adulto. Por isso o *bullying* passou a ser combatido rigorosamente no ambiente escolar. O *bullying* é caracterizado por um contínuo comportamento agressivo, que evoca aspectos estéticos, físicos, morais, sociais, entre muitos outros, sem nenhuma razão. As pessoas que sofrem *bullying* são frequentemente marginalizadas pelos colegas e podem apresentar sérios danos psicológicos. Em 2019, foi realizada a 4ª edição da Pesquisa Nacional de Saúde do Escolar (PeNSE), tendo como universo o total dos 11,8 milhões de estudantes de 13 a 17 anos de escolas públicas ou privadas do Brasil. Divulgada em 2021, essa pesquisa amostral revelou que o percentual de estudantes que sofreram *bullying* nos 30 dias anteriores à pesquisa era 23% do total de estudantes da amostra considerada, sendo que o percentual de meninas que sofreram *bullying* foi de 26,5% do total de meninas da amostra, e o de meninos foi de 19,5% do total de meninos da amostra.

1. a. 5,9 milhões de meninos e 5,9 milhões de meninas

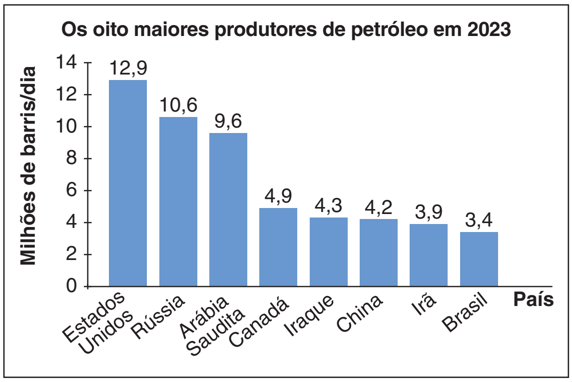
Elaborado com base em: AGÊNCIA IBGE NOTÍCIAS. **PeNSE 2019: uma em cada cinco escolares sofreu violência sexual**. Rio de Janeiro: Agência IBGE Notícias, 2021. Disponível em: https://agenciadenoticias.ibge.gov.br/agencia-sala-de-imprensa/2013-agencia-de-noticias/releases/31575-pense-2019-uma-em-cada-cinco-escolares-sofreu-violencia-sexual. Acesso em: 25 ago. 2024.

a. Extrapolando os resultados dessa pesquisa amostral para todo o universo considerado, calcule o número de meninos e de meninas que, em todo o universo, teriam admitido o constrangimento por *bullying* nos últimos 30 dias.

b. Reúnam-se em grupos e façam uma pesquisa com os estudantes da escola em que vocês estudam perguntando a cada um: Você já sofreu *bullying* nos últimos 30 dias? Separem as respostas em cinco classes unitárias: 13, 14, 15, 16 e 17 anos de idade, separando cada classe em duas subclasses (meninos e meninas). Depois façam um relatório apresentando um gráfico comparativo de duas colunas (barras verticais) para cada classe, uma para os meninos e outra para as meninas. Concluam o relatório se posicionando em relação ao *bullying*.

1. b. Resposta pessoal

2. O gráfico a seguir apresenta os oito maiores produtores mundiais de petróleo em 2023.



ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

Nota: Inclui condensado e LGN. Atualização em julho de 2024. Elaborado com base em: INSTITUTO BRASILEIRO DE PETRÓLEO E GÁS (IBP). **Maiores produtores de petróleo em 2023**. Rio de Janeiro: IBP, 2024. Disponível em: https://www.ibp.org.br/observatorio-do-setor/snapshots/maiores-produtores-mundiais-de-petroleo/. Acesso em: 23 jul. 2024.

a. No gráfico, mostramos apenas os 8 maiores produtores de petróleo do mundo em 2023, mas há outros produtores. Considerando todos esses países, a produção total de petróleo no mundo, em junho de 2023, foi de 82,8 milhões de barris diários. Construa um gráfico de "pizza" com 8 setores e, tome 7 setores para representar o percentual individual de produção dos 7 primeiros países do gráfico anterior, em relação ao total de petróleo produzido no mundo em 2023, e o 8º setor, nomeado por "outros", deverá representar o percentual restante. **2. a.** Resposta no final do livro.

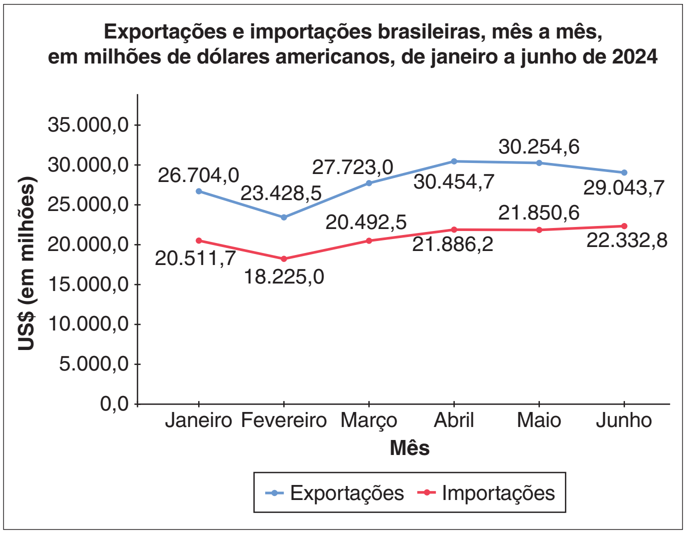
b. O Brasil estava entre os 8 maiores produtores de petróleo do mundo, e as projeções são que continuaremos entre os grandes produtores. No entanto, o preço da gasolina nos postos era o segundo mais alto entre os países da América do Sul. Para se ter uma ideia, em 17 de março de 2022, o preço do litro de gasolina no Brasil era US$ 1,27 (cerca de R$ 6,46, considerando a cotação do dólar em 16 de março).

2. b. Resposta pessoal.

Esse desalinho de preços é, no mínimo, provocante. Vamos debatê-lo. Para isso, pesquise em alguns postos de combustíveis do bairro em que você mora o preço médio da gasolina e compare-o com o preço da gasolina em outros países da América do Sul. Depois, consulte seus familiares e professores ou outras fontes confiáveis que o ajude a responder às perguntas: Por que a gasolina no Brasil é tão cara? Que elementos compõem o preço da gasolina no Brasil? Conclua, promovendo um debate em sala de aula ou, se possível, estenda o debate para toda a escola.

3. A balança comercial de um país, em determinado período, é a diferença entre o valor monetário das exportações e o das importações, nessa ordem, realizadas nesse período. Quando essa diferença é positiva, diz-se que houve *superávit* na balança comercial no período considerado; quando é negativa, diz-se que houve *déficit*; e, quando é zero, diz-se que houve equilíbrio na balança comercial.

O gráfico a seguir mostra os valores, em milhões de dólares americanos, das exportações e das importações do Brasil no período de janeiro a junho de 2024.



ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

Elaborado com base em: BRASIL. Ministério do Desenvolvimento, Indústria, Comércio e Serviços. **Balança Comercial Preliminar Parcial do Mês**. Brasília, DF: MDIC, 22 jul. de 2024. Disponível em: https://balanca.economia.gov.br/balanca/pg_principal_bc/principais_resultados.html. Acesso em: 23 jul. 2024.

Considerando apenas o período citado no gráfico, responda aos itens seguintes.

a. Em algum mês desse período houve *déficit* na balança comercial brasileira? **3. a.** não

b. Em que mês ocorreu o maior saldo da balança comercial? Quanto foi esse saldo?

3. b. abril; US$ 8.568,5 milhões

c. Em que mês ocorreu o menor saldo da balança comercial? Quanto foi esse saldo?

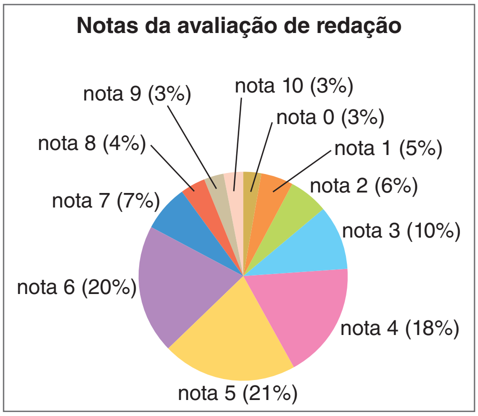
3. c. fevereiro; US$ 5.203,5 milhões

d. Qual foi o saldo acumulado da balança comercial brasileira nesse período? **3. d.** US$ 42.309,7 milhões

Com **o exercício complementar 9**, é possível propor aos estudantes que reflitam sobre as queimadas e seus impactos nas florestas, relacionando o assunto com o **ODS 13**. A abordagem favorece um trabalho interdisciplinar com a área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias em um debate ou roda de conversa sobre o tema.

4. O gráfico de setores a seguir mostra a distribuição das notas de 500 estudantes em uma avaliação de redação.

FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA



Elaborado para fins didáticos.

4. a. Resposta no final do livro.

a. Construa uma tabela de distribuição de frequências dessa amostra, separando as notas em quatro classes de mesma amplitude.

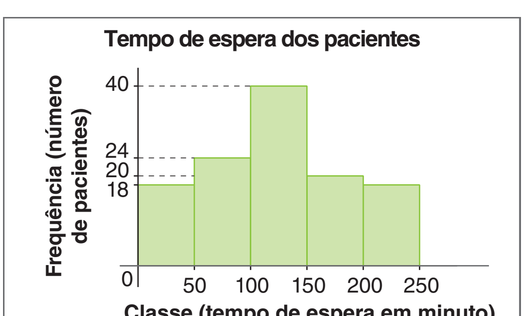
b. Construa o histograma correspondente à tabela do item **a**. **4. b.** Resposta no final do livro.

5. No início de uma reunião, a idade média dos participantes era de 26,4 anos. Algum tempo depois, 5 dos participantes se retiraram, o que fez com que a idade média das pessoas que permaneceram resultasse em 27 anos. Se a idade média dos que se retiraram era de 24 anos, calcule o número de pessoas que iniciaram a reunião.
5. 25 pessoas

6. (Unicamp-SP) A média aritmética das idades de um grupo de 120 pessoas é 40 anos. Se a média aritmética das idades das mulheres é 35 anos e a dos homens é 50 anos, qual é o número de pessoas de cada sexo no grupo? **6.** 80 mulheres e 40 homens

7. Com o objetivo de melhorar o atendimento em um hospital público, foram registrados os tempos de espera dos pacientes em determinado dia. O resultado apresentou a distribuição a seguir.

ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA



Elaborado para fins didáticos.

a. Qual é a amplitude dessa amostra se os valores 0 min e 250 min pertencem a ela? **7. a.** 250 minutos

b. Qual é a amplitude de cada classe?

c. Qual é o tempo médio de espera por paciente nessa amostra? **7. c.** ≈ 123,3 minutos

7. b. Todas as classes têm a mesma amplitude de 50 minutos.

8. Em um projeto de restauração de um viaduto consta que a média aritmética e a mediana entre as alturas das quatro colunas de concreto que sustentam esse viaduto são 6,8 m e 6,4 m, respectivamente. Tendo como base esses dados, o engenheiro responsável pela obra calculou a média aritmética entre as alturas das colunas mais alta e mais baixa que sustentam esse viaduto. Essa média é igual a: **8.** alternativa **e**

a. 6,4 m
b. 6,8 m
c. 6,9 m
d. 7,1 m
e. 7,2 m

9. As consequências das queimadas de florestas em larga escala são trágicas: alteração do equilíbrio de ecossistemas; diminuição da biodiversidade; emissão de gases poluentes na atmosfera, piora da qualidade do ar; aumento das doenças respiratórias – em razão dos gases e partículas nocivas – danos ao patrimônio público e privado – cercas, casas, rede de energia elétrica; agravamento do aquecimento global, contribuindo para elevação da temperatura; diminuição da fertilidade do solo, que perde matéria orgânica e umidade; intensificação da erosão nas áreas atingidas pelo fogo etc.

ODS 13

Para monitorar as queimadas e os incêndios florestais no Brasil, os técnicos do Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais (Inpe) detectam os focos de queimada por imagens de satélites, calculando os riscos de novos focos e tentando evitá-los.

No endereço https://terrabrasilis.dpi.inpe.br/queimadas/bdqueimadas/, o Inpe fornece dados sobre as queimadas no Brasil. Por exemplo, os dados a seguir são parte de uma tabela fornecida pelo instituto.

Área queimada (km²) por bioma por ano completo

	2020	2021
Amazônia	77.396 (1,8%)	45.585 (1,1%)
Caatinga	30.453 (3,6%)	49.869 (5,9%)
Cerrado	139.644 (6,9%)	137.585 (6,8%)
Mata Atlântica	17.928 (1,6%)	20.876 (1,9%)
Pampa	6.113 (3,5%)	1.228 (0,7%)
Pantanal	40.606 (27,0%)	19.219 (12,8%)

Os percentuais dos biomas referem-se à extensão territorial da cada bioma.

Elaborado com base em: INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS (INPE). **Dados de queimadas.** São José dos Campos: Inpe, 2024. Disponível em: https://terrabrasilis.dpi.inpe.br/queimadas/bdqueimadas/#exportar-dados. Acesso em: 29 jul. 2024.

9. d. Não se pode afirmar que no ano *x* a área queimada em todos os biomas juntos foi menor que a área total de todos os biomas juntos no ano *y*. A área queimada em cada ano pode ter sido a mesma, porém no ano *x* os percentuais estiveram mais regularmente distribuídos pelos biomas do que no ano *y*, isto é, em média, as distâncias entre os percentuais e sua média foram menores no ano *x* que no ano *y*.

Com base na tabela, faça o que se pede:

a. Construa um gráfico de frequência relativa (%) das áreas queimadas, em km^2, por bioma no ano completo de 2021. (Se possível, construa esse gráfico utilizando uma planilha eletrônica.)
9. a. Resposta no final do livro.

b. Calcule a média aritmética entre os percentuais de área queimada por bioma no ano completo de 2021.

c. Calcule o desvio absoluto médio e o desvio-padrão entre os percentuais de área queimada por bioma no ano completo de 2021. **9. c.** *Dam* ≈ 3,6%; σ ≈ 18%

d. Suponha que a média aritmética entre os percentuais de área queimada por bioma, em determinado ano completo *x*, seja a mesma que a de outro ano completo *y*. Se o desvio absoluto médio dessas porcentagens no ano *x* foi menor que no ano *y*, pode-se afirmar que no ano *x* a área queimada em todos os biomas juntos foi menor que a área queimada em todos os biomas juntos no ano *y*? Justifique a sua resposta. **9. b.** ≈ 4,9%

10. Pesquisa do instituto Ipsos divulgada em julho de 2021 mostrava o Brasil em última colocação no *ranking* de 29 países no quesito média de horas semanais de exercícios físicos por habitante na faixa etária de 16 a 74 anos. Os quatro primeiros colocados foram Holanda, Alemanha, Romênia e Rússia, nessa ordem, e os quatro últimos foram Chile, Itália, Japão e Brasil, nessa ordem.
A tabela a seguir mostra o desempenho dos quatro últimos colocados nessa pesquisa.

Média semanal de horas dedicadas a exercícios físicos por pessoa de 16 a 74 anos

Sexo / País	Chile	Itália	Japão	Brasil
Homens	4,5	4,5	3,9	3,4
Mulheres	3	2,7	2,8	2,7

Elaborado com base em: INSTITUTO IPSOS. **Global views on sports and exercise**. Paris: Ipsos, 2021. Disponível em: https://www.ipsos.com/sites/default/files/ct/newsdocuments/2021-08/Global-Views-on-Sports-and-Exercise-Ipsos.pdf. Acesso em: 30 jul. 2024.

10. a. Resposta no final do livro.

a. Construa um gráfico comparativo relativo a essa tabela, com duas colunas adjacentes (homens e mulheres) para cada um dos países.

b. Calcule a média aritmética, o desvio absoluto médio, a variância e o desvio-padrão entre os números de cada linha da tabela. **10. b.** Resposta no final do livro.

c. Entreviste seus familiares e amigos na faixa etária de 16 a 74 anos sobre o tempo semanal que eles dedicam a exercícios físicos. Depois, calcule a média entre os tempos semanais dos homens e a das mulheres. Finalmente compare essas duas médias com as da coluna referente ao Brasil na tabela anterior. Se a diferença entre as médias da tabela e a que você obteve for significativa, tente explicar o porquê dessa diferença.
10. c. Resposta pessoal.

d. Pesquise em fontes confiáveis os benefícios das atividades físicas à saúde. Depois escreva um breve relatório sobre o que você aprendeu e compartilhe-o com os colegas e o professor. **10. d.** Resposta pessoal.

VERIFIQUE O QUE APRENDEU NO CAPÍTULO 2

Além do processo de avaliação promovido pelo professor, é importante que você, estudante, faça uma autoavaliação. O objetivo desse instrumento é mensurar seu nível de aprendizagem em relação ao assunto desenvolvido no capítulo. Para ajudá-lo nessa tarefa, apresentamos as seguintes questões.

1. O Ministério de Minas e Energia de determinado país fez um planejamento de investimentos em sua matriz energética para o período de 2025 a 2040. Serão investidos 803 bilhões de dólares, conforme os percentuais descritos nos setores do gráfico apresentado.

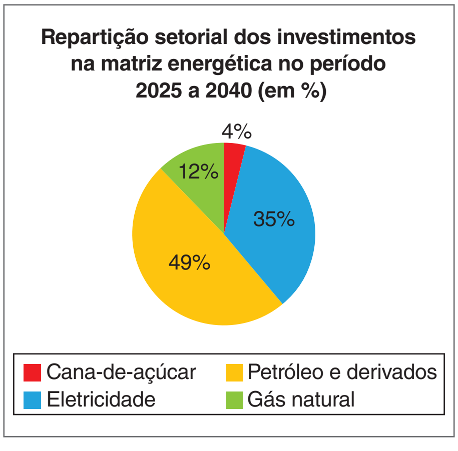
I. De quanto será o investimento, em dólares, previsto para o setor de petróleo e derivados nesse período?

a. 373,47 bilhões
b. 493,47 bilhões
c. 473,47 bilhões
d. 393,47 bilhões
e. 398,47 bilhões

I. alternativa **d**.
II. alternativa **b**.

II. De quanto será o investimento, em dólares, previsto para o setor de eletricidade e cana-de-açúcar nesse período?

a. 281,05
b. 313,17
c. 32,12
d. 96,36
e. 293,11



Elaborado para fins didáticos.

III. Qual é a medida, em grau, do arco do setor circular que representa o investimento em cana-de-açúcar? **III.** alternativa **c.**

a. 12,1° **c.** 14,4° **e.** 22,8°

b. 24,3° **d.** 16,6°

2. **(Ufal)** Considere 8 números cuja média aritmética é 4,5. Retirando-se um desses números, a média aritmética dos restantes é 4,2. O número retirado é: **2.** alternativa **d**

a. 0,3. **b.** 3,3. **c.** 5,4. **d.** 6,6. **e.** 8.

DANNY YE/ALAMY/FOTOARENA

Tilápia nilótica.

3. alternativa **e**

3. Um criador de tilápias têm dois tanques, A e B, com volumes de 220 m^3 e 180 m^3 de água, respectivamente, e densidades populacionais de 190 e 170 peixes por metro cúbico, respectivamente. Por meio da abertura de uma comporta, o criador uniu os dois tanques, o que fez com que os peixes se distribuíssem uniformemente pelos dois tanques. Qual é a densidade populacional, em número de peixes por metro cúbico, do reservatório formado pela união dos dois tanques?

a. 170 **b.** 174 **c.** 178 **d.** 180 **e.** 181

4. A tabela de distribuição de frequências mostra o número de crianças, com as respectivas idades, que receberam atendimento médico em um posto de saúde, em determinado dia.

Qual é o desvio-padrão das idades das crianças relacionadas nessa tabela?

a. 4,5 **c.** 5,5 **e.** 6

b. 5 **d.** 5,6 **4.** alternativa **a**

Idade (em ano)	Frequência (número de crianças)
2	2
5	1
8	2
11	1
14	2

Elaborado para fins didáticos.

Ferramenta de estudo

Ao término da resolução dos exercícios, copie no caderno o quadro indicado a seguir e preencha-o assinalando a resposta mais adequada ao seu aprendizado. Se julgar necessário, retome os tópicos de conteúdos relacionados a cada questão ou converse com os colegas e com o professor a fim de tirar dúvidas a respeito delas.

ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

Questão	Sim	Parcialmente	Não
Compreendi os conceitos sobre população estatística, amostra e tipos de variáveis estatísticas?			
Sei elaborar gráficos de colunas, barras horizontais, setores e histogramas?			
Consigo agrupar os dados de uma amostra em classes definidas por intervalos reais?			
Aprendi a analisar a distribuição dos valores de uma amostra pelas medidas de posição: média aritmética, moda e mediana?			
Aprendi a analisar a distribuição dos valores de uma amostra pelas medidas de dispersão: desvio absoluto médio, variância e desvio-padrão?			

MODELO MODELO

CAPÍTULO 3

Matrizes

SERGIO V S RANGEL/SHUTTERSTOCK

Painel de voos do aeroporto de Vitória (ES). Foto de 2020.

As planilhas eletrônicas têm diversas utilidades em situações cotidianas e possibilitam analisar grande quantidade de informações de modo organizado em um só local. Por ser dinâmica, é possível atualizar informações em uma planilha desse tipo a qualquer momento, de modo rápido e simples. Para tal, os dados são organizados e distribuídos em linhas e colunas, o que facilita na hora de identificar alguma informação específica.

Além da teoria

Além da teoria: 1. O número do voo, o destino, o portão, o horário previsto e observações.

1. Na planilha da fotografia, quais são as informações apresentadas?
2. A informação do número de voo de todos os voos está apresentada em linha ou em coluna? Justifique sua resposta.
3. Cite outros exemplos do cotidiano em que os dados podem ser representados por meio de planilhas como as do painel de voos.

2. A informação do número de voo está apresentada em coluna, pois os dados estão na vertical.

3. Resposta pessoal. Exemplo de resposta: Atendimento em um pronto atendimento, com horário de chegada, nome do paciente, sala em que será atendido e médico que atenderá o paciente.

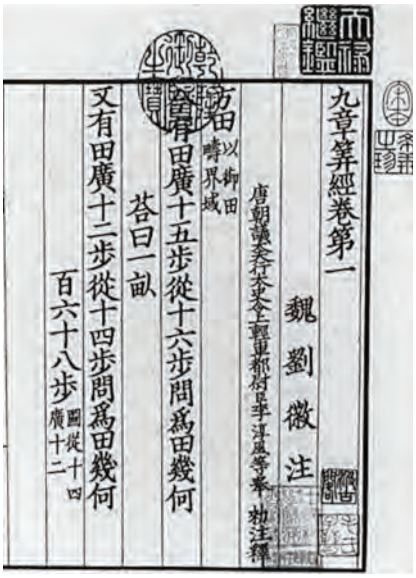
Comente a introdução, enfatizando que o estudo das matrizes se desenvolveu a partir dos sistemas lineares. Ressalte que, ao resolver um sistema linear, operamos apenas com os coeficientes numéricos e os termos independentes; assim, podemos representar o sistema por uma tabela formada apenas por esses números, ficando subentendidas as incógnitas.

1. Um pouco de história

Por volta de 250 a.C., foi escrito na China o livro *Chiu-Chang Suan-Shu* (*Os nove capítulos da arte matemática*), de autor desconhecido. Essa obra trata de 246 problemas relacionados à mensuração de terras, agricultura e impostos, por exemplo. Um dos problemas tem o seguinte enunciado:

Três fardos de uma boa colheita, dois fardos de uma colheita medíocre e um fardo de uma colheita ruim foram vendidos por 39 dou. Dois fardos da boa, três da medíocre e um da ruim foram vendidos a 34 dou; e um da boa, dois da medíocre e três da ruim foram vendidos a 26 dou. Qual foi a quantia recebida pela venda de cada fardo da boa colheita, da colheita medíocre e da colheita ruim?

Elaborado com base em: EVES, H. **Introdução à história da matemática**. 5. ed. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2011.



CC0 1.0/WIKIMEDIA FOUNDATION

Página do livro *Chiu-Chang Suan-Shu*.

O equacionamento desse enunciado, usando a notação moderna, conduz ao sistema:

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 39 \\ 2x + 3y + z = 34 \\ x + 2y + 3z = 26 \end{cases}$$

No livro, esse sistema é resolvido com o uso de uma tabela, reproduzida a seguir, na qual são relacionados os coeficientes das incógnitas e os termos independentes das equações.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 26 & 34 & 39 \end{bmatrix}$$

Atualmente, esse tipo de tabela é chamado de **matriz**. Esse é um dos registros mais antigos de uma matriz, o que nos leva a crer que o estudo das matrizes teve como motivação histórica inicial a necessidade de resolver sistemas de equações do 1º grau.

Somente no século XIX, o matemático inglês Arthur Cayley (1821-1895) sistematizou a teoria das matrizes, com base em um estudo sobre transformações lineares.

As matrizes facilitam significativamente o estudo de fenômenos que envolvem mais de uma variável. Um dos exemplos mais atuais de sua aplicação está na computação gráfica, em que a manipulação de imagens computadorizadas é feita por meio de transformações geométricas, definidas a partir de operações entre matrizes.

Aproveite o contexto sobre qualidade das estradas pavimentadas no Brasil para abordar o **ODS 9**. Proponha uma pesquisa a respeito de verbas públicas destinadas à infraestrutura do município ou região e a qualidade dessa infraestrutura na percepção dos moradores ou dos estudantes.

2. O conceito de matriz

Oriente os estudantes a consultar as páginas 6 e 7 para saber mais sobre este e os demais Objetivos de Desenvolvimento Sustentável.

SIDNEY DE ALMEIDA/SHUTTERSTOCK

Trecho da rodovia Fernão Dias, BR-381, em Minas Gerais. Foto de 2024.

Em novembro de 2023, a Confederação Nacional do Transporte (CNT) divulgou o relatório de uma pesquisa sobre a qualidade das estradas pavimentadas no Brasil. Esse estudo foi realizado em uma amostra de 111.502 km de rodovias brasileiras, conforme descreve a tabela a seguir, em que as estradas são distribuídas segundo as regiões (numeradas de 1 a 5) e as jurisdições (1 e 2).

ODS 9

Extensão, em quilômetro, das rodovias avaliadas, por região brasileira

Região / Rodovias	(1) Rodovias federais	(2) Rodovias estaduais
(1) Norte	10.251	3.478
(2) Nordeste	20.400	9.169
(3) Sudeste	11.653	19.081
(4) Sul	11.819	6.880
(5) Centro-Oeste	11.693	7.078

Fonte: CONFEDERAÇÃO NACIONAL DO TRANSPORTE; SERVIÇO SOCIAL DO TRANSPORTE; SERVIÇO NACIONAL DE APRENDIZAGEM DO TRANSPORTE. **Pesquisa CNT de rodovias 2023**. Brasília: CNT: SEST SENAT: ITL, 2023.

Note a simplicidade dessa tabela. Por exemplo, a intersecção da linha 2 (Nordeste) com a coluna 1 (Rodovias federais) informa que, nessa pesquisa, foram avaliados 20.400 km de rodovias federais da região Nordeste; analogamente, a intersecção da linha 5 (Centro-Oeste) com a coluna 2 (Rodovias estaduais) informa que foram avaliados 7.078 km de rodovias estaduais da região Centro-Oeste.

As tabelas são muito úteis no cotidiano, pois permitem a visualização simplificada e global do cruzamento de duas ou mais informações sobre um ou mais objetos de estudo. Essa ideia também é aplicada nas Ciências, com o mesmo objetivo, isto é, simplificar a representação do cruzamento de informações a respeito de objetos de estudo.

Em Matemática, tabelas como essa são chamadas de **matrizes**. Neste capítulo, vamos estudar a relação de igualdade e algumas operações com matrizes.

Chama-se **matriz do tipo** $\boldsymbol{m \times n}$ toda tabela de números dispostos em $\boldsymbol{m}$ linhas e $\boldsymbol{n}$ colunas. Tal tabela deve ser representada entre parênteses ( ) ou colchetes [ ].

Observação

$m \times n$ é lido como "m por n".

Exemplos

a. $\begin{pmatrix} 6 & 7 \\ -4 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ é uma matriz do tipo 3×2, pois tem 3 linhas e 2 colunas.

b. $\begin{bmatrix} 3 & \sqrt{2} & -5 \end{bmatrix}$ é uma matriz do tipo 1×3, pois tem 1 linha e 3 colunas.

Representação genérica

Indicamos por $\boldsymbol{a}_{ij}$ o elemento posicionado na linha i e na coluna j de uma matriz A.

Exemplo

Na matriz:

$$A_{3 \times 2} = \begin{pmatrix} 6 & 7 \\ -4 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

- o elemento 6 está na linha 1 e na coluna 1; por isso, é indicado por a_{11}, ou seja, $a_{11} = 6$;
- o elemento 7 está na linha 1 e na coluna 2; por isso, é indicado por a_{12}, ou seja, $a_{12} = 7$;
- de modo análogo, temos $a_{21} = -4$, $a_{22} = 0$, $a_{31} = 2$ e $a_{32} = -1$.

Representamos genericamente uma matriz A do tipo $m \times n$ da seguinte maneira:

$$A_{m \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Como essa representação é muito extensa, vamos convencionar uma forma abreviada. Essa matriz pode ser representada simplesmente por $A = (a_{ij})_{m \times n}$ ou, quando não houver possibilidade de confusão quanto ao tipo da matriz, por $A = (a_{ij})$.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

1. Represente explicitamente a matriz $A = (a_{ij})_{2 \times 4}$ tal que $a_{ij} = 2i + j$.

Resolução

Primeiro, representamos genericamente a matriz A, do tipo 2×4:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{pmatrix}$$

Em seguida, calculamos o valor de cada elemento a_{ij} pela lei $a_{ij} = 2i + j$:

$a_{11} = 2 \cdot 1 + 1 = 3$ $\quad$ $a_{21} = 2 \cdot 2 + 1 = 5$

$a_{12} = 2 \cdot 1 + 2 = 4$ $\quad$ $a_{22} = 2 \cdot 2 + 2 = 6$

$a_{13} = 2 \cdot 1 + 3 = 5$ $\quad$ $a_{23} = 2 \cdot 2 + 3 = 7$

$a_{14} = 2 \cdot 1 + 4 = 6$ $\quad$ $a_{24} = 2 \cdot 2 + 4 = 8$

Concluindo, temos a matriz: $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$

Algumas matrizes especiais

Matriz quadrada

Matriz quadrada é toda matriz cujo número de linhas é igual ao número de colunas.

O número de linhas (ou de colunas) de uma matriz quadrada é chamado de **ordem** da matriz.

Exemplos

a. $\begin{pmatrix} 4 & 9 & 0 \\ -6 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & -2 \end{pmatrix}$ é uma matriz quadrada 3×3, ou de ordem 3.

b. $\begin{pmatrix} 3 & -9 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ é uma matriz quadrada 2×2, ou de ordem 2.

c. (5) é uma matriz quadrada 1×1, ou de ordem 1.

Em uma matriz quadrada A de ordem n, os elementos a_{ij} tais que $i = j$ formam a **diagonal principal** da matriz, e os elementos a_{ij} tais que $i + j = n + 1$ formam a **diagonal secundária**. Por exemplo:

$$A_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

diagonal secundária

diagonal principal

Matriz identidade

A matriz (I) é qualquer matriz quadrada cujos elementos da diagonal principal são iguais a 1 e todos os demais elementos são iguais a zero são chamadas de **matriz identidade**.

Observação

Indicamos por I_n a matriz identidade de ordem n.

Exemplos

a. $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad$ **b.** $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad$ **c.** $I_1 = (1)$

Matriz nula

Toda matriz cujos elementos são iguais a zero é chamada de **matriz nula**.

Exemplos

a. $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad$ **b.** $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad$ **c.** (0)

Matriz transposta

Transposta de uma matriz A é a matriz A^t na qual os números que formam cada coluna i de A são, ordenadamente, iguais aos números que formam cada linha i de A^t.

Exemplos

a. A transposta de $A_{3 \times 2} = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 6 & 2 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$ é a matriz $A^t_{2 \times 3} = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 0 \\ -4 & 2 & 7 \end{pmatrix}$

b. A transposta de $B_{1 \times 4} = (2 \quad 0 \quad -5 \quad 8)$ é a matriz $B^t_{4 \times 1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -5 \\ 8 \end{pmatrix}$

Observação

Note que a transposta de uma matriz do tipo $m \times n$ é uma matriz do tipo $n \times m$.

3. Igualdade de matrizes

Duas matrizes do mesmo tipo são iguais quando todos os seus elementos correspondentes são iguais.

Observação

Em duas matrizes do mesmo tipo (matrizes que têm o mesmo número de linhas e o mesmo número de colunas), elementos correspondentes são aqueles que ocupam a mesma posição, em relação a cada matriz.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

2. Determine o número real x tal que: $\begin{pmatrix} 6 & x^2 - 5 \\ 0 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 11 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Resolução

As matrizes são do mesmo tipo (2×2). Logo, elas serão iguais se, e somente se, os elementos correspondentes forem iguais, isto é:

$$\begin{cases} 6 = 6 \\ x^2 - 5 = 11 \\ 0 = 0 \\ x = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 16 \\ x = 4 \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} x = \pm 4 \\ x = 4 \end{cases}$$

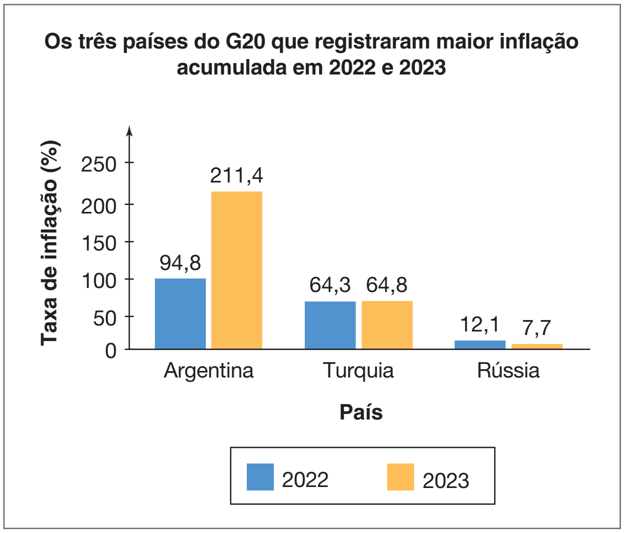
Como o número 4 é a única solução comum às duas equações do sistema, concluímos que as matrizes são iguais se, e somente se, $x = 4$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Faça os exercícios no caderno.

1. O gráfico mostra os três países do G20 que tiveram o maior aumento nas taxas percentuais de inflação no período de janeiro a outubro de 2022 e de 2023.

Segundo o IBGE, inflação é o nome dado ao aumento dos preços de produtos e serviços. Ela é calculada pelos índices de preços, comumente chamados de índices de inflação.



ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

Fonte: FERRARI, H. Brasil termina 2023 com a 7ª maior inflação do G20. **Poder 360**, 13 jan. 2024. Disponível em: https://www.poder360.com.br/poder-economia/economia/brasil-termina-2023-com-a-7a-maior-inflacao-do-g20/. Acesso em: 25 jul. 2024.

Comente com os estudantes que o G20 é um grupo formado por ministros de finanças e chefe de bancos centrais das 19 maiores economias mundiais mais a União Africana e a União Europeia, com o objetivo de fortalecer a economia internacional.

1. a. $A = \begin{pmatrix} 94,8 & 211,4 \\ 64,3 & 64,8 \\ 12,1 & 7,7 \end{pmatrix}$

Numerando por 1, 2 e 3 os países: Argentina, Turquia e Rússia, respectivamente, e por 1 e 2 os anos 2022 e 2023, respectivamente, responda aos itens seguintes, de acordo com o gráfico.

a. Construa a matriz $A = (a_{ij})$ em que a_{ij} representa a taxa anual de inflação do país i no ano j.

b. Qual dos três países considerados no gráfico teve o menor aumento percentual da taxa inflacionária no período de janeiro a outubro de 2022 e de 2023? **1. b.** Rússia.

c. A inflação tem consequências na economia e, em última instância, no dia a dia dos consumidores. Pesquise por que ela surge e quais são os seus efeitos no cotidiano das pessoas. **1. c.** Resposta pessoal.

2. Uma rede comercial é formada por cinco lojas, numeradas de 1 a 5. A tabela a seguir mostra o faturamento, em real, de cada uma dessas lojas nos quatro primeiros dias de janeiro.

$$\begin{pmatrix} 1.950 & 2.030 & 1.800 & 1.950 \\ 1.500 & 1.820 & 1.740 & 1.680 \\ 3.010 & 2.800 & 2.700 & 3.050 \\ 2.500 & 2.420 & 2.300 & 2.680 \\ 1.800 & 2.020 & 2.040 & 1.950 \end{pmatrix}$$

3. a. $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 6 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$

Cada elemento a_{ij} dessa matriz é o faturamento da loja i no dia j.

a. Qual foi o faturamento da loja 3 no dia 2? **2. a.** R\$ 2.800,00

b. Qual foi o faturamento dessa rede de lojas no dia 3? **2. b.** R\$ 10.580,00

c. Qual foi o faturamento da loja 1 nos quatro dias? **2. c.** R\$ 7.730,00

3. Represente explicitamente cada uma das matrizes.

a. $A = (a_{ij})_{3 \times 2}$, tal que $a_{ij} = i + 2j$

b. $A = (a_{ij})_{2 \times 3}$, tal que $a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ se } i = j \\ i + j, \text{ se } i \neq j \end{cases}$ **3. b.** $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

c. $A = (a_{ij})_{2 \times 2}$, tal que $a_{ij} = (-1)^{i+j}$ **3. c.** $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

4. Sendo $A = (a_{ij})_{20 \times 20}$, com $a_{ij} = 2i + j$, calcule:

a. a soma dos números que compõem a diagonal principal da matriz A. **4. a.** 630

b. a soma dos números que compõem a diagonal secundária da matriz A. **4. b.** 630

5. Sendo I_2 a matriz identidade de ordem 2, determine o número real x tal que: **5.** $x = -2$

$$\begin{pmatrix} x^2 - 3 & x + 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

6. Obtenha os valores reais de p e q de modo que a matriz a seguir seja nula. **6.** $p = 1$ e $q = 3$

$$\begin{pmatrix} 0 & 3p - q & 0 \\ p + q - 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

7. Dadas as matrizes $A = \begin{pmatrix} x^2 - 5x & 2 \\ 8 & x^2 - 16 \\ 6 & 12 \end{pmatrix}$ e

$B = \begin{pmatrix} -4 & 8 & 6 \\ 2 & 0 & x^2 - x \end{pmatrix}$ determine o número real x tal que $A = B^t$. **7.** $x = 4$

8. Elabore um problema envolvendo a representação matricial de dados numéricos associado a alguma situação do cotidiano. Em seguida, troque o problema elaborado com um colega para que um resolva o problema elaborado pelo outro. Por fim, analisem e discutam as resoluções. **8.** Resposta pessoal.

Para retomar os conteúdos estudados, resolva os exercícios complementares 1 a 3.

4. Adição de matrizes

Uma concessionária de automóveis é formada pelas lojas A e B. Em um estudo realizado por essa empresa sobre a aceitação de 2 novos modelos de veículo nos 4 primeiros dias de fevereiro, foram obtidos os resultados apresentados nas matrizes a seguir.

DIRCEU PORTUGAL/FOTOARENA

Concessionária de veículos em Campo Mourão, Paraná. Foto de 2019.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

As matrizes A e B são tais que:

- a matriz A descreve o desempenho da loja A, de modo que cada elemento a_{ij} é o número de unidades vendidas do modelo i no dia j;
- a matriz B descreve o desempenho da loja B, de modo que cada elemento b_{ij} é o número de unidades vendidas do modelo i no dia j.

Se quisermos representar por uma única matriz as vendas diárias desses novos modelos nas duas lojas juntas, no período considerado, podemos construir a matriz $C_{2 \times 3}$ na qual cada elemento c_{ij} é a soma de seus correspondentes a_{ij} e b_{ij} nas matrizes A e B, isto é:

$$C = \begin{pmatrix} 2+3 & 3+0 & 1+2 & 5+3 \\ 1+4 & 2+2 & 5+4 & 3+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 3 & 8 \\ 5 & 4 & 9 & 8 \end{pmatrix}$$

Assim, cada elemento c_{ij} da matriz C representa o número de unidades vendidas do modelo i no dia j pelas duas lojas juntas. A operação efetuada com A e B é chamada de **adição de matrizes**, e C é chamada de **matriz soma** de A e B. Generalizando, definimos:

A **soma** de duas matrizes do mesmo tipo, A e B, é a matriz em que cada elemento é a soma de seus correspondentes em A e em B.

Observação

Indicamos essa soma por $A + B$.

Exemplo

$$\begin{pmatrix} 4 & 7 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ -8 & -3 \end{pmatrix}$$

Matrizes opostas

Dada uma matriz A, chama-se **oposta** de A a matriz que, adicionada com A, resulta na matriz nula.

Observação

A matriz oposta de A é indicada por $-A$.

Exemplo

Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 7 & -8 \end{pmatrix}$, sua oposta é $-A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -7 & 8 \end{pmatrix}$, pois:

$$A + (-A) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 7 & -8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

5. Subtração de matrizes

Retomando o exemplo das concessionárias de automóveis, se quisermos uma matriz que compare as vendas da loja A com as vendas da loja B, dos novos modelos nos 4 primeiros dias de fevereiro, podemos construir a matriz $D_{2 \times 3}$ na qual cada elemento d_{ij} represente a diferença entre seus correspondentes a_{ij} e b_{ij}, nessa ordem, nas matrizes A e B, isto é:

$$D = \begin{pmatrix} 2-3 & 3-0 & 1-2 & 5-3 \\ 1-4 & 2-2 & 5-4 & 3-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 & 2 \\ -3 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Assim, cada elemento d_{ij} da matriz D representa o desempenho da loja A em relação à loja B. O elemento $d_{12} = 3$, por exemplo, indica que a loja A vendeu 3 unidades a mais que a loja B do modelo 1 no dia 2. A operação efetuada com A e B é chamada de **subtração de matrizes**, e D é chamada de **matriz diferença** de A e B, nessa ordem. Generalizando, definimos:

A **diferença** de duas matrizes do mesmo tipo, A e B, nessa ordem, é a soma de A com a oposta de B.

Observação

Indicamos essa diferença por $A - B$.

Exemplo

Sendo $A = \begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 4 & 0 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, temos:

$$A - B = A + (-B) = \begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 4 & 0 \\ -4 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 3 & -5 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 7 & -5 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}$$

Para simplificar esse procedimento, podemos subtrair os elementos correspondentes em A e B:

$$A - B = \begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 4 & 0 \\ -4 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9-2 & 6-4 \\ 4-(-3) & 0-5 \\ -4-1 & -1-(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 7 & -5 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}$$

6. Multiplicação de um número real por uma matriz

Recorrendo novamente ao exemplo das concessionárias, considere que a loja de automóveis A estabeleça a meta de dobrar as vendas diárias dos novos modelos no mesmo período do ano seguinte. Essa meta pode ser representada pela seguinte matriz:

$$2A = 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 2 & 10 \\ 2 & 4 & 10 & 6 \end{pmatrix}$$

Note que, para obter essa matriz, multiplicamos cada elemento da matriz A por 2. Nesse caso, efetuamos uma multiplicação de um número real por uma matriz, definida a seguir.

Observação

Indicamos esse produto por $k \cdot A$ ou kA.

O **produto** de um número real k por uma matriz A é a matriz em que cada elemento é o produto de seu correspondente em A pelo número k.

Exemplo

$$6 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 30 & 6 \\ 0 & 6\sqrt{2} & -12 \end{pmatrix}$$

9. a. $\begin{pmatrix} 6 & 8 & -1 \\ 7 & -2 & 7 \end{pmatrix}$ **9. b.** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 25 \\ -4 & -10 & -7 \end{pmatrix}$ **9. c.** $\begin{pmatrix} 5 & 5 & 26 \\ 3 & -15 & 5 \end{pmatrix}$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Faça os exercícios no caderno.

9. Dadas as matrizes: $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 8 \\ 1 & -4 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -9 \\ 6 & 2 & 7 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 8 & 6 \\ -4 & -10 \end{pmatrix}$, determine:

a. $A + B$ **b.** $2A - B$ **c.** $3A - \frac{1}{2} \cdot C^t$

10. Reúna-se com um colega, escolham três matrizes do mesmo tipo, A, B e C, e verifiquem se valem as propriedades a seguir.

a. $(A + B) + C = A + (B + C)$ **10. a.** sim

b. $A + B = B + A$ **10. b.** sim

c. $A + 0 = 0 + A = A$, em que 0 é a matriz nula do mesmo tipo de A. **10. c.** sim

11. Faça o que se pede.

a. Determine a matriz A tal que: **11. a.** $A = \begin{pmatrix} 4 & -8 & 10 \\ 7 & -10 & 0 \end{pmatrix}$

$$A + 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 12 & 6 \\ 7 & -2 & 12 \end{pmatrix}$$

b. Determine as matrizes X e Y tais que:

$$X + Y = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 6 \end{pmatrix} \text{ e } X - Y = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

11. b. $X = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$; $Y = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

12. Uma empresa é formada por duas fábricas, A e B, de placas solares fotovoltaicas. Cada uma delas produz três modelos de placas, denominados modelo 1, modelo 2 e modelo 3. As matrizes a seguir apresentam as produções dessas fábricas nos 2 primeiros dias de determinado mês.

$$A = \begin{pmatrix} 51 & 62 \\ 49 & 51 \\ 62 & 58 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 75 & 82 \\ 86 & 95 \\ 82 & 88 \end{pmatrix}$$

Considera-se que:

- a matriz A descreve o desempenho da fábrica A, de modo que cada elemento a_{ij} é o número de placas do modelo i produzidos no dia j;
- a matriz B descreve o desempenho da fábrica B, de modo que cada elemento b_{ij} é o número de placas do modelo i produzidos no dia j.

Em relação ao período de tempo considerado nessas matrizes, responda aos itens seguintes.

a. Quantas placas do modelo 1 foram produzidas pela fábrica A no dia 2? **12. a.** 62 placas

b. Quantas placas do modelo 1 foram produzidas pela fábrica B no dia 2? **12. b.** 82 placas

c. Quantas placas do modelo 1 foram produzidas pelas duas fábricas, juntas, no dia 2? **12. c.** 144 placas

d. Quantas placas do modelo 2 foram produzidas pelas duas fábricas, juntas, no dia 1? **12. d.** 135 placas

e. Construa a matriz C em que cada elemento c_{ij} represente o número de placas diárias do modelo i produzidas pelas duas fábricas juntas no dia j.

f. Construa uma matriz $D_{3 \times 2}$ que compare o desempenho da fábrica A com o da fábrica B, em relação ao número de placas fabricadas em cada dia.

12. e. Resposta no final do livro. **12. f.** Resposta no final do livro.

13. Elabore um problema envolvendo adição e/ou subtração de duas matrizes 3×3. As matrizes devem estar associadas ao preço de um produto de três marcas distintas e, cada um, com 3 modelos ou características em duas lojas, A e B. Em seguida, troque o problema elaborado com um colega para que um resolva o problema elaborado pelo outro. Por fim, analisem e discutam as resoluções. **13.** Resposta pessoal.

Para retomar os conteúdos estudados, resolva os exercícios complementares 4 e 5.

7. Multiplicação de matrizes

RICHY STOCKER/SHUTTERSTOCK

Ao fazer o controle de estoque de uma cafeteria, o gerente estimou que seriam necessárias as quantidades de café descritas, a seguir, na tabela "Quantidade de cada tipo de café usado em certa cafeteria".

A avaliação de custo foi realizada com dois fornecedores, cujos preços por quilograma são descritos na tabela "Preço por quilograma de cada tipo de café informado por dois fornecedores".

Após conceituar a multiplicação de matrizes, conforme é feito na introdução desse item (cafeteria), sugerimos uma incursão pelas transformações geométricas.

Quantidade de cada tipo de café usado em certa cafeteria

	Tipo 1 Tradicional	Tipo 2 *Gourmet*	Tipo 3 Descafeinado	Tipo 4 Aromatizado
Massa (kg)	80	90	40	50

Elaborado para fins didáticos.

Preço por quilograma de cada tipo de café informado por dois fornecedores

	Fornecedor 1	Fornecedor 2
Tipo 1	R\$ 28,00	R\$ 27,50
Tipo 2	R\$ 30,60	R\$ 32,50
Tipo 3	R\$ 37,00	R\$ 35,80
Tipo 4	R\$ 35,50	R\$ 33,00

Elaborado para fins didáticos.

Para suprir o estoque de café, qual será o gasto da cafeteria se os produtos forem comprados do fornecedor 1? E se forem comprados do fornecedor 2?

As duas tabelas podem ser representadas, respectivamente, pelas matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} 80 & 90 & 40 & 50 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 28{,}00 & 27{,}50 \\ 30{,}60 & 32{,}50 \\ 37{,}00 & 35{,}80 \\ 35{,}50 & 33{,}00 \end{pmatrix}$$

Considera-se que:

- cada elemento a_{ij} da matriz A indica a quantidade de café tipo j que deve ser comprada;
- cada elemento b_{ij} da matriz B representa o preço por quilograma do café tipo i no fornecedor j.

Para calcular o orçamento de cada fornecedor, efetuamos as seguintes operações:

- **fornecedor 1:** $80 \cdot 28{,}00 + 90 \cdot 30{,}60 + 40 \cdot 37{,}00 + 50 \cdot 35{,}50 = 8.249{,}00$;
- **fornecedor 2:** $80 \cdot 27{,}50 + 90 \cdot 32{,}50 + 40 \cdot 35{,}80 + 50 \cdot 33{,}00 = 8.207{,}00$.

Organizando esses resultados em uma matriz C, tal que cada elemento c_{ij} representa o orçamento do fornecedor j, temos:

$$C = \begin{pmatrix} 8.249{,}00 & 8.207{,}00 \end{pmatrix}$$

A matriz C é chamada de matriz produto de A por B, nessa ordem, que indicamos por $A \cdot B = C$ ou $AB = C$. Desse modo, os dados numéricos dessa consulta de preços podem ser representados por:

$$\begin{pmatrix} 80 & 90 & 40 & 50 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 28{,}00 & 27{,}50 \\ 30{,}60 & 32{,}50 \\ 37{,}00 & 35{,}80 \\ 35{,}50 & 33{,}00 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8.249{,}00 & 8.207{,}00 \end{pmatrix}$$

Essa situação vai ajudar a entender o conceito de multiplicação de matrizes. Mas, antes desse conceito, vamos definir o produto de uma linha por uma coluna.

Produto de linha por coluna

Dadas as matrizes $A = (a_{ij})_{m \times k}$ e $B = (b_{ij})_{k \times n}$, consideremos a linha i de A e a coluna j de B, isto é:

$$(a_{i1} \quad a_{i2} \quad a_{i3} \quad \dots \quad a_{ik}) \text{ e } \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ b_{3j} \\ \vdots \\ b_{kj} \end{pmatrix}$$

O produto da linha i pela coluna j é definido por:

$$a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + a_{i3} \cdot b_{3j} + \dots + a_{ik} \cdot b_{kj}$$

Ou seja, multiplicamos, ordenadamente, os elementos da linha i pelos elementos da coluna j e adicionamos os resultados obtidos.

O esquema a seguir ajuda a compreender essa definição.

Observação

Note que, para existir o produto de uma linha por uma coluna, as duas devem ter o mesmo número de elementos.

$$\underbrace{a_{i1} \quad a_{i2} \quad a_{i3} \quad \dots \quad a_{ik}}_{\text{linha } i \text{ de } A} \qquad \underbrace{\begin{matrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ b_{3j} \\ \vdots \\ b_{kj} \end{matrix}}_{\text{coluna } j \text{ de } B} \Rightarrow \underbrace{a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \dots + a_{ik}b_{kj}}_{\text{produto da linha } i \text{ pela coluna } j}$$

Exemplo

Considerando as matrizes $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 6 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 2 \\ -4 & 5 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, temos que:

- o produto da 1ª linha de A pela 2ª coluna de B é: $3 \cdot 2 + 4 \cdot 5 + 2 \cdot 1 = 28$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 6 & -2 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 2 \\ -4 & 5 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

- o produto da 2ª linha de A pela 3ª coluna de B é: $6 \cdot 2 + (-2) \cdot 1 + 0 \cdot 3 = 10$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 6 & -2 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 2 \\ -4 & 5 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Multiplicação de matrizes

Observação

Esse produto é indicado por $A \cdot B$ ou AB.

O **produto** da matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$ pela matriz $B = (b_{ij})_{n \times p}$ é a matriz $C = (c_{ij})_{m \times p}$ tal que cada elemento c_{ij} é o produto da linha i de A pela coluna j de B.

Exemplo

Sendo $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, temos:

$$AB = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 5 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 4 + 5 \cdot 2 & 3 \cdot 5 + 5 \cdot 1 & 3 \cdot (-2) + 5 \cdot 3 \\ 2 \cdot 4 + 0 \cdot 2 & 2 \cdot 5 + 0 \cdot 1 & 2 \cdot (-2) + 0 \cdot 3 \end{pmatrix}$$

$$\therefore AB = \begin{pmatrix} 22 & 20 & 9 \\ 8 & 10 & -4 \end{pmatrix}$$

Observe que o elemento a_{11} da matriz AB é o produto da linha 1 de A pela coluna 1 de B; o elemento a_{12} é o produto da linha 1 de A pela coluna 2 de B; e assim por diante.

Notas:

1. Se A e B são matrizes, existe o produto AB se, e somente se, o número de colunas de A é igual ao número de linhas de B. Considere os exemplos a seguir.

a. Existe o produto: $A_{3 \times 4} \cdot B_{4 \times 5}$

iguais

b. Não existe o produto: $A_{2 \times 3} \cdot B_{4 \times 2}$

diferentes

Reflexão: Sim, existem matrizes não nulas A e B tais que $A \cdot B = B \cdot A$. Quando isso acontece, dizemos que A e B comutam na multiplicação.

Por exemplo, as matrizes não nulas $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 4 \end{bmatrix}$ comutam na multiplicação.

Observe:

$A \cdot B = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ $\quad B \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$

2. A matriz C, tal que $C = AB$, tem o mesmo número de linhas de A e o mesmo número de colunas de B, isto é:

$$A_{m \times k} \cdot B_{k \times n} = C_{m \times n}$$

Por exemplo:

a. $A_{3 \times 5} \cdot B_{5 \times 8} = C_{3 \times 8}$

b. $A_{1 \times 4} \cdot B_{4 \times 1} = C_{1 \times 1}$

3. A multiplicação de matrizes não é comutativa, como se observa nas notas 1 e 2.

Reflexão

Existem matrizes não nulas, A e B, tais que $A \cdot B = B \cdot A$?

EXERCÍCIO RESOLVIDO

3. Determine a matriz X tal que: $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 4 \\ -9 \end{pmatrix}$

Resolução

Primeiro, vamos determinar o tipo da matriz X:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}}_{2 \times 2} \cdot \underbrace{X}_{m \times n} = \underbrace{\begin{pmatrix} 4 \\ -9 \end{pmatrix}}_{2 \times 1}$$

devem ser iguais $\quad$ devem ser iguais

O número de colunas da primeira matriz deve ser igual ao número de linhas de X; portanto, $m = 2$.

O número de colunas da matriz X deve ser igual ao número de colunas da matriz produto; portanto, $n = 1$.

Assim, a matriz X é do tipo 2×1. Sendo $X = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, temos:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -9 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2a + 3b \\ a - 4b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -9 \end{pmatrix}$$

Portanto: $\begin{cases} 2a + 3b = 4 \\ a - 4b = -9 \end{cases}$

Para resolver esse sistema de equações, multiplicamos a segunda equação por -2:

$$\begin{cases} 2a + 3b = 4 \\ -2a + 8b = 18 \end{cases}$$

Adicionando essas equações membro a membro, temos:

$$0a + 11b = 22 \Rightarrow b = 2$$

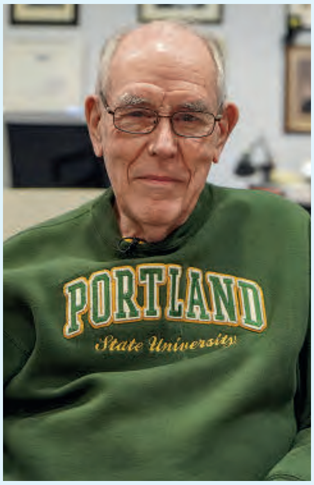
Substituindo b por 2 em $2a + 3b = 4$, obtemos:

$$2a + 3 \cdot 2 = 4 \Rightarrow a = -1$$

Assim, concluímos que: $X = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Mentes brilhantes

BBVA FOUNDATION



Ivan Edward Sutherland, pesquisador estadunidense, um dos pioneiros da computação gráfica.

A computação gráfica

A computação gráfica pode ser definida como o conjunto de métodos e técnicas utilizados para converter dados numéricos em um dispositivo gráfico via computador. Esses dados numéricos são inseridos na forma de matrizes.

Embora a computação gráfica tenha origem por volta de 1950, quando foi construído o primeiro computador com recursos gráficos de visualização de dados numéricos, só em 1962 ela ganhou impulso, graças ao trabalho do doutor Ivan Sutherland: *Sketchpad – a man-machine graphical communication system*. Esse foi o primeiro editor gráfico no qual era possível criar imagens digitais, movimentá-las e transformá-las. Ele passou a ser usado nas indústrias automobilísticas e aeroespaciais norte-americanas. Foi uma fábrica de automóveis a precursora dos primeiros programas de CAD (*Computer Aided Design*). Até o fim da década de 1960, quase todas as indústrias automobilísticas e aeroespaciais já utilizavam esses programas.

Elaborado com base em: PINHO, M. S. Computação gráfica. **Grupo de realidade virtual (GRU) da Escola Politécnica PUC-RS**, [2022]. Disponível em: https://www.inf.pucrs.br/~pinho/CG/Aulas/Intro/intro.htm. Acesso em: 25 jul. 2024.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

18. a. $C = \begin{pmatrix} 41.000 & 55.000 \\ 29.000 & 39.000 \end{pmatrix}$

Faça os exercícios no caderno.

14. Dadas as matrizes $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ e $C = (1 \quad -2)$, determine, se existirem:

a. $A \cdot B$ **14. a.** $\begin{pmatrix} 26 \\ -4 \end{pmatrix}$

b. $A \cdot C$ **14. b.** não existe

c. $B \cdot C$ **14. c.** $\begin{pmatrix} 4 & -8 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$

d. A^2 **14. d.** $\begin{pmatrix} -2 & 12 \\ -2 & -6 \end{pmatrix}$

e. B^2 **14. e.** não existe

(*Observação*: $A^2 = A \cdot A$)

15. Sendo as matrizes $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, determine: **15. a.** $\begin{pmatrix} 15 & 15 \\ 26 & 26 \end{pmatrix}$

a. $A \cdot B$

b. $B \cdot A$ **15. b.** $\begin{pmatrix} 1 & 8 & 4 \\ 4 & 32 & 16 \\ 2 & 16 & 8 \end{pmatrix}$

c. $A \cdot I_3$ **15. c.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & 1 \end{pmatrix}$

d. $I_2 \cdot A$ **15. d.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & 1 \end{pmatrix}$

e. $B \cdot C$ **15. e.** $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

16. Observando sua resolução dos exercícios anteriores, classifique em verdadeira ou falsa cada uma das afirmações a seguir.

a. Se P e Q são matrizes quaisquer tais que existam os produtos PQ e QP, então $PQ = QP$. **16. a.** falsa

b. Se P é uma matriz qualquer do tipo $m \times n$, então: $P \cdot I_n = P$ e $I_m \cdot P = P$. **16. b.** verdadeira

c. Se o produto de duas matrizes, P e Q, é igual à matriz nula, então pelo menos uma das matrizes, P ou Q, é nula. **16. c.** falsa

17. Dadas as matrizes $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 6 \\ -15 \end{pmatrix}$, obtenha a matriz X tal que $A \cdot X = B$. **17.** $X = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix}$

18. Uma indústria têxtil produz um modelo de camiseta em três tamanhos: pequeno (P), médio (M) e grande (G), usando na confecção de cada camiseta dois tipos de fio: 1 e 2. A tabela 1, a seguir, descreve a quantidade de cada fio usada na fabricação de cada camiseta. A tabela 2 descreve a produção dessas camisetas nos meses de janeiro e fevereiro.

Tabela 1 – quantidade de fio utilizado, em grama

Fio \ Tamanho	P	M	G
Fio 1	60	70	80
Fio 2	40	50	60

Elaborado para fins didáticos.

Tabela 2 – unidades fabricadas

Tamanho \ Mês	Janeiro	Fevereiro
P	200	300
M	300	300
G	100	200

Elaborado para fins didáticos.

Considerando apenas os meses apresentados na tabela, reúna-se com um colega e façam o que se pede nos itens a seguir.

a. Construam a matriz $C = (c_{ij})$ em que cada elemento c_{ij} represente a quantidade do fio i, em grama, usada para a confecção das camisetas no mês j.

O **exercício 19** merece atenção especial, pois introduz o conceito de matrizes inversas.

b. Quantos quilogramas do fio 1 foram usados para a confecção dessas camisetas no mês de janeiro? **18. b.** 41 kg

c. Quantos quilogramas do fio 1 foram usados para a confecção dessas camisetas no bimestre janeiro/fevereiro? **18. c.** 96 kg

d. Quantos quilogramas de fio foram usados na confecção dessas camisetas no mês de fevereiro? **18. d.** 94 kg

19. Uma matriz quadrada A de ordem n é **invertível** se, e somente se, existe uma matriz quadrada B de ordem n tal que: $AB = BA = I_n$, em que I_n é a matriz identidade de ordem n. As matrizes A e B são chamadas de **inversas entre si**, e tal fato é indicado por $B = A^{-1}$ (lemos: "B é igual à inversa de A") ou $A = B^{-1}$ (lemos: "A é igual à inversa de B").

Uma importante propriedade garante que para matrizes quadradas A e B, de mesma ordem n, se $AB = I_n$, então $BA = I_n$. Assim, para verificar se duas matrizes de mesma ordem são inversas, basta calcular um dos produtos: AB ou BA. Considere o exemplo a seguir.

As matrizes $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ são inversas entre si, pois:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Não é preciso calcular o produto BA, pois se $AB = I_2$, a propriedade anterior garante que $BA = I_2$.

De acordo com essas informações, faça o que se pede.

a. Verifique se as matrizes $C = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $D = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ são inversas entre si. **19. a.** São inversas entre si.

b. Verifique se as matrizes $E = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ e $F = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ são inversas entre si. **19. b.** Não são inversas entre si.

c. Determine, se existir, a inversa de cada uma das matrizes: $G = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ e $H = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$.

19. c. $G^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$; não existe a inversa de H.

20. Se A, X e Y são matrizes, sendo A não nula, tal que $A \cdot X = A \cdot Y$, posso concluir que $X = Y$? **20.** não

21. Elabore um problema envolvendo multiplicação de duas matrizes. Em seguida, troque o problema elaborado com um colega para que um resolva o problema elaborado pelo outro. Por fim, analisem e discutam as resoluções. **21.** Resposta pessoal.

Para retomar os conteúdos estudados, resolva os exercícios complementares 6 a 9.

A criptografia é um conjunto de princípios e técnicas aplicado na codificação e decodificação de mensagens. Uma dessas técnicas utiliza o conceito de matriz. Converse com os colegas sobre a criptografia e sobre como os conceitos matemáticos que você aprendeu nesse capítulo estão presentes nessa situação. Como sugestão, você pode assistir ao vídeo **O gabarito secreto**. Disponível em: https://m3.ime.unicamp.br/recursos/1100. Acesso em: 16 out. 2024.

Também sugerimos o livro de Simon Singh, **O livro dos códigos**, que narra a história de criadores e decifradores de códigos, começando quinhentos anos antes de Cristo e chegando até hoje, quando a criptografia é usada na internet e em operações bancárias.

8. As matrizes e as transformações geométricas

Com o progresso da informática, a teoria das matrizes tornou-se ferramenta básica na área da computação gráfica, em que é frequente a necessidade de alterar tamanho, posição ou forma de uma imagem computadorizada.

As alterações em uma imagem processada por computador são realizadas por meio de funções matemáticas chamadas de **transformações geométricas**, entre as quais apresentaremos três, no plano cartesiano: a translação, a rotação e a reflexão.

Podemos aplicar o conceito de matriz para realizar essas transformações, indicando cada ponto (x, y) do plano cartesiano pela matriz $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, conforme apresentaremos a seguir.

LIFESTYLE PICTURES/ALAMY/FOTOARENA

Cena do filme **O rei leão** (2019), direção de Jon Favreau, feito por computação gráfica.

Translação

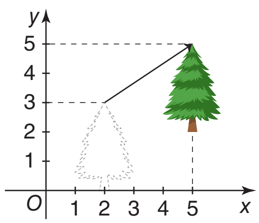


Figura 1

Quando realizamos o deslocamento de uma figura, conservando a forma, o tamanho, a direção e o sentido da figura original, efetuamos uma **translação**.

Na figura 1, a silhueta tracejada representa a posição inicial da ilustração da árvore que foi transladada 3 unidades para a direita e 2 unidades para cima; para isso, efetuamos a adição $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ para cada ponto $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ da figura na posição inicial, obtendo os pontos $\begin{bmatrix} x+3 \\ y+2 \end{bmatrix}$ da figura colorida.

Rotação

A rotação gira a figura em torno de um ponto referencial, conforme o exemplo a seguir.

Para rotacionar um ponto $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ de um ângulo de medida positiva α, no sentido anti-horário, em torno da origem O, efetuamos a seguinte multiplicação de matrizes: $\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\text{sen}\,\alpha \\ \text{sen}\,\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$. Assim, na figura 2, para rotacionar cada ponto $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ da ilustração na posição inicial (representada pela silhueta tracejada) 30° no sentido anti-horário, efetuamos:

$\begin{bmatrix} \cos 30° & -\text{sen}\,30° \\ \text{sen}\,30° & \cos 30° \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, obtendo os pontos $\begin{bmatrix} \dfrac{\sqrt{3}\,x - y}{2} \\ \dfrac{x + \sqrt{3}\,y}{2} \end{bmatrix}$ da figura da árvore na posição final.

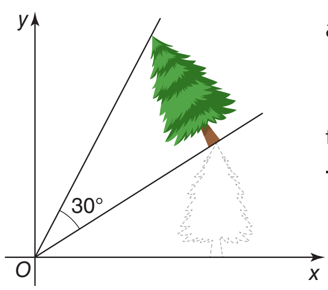


Figura 2

Reflexão

Como podemos determinar as coordenadas da reflexão de um ponto (x, y) em torno do eixo x por meio da multiplicação de matrizes?

Reflexão em torno do eixo *y*

A reflexão em torno do eixo y é a transformação que reflete cada ponto do plano em torno do eixo y. Assim, a reflexão de um ponto (x, y) em torno do eixo y é o ponto $(-x, y)$.

Essa transformação pode ser associada à multiplicação entre matrizes, como indicado a seguir:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x \\ y \end{bmatrix}$$

Reflexão: $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x \\ y \end{bmatrix}$

Conectado

Acompanhe como podemos escrever um algoritmo em Português estruturado para determinar a reflexão de um triângulo em torno do eixo y ou do eixo x, dadas as coordenadas (x, y) de seus vértices.

```
INÍCIO
 Ler as coordenadas x1 e y1 do primeiro vértice.
 Ler as coordenadas x2 e y2 do segundo vértice.
 Ler as coordenadas x3 e y3 do terceiro vértice.
 Exibir a mensagem “Digite 1 para obter a reflexão em
torno do eixo x ou 2 para obter a reflexão em torno do eixo y”.
 Ler valor 1 ou 2.
 SE valor for igual a 1, faça:
    y1 = y1 · (-1)
    y2 = y2 · (-1)
    y3 = y3 · (-1)
Exibir a mensagem “As coordenadas dos vértices do triângulo
refletido em torno do eixo x são (x1, y1), (x2, y2) e (x3, y3)”.
Fim do SE
 SENÃO, faça:
    x1 = x1 · (-1)
    x2 = x2 · (-1)
    x3 = x3 · (-1)
Exibir a mensagem “As coordenadas dos vértices do triângulo
refletido em torno do eixo y são (x1, y1), (x2, y2) e (x3, y3)”.
 Fim do SENÃO
 FIM
```

MATEMÁTICA SEM FRONTEIRAS

OBJETO DIGITAL **Vídeo: Descoberto um novo ladrilhamento não periódico**

Transformações geométricas e ladrilhamento do plano

O mosaico é uma técnica que consiste em preencher uma superfície plana com peças menores e o termo está associado ao grego *mosaicon*, que significa "obra paciente". Composições artísticas desse tipo são milenares e estão presentes nas mais diversas culturas; em 1928, por exemplo, escavações arqueológicas no Iraque revelaram mosaicos sumerianos de cerca de 3500 a.C.

Uma intervenção artística mais recente, no centro do Rio de Janeiro, fez uma homenagem aos povos indígenas da América Latina: a obra *Murais do Abya Yala* composta de um mural de 10 painéis com mosaicos de cerâmica. O conceito Abya Yala é um termo usado para identificar o território conhecido hoje com o continente americano.

> Com diferentes técnicas de mosaico moderno em cerâmica, os artistas [dos Murais do Abya Yala] contam que a ideia é ter no centro da peça uma união entre as culturas e experiências retratadas, representando a integração desses povos da América.

RODRIGUES, M. Centro do Rio vai ganhar mural de 30 metros em homenagem aos povos indígenas da América Latina. **G1**, 15 abr. 2021. Disponível em: https://g1.globo.com/rj/rio-de-janeiro/noticia/2021/04/15/centro-do-rio-vai-ganhar-mural-de-30-metros-em-homenagem-aos-povos-indigenas-da-america-latina.ghtml. Acesso em: 13 set. 2024.

Outro exemplo é o zellige, mosaico cerâmico tradicionalmente marroquino, composto de pequenos ladrilhos de terracota esmaltados e dispostos em padrões geométricos. Os ladrilhos são feitos à mão, desde a moldagem da argila até a aplicação do esmalte colorido, e cada peça é cuidadosamente cortada e polida antes de ser montada no padrão desejado.

Além de sua beleza estética, o zellige também tem um significado cultural, refletindo a história e tradições do povo marroquino.

JULIAN KAESLER/MOMENT RF/GETTY IMAGES

Madraça Ben Youssef em Marrakech, Marrocos. Foto de 2023.

O zellige é usado abundantemente na Madraça Ben Youssef adornando pisos, paredes, colunas e outras superfícies arquitetônicas.

A partir da ideia de mosaico, podemos compreender o que são os ladrilhamentos, definidos a seguir:

> [ladrilhamento é] a divisão do plano em uma quantidade enumerável de polígonos, de modo que a união de todos esses polígonos constitui todo o plano, e a interseção de dois desses polígonos ou é vazia ou é um vértice ou está contida em uma linha poligonal.

OLIVEIRA, J. F. M. **Pavimentações no Plano Euclidiano**. 2015. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP, 2015.

No estudo dos ladrilhamentos, podemos considerar aqueles compostos apenas de polígonos regulares (chamados ladrilhamentos “bem-comportados”) ou aqueles compostos de polígonos quaisquer.

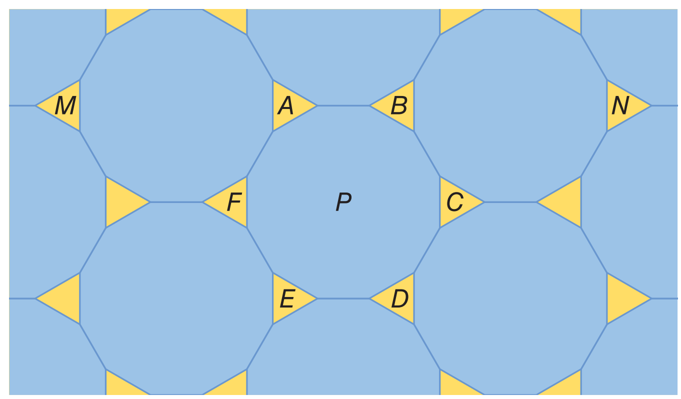
Um ladrilhamento bem-comportado obedece as características a seguir:

1. Os ladrilhos são apenas polígonos regulares.

2. O encontro de dois ladrilhos adjacentes sempre é entre seus vértices ou entre seus lados, ou seja, o lado de um polígono não se encontra com o vértice de outro.

3. A configuração de polígonos em torno de um vértice é sempre a mesma, isto é, os polígonos em torno de todos os vértices são sempre os mesmos e na mesma ordem.

Observe um exemplo de ladrilhamento bem-comportado na figura a seguir.



ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

Ladrilhamento composto de dodecágonos regulares e triângulos equiláteros.

Nesse tipo de ladrilhamento, podemos perceber diferentes transformações geométricas. Por exemplo, fixado um dos triângulos da figura anterior, digamos o triângulo *A*, o triângulo imediatamente à esquerda dele (no caso, o triângulo *M*) pode ser obtido por meio de uma reflexão do triângulo *A* em torno de um eixo vertical.

Já os triângulos *B*, *C*, *D*, *E* e *F* podem ser obtidos por meio de rotações do triângulo *A* em torno de um ponto, no caso, o centro do dodecaedro *P*. Além disso, o triângulo *N* pode ser obtido por meio de uma translação horizontal do triângulo *A*.

Atividades

1. c. Com apenas triângulos equiláteros (6 triângulos em torno de um mesmo vértice), ou com apenas quadrados (4 quadrados em torno de um mesmo vértice), ou com apenas hexágonos (3 hexágonos em torno de um mesmo vértice).

Faça as atividades no caderno.

1. Utilizando as ferramentas de um *software* de Geometria dinâmica, façam a composição de dois ladrilhamentos bem-comportados. Depois, respondam: **1. a.** Resposta pessoal.

a. Que polígonos regulares vocês utilizaram?

b. Nos ladrilhamentos formados, qual é a soma dos ângulos internos que têm um vértice em comum? **1. b.** 360°

c. Utilizando apenas polígonos congruentes, que tipos de ladrilhamentos bem-comportados é possível obter? Façam os testes utilizando o *software* de Geometria dinâmica.

d. É possível obter um ladrilhamento bem-comportado utilizando apenas pentágonos congruentes? Por quê?

e. Quais transformações geométricas vocês podem identificar nos ladrilhamentos bem-comportados produzidos por vocês nessa atividade?

1. e. Resposta pessoal.

2. Vocês já conheciam obras artísticas que utilizam a técnica de ladrilhamento ou de mosaicos? Pesquisem outras obras de arte e verifiquem se no município ou região em que vocês moram há artistas que trabalham com essa técnica. Verifiquem a possibilidade de fazer uma visita a exposições ou museus, por exemplo, em que estejam disponíveis obras desse tipo.

2. Resposta pessoal.

3. Resposta pessoal.

3. Façam uma pesquisa sobre eventos culturais como as exposições artísticas em museus, feiras ou murais. Depois, conversem a respeito de como esses eventos podem preservar a história dos diferentes povos e culturas e o porquê isso é importante.

1. d. Não, pois a soma dos ângulos internos em torno de um vértice não seria 360°.

TRABALHO E JUVENTUDES *Designer de games*

OBJETO DIGITAL ***Podcast*: Animação gráfica**

O sucesso dos jogos eletrônicos e *videogames* se dá, em grande parte, pela evolução da computação gráfica. O realismo, a física dos movimentos, a mecânica dos jogos são avanços tecnológicos que têm bases matemáticas e ferramentas computacionais.

Proponha aos estudantes o ***Podcast*: Animação gráfica** que fala da profissão do *designer* no processo de criação de uma animação.

O *designer* de *games* é um profissional que trabalha com a criação e desenvolvimento de um jogo eletrônico atuando tanto em como será a jogabilidade e visual gráfico, quanto na história do jogo, como será construída a narrativa, quais serão os personagens e ambientes explorados.

A Matemática é usada por profissionais dessa área envolvendo: o agrupamento de gráficos 2D e 3D; cálculos de Geometria para representar e transformar objetos no espaço; projeções para criar a perspectiva correta para simular efeitos visuais realistas; simulação de fenômenos físicos nos jogos, permitindo que objetos se movam, colidam e interajam de maneira realista. Equações matemáticas são usadas para calcular a trajetória de projéteis, a dinâmica de colisões, a gravidade e outros fenômenos físicos.

Trabalho e juventudes: Pesquisa pessoal.

A Inteligência Artificial (IA) é formada por algoritmos matemáticos que são responsáveis por decisões e comportamentos inteligentes de personagens não jogáveis (NPCs), como um inimigo ou companheiro de equipe. Para jogos que envolvem elementos de sorte (resultados aleatórios), como jogos de cartas, jogos de tabuleiro etc., são usados cálculos de probabilidade, dados estatísticos e formulação de sistemas de aleatoriedade controlada.

Conceitos e técnicas matemáticas são ferramentas essenciais para os profissionais desenvolvedores de jogos, que podem criar experiências envolventes, realistas e desafiadoras para os jogadores.


SEVENTYFOUR/SHUTTERSTOCK

Designer construindo modelo 3D de personagem.

Quer saber mais sobre a profissão de *designer* gráfico de *videogames*? Faça uma pesquisa na internet e compartilhe com os colegas um resumo das informações que você obteve.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Faça os exercícios no caderno.

22. Efetuando operações com matrizes, determine:

a. o ponto M' obtido pela translação de 3 unidades para a direita e 4 unidades para baixo do ponto $M = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix}$. **22. a.** $M' = \begin{bmatrix} 9 \\ -1 \end{bmatrix}$

b. o ponto P' obtido pela rotação de 45° do ponto $P = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}$ em torno da origem do sistema cartesiano no sentido anti-horário. **22. b.** $P' = \begin{bmatrix} -\sqrt{2} \\ 5\sqrt{2} \end{bmatrix}$

23. Observe as operações com matrizes apresentadas em cada item a seguir e indique a quais transformações geométricas elas podem ser associadas. Se necessário, represente os pontos em um sistema cartesiano ou utilize um *software* de Geometria dinâmica para representar alguns pontos no plano cartesiano e testar suas respostas.

a. $\begin{bmatrix} \cos 90° & -\text{sen } 90° \\ \text{sen } 90° & \cos 90° \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

b. $\begin{bmatrix} \text{sen } 90° & \cos 90° \\ \cos 90° & -\text{sen } 90° \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

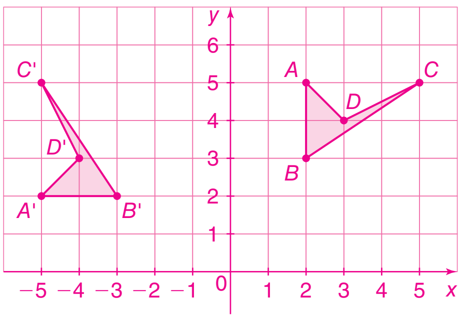
c. $\begin{bmatrix} \cos 180° & \text{sen } 180° \\ \text{sen } 180° & -\cos 180° \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

d. $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos 60° & -\text{sen } 60° \\ \text{sen } 60° & \cos 60° \end{bmatrix}$

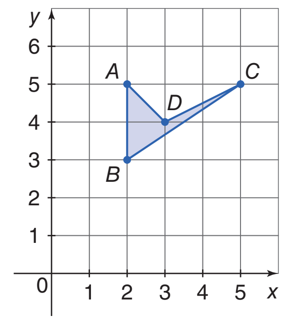
23. a. Rotação de 90° no sentido anti-horário.
23. b. Reflexão em torno do eixo *x*.
23. c. Reflexão em torno do eixo *y*.
23. d. A multiplicação entre essas matrizes não está definida, assim, não pode ser associada a nenhuma transformação geométrica.

24. Em um plano cartesiano ou em *software* de Geometria dinâmica, represente o quadrilátero $ABCD$ como indicado na figura a seguir. Depois, faça o que se pede em cada item.

24. a.



ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA



ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

a. Em cada ponto $P = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ da figura, aplique a transformação geométrica definida por $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ e os represente no plano cartesiano.

b. Qual é a transformação geométrica aplicada?

24. b. Rotação de 90° no sentido horário em torno da origem.

25. Elabore um problema envolvendo transformações geométricas e operações com matrizes cuja resposta seja o ponto $P = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix}$. Depois, troque o problema elaborado com um colega para que um resolva o problema elaborado pelo outro. Por fim, analisem e discutam as resoluções. **25.** Resposta pessoal.

ANÁLISE DA RESOLUÇÃO

Um estudante resolveu o exercício conforme a reprodução a seguir. Um erro foi cometido. Apontem o erro e refaçam a resolução no caderno, corrigindo-a.

Exercício

Obtenha todas as matrizes X, com $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix}$ e $\{a, b, c\} \subset \mathbb{R}$, tal que $X^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Resolução

$$X^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab \\ ac & bc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{cases} a^2 + bc = 0 & (1) \\ ab = 0 & (2) \\ ac = 0 & (3) \\ bc = 0 & (4) \end{cases}$$

Substituindo (4) em (1): $a^2 + 0 = 0 \Rightarrow a = 0$ (5)

Substituindo (5) em (2) e (3): $0 \cdot b = 0$ e $0 \cdot c = 0$

Essas equações são satisfeitas para quaisquer valores de b e c.

Logo, todas as matrizes X são da forma:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix}, \text{ para quaisquer números reais } b \text{ e } c.$$

Análise da resolução:
O estudante esqueceu de considerar a equação (4) do sistema: $bc = 0$.

Por essa equação, concluímos que b e c não podem ser simultaneamente não nulos.

Por exemplo, para $b = 5$ e $c = 2$, temos a matriz:
$X = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Calculando X^2, temos:
$X^2 = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$;
portanto, $X^2 \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Resolução correta:
Todas as matrizes X são da forma:
$X = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ou $X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}$, com $\{b, c\} \subset \mathbb{R}$.

Aproveite alguns dos **Exercícios complementares** como instrumento de avaliação. Uma maneira é organizar os estudantes em pequenos grupos a fim de que resolvam alguns desses exercícios de maneira colaborativa.

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

Faça os exercícios no caderno.

1. Um biólogo comparou, durante os três primeiros dias do mês de julho, o crescimento populacional de duas culturas de bactérias, as quais denominou cultura 1 e cultura 2. Após esse estudo, o cientista construiu a tabela:

$$A = \begin{pmatrix} 5 \cdot 10^9 & 5{,}2 \cdot 10^9 & 5{,}408 \cdot 10^9 \\ 8 \cdot 10^6 & 8{,}4 \cdot 10^6 & 8{,}904 \cdot 10^6 \end{pmatrix},$$

em que cada elemento a_{ij} é o número de indivíduos da cultura i no dia j do mês de julho.

STEVE GSCHMEISSNER/SCIENCE PHOTO LIBRARY/FOTOARENA

Bactéria *Escherichia coli*. Imagem obtida por microscopia eletrônica de varredura, colorizada artificialmente e ampliada, aproximadamente, 4.100 vezes.

a. Qual era a população de bactérias da cultura 1 no dia 2 de julho? **1. a.** $5{,}2 \cdot 10^9$

b. Qual foi a porcentagem de aumento da população da cultura 2 do dia 1º para o dia 2 de julho? **1. b.** 5%

2. Para a construção da matriz a seguir, considerando os dados da PNAD Contínua, indicamos:

- por 1, 2 e 3 as três classes de idade: 0 a 29 anos, 30 a 59 anos e 60 anos ou mais, respectivamente;
- por 1, 2 e 3, os anos de 2012, 2020 e 2021, respectivamente.

Assim, cada elemento a_{ij} da matriz representa o percentual da população residente no Brasil com idade na classe i no ano j. Por exemplo o elemento $a_{13} = 43{,}9\%$ representa o percentual da população residente no Brasil da classe de 0 a 29 anos, no ano 2021.

$$A = \begin{pmatrix} 49{,}9\% & 44{,}5\% & 43{,}9\% \\ 38{,}8\% & 41{,}3\% & 41{,}4\% \\ 11{,}3\% & 14{,}3\% & 14{,}7\% \end{pmatrix}$$

De acordo com essas informações, faça o que se pede.

a. Construa um gráfico estatístico, comparativo de linhas, que represente os dados dessa matriz.

b. De 2012 a 2021, a população brasileira total residente no Brasil cresceu 7,6%, atingindo 212,7 milhões de habitantes. Qual era a população brasileira da classe de 0 a 29 anos, residente no Brasil em 2012?

2. c. Resposta pessoal.

c. Observe que o percentual da classe de pessoas com 60 anos ou mais, aumentou 3,4% de 2012 a 2021 com tendência de alta. Pesquise, em fontes confiáveis, as consequências sociais e econômicas do envelhecimento da população. Escreva um breve texto relatando os dados de suas pesquisas.

2. a. Resposta no final do livro.
2. b. Aproximadamente 98,7 milhões de pessoas.

3. (Enem) A Transferência Eletrônica Disponível (TED) é uma transação financeira de valores entre diferentes bancos. Um economista decide analisar os valores enviados por meio de TEDs entre 5 bancos (1, 2, 3, 4, 5) durante um mês. Para isso, ele dispõe esses valores em uma matriz $A = [a_{ij}]$, em que $1 \leqslant i \leqslant 5$ e $1 \leqslant j \leqslant 5$, e o elemento a_{ij} correspondente ao total proveniente das operações feitas via TED, em milhão de real, transferidos do banco i para o banco j durante o mês. Observe que os elementos $a_{ii} = 0$, uma vez que TED é uma transferência entre bancos distintos. Esta é a matriz obtida para essa análise:

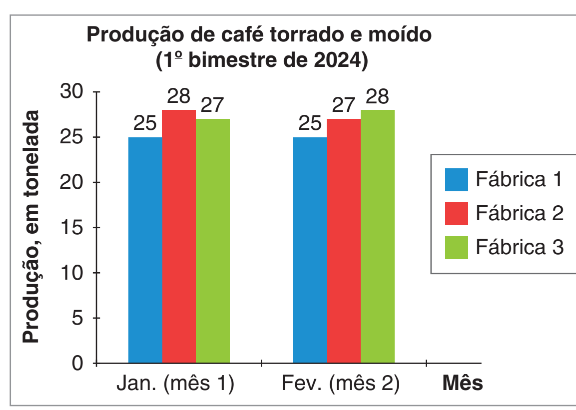
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Com base nessas informações, o banco que transferiu a maior quantia via TED é o banco

a. 1
b. 2
c. 3
d. 4
e. 5

3. alternativa **a**

4. Uma indústria de torrefação e moagem de café é formada por três fábricas numeradas por 1, 2 e 3. O gráfico a seguir mostra a produção de cada fábrica, em tonelada de café moído, no primeiro bimestre de 2024.



ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

Elaborado para fins didáticos.

De acordo com esse gráfico, faça o que se pede.

a. Construa a matriz $A = (a_{ij})_{3 \times 2}$, em que a_{ij} represente a produção, em tonelada, da indústria i no mês j do primeiro bimestre de 2024.

b. Na matriz $B = (b_{ij})_{3 \times 2}$, a seguir, cada elemento b_{ij} representa a produção, em tonelada, da indústria i no mês j do primeiro bimestre de 2025.

$$B = \begin{bmatrix} 27 & 28 \\ 29 & 28 \\ 29 & 31 \end{bmatrix}$$

4. a. $A = \begin{bmatrix} 25 & 25 \\ 28 & 27 \\ 27 & 28 \end{bmatrix}$

4. b. $C = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

Obtenha a matriz $C = B - A$, em que A é a matriz obtida no item **a**.

c. Sendo $C = (c_{ij})_{3 \times 2}$ a matriz obtida no item **b**, qual é o significado de cada elemento c_{ij}?

d. Qual o crescimento percentual da produção da fábrica 1 no mês de janeiro de 2025 em relação ao mês de janeiro de 2024? **4. d.** 8%

e. Qual o crescimento percentual da produção da fábrica 1 no primeiro bimestre de 2025 em relação ao primeiro bimestre de 2024? **4. e.** 10%

f. Qual o crescimento percentual da produção da indústria no primeiro bimestre de 2025 em relação ao primeiro bimestre de 2024? **4. f.** 7,5%

5. Duas matrizes A e B **comutam** na multiplicação se, e somente se, $A \cdot B = B \cdot A$. Considerando essa definição, faça o que se pede.

a. Verifique se as matrizes $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ comutam na multiplicação. **5. a.** comutam

b. Sabendo que as matrizes $C = \begin{pmatrix} x & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix}$ e $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -x & 4 \end{pmatrix}$ comutam na multiplicação, determine o número real x. **5. b.** $x = 2$

6. (UFV-MG) Seja a matriz $M = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

a. Determine M^2. **6. a.** $M^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$

b. Determine M^{17}. **6. b.** $M^{17} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = M$

Nota: $M^2 = M \cdot M$ e $M^{17} = \underbrace{M \cdot M \cdot M \cdot \ldots \cdot M}_{17 \text{ fatores}}$.

7. (UEL-PR) Uma nutricionista recomendou aos atletas de um time de futebol a ingestão de uma quantidade mínima de certos alimentos (fruta, leite e cereais) necessária para uma alimentação sadia.

ZZCAPTURE/ISTOCK/GETTY IMAGES

A matriz D fornece a quantidade diária mínima (em grama) daqueles alimentos.

A matriz M fornece a quantidade (em grama) de proteínas, gorduras e carboidratos fornecida por grama ingerido dos alimentos citados.

$$D = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 200 \\ 300 \\ 600 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \text{fruta} \\ \text{leite} \\ \text{cereais} \end{array}$$

$$M = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{fruta} & \text{leite} & \text{cereais} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0{,}006 & 0{,}033 & 0{,}108 \\ 0{,}001 & 0{,}035 & 0{,}018 \\ 0{,}084 & 0{,}052 & 0631 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \text{proteínas} \\ \text{gorduras} \\ \text{carboidratos} \end{array}$$

A matriz que mostra a quantidade diária mínima (em grama) de proteínas, gorduras e carboidratos fornecida pela ingestão daqueles alimentos é: **7.** alternativa **e**

a. $\begin{bmatrix} 18{,}20 \\ 36{,}30 \\ 454{,}20 \end{bmatrix}$

b. $\begin{bmatrix} 29{,}70 \\ 16{,}20 \\ 460{,}20 \end{bmatrix}$

c. $\begin{bmatrix} 48{,}30 \\ 36{,}00 \\ 432{,}40 \end{bmatrix}$

d. $\begin{bmatrix} 51{,}90 \\ 48{,}30 \\ 405{,}60 \end{bmatrix}$

e. $\begin{bmatrix} 75{,}90 \\ 21{,}50 \\ 411{,}00 \end{bmatrix}$

8. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$

9. b. Quantidade, em quilograma, de fertilizante Z usado nas plantações de milho, soja e feijão na região Q.

8. Uma importante aplicação das matrizes é equacionar problemas com duas ou mais incógnitas. Por exemplo, considere que, em um supermercado, o valor gasto na compra de 3 kg de feijão e 5 kg de arroz seja R$ 65,00 e que o valor gasto na compra de 1 kg de feijão e 1 kg de arroz seja R$ 16,60. Para determinar os preços x e y do quilograma de feijão e de arroz, respectivamente, podemos equacionar esse problema por meio do sistema de equações:

$$\begin{cases} 3x + 5y = 65{,}00 \\ x + y = 16{,}60 \end{cases}$$

De acordo com a definição de multiplicação de matrizes, esse sistema pode ser representado pela seguinte equação matricial:

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 65{,}00 \\ 16{,}60 \end{pmatrix}$$

Dessa forma, equacionamos matricialmente o problema.

Agora, junte-se a um colega e apliquem essa ideia no problema a seguir.

Em um campeonato de futebol, três atacantes, A, B e C, de uma equipe marcaram juntos 26 gols. O atacante B marcou o dobro do número de gols marcados pelo atacante C, e A marcou 4 gols a menos que B. Indicando por a, b e c o número de gols marcados por A, B e C, respectivamente, equacionem matricialmente esse problema.

9. (UFMG) Milho, soja e feijão foram plantados nas regiões P e Q com ajuda dos fertilizantes X, Y e Z. A matriz A indica a área plantada de cada cultura, em hectare, por região:

9. a. $C = \begin{bmatrix} 1.400 & 1.800 & 1.750 \\ 1.450 & 1.600 & 1.700 \end{bmatrix}$

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{milho} & \text{soja} & \text{feijão} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 50 & 20 & 20 \\ 40 & 10 & 30 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \text{P} \\ \text{Q} \end{array}$$

4. c. Cada elemento c_{ij} da matriz C, obtida no item **b**, representa o crescimento da produção, em tonelada, da fábrica i no mês j do primeiro bimestre de 2025, em relação à produção dessa fábrica no mês j do primeiro bimestre de 2024.

A matriz B indica a massa usada de cada fertilizante, em quilograma, por hectare, em cada cultura:

$$B = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} X & Y & Z \end{array} \\ \begin{bmatrix} 10 & 20 & 15 \\ 15 & 20 & 20 \\ 30 & 20 & 30 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \text{milho} \\ \text{soja} \\ \text{feijão} \end{array}$$

a. Calcule a matriz $C = AB$.

b. Explique o significado de c_{23}, o elemento da 2ª linha e 3ª coluna da matriz C.

10. Ao aplicar a transformação $\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ em todos os pontos da forma $P = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ de um polígono A, é verdade que o polígono A' obtido:

a. será uma reflexão do polígono A em torno da reta vertical $x = 0$.

b. será uma reflexão do polígono A em torno da reta vertical $x = -2$.

c. será uma translação do polígono A na vertical para cima.

d. será uma translação do polígono A na horizontal para a esquerda.

e. não será translação, reflexão ou rotação do polígono A. **10.** alternativa **e**

VERIFIQUE O QUE APRENDEU NO CAPÍTULO 3

Além do processo de avaliação promovido pelo professor, é importante que você, estudante, realize uma autoavaliação. O objetivo desse instrumento é mensurar seu nível de aprendizagem em relação ao assunto desenvolvido no capítulo. Para ajudá-lo nessa tarefa, apresentamos as seguintes questões.

Na seção **Verifique o que aprendeu no Capítulo 3,** após resolverem as atividades propostas, possibilite aos estudantes compartilharem com os colegas as respostas.

1. Determine as matrizes X e Y tais que: **1.** $X = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$ e $Y = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ -5 & -1 \end{bmatrix}$

$X + Y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 4 \end{bmatrix}$ e $X - Y = \begin{bmatrix} 2 & -7 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$

2. Uma indústria de televisores tem duas filiais, A e B. Cada uma delas produz o modelo 1 e o modelo 2 de televisor. As produções dessas filiais nos três primeiros dias de março são representadas pelas matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} 49 & 60 & 70 \\ 90 & 48 & 73 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 76 & 80 & 45 \\ 93 & 60 & 50 \end{pmatrix},$$

Em que:

- cada elemento a_{ij} da matriz A representa o número de unidades do modelo i fabricadas pela filial A no dia j;
- cada elemento b_{ij} da matriz B representa o número de unidades do modelo i fabricadas pela filial B no dia j.

a. Quantas unidades do modelo 2 foram fabricadas no dia 3 de março pela filial A? **2. a.** 73 unidades

b. Quantas unidades do modelo 1 foram fabricadas no dia 2 de março pela filial B? **2. b.** 80 unidades

c. Para o período considerado, construa uma matriz que descreva, dia a dia, a produção de cada modelo nas duas filiais juntas. **2. c.** $A + B = \begin{pmatrix} 125 & 140 & 115 \\ 183 & 108 & 123 \end{pmatrix}$

d. Para o período considerado, construa uma matriz que compare o desempenho da produção de cada modelo pela filial A com a da filial B. **2. d.** $A - B = \begin{pmatrix} -27 & -20 & 25 \\ -3 & -12 & 23 \end{pmatrix}$

e. Se a meta dessa indústria é dobrar a produção diária de cada modelo nos três primeiros dias de março do ano seguinte, qual é a matriz P que representa essa meta?

2. e. $P = 2(A + B) = \begin{pmatrix} 250 & 280 & 230 \\ 366 & 216 & 246 \end{pmatrix}$

3. (**UEL-PR**) Uma das formas de se enviar uma mensagem secreta é por meio de códigos matemáticos, seguindo os passos:

1. Tanto o destinatário quanto o remetente possuem uma matriz chave C;
2. O destinatário recebe do remetente uma matriz P, tal que $MC = P$, onde M é a matriz mensagem a ser decodificada;
3. Cada número da matriz M corresponde a uma letra do alfabeto: $1 = a$, $2 = b$, $3 = c$, ..., $23 = z$;
4. Consideremos o alfabeto com 23 letras, excluindo as letras, **k**, **w** e **y**.
5. O número zero corresponde ao ponto de exclamação.
6. A mensagem é lida, encontrando a matriz M, fazendo correspondência número/letra e ordenando as letras por linhas da matriz conforme segue:

$m_{11}m_{12}m_{13}m_{21}m_{22}m_{23}m_{31}m_{32}m_{33}$

Considere as matrizes:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } P = \begin{pmatrix} 2 & -10 & 1 \\ 18 & 38 & 17 \\ 19 & 14 & 0 \end{pmatrix}$$

Com base nos conhecimentos e nas informações descritas, assinale a alternativa que apresenta a mensagem que foi enviada por meio da matriz M. **3.** alternativa **a**

a. Boasorte!
b. Boaprova!
c. Boatarde!
d. Ajudeme!
e. Socorro!

Ferramenta de estudo

Ao término da resolução das questões, você deve copiar no caderno a ficha a seguir, que lhe fornecerá uma visão geral sobre o seu desempenho neste capítulo. Você deve assinalar com um X em cada célula se a resposta for "sim".

A ficha de autoavaliação é apresentada neste momento, mas você pode copiá-la e preenchê-la sempre que considerar necessário verificar sua aprendizagem, adequando o número de colunas ao número de exercícios.

Se teve dificuldades ou não resolveu algum exercício, retome os conteúdos abordados no capítulo. Após algumas tentativas, anote as dúvidas e converse com um colega que possa ajudá-lo. Se mesmo assim a dúvida persistir, pergunte ao professor na aula seguinte. Gerencie bem seu tempo de estudo em casa e estabeleça metas diárias alcançáveis, planejando seus estudos, passo a passo.

Ficha de Autoavaliação

Sobre o exercício...	1	2	3
Li, compreendi o texto, identifiquei os dados principais do problema e consegui resolvê-lo.			
Li, compreendi o texto, identifiquei os dados principais do problema, mas não consegui resolvê-lo sozinho. Pedi ajuda.			
Li, compreendi o texto, identifiquei os dados principais do problema, mas não consegui resolvê-lo sozinho. Não pedi ajuda. Até agora não sei resolvê-lo.			
Tive dificuldade para compreender o texto do problema e não soube relacionar os dados. Pedi ajuda.			
Tive dificuldade para compreender o texto do problema e não soube relacionar os dados. Não pedi ajuda. Até agora não sei resolvê-lo.			
Não consegui resolvê-lo.			

MODELO

CAPÍTULO 4

Sistemas lineares e determinantes

Investir no mercado financeiro pode parecer desafiador, mas estudando conceitos básicos do mercado financeiro e dos investimentos, é possível começar de um jeito direto e descomplicado. Existem muitas maneiras de investir, das mais acessíveis às mais sofisticadas, e conhecê-las para dar os primeiros passos pode ser importante para ter uma vida financeira saudável e confortável no futuro.

Antes de começar, é importante conhecer o tipo de investimento em que pretende aplicar o seu dinheiro, pois existem diversos modelos, cada um com características específicas, e a maioria deles são classificados como investimentos de renda fixa e renda variável. Além disso, a escolha de retorno do investimento também se deve levar em consideração, sendo necessário escolher entre os investimentos de curto, médio ou longo prazo.

BEAUTRIUM/SHUTTERSTOCK

Além da teoria

Além da teoria: Respostas pessoais.

1. Você conhece algum outro modelo de investimento?
2. Na renda fixa, o cálculo de remuneração é definido no início da aplicação, sendo possível saber quanto será seu rendimento no final de determinado tempo; por isso, este investimento é considerado uma aplicação segura. Já na renda variável não há como prever o retorno no momento do investimento, pois a remuneração varia de acordo com as condições do mercado; por isso, é considerada uma aplicação de risco. Sabendo disso, em qual tipo de renda você investiria?
3. A poupança é um modelo de investimento, apesar de muita gente não a considerar dessa forma. Ela é uma aplicação com rendimento associado à variação da taxa Selic. Pesquise a taxa Selic e como ela afeta a sociedade.

Antes de iniciar o assunto, pergunte: “Provavelmente você já ouviu falar de vários tipos de sistema, por exemplo, o sistema solar, o sistema respiratório e o sistema operacional de um *smartphone*. Qual é o significado da palavra “sistema” nesses contextos? (Sistema é um todo cujas partes se inter-relacionam.)”. A situação da introdução (aplicação financeira) encaminha às equações a seguir. Saliente que essas equações se inter-relacionam por apresentarem as mesmas variáveis. Essa inter-relação formando um todo constitui um sistema de equações.

1. Os sistemas de equações no dia a dia

Em muitas situações do nosso cotidiano ou do universo científico, é comum depararmos com problemas matemáticos que apresentem dois ou mais valores desconhecidos; esses valores são chamados de **incógnitas**. Uma maneira de tentar descobrir os valores das incógnitas é formar equações que as relacionem.

As equações necessárias à resolução de um problema são interdependentes, isto é, o valor de cada incógnita, caso exista, é o mesmo para todas as equações. Por causa dessa inter-relação, esse conjunto de equações é chamado de **sistema de equações**. Como exemplo, acompanhe a situação a seguir.


THODONAL88/SHUTTERSTOCK

Em um mesmo instante, Patrícia aplicou R$ 10.000,00, distribuídos em dois fundos de investimento, A e B. Após um ano, em que Patrícia não fez nenhum novo investimento nem resgate, o saldo bruto acumulado nas duas aplicações juntas totalizavam R$ 10.845,00. Dado que, nesse ano, os rendimentos brutos dos fundos A e B foram de 8% e 9%, respectivamente, calcule a quantia que Patrícia aplicou em cada um deles.

Para resolver esse problema, vamos indicar por a e b as quantias, em real, aplicadas nos fundos A e B, respectivamente. Assim, equacionando os dados, formamos o sistema:

$$\begin{cases} a + b = 10.000 \\ 1{,}08a + 1{,}09b = 10.845 \end{cases}$$

Isolando a incógnita a na primeira equação, obtemos:

$$\begin{cases} a = 10.000 - b & (1) \\ 1{,}08a + 1{,}09b = 10.845 & (2) \end{cases}$$

Substituindo (1) em (2):

$$1{,}08(10.000 - b) + 1{,}09b = 10.845 \Rightarrow b = 4.500$$

Substituindo b por 4.500 em (1), obtemos: $a = 5.500$
Concluímos, então, que Patrícia aplicou R$ 5.500,00 no fundo A e R$ 4.500,00 no fundo B.

2. Equação linear

No problema anterior, os valores desconhecidos foram obtidos por meio do sistema:

$$\begin{cases} a + b = 10.000 \\ 1{,}08a + 1{,}09b = 10.845 \end{cases}$$

As equações que compõem esse sistema são do 1º grau; por isso, são chamadas de **equações lineares**. Por exemplo, a equação $1{,}08a + 1{,}09b = 10.845$ é linear nas incógnitas a e b, em que 1,08 e 1,09 são os coeficientes das incógnitas e 10.845 é o termo independente da equação.

Generalizando, toda equação do 1º grau é linear e toda equação com coeficientes das incógnitas nulos também é linear.

Chama-se **equação linear** nas incógnitas $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$, com n natural, toda equação que pode ser apresentada na forma:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + ... + a_nx_n = b,$$

em que $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ são constantes reais chamadas de **coeficientes** das incógnitas e b é uma constante real chamada de **termo independente** da equação.

Exemplos

a. A equação $5x + 6y = 7$ é linear. Nessa equação:
- x e y são as incógnitas;
- 5 e 6 são os coeficientes das incógnitas x e y, respectivamente;
- 7 é o termo independente.

b. A equação $0x + 0y + 0z = 0$ é linear. Nessa equação:
- x, y e z são as incógnitas;
- 0, 0 e 0 são os coeficientes das incógnitas x, y e z;
- 0 é o termo independente.

c. A equação $0x + 0y + 0t + 0z = 3$ é linear. Nela:
- x, y, t e z são as incógnitas;
- 0, 0, 0 e 0 são os coeficientes das incógnitas x, y, t e z;
- 3 é o termo independente.

Reflexão

Com o que foi apresentado até o momento, a equação $x + 2yz = 5$ é linear?

Contraexemplos (equações não lineares)

a. $5x^2 + 3y = 1$ não é equação linear, pois é do 2º grau em relação a x.

b. $\frac{1}{x} + y = 2$ não é equação linear, pois o expoente de x é -1, isto é: $x^{-1} + y = 2$

Reflexão: Não, pois o termo $2yz$ possui mais de uma incógnita; e, portanto, é do segundo grau. O grau de um monômio é a soma dos expoentes de suas variáveis.

Solução de uma equação linear

Note que, atribuindo os valores 3 e -2, respectivamente, às variáveis x e y da equação $5x + 4y = 7$, obtemos a sentença verdadeira:

$$5 \cdot 3 + 4 \cdot (-2) = 7$$

Por isso, dizemos que o par ordenado $(3, -2)$ é uma solução dessa equação.

Chama-se **solução** da equação linear $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + ... + a_nx_n = b$ toda sequência de n elementos (ênupla) de números $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_n)$ tal que a sentença $a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3 + ... + a_n\alpha_n = b$ seja verdadeira.

Caso não exista ênupla nessas condições, dizemos que a equação é **impossível**.

Exemplos

a. Uma solução da equação linear $4x + 2y = 14$ é o par ordenado $(1, 5)$, pois a sentença $4 \cdot 1 + 2 \cdot 5 = 14$ é verdadeira.

b. Uma solução da equação linear $2x - 3y + z = 7$ é o terno ordenado $(2, 0, 3)$, pois a sentença $2 \cdot 2 - 3 \cdot 0 + 3 = 7$ é verdadeira.

Notas:

1. A menos que se especifique o contrário, vamos apresentar cada solução de uma equação linear obedecendo à ordem alfabética das variáveis, isto é, (x, y), (x, y, z), (a, b, c) etc.
2. Nem sempre existe solução para uma equação linear; por exemplo, a equação $0x + 0y = 3$ não tem solução. Assim, essa equação é impossível.

Equação linear homogênea

Toda equação linear cujo termo independente é zero é chamada de **equação linear homogênea**.

Exemplos

a. $5x + 4y = 0$

b. $3x + 7y + z = 0$

Propriedade

Toda equação linear homogênea $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + ... + a_nx_n = 0$ admite como solução a ênupla (0, 0, 0, ..., 0), chamada de **solução trivial** da equação homogênea.

A solução trivial de uma equação linear homogênea também pode ser chamada de solução nula ou solução imprópria.

Exemplos

a. A solução trivial da equação $2x + 9y = 0$ é o par ordenado (0, 0).

b. A solução trivial da equação $4x - 3y + z = 0$ é o terno ordenado (0, 0, 0).

EXERCÍCIO RESOLVIDO

1. Uma papelaria vende apenas três tipos de caneta esferográfica, *A*, *B* e *C*, aos preços unitários de R$ 1,00, R$ 2,00 e R$ 3,00, respectivamente. Uma pessoa pretende gastar R$ 12,00 nessa papelaria, comprando apenas canetas esferográficas, pelo menos uma de cada tipo. Quantas são as possibilidades de compra?

Resolução

Indicando por *a*, *b* e *c* a quantidade de canetas adquiridas dos tipos *A*, *B* e *C*, respectivamente, e considerando o preço unitário de cada tipo, temos $a + 2b + 3c = 12$; portanto:

$$a = 12 - 2b - 3c$$

Como *a*, *b* e *c* são números naturais não nulos, deduzimos que:

- para $b = 1$, o maior valor possível de *c* é 3, pois, se *c* fosse maior que 3, teríamos como valor de *a* um número negativo, o que não convém;
- para $b = 2$, o maior valor possível de *c* é 2;
- para $b = 3$, o único valor possível de *c* é 1;
- para $b = 4$, o único valor possível de *c* é 1.

Note que 4 é o máximo valor possível para *b*, pois, lembrando que *a*, *b* e *c* devem ser naturais não nulos, se tivéssemos $b > 4$, teríamos $a < 0$, para qualquer natural não nulo *c*, o que não convém. Logo, as possibilidades de compra são:

Possibilidade de compra

b	*c*	*a*
1	1	7
1	2	4
1	3	1
2	1	5
2	2	2
3	1	3
4	1	1

Concluímos, então, que há 7 possibilidades de compra.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Faça os exercícios no caderno.

1. Considerando a equação $4x + 3y = 12$, responda às questões.

a. Qual é o valor de *y* para $x = 3$? **1. a.** 0

b. Qual é o valor de *y* para $x = -7$? **1. b.** $\frac{40}{3}$

c. Sempre existirá um valor de *y* para qualquer valor atribuído a *x*? **1. c.** sim

d. Quantos pares ordenados de números reais são soluções da equação $4x + 3y = 12$? **1. d.** infinitos

2. Um consumidor comprou 15 kg de arroz em pacotes de 1 kg, 2 kg e 5 kg, com pelo menos um pacote de cada tipo. Junte-se a um colega, e indiquem, respectivamente, por *x*, *y* e *z* os números de pacotes de 1 kg, 2 kg e 5 kg adquiridos por esse consumidor. Em seguida, façam o que se pede.

a. Elaborem uma equação que relacione *x*, *y* e *z* com a massa de arroz, em quilograma, comprada pelo consumidor. **2. a.** $x + 2y + 5z = 15$

b. No contexto desse enunciado, x, y e z só podem assumir valores naturais não nulos, pois representam quantidades não nulas de pacotes. Nesse contexto, deem três soluções (x, y, z) para a equação obtida no item **a**. **2. b.** (3, 1, 2); (8, 1, 1); (4, 3, 1)

c. Nesse contexto, determinem o número de soluções (x, y, z) da equação obtida no item **a**. **2. c.** 6 soluções

d. Determinem o maior número possível de pacotes de 2 kg que o consumidor pode ter adquirido. **2. d.** 4 pacotes

3. Fazendo um balanço sobre as vendas de Natal, um comerciante constatou que nos dias 23 e 24 de dezembro foram vendidos x e y relógios, respectivamente, com $x \neq 0$ e $y \neq 0$. No dia 23, o preço médio por relógio foi de R$ 240,00, e no dia 24 foi de R$ 220,00. Se o total arrecadado com essas vendas nos dois dias foi de R$ 6.240,00, quantos relógios podem ter sido vendidos no dia 23? **3.** 4 ou 15 relógios

4. Elabore um problema que envolva equação linear cujos coeficientes das duas incógnitas são 3 e 1. Em seguida, troque o problema elaborado com um colega para que um resolva o problema elaborado pelo outro. Por fim, analisem e conversem sobre as resoluções.
4. Resposta pessoal.

Para retomar os conteúdos estudados, resolva o exercício complementar 1.

3. Sistema linear

Uma veterinária prescreveu uma dieta segundo a qual o cão deve consumir diariamente o total de 35 g de proteínas, 242 g de carboidratos e 26 g de fibras alimentares. Como orientação, a médica sugeriu a mistura dos três tipos de complemento alimentar, A, B e C, apresentados na tabela a seguir com as respectivas massas desses nutrientes por grama.

Quantidade de nutrientes por grama para a mistura dos complementos alimentares *A*, *B* e *C*

Complementos alimentares	Proteínas	Carboidratos	Fibras alimentares
A	0,02 g	0,28 g	0,02 g
B	0,12 g	0,60 g	0,09 g
C	0,08 g	0,80 g	0,05 g

Elaborado para fins didáticos.

Tendo aceitado a sugestão da veterinária, a dona do cão deve calcular a massa de cada um dos complementos A, B e C que deve compor a mistura. Como isso pode ser feito?

Para relacionar os dados numéricos desse problema, vamos indicar por a, b e c, respectivamente, as massas, em grama, dos complementos A, B e C que devem compor a mistura, obtendo as seguintes equações:

$$\begin{cases} 0{,}02a + 0{,}12b + 0{,}08c = 35 \\ 0{,}28a + 0{,}60b + 0{,}80c = 242 \\ 0{,}02a + 0{,}09b + 0{,}05c = 26 \end{cases}$$

Por relacionarem as mesmas incógnitas, essas equações do 1º grau formam um **sistema de equações lineares** ou, simplesmente, um **sistema linear**.

Existem vários métodos de resolução de um sistema linear, entre os quais o **método do escalonamento**, que estudaremos adiante. Qualquer um deles nos permite concluir que $a = 150$, $b = 200$ e $c = 100$, ou seja, a mistura deve ser composta por 150 g do complemento alimentar A, 200 g de B e 100 g de C.

Observação

Equações simultâneas são equações que apresentam as mesmas incógnitas.

Um **sistema linear** de m equações e n incógnitas, com $m \geqslant 1$ e $n \geqslant 1$, é um conjunto de equações simultâneas na forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

em que:

- $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ são as incógnitas;
- a_{ij} são os coeficientes das incógnitas, com $1 \leqslant i \leqslant m$ e $1 \leqslant j \leqslant n$;
- b_i são os termos independentes das equações, com $1 \leqslant i \leqslant m$.

Observação

A última equação desse sistema deve ser entendida como: $0x + 2y + 4z = 12$

Exemplo

O sistema $\begin{cases} 3x + y + 2z = 3 \\ x + 5y + 3z = 29 \\ 2y + 4z = 12 \end{cases}$ é um sistema linear nas incógnitas x, y e z.

Solução de um sistema linear

Observação

Um sistema pode não ter solução. Nesse caso, o conjunto solução é vazio.

Chama-se **solução** de um sistema linear qualquer solução comum a todas as equações do sistema. O conjunto S formado por todas as soluções de um sistema linear é chamado de **conjunto solução** do sistema.

Exemplo

Considere o sistema linear: $\begin{cases} 3x + y + 2z = 3 \\ x + 5y + 3z = 29 \\ 2y + 4z = 12 \end{cases}$

Uma solução desse sistema é o terno ordenado $(-1, 6, 0)$, pois esse terno é solução comum a todas as equações do sistema, isto é, todas as sentenças são verdadeiras para esses valores das incógnitas. Observe:

$$\begin{cases} 3 \cdot (-1) + 6 + 2 \cdot 0 = 3 \\ -1 + 5 \cdot 6 + 3 \cdot 0 = 29 \\ 2 \cdot 6 + 4 \cdot 0 = 12 \end{cases}$$

Classificação de um sistema linear

Um sistema linear é classificado de acordo com o número de soluções que tem: sistema possível e determinado (SPD), sistema possível e indeterminado (SPI) ou sistema impossível (SI).

Sistema possível e determinado (SPD) é todo sistema linear que admite uma única solução.

Exemplo

O sistema linear $\begin{cases} x + y = 5 \\ y = 2 \end{cases}$ admite uma única solução, que é o par ordenado $(3, 2)$.

Por isso, é classificado como SPD (sistema possível e determinado).

Sistema possível e indeterminado (SPI) é todo sistema linear que admite mais de uma solução.

Exemplo

O sistema linear $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 4x + 2y = 10 \end{cases}$ admite mais de uma solução: (2, 1), (4, −3), (0, 5) etc.

Por isso, é classificado como SPI (sistema possível e indeterminado).

Sistema impossível (SI) é todo sistema linear que não admite solução.

Exemplo

O sistema linear $\begin{cases} x + y = 5 \\ x + y = 8 \end{cases}$ é impossível (SI), pois não existem dois números x e y cuja soma seja igual a 5 e também igual a 8.

Resumindo, temos:

- Sistema linear
  - Possível
    - Determinado (uma única solução)
    - Indeterminado (mais de uma solução)
  - Impossível (nenhuma solução)

Nota:
Há outra nomenclatura adotada nessa classificação: dizer que um sistema é possível equivale a dizer que o sistema é compatível; analogamente, dizer que o sistema é impossível equivale a dizer que o sistema é incompatível.

Observação
Prova-se que, se um sistema linear admite mais de uma solução, então ele admite infinitas soluções. Uma justificativa desse fato para um caso particular é apresentada no próximo tópico: "Interpretação gráfica de um sistema linear com duas equações e duas incógnitas".

Interpretação gráfica de um sistema linear com duas equações e duas incógnitas

Isolando a incógnita (ou variável) y nos sistemas lineares apresentados nos três exemplos anteriores, temos:

sistema 1: $\begin{cases} y = -x + 5 \\ y = 2 \end{cases}$ **sistema 2:** $\begin{cases} y = -2x + 5 \\ y = -2x + 5 \end{cases}$ **sistema 3:** $\begin{cases} y = -x + 5 \\ y = -x + 8 \end{cases}$

As equações desses sistemas podem ser associadas às funções. No primeiro sistema, temos uma função afim e uma função constante; nos demais sistemas temos funções afins. Portanto, em cada sistema as equações representam retas no plano cartesiano.

Note que:

- As retas a e b que representam as equações do sistema 1 são concorrentes, ou seja, têm um único ponto comum, que é (3, 2), conforme mostra a figura 1. Esse ponto é a única solução do sistema 1.

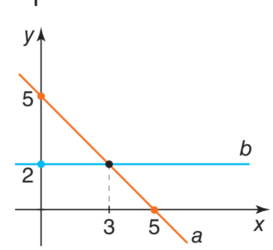


Figura 1

Um sistema com duas equações do 1º grau e duas incógnitas é possível e determinado se, e somente se, as retas representadas por suas equações forem concorrentes.

Observação
Nessas interpretações gráficas admitimos sistemas lineares com pelo menos um coeficiente não nulo em cada equação.

FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

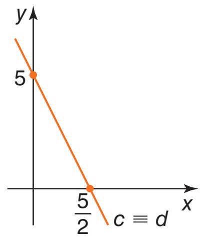


Figura 2

- As retas c e d que representam as equações do sistema 2 são coincidentes, ou seja, têm infinitos pontos comuns: todo ponto de c pertence a d e todo ponto de d pertence a c, conforme mostra a figura 2. Esses infinitos pontos são as soluções do sistema 2.

> Um sistema com duas equações do 1º grau e duas incógnitas é possível e indeterminado se, e somente se, as retas representadas por suas equações forem coincidentes.

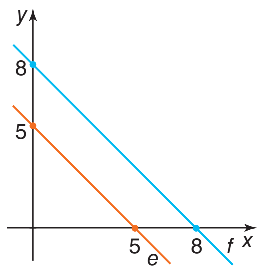


Figura 3

- As retas e e f que representam as equações do sistema 3 são paralelas distintas, ou seja, não têm ponto comum e são coplanares, conforme mostra a figura 3. Logo, o sistema 3 não tem solução.

> Um sistema com duas equações do 1º grau e duas incógnitas é impossível se, e somente se, as retas representadas por suas equações forem paralelas distintas.

Como duas retas do plano cartesiano têm um único ponto comum, ou têm infinitos pontos comuns, ou não têm ponto comum, podemos concluir que um sistema com duas equações do 1º grau e duas incógnitas tem uma única solução, ou infinitas soluções, ou não tem solução. Prova-se que essa conclusão pode ser generalizada para um sistema linear qualquer com n equações e m incógnitas.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Faça os exercícios no caderno.

5. Em relação ao sistema linear S: $\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ 2x + y - 3z = -5 \end{cases}$, classifique em verdadeira ou falsa cada uma das afirmações a seguir.

a. O terno (1, 2, 3) é solução de S. **5. a.** verdadeira

b. O terno (−9, 4, −3) é solução de S. **5. b.** verdadeira

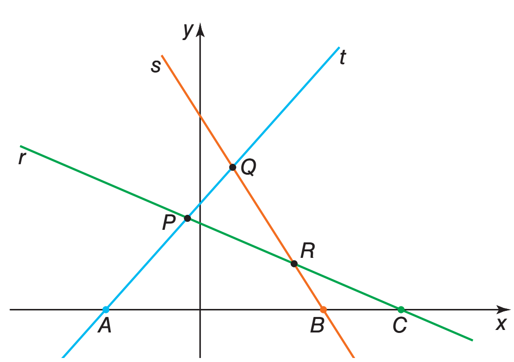
c. O terno (1, 0, −1) é solução de S. **5. c.** falsa

d. O terno $\left(\frac{28}{3}, \frac{1}{3}, 8\right)$ é solução de S. **5. d.** verdadeira

e. O sistema S é possível e determinado. **5. e.** falsa

f. O sistema S tem pelo menos uma solução da forma (3, 5, k), em que k é um número real. **5. f.** falsa

6. (Enem) Na figura estão representadas três retas no plano cartesiano, sendo P, Q e R os pontos de intersecções entre as retas, e A, B e C os pontos de intersecções dessas retas com o eixo x. **6.** alternativa **d**



Essa figura é a representação gráfica de um sistema linear de três equações e duas incógnitas que:

a. possui três soluções reais e distintas, representadas pelos pontos P, Q e R, pois eles indicam onde as retas se intersectam.

b. possui três soluções reais e distintas, representadas pelos pontos A, B e C, pois eles indicam onde as retas intersectam o eixo das abscissas.

c. possui infinitas soluções reais, pois as retas se intersectam em mais de um ponto.

d. não possui solução real, pois não há ponto que pertença simultaneamente às três retas.

e. possui uma única solução real, pois as retas possuem pontos em que se intersectam.

7. Sendo as retas r e s os respectivos gráficos das funções afins $y = ax + b$ e $y = cx + d$, de variáveis x e y, têm-se as seguintes propriedades:

- $a \neq c \Rightarrow r$ e s são concorrentes;
- $a = c$ e $b \neq d \Rightarrow r$ e s são paralelas distintas;
- $a = c$ e $b = d \Rightarrow r$ e s são paralelas coincidentes.

De acordo com essa informação, faça o que se pede em relação aos sistemas S_1, S_2 e S_3 apresentados.

S_1: $\begin{cases} 3x + 4y = 1 \\ 6x + 8y = 1 \end{cases}$

S_2: $\begin{cases} 5x + 2y = 3 \\ 7x + y = 1 \end{cases}$

$$S_3: \begin{cases} 4x + 2y = 7 \\ 12x + 6y = 21 \end{cases}$$

a. Em qual desses sistemas as equações representam retas concorrentes do plano cartesiano? **7. a.** S_2

b. Em qual desses sistemas as equações representam retas paralelas distintas do plano cartesiano? **7. b.** S_1

c. Em qual desses sistemas as equações representam retas paralelas coincidentes do plano cartesiano? **7. c.** S_3

d. Classifique cada um desses sistemas como possível e determinado (SPD), possível e indeterminado (SPI), ou impossível (SI). **7. d.** S_1: SI; S_2: SPD; S_3: SPI.

e. Determine o ponto (x, y) comum às retas que compõem o sistema classificado como SPD no item anterior. **7. e.** $\left(-\frac{1}{9}, \frac{16}{9}\right)$

Para retomar os conteúdos estudados, resolva os exercícios complementares 2 e 3.

Conectado **Conectado:** Resposta pessoal.

Usando um *software* de construção de gráficos e com o que foi estudado até o momento, construa duas retas para representar um sistema possível e determinado. Faça o mesmo para representar um sistema possível e indeterminado e um sistema impossível.

Com a atividade do boxe **Conectado**, auxilie os estudantes a comporem, utilizando as ferramentas do *software*, retas concorrentes, retas coincidentes e retas paralelas e a associar cada uma delas a um SPD, SPI e SI, respectivamente.

4. Resolução de um sistema linear

Resolver um sistema linear significa obter o conjunto S, chamado de **conjunto solução do sistema**, cujos elementos são todas as soluções do sistema. Entre os métodos existentes para a resolução de um sistema linear, estudaremos o escalonamento. Antes, porém, vamos definir sistema linear escalonado e aprender a resolvê-lo.

Observação

Neste tópico faremos um estudo geral da resolução de sistemas lineares, com qualquer número de equações e de incógnitas.

Sistema linear escalonado

Um sistema linear é dito **escalonado** (ou **na forma escalonada**) se, e somente se:

- todas as equações apresentam as incógnitas na mesma ordem;
- em cada equação existe pelo menos um coeficiente, ou o termo independente, não nulo;
- a partir da primeira equação do sistema, de cima para baixo, o número de coeficientes nulos que antecedem o primeiro número não nulo de cada equação aumenta de uma equação para a seguinte.

Exemplos

Os sistemas lineares a seguir estão na forma escalonada.

a. $\begin{cases} 2x + 3y - z = 2 \\ 0x + 5y + 4z = 8 \\ 0x + 0y + 3z = 6 \end{cases}$, que pode ser representado simplesmente por $\begin{cases} 2x + 3y - z = 2 \\ 5y + 4z = 8 \\ 3z = 6 \end{cases}$

b. $\begin{cases} x + 4y - 2t + z = 5 \\ 0x + 3y + t - 3z = 1 \\ 0x + 0y + 0t + 2z = 4 \end{cases}$ ou, simplesmente, $\begin{cases} x + 4y - 2t + z = 5 \\ 3y + t - 3z = 1 \\ 2z = 4 \end{cases}$

c. $\begin{cases} 4x + 2y = 3 \\ 0x - 5y = 1 \end{cases}$ ou, simplesmente, $\begin{cases} 4x + 2y = 3 \\ -5y = 1 \end{cases}$

d. $\begin{cases} 7x - 3y - z = 5 \\ 0x + 3y + z = 1 \\ 0x + 0y + 0z = 3 \end{cases}$ ou, simplesmente, $\begin{cases} 7x - 3y - z = 5 \\ 3y + z = 1 \\ 0z = 3 \end{cases}$

Contraexemplo (sistema não escalonado)

O sistema não está na forma escalonada, pois o número de coeficientes nulos que antecedem o primeiro número não nulo de cada equação não aumenta de uma equação para a seguinte (da 2ª para a 3ª).

$$\begin{cases} 3x + y + 5z = 2 \\ 0x + 2y - 2z = 1 \\ 0x + 4y + 2z = 3 \end{cases}$$

No trabalho com o escalonamento, podemos adotar a seguinte sequência:
(1) Definir sistema linear escalonado, mostrando como se resolve cada um dos três tipos;
(2) Definir sistemas lineares equivalentes;
(3) A partir de sistemas lineares com duas equações e duas incógnitas, apresentar as propriedades que transformam um sistema linear em um sistema linear equivalente na forma escalonada.

Resolução de um sistema linear escalonado

Existem apenas três tipos de sistema linear escalonado. A seguir, caracterizamos cada um deles e exemplificamos sua resolução.

1º tipo

Sistema linear escalonado com número de equações igual ao número de incógnitas, havendo em cada equação pelo menos uma incógnita com coeficiente não nulo.

Exemplo

$$\begin{cases} 4x + y + 3z = 5 & (1) \\ 5y - 2z = 4 & (2) \\ 3z = 9 & (3) \end{cases}$$

A maneira mais simples de resolver esse tipo de sistema é de baixo para cima, isto é:

- Determinamos o valor de z na equação (3): $3z = 9 \Rightarrow z = 3$
- Substituímos z por 3 na equação (2): $5y - 2 \cdot 3 = 4 \Rightarrow y = 2$
- Substituímos y por 2 e z por 3 na equação (1):

$$4x + 2 + 3 \cdot 3 = 5 \Rightarrow x = -\frac{3}{2}$$

Logo, o conjunto solução do sistema é $S = \left\{\left(-\frac{3}{2}, 2, 3\right)\right\}$.

Propriedade

Se um sistema linear escalonado tem o número de equações igual ao número de incógnitas e em cada equação há pelo menos uma incógnita com coeficiente não nulo, então o sistema é possível e determinado (SPD).

2º tipo

Sistema linear escalonado com o número de equações menor que o número de incógnitas, havendo em cada equação pelo menos uma incógnita com coeficiente não nulo.

Exemplo

$$\begin{cases} x - 3y + 2z = 1 \\ y - 4z = 2 \end{cases}$$

Todo sistema linear escalonado desse tipo admite pelo menos uma variável, que pode assumir qualquer valor real e, por isso, é chamada variável livre ou variável arbitrária do sistema. O número de variáveis livres desse tipo de sistema é a diferença entre o número de variáveis e o número de equações, nessa ordem.

Uma convenção, não obrigatória, é escolher como variável livre desse sistema a **última** variável de qualquer uma de suas equações, ou seja, a variável z. Para entender o significado do termo "livre" nesse contexto, vamos atribuir alguns valores reais à variável livre z desse sistema:

- Se fizermos $z = 1$, teremos:

$$\begin{cases} x - 3y + 2 \cdot 1 = 1 \\ y - 4 \cdot 1 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 3y = -1 & (1) \\ y = 6 & (2) \end{cases}$$

  Substituindo (2) em (1), obtemos:

$$x - 3 \cdot 6 = -1 \Rightarrow x = 17$$

  Assim, para $z = 1$, obtemos a solução (17, 6, 1).

- Se fizermos $z = 0$:

$$\begin{cases} x - 3y + 2 \cdot 0 = 1 \\ y - 4 \cdot 0 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 3y = 1 & (1) \\ y = 2 & (2) \end{cases}$$

  Substituindo (2) em (1), obtemos:

$$x - 3 \cdot 2 = 1 \Rightarrow x = 7$$

  Assim, para $z = 0$, obtemos a solução (7, 2, 0).

Observação

Neste exemplo, temos 3 variáveis e 2 equações; logo, o número de variáveis livres é dado por $3 - 2 = 1$.

Observamos que, para cada valor atribuído à variável livre, encontramos uma solução para o sistema; logo, podemos obter infinitas soluções, ou seja, o sistema é possível e indeterminado (SPI).

Para resolver o sistema, expressamos suas infinitas soluções em função da variável livre. Nesse caso, exibimos os valores de x e y em função de z:

$$\begin{cases} x - 3y + 2z = 1 \\ \quad\;\; y - 4z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 3y + 2z = 1 & (1) \\ \quad\;\; y = 2 + 4z & (2) \end{cases}$$

Substituindo (2) em (1):

$$x - 3(2 + 4z) + 2z = 1 \Rightarrow x - 6 - 12z + 2z = 1$$

$$\therefore x = 7 + 10z$$

Assim, o conjunto solução do sistema é:

$$S = \{(\underbrace{7 + 10z}_{x}, \underbrace{2 + 4z}_{y}, z), \text{ com } z \in \mathbb{R}\}$$

Propriedade

Se um sistema linear escalonado tem o número de equações menor que o número de incógnitas e em cada equação há pelo menos uma incógnita com coeficiente não nulo, então o sistema é possível e indeterminado (SPI).

Notas:

1. O número de variáveis livres de um sistema linear escalonado do 2º tipo é chamado de grau de indeterminação do sistema. Assim, o sistema do exemplo anterior tem grau de indeterminação 1.
2. A escolha da variável livre é puramente convencional. No sistema anterior, por exemplo, poderíamos ter escolhido y como variável livre e, nesse caso, o conjunto solução S seria:

$$S = \left\{\left(\frac{4 + 5y}{2}, y, \frac{y - 2}{4}\right), \text{ com } y \in \mathbb{R}\right\}$$

Poderíamos ainda escolher x como variável livre; nesse caso, teríamos:

$$S = \left\{\left(x, \frac{2x - 4}{5}, \frac{x - 7}{10}\right), \text{ com } x \in \mathbb{R}\right\}$$

É claro que, independentemente da variável (x, y ou z) escolhida como livre, os conjuntos solução do sistema anterior são iguais, isto é:

$$\left\{\left(x, \frac{2x - 4}{5}, \frac{x - 7}{10}\right), \text{ com } x \in \mathbb{R}\right\} = \left\{\left(\frac{4 + 5y}{2}, y, \frac{y - 2}{4}\right), \text{ com } y \in \mathbb{R}\right\} =$$

$$= \{(7 + 10z, 2 + 4z, z), \text{ com } z \in \mathbb{R}\}$$

3º tipo

Sistema linear escalonado em que uma das equações apresenta o termo independente não nulo e todas as incógnitas com coeficientes nulos.

Exemplo

$$\begin{cases} 2x - \;\; y + 3z = 15 \\ 0x + 3y - \;\; z = 7 \\ 0x + 0y + 0z = 3 \end{cases}$$

Observando que a última equação é impossível, pois não existe um terno de números (x, y, z) tal que $0x + 0y + 0z = 3$, concluímos que não existe uma solução comum às três equações do sistema. Portanto, o sistema é impossível.

Propriedade

Se em um sistema linear (escalonado ou não) uma das equações apresenta o termo independente não nulo e todas as incógnitas com coeficientes nulos, então o sistema é impossível (SI).

Reflexão

Explique como você classificaria o tipo de sistema linear escalonado a seguir.

$$\begin{cases} 3x + \;\; y - 3z = 12 \\ x + 0y + \;\; 3z = 6 \\ 0x + 0y + 0z = 0 \end{cases}$$

Reflexão: Como 2º tipo, sistema possível e indeterminado (SPI), apesar do sistema apresentar três equações e três incógnitas, é possível desconsiderar a última linha pois tanto seus coeficientes como o termo independente são zeros. Assim, o sistema pode ser escrito como:

$$\begin{cases} 3x + y - 3z = 12 \\ x + 0y + 3z = 6 \end{cases}$$

ANÁLISE DA RESOLUÇÃO

Um estudante resolveu o exercício conforme a reprodução a seguir. Um erro foi cometido. Em dupla, encontrem qual foi esse erro e discutam o que pode tê-lo causado. Refaçam a resolução no caderno e depois conversem com o professor e outros colegas para expor a estratégia de raciocínio usada por vocês.

KLAUS VEDFELT/DIGITALVISION/GETTY IMAGES

Exercício

Três jogadores, *A*, *B* e *C*, de uma equipe finalista de um campeonato de futebol disputam a artilharia da competição. Antes do último jogo, os três jogadores juntos haviam marcado 25 gols, e *A* tinha um gol a mais que *C*. Terminado o último jogo, a equipe desses jogadores venceu por 1 a 0, ocorrendo então empate na artilharia do campeonato. Pode-se afirmar que:

a. o jogador *A* foi um dos artilheiros.
b. o jogador *B* foi um dos artilheiros.
c. o jogador *C* foi um dos artilheiros.
d. certamente o jogador *A* não foi um dos artilheiros.
e. não é possível determinar nenhum dos artilheiros.

O estudante cometeu um erro ao admitir que a variável *b* pode assumir qualquer valor real. Como representa o número de gols, *b* deve ser um número natural.

Observando a forma geral dos termos ordenados, $\left\{\left(\frac{26-b}{2}, b, \frac{24-b}{2}\right)\right\}$, podemos restringir ainda mais os valores de *b*: $b \in \mathbb{N}$, $b \leqslant 24$ e *b* é par. Atribuindo a *b* esses possíveis valores, temos o quadro a seguir.

Atribuições de valores a *b*

b	$c = \frac{24-b}{2}$	$a = \frac{26-b}{2}$
0	12	13
2	11	12
4	10	11
6	9	10
8	8	9
10	7	8
12	6	7
14	5	6
16	4	5
18	3	4
20	2	3
22	1	2
24	0	1

Resolução

Sejam:

a: número de gols marcados pelo jogador A

b: número de gols marcados pelo jogador B

c: número de gols marcados pelo jogador C

Sem o último jogo, temos o sistema:

$$\begin{cases} a + b + c = 25 & (1) \\ a = c + 1 & (2) \end{cases}$$

Substituindo (2) em (1), temos:

$c + 1 + b + c = 25 \Rightarrow 2c = 24 - b$

$\therefore c = \frac{24 - b}{2} \quad (3)$

Substituindo (3) em (2), temos:

$a = \frac{24-b}{2} + 1 \quad \therefore a = \frac{26-b}{2}$

Assim, o conjunto solução do sistema é $S = \left\{\left(\frac{24-b}{2}, b, \frac{24-b}{2}\right), \text{com } b \in \mathbb{R}\right\}$

Como o sistema tem infinitas soluções, não é possível determinar nenhum dos artilheiros.

Alternativa e.

Observando o quadro, constatamos que, com apenas um gol marcado no último jogo, só poderia ocorrer empate na artilharia nas cinco primeiras linhas, e em qualquer uma delas o jogador *A* seria um dos artilheiros. Logo, a alternativa **a** é a correta.

8. b. SPI; $S = \{(7 - 18z;\ 1 - 3z;\ z)$, com $z \in \mathbb{R}\}$ **8. c.** SPI; $S = \left\{\left(\frac{y-7}{2}, y, 2\right)\text{, com } y \in \mathbb{R}\right\}$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Faça os exercícios no caderno.

8. Classifique cada um dos sistemas e dê seu conjunto solução.

a. $\begin{cases} x + 3y - 2z = -1 \\ 4y + 5z = 19 \\ 2z = 6 \end{cases}$ **8. a.** SPD; $S = \{(2, 1, 3)\}$

b. $\begin{cases} x - 5y + 3z = 2 \\ y + 3z = 1 \end{cases}$

c. $\begin{cases} 2x - y + 4z = 1 \\ 3z = 6 \end{cases}$

9. Junte-se a um colega para resolver este problema. Todos os 152 participantes de um congresso são professores de Matemática, Física ou Química. Cada um deles leciona apenas um desses componentes, e há pelo menos um professor de cada um. Se o número de professores de Física é o dobro do número de professores de Química, qual é o menor número possível de professores de Matemática que participam desse congresso? **9.** 2

Mentes brilhantes

Diofanto de Alexandria

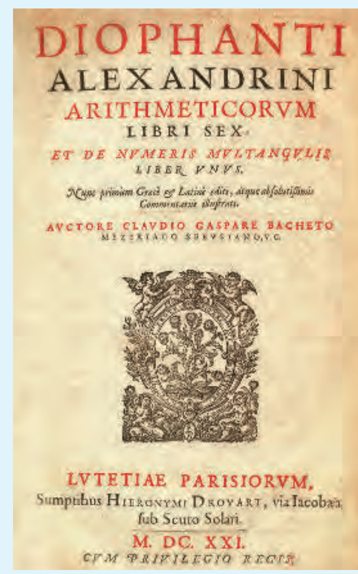
Nas ciências, costuma-se dizer que Diofanto está para a Aritmética assim como Euclides está para a Geometria. Essa comparação é suficiente para mostrar a dimensão da obra de Diofanto, matemático grego que viveu no século III a.C.

Sua obra deu um novo rumo à Álgebra, ao introduzir notações algébricas com símbolos e abreviações para indicar operações e quantidades desconhecidas. Anteriormente, os argumentos algébricos eram escritos em palavras, não em símbolos.

Grande parte das pesquisas de Diofanto foi dedicada à procura de soluções inteiras de equações não determinadas; por exemplo, $5x + 3y = 8$ (equação diofantina linear) e $x^2 + y^2 = z^2$ (equação diofantina quadrática).

Em homenagem à sua obra, foi escrito na lápide de seu túmulo este enigmático problema: "Caminhante! Este é o túmulo de Diofanto. Os números dirão a duração de sua vida, cuja sexta parte foi ocupada por uma doce infância. Decorreu mais uma duodécima parte de sua vida até que seu rosto se cobrisse de pelos. Passou ainda um sétimo da vida antes de tomar esposa, e cinco anos depois teve um belo filho, que infelizmente viveu apenas metade do que o pai viveu. Seu pai sobreviveu-lhe, chorando, quatro anos. Diz, caminhante, quantos anos tinha Diofanto quando a morte o levou?".

Elaborado com base em: EVES, H. **Introdução à história da Matemática**. Trad. Hygino H. Domingues. 5 ed. Campinas: Editora da Unicamp, 2011.



BIBLIOTECA DE GENEBRA, GENEBRA

Capa da edição de *Arithmetica de Diofanto*, publicada na França, em 1621.

Sistemas lineares equivalentes

Dois sistemas lineares, A e A', são **equivalentes** se, e somente se, têm o mesmo conjunto solução. Indicamos que A e A' são equivalentes por $\boldsymbol{A \sim A'}$.

Exemplo

Os sistemas A: $\begin{cases} x + y = 7 \\ x - y = 1 \end{cases}$ e A': $\begin{cases} x + y = 7 \\ y = 3 \end{cases}$ são equivalentes, pois ambos têm o mesmo conjunto solução: $S = \{(4, 3)\}$

Propriedades

Sendo A, A' e A'' sistemas lineares, verificam-se as seguintes propriedades:

- **Reflexiva:** $A \sim A$.
- **Simétrica:** Se $A \sim A'$, então $A' \sim A$.
- **Transitiva:** Se $A \sim A'$ e $A' \sim A''$, então $A \sim A''$.

Escalonamento de um sistema linear

A resolução de um sistema linear escalonado é extremamente simples, conforme vimos. Isso nos motiva a estudar um método que transforma um sistema linear não escalonado em um sistema equivalente na forma escalonada. Por exemplo, considere o sistema:

$$A: \begin{cases} x + 3y = 5 \\ 2x + 7y = 12 \end{cases}$$

Para escaloná-lo, precisamos zerar o coeficiente de x da última equação. Vamos, então, multiplicar a 1ª equação por (-2), obtendo o sistema equivalente:

$$A': \begin{cases} -2x - 6y = -10 \\ 2x + 7y = 12 \end{cases}$$

Substituindo, no sistema A', a 2ª equação pela soma dela com a 1ª, membro a membro, obtemos o sistema A'':

$$A'': \begin{cases} -2x - 6y = -10 \\ y = 2 \end{cases}$$

Note que $A'' \sim A$ e que A'' está na forma escalonada. Nessa forma, facilmente obtemos o conjunto solução: $S = \{(-1, 2)\}$

Essa técnica, que usaremos para transformar um sistema linear em um equivalente na forma escalonada, é fundamentada nos teoremas a seguir.

Teoremas

- Permutando entre si duas ou mais equações de um sistema linear A, obtém-se um novo sistema linear A', equivalente a A.
- Multiplicando (ou dividindo) ambos os membros de uma equação de um sistema linear A por uma constante k, com $k \neq 0$, obtém-se um novo sistema A', equivalente a A.
- Substituindo uma equação de um sistema linear A pela soma, membro a membro, dessa equação com outra desse sistema, obtém-se um novo sistema A', equivalente a A.

Exemplo

Vamos resolver o seguinte sistema: $\begin{cases} x + 2y + 3z = 7 & (1) \\ 2x + y + z = 4 & (2) \\ 3x + 3y + z = 14 & (3) \end{cases}$

Inicialmente, vamos zerar os coeficientes de x nas equações (2) e (3); para isso:

- substituímos a equação (2) pela soma dela com a equação (1) multiplicada por -2;
- substituímos a equação (3) pela soma dela com a equação (1) multiplicada por -3.

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 7 \\ 2x + y + z = 4 \\ 3x + 3y + z = 14 \end{cases} \quad \times(-2),\ \times(-3),\ + \quad \sim \begin{cases} x + 2y + 3z = 7 \\ 0x - 3y - 5z = -10 \\ 0x - 3y - 8z = -7 \end{cases}$$

Observação

Os produtos da equação (1) por -2 e por -3 podem ser calculados mentalmente. Não é necessário escrevê-los.

Agora, para obter o coeficiente zero em y na última equação do sistema anterior, substituímos essa equação pela soma dela com a segunda multiplicada por -1:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 7 \\ 0x - 3y - 5z = -10 \\ 0x - 3y - 8z = -7 \end{cases} \sim \begin{cases} x + 2y + 3z = 7 \\ 0x - 3y - 5z = -10 \\ 0x + 0y - 3z = 3 \end{cases}$$

Chegamos, assim, a um sistema escalonado equivalente ao sistema A, em que $z = -1$, $y = 5$ e $x = 0$. Concluímos, então, que A é SPD e que seu conjunto solução é: $S = \{(0, 5, -1)\}$

Notas:

1. Se durante o escalonamento do sistema do exemplo anterior ocorresse uma equação da forma $0x + 0y + 0z = b$, com $b \neq 0$, então o sistema seria **impossível**, pois tal equação **não** é satisfeita para nenhum terno (x, y, z).
2. Se durante o escalonamento do sistema anterior ocorresse uma equação da forma $0x + 0y + 0z = 0$, eliminaríamos essa equação, obtendo um sistema também equivalente ao sistema original.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

2. Escalone, classifique e dê o conjunto solução do sistema:

$$\begin{cases} 3x + 4y + 5z = 1 \\ 2x + 3y + 3z = 0 \\ 5x + 7y + 8z = 1 \end{cases}$$

Resolução

Inicialmente, vamos efetuar algumas operações para obter, nas equações (2) e (3), o coeficiente de x igual a zero.

- Substituímos a segunda equação pela soma dela multiplicada por 3 com a primeira equação multiplicada por -2.
- Substituímos a terceira equação pela soma dela multiplicada por 3 com a primeira equação multiplicada por -5.

Façamos tais produtos mentalmente, evitando, assim, muitas passagens, isto é:

$$\begin{cases} 3x + 4y + 5z = 1 \\ 2x + 3y + 3z = 0 \\ 5x + 7y + 8z = 1 \end{cases} \sim \begin{cases} 3x + 4y + 5z = 1 \\ 0x + y - z = -2 \\ 0x + y - z = -2 \end{cases}$$

- Substituímos a terceira equação do sistema anterior pela soma dela com a segunda equação multiplicada por -1.

$$\begin{cases} 3x + 4y + 5z = 1 \\ 0x + y - z = -2 \\ 0x + y - z = -2 \end{cases} \sim \begin{cases} 3x + 4y + 5z = 1 \\ 0x + y - z = -2 \\ 0x + 0y + 0z = 0 \end{cases}$$

Eliminando a última equação, chegamos ao sistema escalonado equivalente ao sistema original:

$$\begin{cases} 3x + 4y + 5z = 1 \\ y - z = -2 \end{cases}$$

Como esse sistema linear escalonado tem o número de equações menor que o número de incógnitas e todas as equações têm pelo menos uma incógnita com coeficiente não nulo, sua classificação é SPI (sistema possível e indeterminado).

No **Portal da Obmep** (disponível em: https://portaldaobmep.impa.br/index.php/modulo/ver?modulo=75; acesso em: 8 out. 2024), você pode encontrar diferentes materiais para aprofundar os estudos acerca de sistemas lineares e escalonamento. Há textos teóricos, exercícios e videoaulas.

Reflexão: Sim. Em um sistema linear com três equações e duas incógnitas, se existir uma única solução (a, b) comum a duas equações, temos: se (a, b) também for solução da terceira equação, então o sistema será possível e determinado; se (a, b) não for solução da terceira equação, então o sistema será impossível.
Por exemplo, resolvendo o sistema formado pelas duas primeiras equações do **exercício resolvido 3**, obtemos (–3, 2). Substituindo x por –3 e y por 2 na terceira equação, constatamos que (–3, 2) não é solução da terceira equação. Logo, o sistema formado pelas três equações é impossível.

Reflexão

Para classificar o sistema do exercício resolvido **3**, posso determinar a solução comum a duas equações e substituí-la na terceira equação?

Resolvendo em função da variável livre z, temos:

$$\begin{cases} 3x + 4y + 5z = 1 \\ y - z = -2 \end{cases} \sim \begin{cases} 3x + 4y + 5z = 1 & (1) \\ y = z - 2 & (2) \end{cases}$$

Substituindo (2) em (1), obtemos:

$$3x + 4(z - 2) + 5z = 1 \Rightarrow 3x + 4z - 8 + 5z = 1$$

$$\therefore x = \frac{9 - 9z}{3} \Rightarrow x = 3 - 3z$$

Logo, o conjunto solução é: $S = \{(3 - 3z, z - 2, z), \text{ com } z \in \mathbb{R}\}$.

3. Escalone, classifique e resolva o sistema:

$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 3x + 7y = 5 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$$

Resolução

$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 3x + 7y = 5 \\ 2x + y = 3 \end{cases} \sim \begin{cases} x + 2y = 1 \\ 0x + y = 2 \\ 0x - 3y = 1 \end{cases} \sim \begin{cases} x + 2y = 1 \\ 0x + y = 2 \\ 0x + 0y = 7 \end{cases}$$

Note que, como a última equação tem todos os coeficientes nulos e o termo independente não nulo, ela não é satisfeita para nenhum par (x, y).

Logo, a classificação do sistema é SI e $S = \varnothing$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Faça os exercícios no caderno.

10. Escalone, classifique e dê o conjunto solução de cada um dos seguintes sistemas:

a. $\begin{cases} x + 5y + 2z = 10 \\ 2x + y - 3z = -3 \\ 3x + 6y + 5z = 19 \end{cases}$ **10. a.** SPD; $S = \{(1, 1, 2)\}$

b. $\begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ 3x + y - z = 2 \\ 5x - y + 3z = 1 \end{cases}$ **10. b.** SI; $S = \varnothing$

c. $\begin{cases} 3x + 7y - 11z = 6 \\ x + 2y - 4z = 1 \\ x + 3y - 3z = 4 \end{cases}$ **10. c.** SPI; $S = \{(6z - 5, 3 - z, z), \text{ com } z \in \mathbb{R}\}$

Sugestão: No item **c**, para facilitar o escalonamento, permute as duas primeiras equações.

11. Qual é a classificação e o conjunto solução de cada um dos seguintes sistemas?

a. $\begin{cases} x + 3y = 1 \\ 4x - y = 2 \\ 3x - 4y = 0 \end{cases}$

11. a. SI; $S = \varnothing$

b. $\begin{cases} 3x + y = -4 \\ x + 2y = 2 \\ 2x - y = -6 \end{cases}$

11. b. SPD; $S = \{(-2, 2)\}$

11. c. SPI; $S = \{(2y + 3, y), \text{ com } y \in \mathbb{R}\}$

c. $\begin{cases} x - 2y = 3 \\ 3x - 6y = 9 \\ 2x - 4y = 6 \end{cases}$

d. $\begin{cases} 3x + 5y = 2 \\ 2x - 3y = 1 \\ 5x + 2y = 3 \end{cases}$

11. d. SPD; $S = \left\{\left(\frac{11}{19}, \frac{1}{19}\right)\right\}$

12. Uma escola de ensino básico tem 3.000 estudantes distribuídos nos níveis de Educação Infantil, Ensino Fundamental e Ensino Médio. O Ensino Fundamental tem o dobro de estudantes do Ensino Médio, e a Educação Infantil tem 500 estudantes a menos que o Ensino Fundamental. Junte-se a um colega, e determinem o número de estudantes de cada nível de ensino dessa escola.

FG TRADE/E+/GETTY IMAGES

12. Ao todo, a escola tem 900 estudantes na Educação Infantil, 1.400 estudantes no Ensino Fundamental e 700 no Ensino Médio.

13. Os dados fornecidos são insuficientes.

13. Três aviões, *A*, *B* e *C*, fretados por uma agência de viagens, partiram de um aeroporto internacional, com destino a países da Europa. Os aviões *A* e *B* juntos transportaram 260 passageiros a mais que *C*; os aviões *A* e *C* juntos transportaram o dobro do número de passageiros de *B*; e o avião *B* transportou 260 passageiros a menos que o dobro do número de passageiros de *A*. Quantos passageiros viajaram em cada avião?

14. Elabore um algoritmo que descreva os passos para determinar a classificação de um sistema linear. Em seguida, troque o algoritmo elaborado com um colega para que um construa um fluxograma com base no algoritmo elaborado pelo outro. Por fim, analisem e conversem como raciocinaram para a elaboração do fluxograma. **14.** Resposta pessoal.

Para retomar os conteúdos estudados, resolva os exercícios complementares 4 a 11.

5. Os sistemas lineares e o conceito de determinante

O estudo dos sistemas lineares levou alguns matemáticos do século XVII a desenvolver a **teoria dos determinantes**.

Essa teoria surgiu, quase simultaneamente, no Japão e na Europa, embora o matemático japonês Seki a tenha publicado primeiro, em 1683, na obra *Kake fukudai no ho*, em que apresenta um método geral para o cálculo de determinantes.

Na Europa, nesse mesmo ano, o matemático alemão Leibniz escreveu ao matemático francês L'Hospital sobre a classificação de um sistema linear em que aplicava um novo tipo de cálculo, hoje chamado de **determinante**.

Ilustração do matemático japonês Takakazu Seki Kowa (1642-1708).

Ilustração do matemático alemão Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646-1716).

Ilustração do matemático francês Guillaume François Antoine, marquês de L'Hospital (1661-1704).

ILUSTRAÇÕES: FÁBIO CORTEZ REIS/ARQUIVO DA EDITORA

O determinante é um número obtido por meio de multiplicações e adições dos coeficientes de um sistema linear, conforme apresentado a seguir.

Determinante de ordem 2

Vamos considerar o seguinte sistema linear nas incógnitas *x* e *y*: $\begin{cases} ax + by = p \\ cx + dy = q \end{cases}$

Aplicando os teoremas usados no escalonamento, obtemos um sistema equivalente desta maneira:

$$\begin{cases} ax + by = p & \times (-c) \\ cx + dy = q & \times a \end{cases} + \sim \begin{cases} ax + by = p \\ (ad - cb)y = aq - cp \end{cases}$$

Haverá um único valor de *y* que satisfaça essa última equação se, e somente se, o coeficiente de *y* nessa equação for diferente de zero: $ad - cb \neq 0$. Consequentemente, haverá um único par ordenado como solução do sistema; logo, o sistema será possível e determinado. Assim, concluímos que:

$$ad - cb \neq 0 \Leftrightarrow \text{SPD}$$

Observação

Matriz e determinante são entes distintos: matriz é uma tabela e determinante é um número.

O número $(ad - cb)$ é chamado de **determinante** da matriz $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ dos coeficientes do sistema original, em que a 1ª coluna é formada pelos coeficientes de x e a 2ª, pelos de y.

Indicamos o determinante por:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

Por estar associado a uma matriz de ordem 2, dizemos que esse determinante tem **ordem 2**.

Note que um determinante de ordem 2 é igual à diferença entre o produto dos elementos da diagonal principal e o produto dos elementos da diagonal secundária, nessa ordem, da matriz dos coeficientes do sistema:

diagonal secundária

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb$$

diagonal principal

Exemplos

a. Vamos calcular o determinante D da matriz dos coeficientes do sistema $\begin{cases} 4x + 2y = 1 \\ 3x + 5y = 9 \end{cases}$

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 4 \cdot 5 - 3 \cdot 2 = 14$$

Como $D \neq 0$, concluímos que o sistema é possível e determinado (SPD).

b. Vamos calcular o determinante D da matriz dos coeficientes do sistema $\begin{cases} x + 3y = 1 \\ 3x + 9y = 2 \end{cases}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = 1 \cdot 9 - 3 \cdot 3 = 0$$

Como $D = 0$, o sistema **não** é possível e determinado. Restam, portanto, duas alternativas: o sistema é impossível ou é possível e indeterminado. Para saber qual das duas alternativas é correta, basta escalonar o sistema:

$$\begin{cases} x + 3y = 1 \quad \times(-3) \\ 3x + 9y = 2 \quad + \end{cases} \sim \begin{cases} x + 3y = 1 \\ 0x - 0y = -1 \end{cases}$$

Logo, o sistema é impossível.

Determinante de ordem 3

Vamos considerar o seguinte sistema linear nas incógnitas x, y e z:

$$\begin{cases} ax + by + cz = p \\ dx + ey + fz = q \\ gx + hy + iz = r \end{cases}$$

Aplicando os teoremas usados no escalonamento, obtemos o sistema equivalente:

$$\begin{cases} ax + by + cz = p \\ 0x + (ae - bd)y + (af - dc)z = aq - pd \\ 0x + 0y + (aei + bfg + cdh - gec - hfa - idb)z = aer + bqg + pdh - gep - hqa - rdb \end{cases}$$

Esse sistema será possível e determinado se, e somente se, o coeficiente de z na última equação for diferente de zero, isto é:

$$aei + bfg + cdh - gec - hfa - idb \neq 0 \Leftrightarrow \text{SPD}$$

Esse coeficiente de z é chamado de **determinante** da matriz $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ dos coeficientes do sistema, em que a 1ª, a 2ª e a 3ª coluna são formadas pelos coeficientes de x, y e z do sistema original, respectivamente. Indicamos o determinante D por:

$$D = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

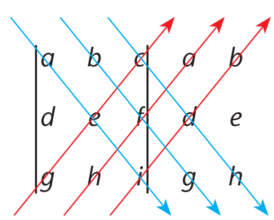
Por estar associado a uma matriz de ordem 3, dizemos que esse determinante tem **ordem 3**.

Para facilitar o cálculo desse determinante, podemos seguir uma regra prática apresentada a seguir, conhecida como **regra de Sarrus**.

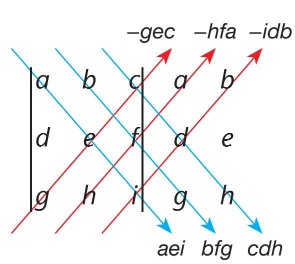
Observação

A regra de Sarrus refere-se a um método de memorização do cálculo de determinantes de ordem 3 atribuído ao matemático francês Pierre Frederic Sarrus (1798-1861).

- Repetimos, à direita do determinante, as duas primeiras colunas e desenhamos setas sobre a diagonal principal e duas paralelas, e sobre a diagonal secundária e duas paralelas, de modo que cada seta intercepte três números do determinante, conforme o esquema:



- Multiplicamos os três números alinhados em cada seta, conservando o sinal de cada produto obtido na direção da diagonal principal e invertendo o sinal de cada produto obtido na direção da diagonal secundária.



- Finalmente, adicionamos os seis produtos calculados:

$$D = aei + bfg + cdh - gec - hfa - idb$$

Exemplo

Vamos calcular o determinante D da matriz dos coeficientes do sistema: $\begin{cases} 2x + y + 3z = 1 \\ x - y + 5z = 2 \\ 3x + y - 2z = 6 \end{cases}$

$$\begin{array}{ccccc} & & 9 & -10 & 2 \\ \left|\begin{matrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & -2 \end{matrix}\right. & & \left|\begin{matrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{matrix}\right. & & \\ & & 4 & 15 & 3 \end{array}$$

$$D = 4 + 15 + 3 + 9 - 10 + 2 = 23$$

Como $D \neq 0$, concluímos que o sistema é possível e determinado (SPD).

Generalização

Reflexão

Existe determinante de ordem 1?

Reflexão: Embora tenhamos estudado apenas determinantes de ordens 2 e 3, existe o determinante de qualquer matriz quadrada de ordem n, com $n \in \mathbb{N}^*$. Por exemplo, o determinante da matriz de ordem 1, $A = [a_{11}]$, é definido como o próprio elemento a_{11}.
É importante observar que a classificação de uma equação do tipo $ax = b$, na variável x, é um caso particular da classificação de sistemas lineares. Observando que a matriz dos coeficientes dessa equação é $[a]$, cujo determinante é o próprio número a, temos:
- se esse determinante é diferente de zero, isto é, se $a \neq 0$, então a equação é possível e determinada; por exemplo, a equação $3x = 6$ tem uma única raiz, que é 2.
- se esse determinante é igual a zero, isto é, se $a = 0$, a equação será impossível se $b \neq 0$, ou será possível e indeterminada se $b = 0$. Por exemplo, a equação $0x = 5$ é impossível, e a equação $0x = 0$ é indeterminada.

Sendo D o determinante da matriz dos coeficientes de um sistema linear com número de equações igual ao número de incógnitas, temos:

$D \neq 0 \Leftrightarrow$ SPD $\qquad\qquad$ $D = 0 \Leftrightarrow$ SPI ou SI

EXERCÍCIO RESOLVIDO

4. Para que valores reais de m o sistema nas incógnitas x, y e z a seguir é possível e determinado?

$$A: \begin{cases} 3x + 2y - 4z = 1 \\ x - 2y = 3 \\ x + my - 4z = -1 \end{cases}$$

Resolução

Observando que o coeficiente de z na 2ª equação é zero, podemos representar esse sistema como:

$$A: \begin{cases} 3x + 2y - 4z = 1 \\ x - 2y + 0z = 3 \\ x + my - 4z = -1 \end{cases}$$

Esse sistema será possível e determinado se, e somente se, o determinante da matriz dos coeficientes do sistema for diferente de zero, isto é:

$$A \text{ é SPD} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & m & -4 \end{vmatrix} \neq 0$$

Calculando o determinante D da matriz e impondo $D \neq 0$, temos:

$$\begin{array}{ccccc} & & -8 & 0 & 8 \\ \left|\begin{matrix} 3 & 2 & -4 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & m & -4 \end{matrix}\right. & & \left|\begin{matrix} 3 & 2 \\ 1 & -2 \\ 1 & m \end{matrix}\right. & & \\ & & 24 & 0 & -4m \end{array}$$

$$24 - 4m - 8 + 8 \neq 0$$

$$\therefore m \neq 6$$

Logo, A é SPD para todo número real m, com $m \neq 6$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Faça os exercícios no caderno.

15. Calcule o determinante da matriz dos coeficientes de cada um dos sistemas a seguir.

a. $\begin{cases} 5x + 3y = 6 \\ 4x + 7y = 1 \end{cases}$ **15. a.** 23

b. $\begin{cases} 3x + y = 2 \\ \quad\ \ y = 6 \end{cases}$ **15. b.** 3

c. $\begin{cases} 2x + 3y + z = 5 \\ \qquad x - z = 3 \\ 4x + 2y + 2z = 0 \end{cases}$ **15. c.** -12

d. $\begin{cases} x + y \operatorname{sen} 3 - z \cos 3 = 1 \\ \quad y \operatorname{sen} 3 - z \cos 3 = 2 \\ x + y \cos 3 + z \operatorname{sen} 3 = -1 \end{cases}$ **15. d.** 1

16. (Unir-RO) O sistema $\begin{cases} kx + 3y = 6 \\ 10x + (k+1)y = 12 \end{cases}$, nas variáveis x e y, possui uma única solução, para qualquer número real k tal que: **16.** alternativa **d**

a. $k \neq 5$ **c.** $k \neq 2$ **e.** $k \neq 4$ e $k \neq 2$

b. $k \neq 4$ **d.** $k \neq 5$ e $k \neq -6$

17. (Fuvest-SP) Para quais valores de k o sistema linear

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 3x - y + 2z = 3 \\ \quad y + kz = -2 \end{cases}$$

É compatível e determinado?

Nota: Lembre-se de que dizer que um sistema é compatível e determinado equivale a dizer que o sistema é possível e determinado. **17.** $k \neq \frac{1}{4}$

18. Resolva, em $\mathbb{R}$, as equações a seguir.

a. $\begin{vmatrix} x & 3 \\ 9 & 3x \end{vmatrix} = 0$ **18. a.** $S = \{-3, 3\}$

b. $\begin{vmatrix} 2 \operatorname{sen} x & 1 \\ \frac{1}{2} & \cos x \end{vmatrix} = \frac{1}{2}$

18. b. $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{4} + k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

c. $\begin{vmatrix} x & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & x \end{vmatrix} = 8$ **18. c.** $S = \left\{2, -\frac{3}{5}\right\}$

18. d. $S = \varnothing$

d. $\begin{vmatrix} 3 & x & -2 \\ x+1 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -12$

19. Pesquisa e resposta pessoal. Você encontrará mais informações nas **Orientações Específicas** deste capítulo.

19. Foi apresentado o cálculo de determinantes de ordens 2 e 3, porém é possível calcular determinantes de qualquer ordem n, com $n \in \mathbb{N}^*$. Para isso, pode-se utilizar um recurso conhecido como teorema de Laplace. Faça uma pesquisa na internet sobre esse teorema e apresente para a turma por meio de um exemplo, o cálculo de um determinante de ordem 4.

Para retomar os conteúdos estudados, resolva os exercícios complementares 12 e 13.

6. Discussão de um sistema linear

A tabela a seguir descreve as duas últimas compras de matéria-prima realizadas por uma indústria de válvulas de bronze (o bronze é uma liga metálica cujos principais componentes são cobre e estanho).

FOTOS: ANTONOV AN/SHUTTERSTOCK

Compra de matéria-prima

	Cobre (tonelada)	Estanho (tonelada)	Custo total R$
Compra 1	8	2	660.000,00
Compra 2	16	k	980.000,00

Elaborado para fins didáticos.

Se o preço da tonelada de cada produto foi o mesmo nas duas compras, pode-se concluir que o número real não negativo k obedece à condição:

a. $k = 5$ **b.** $k \neq 5$ **c.** $k = 4$ **d.** $k \neq 4$ **e.** $k = 3$

Podemos analisar essa questão por meio do sistema linear a seguir, em que x e y representam os preços, em real, da tonelada do cobre e do estanho, respectivamente.

$$\begin{cases} 8x + 2y = 660.000 \\ 16x + ky = 980.000 \end{cases}$$

Esse sistema deve ser possível, pois o preço de cada produto foi o mesmo nas duas compras. Calculamos, então, os valores de k para que essa classificação ocorra.

Calculando o determinante da matriz dos coeficientes desse sistema, temos:

$$\begin{vmatrix} 8 & 2 \\ 16 & k \end{vmatrix} = 8k - 32$$

Se esse determinante for diferente de zero, o sistema será possível e determinado. Assim:

$$8k - 32 \neq 0 \Rightarrow k \neq 4$$

Portanto, se $k \neq 4$, o sistema admite apenas uma solução. Logo, uma condição **suficiente** para que o preço dos produtos seja o mesmo nas duas compras é $k \neq 4$.

Agora, consideramos o que ocorre quando $k = 4$. Para esse valor de k, o determinante anterior é igual a zero e, portanto, o sistema pode ser possível e indeterminado ou impossível. Para saber qual dessas classificações ocorre, substituímos k por 4 e escalonamos o sistema:

$$\begin{cases} 8x + 2y = 660.000 & \times(-2) \\ 16x + 4y = 980.000 & + \end{cases} \sim \begin{cases} 8x + 2y = 660.000 \\ 0x + 0y = -340.000 \end{cases}$$

Deduzimos, então, que se $k = 4$, o sistema é impossível, isto é, não existe um par ordenado (x, y) que seja solução do sistema. Portanto, para $k = 4$, o preço da tonelada de cada produto não seria o mesmo nas duas compras.

Com base nesse estudo, afirmamos que a condição **necessária e suficiente** para que o preço de cada produto seja o mesmo nas duas compras é $k \neq 4$. Assim, a alternativa correta é a **d**.

O que fizemos nesse exemplo foi classificar o sistema linear segundo os valores do parâmetro k. A esse procedimento damos o nome de **discussão do sistema linear em função do parâmetro** k.

Muitas situações exigem a discussão de um sistema linear; por isso, faremos um estudo mais detalhado desse assunto. Para facilitar, vamos dividir o estudo em dois casos.

Observação

Em uma equação nas incógnitas x_1, x_2, x_3, ..., x_n, chama-se parâmetro qualquer outra variável, distinta de x_1, x_2, x_3, ... e x_n.

1º caso: discussão de um sistema linear com número de equações igual ao número de incógnitas

A discussão de um sistema linear cujo número de equações é igual ao número de incógnitas pode ser feita pelo determinante da matriz dos coeficientes do sistema, auxiliado pelo escalonamento, conforme mostram os exercícios resolvidos a seguir.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

5. Discuta, em função do parâmetro real m, o sistema nas incógnitas x e y:

$$\begin{cases} x + 3y = 4 \\ 2x + my = 8 \end{cases}$$

Resolução

Seja D o determinante da matriz dos coeficientes do sistema, isto é:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & m \end{vmatrix}$$

Impondo a condição $D \neq 0$, obtemos os valores de m para que o sistema seja possível e determinado:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & m \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow m - 6 \neq 0$$

Logo: $m \neq 6 \Rightarrow$ SPD

Para $m = 6$, temos $D = 0$ e, nesse caso, o sistema pode ser impossível ou possível e indeterminado. Substituindo m por 6 no sistema e escalonando-o, obtemos:

$$\begin{cases} x + 3y = 4 \\ 2x + 6y = 8 \end{cases} \sim \begin{cases} x + 3y = 4 \\ 0x + 0y = 0 \end{cases}$$

Logo: $m = 6 \Rightarrow$ SPI

Resumindo:

- Para $m \neq 6$, o sistema é possível e determinado (SPD).
- Para $m = 6$, o sistema é possível e indeterminado (SPI).

6. Discuta o sistema nas incógnitas x e y em função do parâmetro real p:

$$\begin{cases} 5x + py = 1 \\ px + 5y = 1 \end{cases}$$

Resolução

Seja D o determinante da matriz dos coeficientes do sistema, isto é:

$$D = \begin{vmatrix} 5 & p \\ p & 5 \end{vmatrix}$$

Impondo a condição $D \neq 0$, obtemos os valores de p para que o sistema seja possível e determinado:

$$\begin{vmatrix} 5 & p \\ p & 5 \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow 25 - p^2 \neq 0$$

$$\therefore p \neq 5 \text{ e } p \neq -5$$

Logo: $p \neq 5$ e $p \neq -5 \Rightarrow$ SPD

Para $p = 5$ ou $p = -5$, temos $D = 0$ e, nesse caso, o sistema pode ser impossível ou possível e indeterminado.

- Substituindo p por 5 no sistema e escalonando-o, obtemos:

$$\begin{cases} 5x + 5y = 1 \\ 5x + 5y = 1 \end{cases} \sim \begin{cases} 5x + 5y = 1 \\ 0x + 0y = 0 \end{cases}$$

Logo: $p = 5 \Rightarrow$ SPI

- Substituindo p por -5 no sistema e escalonando-o, obtemos:

$$\begin{cases} 5x - 5y = 1 \\ -5x + 5y = 1 \end{cases} \sim \begin{cases} 5x - 5y = 1 \\ 0x + 0y = 2 \end{cases}$$

Logo: $p = -5 \Rightarrow$ SI

Resumindo:

- Para $p \neq 5$ e $p \neq -5$, o sistema é possível e determinado (SPD).
- Para $p = 5$, o sistema é possível e indeterminado (SPI).
- Para $p = -5$, o sistema é impossível (SI).

7. Discuta o sistema nas incógnitas x, y e z em função do parâmetro real k:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 2x - y + 2z = 3 \\ x - 3y + kz = 1 \end{cases}$$

Resolução

Seja D o determinante da matriz dos coeficientes do sistema, isto é:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & k \end{vmatrix}$$

Impondo a condição $D \neq 0$, obtemos os valores de k para que o sistema seja possível e determinado:

$$\begin{array}{ccccc} & & -1 & 6 & -4k \\ 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & k & 1 & -3 \\ & & -k & 4 & 6 \end{array}$$

$D \neq 0 \Leftrightarrow -k + 4 + 6 - 1 + 6 - 4k \neq 0$

$\therefore k \neq 3$

Logo: $k \neq 3 \Rightarrow$ SPD

Para $k = 3$, temos $D = 0$ e, nesse caso, o sistema pode ser impossível ou possível e indeterminado. Substituindo k por 3 no sistema e escalonando-o, obtemos:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 2x - y + 2z = 3 \\ x - 3y + 3z = 1 \end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 0x - 5y + 4z = 1 \\ 0x - 5y + 4z = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 0x - 5y + 4z = 1 \\ 0x + 0y + 0z = -1 \end{cases}$$

Logo: $k = 3 \Rightarrow$ SI

Resumindo:

- Para $k \neq 3$, o sistema é possível e determinado (SPD).
- Para $k = 3$, o sistema é impossível (SI).

8. Discuta o sistema seguinte, nas incógnitas x e y, em função dos parâmetros reais a e b.

$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ ax + 4y = b \end{cases}$$

Resolução

Seja: $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ a & 4 \end{vmatrix}$

Impondo $D \neq 0$, o sistema é possível e determinado:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ a & 4 \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow 4 - 2a \neq 0$$

Logo: $a \neq 2 \Rightarrow$ SPD

Para obter a classificação do sistema para $a = 2$, substituímos a por 2 no sistema e o escalonamos, obtendo:

$$\begin{cases} x + 2y = 3 \quad \times(-2) \\ 2x + 4y = b \quad + \end{cases} \sim \begin{cases} x + 2y = 3 \\ 0x + 0y = b - 6 \end{cases}$$

Observamos que:

- se $b - 6 \neq 0$, ou seja, $b \neq 6$, o sistema é impossível (SI);
- se $b - 6 = 0$, ou seja, $b = 6$, o sistema é possível e indeterminado (SPI).

Resumindo:

- Para $a \neq 2$, temos SPD.
- Para $a = 2$ e $b \neq 6$, temos SI.
- Para $a = 2$ e $b = 6$, temos SPI.

Reflexão: Sim. Você encontrará mais informações nas **Orientações Específicas** deste capítulo.

Reflexão

Posso discutir um sistema linear aplicando apenas o escalonamento?

20. a. para $k \neq 8$, SPD
para $k = 8$, SI

20. b. para $k \neq 3$ e $k \neq -3$, SPD
para $k = 3$, SI
para $k = -3$, SPI

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Faça os exercícios no caderno.

20. Discuta cada um dos sistemas a seguir, nas incógnitas x e y, em função do parâmetro real k.

a. $\begin{cases} x + 4y = 5 \\ 2x + ky = 12 \end{cases}$ **b.** $\begin{cases} kx + y = 1 \\ 9x + ky = -3 \end{cases}$

21. Discuta cada um dos sistemas a seguir, nas incógnitas x, y e z, em função do parâmetro real m.

a. $\begin{cases} mx - y + 2z = 1 \\ 2x + y + z = 2 \\ 5x + 2y + 5z = 7 \end{cases}$ **21. a.** para $m \neq -1$, SPD; para $m = -1$, SPI

b. $\begin{cases} x + 3y + mz = 1 \\ 3x + y + 3z = 1 \\ mx - 2y + z = 1 \end{cases}$ **21. b.** para $m \neq 2$ e $m \neq 1$, SPD; para $m = 2$ ou $m = 1$, SI

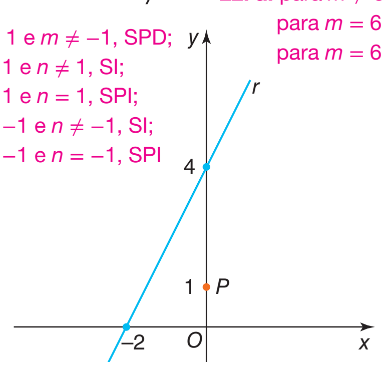
22. Faça a discussão dos sistemas a seguir, nas incógnitas x e y, segundo os valores reais dos parâmetros m e n.

a. $\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ mx + 9y = n \end{cases}$ **b.** $\begin{cases} mx - y = 1 \\ x - my = n \end{cases}$

23. Considere a reta r e o ponto $P(0, 1)$, representados no plano cartesiano xOy.

22. a. para $m \neq 6$, SPD;
para $m = 6$ e $n \neq 3$, SI;
para $m = 6$ e $n = 3$, SPI

22. b. para $m \neq 1$ e $m \neq -1$, SPD;
para $m = 1$ e $n \neq 1$, SI;
para $m = 1$ e $n = 1$, SPI;
para $m = -1$ e $n \neq -1$, SI;
para $m = -1$ e $n = -1$, SPI



ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

Nesse plano, qualquer reta s, não vertical, que passa pelo ponto P tem equação da forma $y = kx + 1$, em que k é um parâmetro real.

a. Lembrando que toda reta não vertical do plano cartesiano é gráfico de uma função afim, $y = ax + b$, com $\{a, b\} \subset \mathbb{R}$ e $a \neq 0$, obtenha a equação da reta r. **23. a.** $y = 2x + 4$

b. Discuta, em função de k, o sistema formado pelas equações das retas r e s. **23. b.** $k \neq 2 \Rightarrow$ SPD; $k = 2 \Rightarrow$ SI

c. De acordo com as suas conclusões no item **b**, descreva as posições relativas das retas r e s para cada valor real de k. **23. c.** $k \neq 2 \Rightarrow r$ e s são concorrentes; $k = 2 \Rightarrow r$ e s são paralelas distintas.

Nota: Uma reta do plano cartesiano é vertical quando é perpendicular ao eixo das abscissas.

24. Junte-se a um colega para resolver este problema. Em um mesmo instante, Raul tomou dois empréstimos em regime de juros simples. Um deles foi de R\$ 8.000,00, à taxa de 4% ao mês, e o outro foi de R\$ 10.000,00, à taxa de k% ao mês, com $k \in \mathbb{R}_+^*$. Para que valor de k a diferença entre os montantes das duas dívidas será a mesma em qualquer instante do período do empréstimo? **24.** $k = 3{,}2$

25. Elabore um problema envolvendo a discussão de um sistema linear, em uma situação do cotidiano, em que $40x + ky = 150$ seja uma das equações. Em seguida, troque o problema elaborado com um colega para que um resolva o problema elaborado pelo outro. Por fim, analisem e discutam as resoluções.

25. Resposta pessoal.

26. Faça dupla com um colega e resolva o problema. Atendendo aos pedidos dos departamentos de planejamento, de pessoal e administrativo, o comprador de uma empresa adquiriu os produtos relacionados na tabela a seguir, em que k representa um número natural.

Total de materiais adquiridos e valor gasto

Departamento	Papel sulfite	Cartucho de impressora	Caneta esferográfica	Custo (R$)
Planejamento	10 pacotes	3 unidades	8 unidades	218,00
Pessoal	20 pacotes	6 unidades	14 unidades	434,00
Administrativo	$2k$ pacotes	3 unidades	k unidades	210,00

Elaborado para fins didáticos.

Sabendo que os pacotes de papel sulfite tiveram preços iguais, o mesmo ocorrendo com os cartuchos de impressora e com as canetas, conclui-se que: **26.** alternativa **e**

a. $k = 7$

b. $k \neq 7$

c. $k = 6$

d. $k \neq 6$

e. $k \neq 5$

Para retomar os conteúdos estudados, resolva os exercícios complementares 14 a 19.

2º caso: discussão de um sistema linear com número de equações diferente do número de incógnitas

Aplicaremos o método do escalonamento na discussão de sistemas lineares cujo número de equações é diferente do número de incógnitas. Nesse tipo de sistema, não se pode aplicar o determinante da matriz dos coeficientes do sistema, já que a matriz não é quadrada e, portanto, não existe seu determinante. Os exercícios resolvidos a seguir exemplificam essa discussão.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

9. Discuta o sistema nas incógnitas x, y e z em função do parâmetro real n.

$$\begin{cases} x + 4y - z = 1 \\ 3x + 12y + nz = 2 \end{cases}$$

Resolução

Escalonando o sistema, temos:

$$\begin{cases} x + 4y - z = 1 \\ 3x + 12y + nz = 2 \end{cases} \sim \begin{cases} x + 4y - z = 1 \\ 0x + 0y + (n+3)z = -1 \end{cases}$$

Observamos que:

- para $n + 3 = 0$, ou seja, $n = -3$, o sistema é impossível (SI);
- para $n + 3 \neq 0$, ou seja, $n \neq -3$, o sistema é possível e indeterminado (SPI).

10. Discuta o sistema nas incógnitas x e y em função do parâmetro real a.

$$\begin{cases} x + 5y = 1 \\ 2x + y = 2 \\ 4x + 11y = a \end{cases}$$

Resolução

Escalonando o sistema, temos:

$$\begin{cases} x + 5y = 1 \\ 2x + y = 2 \\ 4x + 11y = a \end{cases} \sim \begin{cases} x + 5y = 1 \\ 0x - 9y = 0 \\ 0x - 9y = a - 4 \end{cases} \sim \begin{cases} x + 5y = 1 \\ 0x - 9y = 0 \\ 0x + 0y = a - 4 \end{cases}$$

Observamos que:

- para $a - 4 = 0$, ou seja, $a = 4$, o sistema é possível e determinado (SPD);
- para $a - 4 \neq 0$, ou seja, $a \neq 4$, o sistema é impossível (SI).

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Faça os exercícios no caderno.

27. Faça o que se pede.

a. Discuta, em função do parâmetro real m, o sistema de variáveis x, y e z:

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 2 \\ 5x - 10y + mz = 5 \end{cases}$$

27. a. $m \neq 15 \Rightarrow$ SPI; $m = 15 \Rightarrow$ SP

b. Discuta, em função dos parâmetros reais p e q, o sistema de variáveis x, y e z:

$$\begin{cases} x + py + pz = 6 \\ 3x + 3py + 4z = q \end{cases}$$

27. b. $p \neq \frac{4}{3} \Rightarrow$ SPI; $p = \frac{4}{3}$ e $q = 18 \Rightarrow$ SPI; $p = \frac{4}{3}$ e $q \neq 18 \Rightarrow$ SI

28. Discuta os sistemas a seguir, nas incógnitas x e y, em função do parâmetro real a.

a. $\begin{cases} x + 3y = -2 \\ 2x - y = 3 \\ 4x + 5y = a \end{cases}$

28. a. $a = -1 \Rightarrow$ SPD; $a \neq -1 \Rightarrow$ SI

b. $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 6x - y = 4 \\ 5x + ay = -1 \end{cases}$

28. b. $a = -3 \Rightarrow$ SPD; $a \neq -3 \Rightarrow$ SI

29. Junte-se a um colega para resolver este problema. Nas funções $y = 3x + 2$, $y = 2x - 1$ e $y = mx - 4$, as letras x e y representam as variáveis e m é um parâmetro real. Determinem m para que os gráficos cartesianos dessas funções sejam retas que concorram em um mesmo ponto. **29.** $m = 1$

30. Uma loja vende três modelos de camiseta. A tabela a seguir descreve a quantidade vendida de cada modelo e a receita apurada com essa venda no primeiro e no segundo dia de determinado mês, em que k é um número real positivo.

Total de camisetas vendidas por modelo e por dia

Dia	Modelo 1	Modelo 2	Modelo 3	Receita (R$)
1	12	10	8	1.220,00
2	18	15	12	610k

Elaborado para fins didáticos.

Sabendo que nesses dois dias não houve variação de preço em nenhum dos três modelos de camiseta, determine o valor de k. **30.** $k = 3$

Para retomar os conteúdos estudados, resolva os exercícios complementares 20 a 23.

7. Sistema linear homogêneo

Sistema linear homogêneo é todo sistema linear formado exclusivamente por equações lineares com termo independente igual a zero.

Exemplos

a. $\begin{cases} 5x - 2y + z = 0 \\ x + 4y - 2z = 0 \\ 3x - y + 4z = 0 \end{cases}$

b. $\begin{cases} x + 3y = 0 \\ 4x - 2y = 0 \end{cases}$

c. $\begin{cases} 2x + y = 0 \\ x + 3y + 2z = 0 \end{cases}$

Solução trivial de um sistema linear homogêneo

Considere o sistema linear homogêneo a seguir.

$$\begin{cases} 5x - 2y + z = 0 \\ x + 4y - 2z = 0 \\ 3x - y + 4z = 0 \end{cases}$$

Atribuindo o valor 0 (zero) a cada variável, obtemos as sentenças verdadeiras:

$$\begin{cases} 5 \cdot 0 - 2 \cdot 0 + 0 = 0 \\ 0 + 4 \cdot 0 - 2 \cdot 0 = 0 \\ 3 \cdot 0 - 0 + 4 \cdot 0 = 0 \end{cases}$$

Concluímos, então, que o terno (0, 0, 0) é uma solução desse sistema. Esse terno é chamado de **solução trivial** do sistema linear homogêneo.

> Todo sistema linear homogêneo com n incógnitas admite como solução a ênupla (0, 0, 0, ..., 0), chamada de **solução trivial** do sistema.

Notas:

1. Como todo sistema linear homogêneo admite a solução trivial, concluímos que todo sistema linear homogêneo é possível.
2. A solução trivial de um sistema linear homogêneo também é chamada de **solução nula** ou **solução imprópria** do sistema.

Reflexão

O sistema $\begin{cases} 5x - 2y - 15 = 0 \\ 3x + 4y - 12 = 0 \end{cases}$ é homogêneo? Justifique.

Reflexão: Não, pois o termo independente de que pelo menos uma equação é diferente de zero.

Exemplos

a. A solução trivial do sistema $\begin{cases} 2x - y = 0 \\ 4x - 2y = 0 \end{cases}$ é (0, 0).

b. A solução trivial do sistema $\begin{cases} 3x + 2y - 4t + z = 0 \\ x - 2y + 7t - 2z = 0 \\ 2x + y - 4t + 2z = 0 \\ 5x + 3y - t - z = 0 \end{cases}$ é (0, 0, 0, 0).

Classificação de um sistema linear homogêneo com número de equações igual ao número de incógnitas

Quando um sistema linear homogêneo tem o número de equações igual ao número de incógnitas, podemos classificá-lo por meio do determinante da matriz dos coeficientes do sistema. Isso ocorre porque, como esse tipo de sistema é sempre possível, há apenas as duas alternativas descritas pela propriedade a seguir.

Propriedade

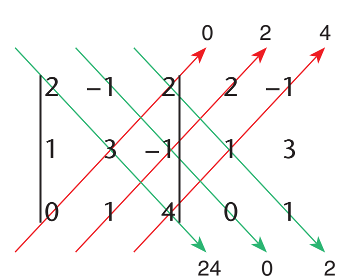
> Sendo A um sistema linear homogêneo com n equações e n incógnitas e cujo determinante da matriz dos coeficientes é D, temos:
>
> $D \neq 0 \Leftrightarrow A$ é SPD (O sistema admite apenas a solução trivial.)
>
> $D = 0 \Leftrightarrow A$ é SPI (O sistema admite outras soluções além da trivial.)

Exemplos

a. Classificar o sistema A: $\begin{cases} 2x - y + 2z = 0 \\ x + 3y - z = 0 \\ y + 4z = 0 \end{cases}$

Calculando o determinante da matriz dos coeficientes desse sistema linear, temos:

$$D = 24 + 2 + 2 + 4 = 32$$



Como $D \neq 0$, concluímos que A é SPD e, portanto, admite somente a solução trivial (0, 0, 0).

b. Classificar o sistema B: $\begin{cases} 3x + 2y = 0 \\ 6x + 4y = 0 \end{cases}$

Calculando o determinante da matriz dos coeficientes desse sistema linear, temos:

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot 4 - 6 \cdot 2 = 0$$

Como $D = 0$, concluímos que B é SPI e, portanto, o sistema admite soluções além da trivial (0, 0). Algumas dessas soluções são: $(-2, 3)$, $(-4, 6)$ e $\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}\right)$

Observação

Em um sistema linear homogêneo indeterminado, as soluções diferentes da trivial são chamadas de soluções próprias.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

11. Determine o número real k, de modo que o sistema nas incógnitas x, y e z a seguir admita soluções diferentes da trivial.

$$\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ 3y - 2z = 0 \\ -2x + 5y + kz = 0 \end{cases}$$

Resolução

Esse sistema terá soluções além da trivial se, e somente se, for SPI. Para que isso ocorra, basta impor que o determinante D da matriz dos coeficientes seja nulo, isto é:

$$\begin{array}{ccccc} & & -6 & 20 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & 0 & 3 \\ -2 & 5 & k & -2 & 5 \\ & & 6k & 4 & 0 \end{array}$$

$$D = 0 \Leftrightarrow 6k + 4 - 6 + 20 = 0$$

$$\therefore k = -3$$

Assim, o sistema terá outras soluções, além da trivial, se, e somente se, $k = -3$.

12. Resolva o sistema linear homogêneo A:

$$A: \begin{cases} x + 2y - 3z = 0 \\ 3x - y + 2z = 0 \\ 2x - 3y + 5z = 0 \end{cases}$$

Resolução

Escalonando o sistema, temos:

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 0 \\ 3x - y + 2z = 0 \\ 2x - 3y + 5z = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} x + 2y - 3z = 0 \\ 0x - 7y + 11z = 0 \\ 0x - 7y + 11z = 0 \end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{cases} x + 2y - 3z = 0 \\ 0x - 7y + 11z = 0 \\ 0x + 0y + 0z = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} x + 2y - 3z = 0 \\ -7y + 11z = 0 \end{cases}$$

Note, portanto, que o sistema homogêneo A é equivalente a um sistema homogêneo escalonado com o número de equações menor que o número de incógnitas; logo, A é um sistema possível e indeterminado (SPI).

Resolvendo esse último sistema em função da variável livre z, obtemos:

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 0 \\ -7y + 11z = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} x + 2y - 3z = 0 & (1) \\ y = \frac{11z}{7} & (2) \end{cases}$$

Substituindo (2) em (1), obtemos:

$$x + 2 \cdot \frac{11z}{7} - 3z = 0 \Rightarrow x = -\frac{z}{7}$$

Concluímos que o conjunto solução do sistema é:

$$S = \left\{ \left(-\frac{z}{7}, \frac{11z}{7}, z\right), \text{ com } z \in \mathbb{R} \right\}$$

Notas:

1. Para $z = 0$, obtemos a solução trivial (0, 0, 0) do sistema.
2. Para $z \neq 0$, chegamos às soluções próprias do sistema; por exemplo, para $z = 7$, a solução é $(-1, 11, 7)$.

32. a. $S = \{(0, 0)\}$ 32. b. $S = \left\{\left(-\frac{7c}{5}, -\frac{4c}{5}, c\right), \text{ com } c \in \mathbb{R}\right\}$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Faça os exercícios no caderno.

31. Calculando o determinante da matriz dos coeficientes dos sistemas lineares homogêneos a seguir, classifique-os em SPD ou SPI.

a. Nas incógnitas x e y: $\begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ 3x + y = 0 \end{cases}$

31. a. –7; SPD

b. Nas incógnitas a, b e c: $\begin{cases} a + 2b + 3c = 0 \\ 2a - b + 2c = 0 \\ a + 12b + 11c = 0 \end{cases}$

31. b. 0; SPI

32. Resolva os sistemas do exercício anterior.

33. Considerando a equação apresentada, nas variáveis reais x, y e z, responda aos itens a seguir.

$$(x - y)^2 + (2y + z)^2 + (2x + z)^2 = 0$$

a. Quantos ternos ordenados (x, y, z) de números reais são soluções dessa equação? Justifique sua resposta.

b. Determine o conjunto solução dessa equação.

33. a. Resposta nas **Orientações Específicas** deste capítulo.

34. Discuta, em função do parâmetro real k, os sistemas nas incógnitas x e y.

33. b. $S = \left\{\left(-\frac{z}{2}, -\frac{z}{2}, z\right), \text{ com } z \in \mathbb{R}\right\}$

a. $\begin{cases} 5x + 3y = 0 \\ 10x + ky = 0 \end{cases}$

34. a. $k \neq 6 \Rightarrow$ SPD; $k = 6 \Rightarrow$ SPI

b. $\begin{cases} 2x + ky = 0 \\ kx + 8y = 0 \end{cases}$

34. b. $k \neq 4$ e $k \neq -4 \Rightarrow$ SPD; $k = 4$ ou $k = -4 \Rightarrow$ SPI

35. Discuta, em função do parâmetro real n, os sistemas nas incógnitas x, y e z.

a. $\begin{cases} 5x + 2y - 3z = 0 \\ 2x + nz = 0 \\ 3x - ny = 0 \end{cases}$

35. a. $n \neq 0$ e $n \neq -\frac{12}{5} \Rightarrow$ SPD; $n = 0$ ou $n = -\frac{12}{5} \Rightarrow$ SPI

b. $\begin{cases} 2x + y + nz = 0 \\ 4x - 2y = 0 \\ 2y + nz = 0 \end{cases}$

35. b. SPI para qualquer valor real de n.

36. Para que valor(es) do parâmetro real k o sistema homogêneo nas variáveis x, y e z admite apenas a solução trivial? 36. Qualquer número real k, com $k \neq 5$.

$$\begin{cases} 3x + y - z = 0 \\ 2x - y - z = 0 \\ kx - 2z = 0 \end{cases}$$

37. Determine o(s) valor(es) do parâmetro real a de modo que o sistema nas incógnitas x, y e z a seguir admita soluções diferentes da trivial. 37. $a = -4$

$$\begin{cases} 3x + 2y - 2z = 0 \\ 2x - 3y + 2z = 0 \\ x + 5y + az = 0 \end{cases}$$

38. A densidade de uma amostra de matéria é a razão entre sua massa e o volume por ela ocupado, nessa ordem, isto é:

$$\text{densidade} = \frac{\text{massa}}{\text{volume}}$$

38. a. $x - 3y = 0$; $x - 9z = 0$; $y - 3z = 0$

THINKSTOCK IMAGES/STOCKBYTE/ GETTY IMAGES

O mercúrio é um metal líquido à temperatura ambiente e tem densidade de 13,6 g/cm³. É considerado um metal pesado e tóxico para organismos vivos.

Durante uma experiência, fez-se variar a massa e o volume de uma substância de modo que sua densidade permanecesse constante.

Cada linha da tabela a seguir mostra a massa (em grama) e o volume (em centímetro cúbico) dessa substância em determinados estágios da experiência. Junte-se a um colega, e resolvam o que se pede.

Experiência sobre uma substância

Massa (g)	Volume (cm^3)
x	18
y	6
z	2

Elaborado para fins didáticos.

a. Descrevam, por meio de um sistema linear homogêneo, as relações entre as grandezas envolvidas nessa experiência.

b. Obtenham todos os ternos ordenados (x, y, z) de números reais positivos que satisfazem o sistema do item **a.** 38. b. $(9z, 3z, z)$, com $z \in \mathbb{R}_+^*$

39. Elabore um problema sobre sistema linear homogêneo que envolva uma situação do cotidiano e apresente $3x - 6y = 0$ como uma das equações. Em seguida, troque o problema elaborado com um colega para que um resolva o problema elaborado pelo outro. Por fim, analisem e discutam as resoluções. 39. Resposta pessoal.

Para retomar os conteúdos estudados, resolva os exercícios complementares 24 a 27.

O conteúdo do boxe **Trabalho e juventudes** aborda a atuação de um economista apresentando funções dessa profissão. Pode-se aprofundar o assunto, propondo aos estudantes que citem algumas habilidades que precisam ser desenvolvidas para alguém se tornar economista. O trabalho com esse boxe favorece o desenvolvimento da **competência geral 6**, pois os estudantes podem se apropriar de procedimentos adotados no mundo do trabalho.

TRABALHO E JUVENTUDES

Economista

Trabalho e juventudes: Pesquisa pessoal.

O economista, também conhecido como cientista econômico, tem como uma de suas atribuições estudar os fenômenos econômicos e socioeconômicos. Para que isso ocorra de modo eficiente, este profissional utiliza conceitos matemáticos, por exemplo, determinantes, para modelar o sistema econômico e verificar as possibilidades futuras, bem como realizar análises de risco. Essas atividades ajudam na previsão do mercado financeiro e na tomada de decisões mais assertivas.

DEAGREEZ/ISTOCK/GETTY IMAGES

A capacidade de calcular determinantes e aplicar esse conhecimento na prática é essencial. Esse conhecimento específico aumenta significativamente as oportunidades no mercado de trabalho para o economista, que possui um vasto campo de atuação.

No Brasil, o Dia do Economista é celebrado em 13 de agosto, em homenagem à regulamentação da profissão pelo presidente Getúlio Vargas em 13 de agosto de 1951.

Quer saber mais sobre a profissão de economista? Faça uma pesquisa na internet e compartilhe com os colegas um resumo das informações que você obteve.

Oriente os estudantes a consultar as páginas 6 e 7 para saber mais sobre este e os demais Objetivos de Desenvolvimento Sustentável.

ODS 9

8. Os determinantes e os levantamentos topográficos

IRYNA MELNYK/ISTOCK/GETTY IMAGES

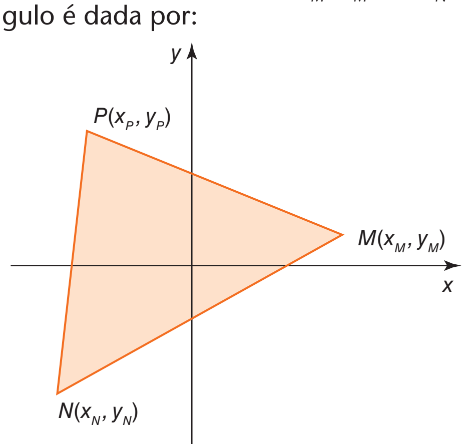
O teodolito é um instrumento usado na Topografia para medir ângulos.

A Topografia, uma ciência fundamentada na Geometria e na Trigonometria, tem como objetivo descrever e representar graficamente pequenas partes da superfície terrestre, sem levar em consideração a curvatura da Terra.

O levantamento topográfico de uma região é um conjunto de informações que dizem respeito à área, às dimensões lineares e angulares, à forma do contorno, à representação gráfica e à posição da região em relação a um plano tomado como referência. Esse levantamento é um dos primeiros procedimentos que antecedem pequenas ou grandes obras de engenharia, desde um simples loteamento até a construção de aeroportos, barragens, estradas etc.

Há diversos processos para o cálculo de áreas em um levantamento topográfico; um deles, chamado de processo analítico, tem estreita ligação com o cálculo de determinantes. Nesse processo, utiliza-se a fórmula apresentada a seguir, que é estudada em Geometria analítica.

Se, em relação a um sistema cartesiano ortogonal, os vértices de um triângulo MNP são dados por $M(x_M, y_M)$, $N(x_N, y_N)$ e $P(x_P, y_P)$, então a área A desse triângulo é dada por:



$$A = \frac{|D|}{2}, \text{ em que } D = \begin{vmatrix} x_M & y_M & 1 \\ x_N & y_N & 1 \\ x_P & y_P & 1 \end{vmatrix}$$

FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

Assim, para o cálculo da área de uma região com forma poligonal, o topógrafo estabelece referenciais que determinam um sistema de eixos cartesianos, obtendo as coordenadas dos vértices do polígono. Se o polígono é um triângulo, aplica-se uma vez a fórmula anterior; se o polígono tem mais de três lados, ele é dividido em triângulos, calculando-se a área de cada um pela fórmula anterior, e então adicionam-se as áreas obtidas.

Observação

O símbolo $|D|$ representa o módulo do determinante D.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Faça os exercícios no caderno.

40. Calculem a área de um triângulo *MNP* cujos vértices, em relação a um sistema cartesiano ortogonal, são dados por: $M(2, 8)$, $N(-1, 2)$ e $P(-4, -3)$. **40.** 1,5 unidade de área

41. Para a construção de um aeroporto foi feito um levantamento topográfico em uma região plana, à qual se associou um sistema cartesiano ortogonal cuja unidade adotada nos eixos é o quilômetro. Em relação a esse sistema, estabeleceu-se que a construção seria realizada em um terreno quadrilateral *EFGH*, com $E(-3, -2)$, $F(-4, 5)$, $G(2, 6)$ e $H(6, -1)$. Calcule, em quilômetro quadrado, a área do terreno destinado à construção do aeroporto. **41.** 55 km²

EDUCAÇÃO MIDIÁTICA

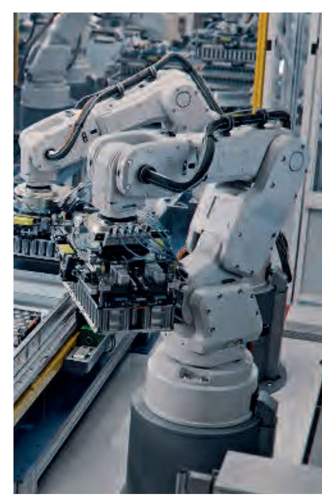
A tecnologia e as mudanças no mercado de trabalho

OBJETO DIGITAL **Infográfico clicável: Profissões envolvidas na produção de um robô**

Você já viu algum robô executando alguma tarefa, como levar um alimento até um cliente ou construir algum equipamento?

A robotização no trabalho já é uma realidade. O relatório *Future of Jobs 2023* do Fórum Econômico Mundial afirma que, até 2027, 42% das tarefas comerciais serão realizadas por robôs, um aumento de 8% em relação aos números de 2023. Isso indica que muitas atividades atualmente desenvolvidas pelos humanos poderão ser automatizáveis. Mas muitas novas profissões poderão surgir, em especial aquelas que exigem habilidades que não estão ao alcance das máquinas. E até para a criação e manutenção desses robôs, muitos profissionais estão envolvidos, por exemplo, para a criação de um robô aspirador são necessários diferentes profissionais, como programadores, engenheiros de diferentes áreas como automação, mecânico, elétrico, entre outros.

"Braços" automatizados em indústria de carros na Estônia. Foto de 2023.

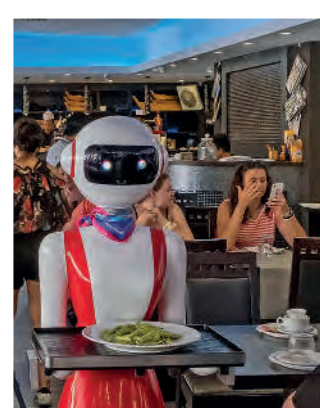


SWEETBUNFACTORY/ISTOCK/GETTY IMAGES

É fato: as profissões mudam com o decorrer do tempo. Isso porque elas estão relacionadas com as necessidades da sociedade, que, por sua vez, está em constante mudança. A **automatização de tarefas** é uma das responsáveis pelas transformações nas características das profissões, já que as máquinas são cada vez mais capazes de realizar atividades repetitivas antes executadas por pessoas.

Atualmente, com o desenvolvimento da Inteligência Artificial (IA), há indícios de que estamos entrando em uma quarta revolução tecnológica. Isso tem gerado discussões sobre quais serão seus impactos para o futuro da sociedade e das atividades profissionais.

O texto a seguir indica brevemente o que é a IA e onde podemos encontrá-la atualmente.



STEFANO MAZZOLA/SHUTTERSTOCK

Garçom robô em cafeteria na Itália. Foto de 2019.

A inteligência artificial

[...] Não há um conceito único consolidado sobre o que é inteligência artificial, algo que pode envolver diferentes graus de autonomia das máquinas. Em termos básicos, são sistemas computacionais que têm competências semelhantes às humanas, como o raciocínio e a aprendizagem. A meta dessas tecnologias é poder inferir como atingir um objetivo, tomando decisões ou produzindo previsões e recomendações. [...]

2. Auxilie os estudantes a organizarem esta atividade em etapas. Primeiro, é necessário realizar uma pesquisa sobre novas profissões e quais são suas funções. Oriente que os estudantes de cada dupla/grupo escolham uma profissão diferente. Depois, é necessário entender quais habilidades dispõem esse profissional. Por fim, devem elaborar o produto, escolhendo imagens que deixem a informação visualmente atraente.

Sistemas de inteligência artificial são usados nos mais variados âmbitos da vida social. Entre eles: sistemas biométricos de identificação, chatbots de atendimento ao cliente, filtragem de spams entre emails recebidos, análise de dados para a concessão de empréstimos bancários ou para elegibilidade a políticas públicas, listas de recomendação de conteúdo em plataformas de streaming, direcionamento de publicidade nas redes sociais, criação automatizada de textos e imagens, funcionamento de veículos autônomos, operação de infraestruturas militares. [...]

GAGLIONI, C. A inteligência artificial em 2023. E as perspectivas para 2024. **Nexo Jornal**, São Paulo, 29 dez. 2023. Disponível em: https://www.nexojornal.com.br/expresso/2023/12/29/a-inteligencia-artificial-em-2023-e-as-perspectivas-para-2024. Acesso em: 11 set. 2024.

É provável que você já tenha pensado na possibilidade de ficar sem emprego porque algum programa de computador será criado para realizar suas tarefas de maneira mais rápida e mais barata. Algumas vezes, essa preocupação faz sentido. No entanto, com os atuais avanços da tecnologia, novas profissões podem ser necessárias.

Observe exemplos de profissões que estão surgindo no mercado de trabalho.

[...] Detetive de dados

Investiga mistérios em *Big Data*.
"O que nossos dados estão nos contando? Que segredos contêm?" [...]

[...] Oficial de ética de *sourcing*

Investiga, acompanha, negocia acordos de bens e serviços para garantir que gastos indiretos da empresa (em energia, restos e relações sociais) estão alinhados com os padrões de ética de seus *stakeholders*. [...]

[...] Gestor de desenvolvimento de negócios de IA

O profissional define, desenvolve e implementa programas eficazes para acelerar vendas e negócios de inteligência artificial (IA). [...]

[...] Conselheiro de compromisso de saúde

Trabalha remotamente para oferecer coaching individual e conselhos de bem-estar e saúde para usuários de pulseiras inteligentes, que monitoram suas atividades e sinais físicos. [...]

[...] Analista de cybercidade

Garante a segurança e funcionalidade da cidade ao garantir o fluxo saudável de dados (ambientais, populacionais etc.) pelo sistema. [...]

21 (POSSÍVEIS) PROFISSÕES do futuro para conhecer hoje. **Guia do Estudante**, São Paulo, 4 maio 2022. Disponível em: https://guiadoestudante.abril.com.br/orientacao-profissional/21-possiveis-profissoes-do-futuro-para-conhecer-hoje-2. Acesso em: 11 set. 2024.

OBJETO DIGITAL Infográfico clicável: A evolução da Inteligência Artificial

Atividades

Para saber mais sobre o desenvolvimento da IA, proponha aos estudantes o **Infográfico clicável: A evolução da Inteligência Artificial**.

Faça as atividades no caderno.

Junte-se a dois ou três colegas para trocar ideias e impressões sobre os questionamentos a seguir e realizar a atividade.

1. Respostas pessoais. Possibilidades de outras profissões: analista de *Big Data*, operador de *drones*, *web designer*, entre outras.

1. Vocês conhecem as profissões citadas no texto da página anterior? Consideram alguma delas interessante? Pesquisem outras profissões recentes ligadas à tecnologia.
2. Elaborem um conteúdo para divulgação das novas profissões da atualidade. Vocês podem criar um cartaz e/ou fôlder digital explicando o que faz cada profissional e quais são as habilidades que precisam ser desenvolvidas para que exerçam esses ofícios.

3. São sistemas computacionais que têm competências semelhantes às humanas, como o raciocínio e a aprendizagem.

3. Expliquem, em poucas palavras, o que é a Inteligência Artificial. Citem exemplos.
4. A Matemática é fundamental para o desenvolvimento da Inteligência Artificial. Por meio de suas diversas aplicações, é possível criar modelos e algoritmos que permitem que as máquinas aprendam e se tornem mais eficientes em suas tarefas. Pesquisem diferentes aplicações da IA. Depois, considerando a comunidade do bairro ou da escola, identifiquem algum problema que poderia ser resolvido com o auxílio de um programa que usa inteligência artificial, por exemplo, a automatização do controle de presença dos estudantes. Construam uma proposta de aplicação e apresentem aos professores e colegas.

4. Pesquisa e resposta pessoal.

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

Faça os exercícios no caderno.

1. Um cliente de um banco sacou R$ 80,00 em um caixa eletrônico, em cédulas de R$ 5,00, R$ 10,00 e R$ 20,00, com pelo menos uma cédula de cada valor. Indicando, respectivamente, por *x*, *y* e *z* os números de cédulas de R$ 5,00, R$ 10,00 e R$ 20,00, recebidas nesse saque, faça o que se pede.

1. a. $5x + 10y + 20z = 80$

a. Determine uma equação que relacione *x*, *y* e *z* com a quantia sacada por esse cliente.

b. No contexto desse enunciado, *x*, *y* e *z* só podem assumir valores naturais não nulos, pois representam quantidades não nulas de cédulas. Nesse contexto, determine o número de soluções (*x*, *y*, *z*) da equação obtida no item **a**. **1. b.** 9 soluções

2. a. Qualquer número real *k*.

2. Considerando o sistema *S*: $\begin{cases} x - y + 2z = 9 \\ 2x - y - z = 4 \end{cases}$, nas variáveis *x*, *y* e *z*, responda aos itens seguintes.

a. Mostre que o terno ordenado $(3k - 5, 5k - 14, k)$ é solução de *S* para qualquer valor real de *k*.

b. Obtenha três soluções distintas do sistema *S*.

2. b. (−5, −14, 0); (1, −4, 2); (−8, −19, −1)

3. Substitua o parâmetro *k* por um coeficiente real tal que o sistema linear tenha a classificação indicada.

a. SPD (sistema possível e determinado)

3. a. qualquer número real *k*, com $k \neq 0$

$$\begin{cases} 3x + 2y = 4 \\ k \cdot y = 6 \end{cases}$$

b. SPI (sistema possível e indeterminado)

$$\begin{cases} x + 5y = 7 \\ k \cdot y = 0 \end{cases}$$

3. b. $k = 0$

c. SI (sistema impossível)

$$\begin{cases} 5x - y = 4 \\ k \cdot y = 6 \end{cases}$$

3. c. $k = 0$

4. Resolva, por escalonamento, cada um dos sistemas e classifique-os em SPD, SPI ou SI.

a. $\begin{cases} 2x + y + z = 7 \\ 4x + y - 3z = 5 \\ 2x + 3y + 2z = 7 \end{cases}$ **4. a.** SPD; $S = \{(3, -1, 2)\}$

b. $\begin{cases} 3x - y + 2z = 3 \\ x + 2y + z = 1 \\ 6x + 5y + 5z = 6 \end{cases}$ **4. b.** SPI; $S = \left\{\left(\frac{7 - 5z}{7}; -\frac{z}{7}, z\right), \text{com } z \in \mathbb{R}\right\}$

c. $\begin{cases} 3x + 2y - 5z = 3 \\ x + 3y = 1 \\ 2x - y - 5z = 1 \end{cases}$ **4. c.** SI; $S = \varnothing$

d. $\begin{cases} x + 4y = -3 \\ x - y = 2 \\ 3x + 7y = -4 \end{cases}$ **4. d.** SPD; $S = \{(1, -1)\}$

e. $\begin{cases} 3x + 4y - 4z = 11 \\ 2x + 3y - 2z = 8 \\ 7x + 2y - 5z = 11 \end{cases}$ **4. e.** SPD; $S = \{(1, 2, 0)\}$

5. Em uma sessão de cinema havia 300 espectadores. Uma parte deles pagou R$ 30,00 por ingresso, outra parte pagou R$ 15,00 por ingresso, e os espectadores restantes receberam os ingressos gratuitamente, em uma promoção. Sabe-se que a bilheteria arrecadou R$ 6.120,00 com a venda dos ingressos para essa sessão e que o número de pessoas que pagaram R$ 15,00 foi o dobro do número de pessoas que receberam o ingresso gratuitamente. Quantas pessoas pagaram R$ 30,00 por ingresso? **5.** 156 pessoas

6. Um lava-jato cobra preços diferentes, de acordo com o tamanho do carro: pequeno, médio e grande. O quadro a seguir descreve o número de carros de cada tamanho lavados em dois dias consecutivos, em que os preços não se alteraram.

Número de carros lavados

Tamanho	2ª feira	3ª feira
Pequeno	8	15
Médio	6	5
Grande	2	4

Elaborado para fins didáticos.

Indicando por *p*, *m* e *g* os preços, em real, da lavagem dos carros pequeno, médio e grande, respectivamente, e sabendo que na 2ª feira o faturamento desse lava-jato foi de R$ 580,00, e na 3ª foi de R$ 850,00, assinale a alternativa correta. **6.** alternativa **c**

a. $p = 310 - 6m$

b. $g = 23m - 950$

c. $p + g = 18m - 640$

d. $g - p = 30m - 1.150$

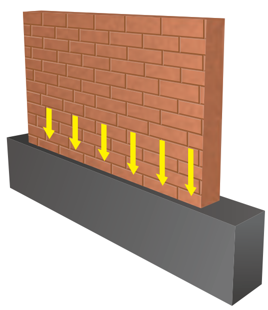
e. $g = 2p$

7. Sobre uma viga horizontal será construída uma parede. Um estudo sobre a resistência dessa viga mostrou que a deformação *y*, em milímetro, provocada no ponto médio da viga, em função da massa *x* que ela suporta, em tonelada, pode ser descrita pela

O **exercício complementar 9** favorece a integração com a área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias ao apresentar a predação associada a sequências matemáticas. Se possível, promova a participação do professor de Biologia para uma análise da dinâmica da vida quanto as relações ecológicas, seu equilíbrio e a interferência do ser humano, considerando os cálculos matemáticos. Esse exercício também contribui para o **ODS 15**.

função $y = ax^2 + bx + c$, em que a, b e c são constantes reais, com $a \neq 0$. O quadro a seguir descreve algumas dessas deformações.

Deformação em função da massa	
Massa (em t)	**Deformação (em mm)**
0	0
4	8,8
5	11,25


ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

Se a parede a ser construída terá 6 toneladas, qual será a deformação no ponto médio da viga? **7.** 13,8 mm

8. (Enem) Três amigos, A, B e C, se encontraram em um supermercado. Por coincidência, estavam comprando os mesmos itens, conforme o quadro.

Amigos	Arroz (kg)	Feijão (kg)	Macarrão (kg)
A	3	2	4
B	2	3	3
C	2	2	2

Os amigos estavam muito entretidos na conversa e nem perceberam que pagaram suas compras, pegaram seus trocos e esqueceram seus comprovantes. Já longe do supermercado, "A" lembrou que precisava saber o quanto pagou por um quilo de arroz e dois quilos de macarrão, pois estava comprando para sua vizinha e esperava ser ressarcido. "B", que adorava desafios matemáticos, disse que pagou suas compras com R$ 40,00 e obteve troco de R$ 7,30, e que conseguiria determinar o custo desses itens se os amigos dissessem como pagaram e quanto foram seus respectivos trocos. "A" disse que pagou com R$ 40,00 e obteve troco de R$ 4,00, e "C" pagou com R$ 30,00 e obteve troco de R$ 5,40.

A vizinha de "A" deve a ele pela compra, em reais, o valor de **8.** alternativa **c**

a. 8,10.
b. 10,00.
c. 11,40.
d. 12,00.
e. 13,20.

9. A predação ou predatismo é um tipo de relação ecológica em que um indivíduo de uma espécie (predador) se alimenta de outro de uma espécie diferente (presa). Por exemplo, nas savanas africanas, o leão é um dos predadores das zebras. Embora pareça cruel, essa relação é fundamental para a preservação das espécies. Imagine se nas savanas africanas fossem eliminados todos os animais carnívoros. A população de herbívoros, como as zebras, cresceria desordenadamente, o que acarretaria no extermínio dos vegetais e, consequentemente, no extermínio da população de herbívoros. Raciocínio análogo pode ser feito supondo-se a eliminação das presas dos carnívoros.

A natureza, por si só, mantém o ponto de equilíbrio, preservando as espécies de predadores e de presas, porém a interferência do ser humano tem causado a extinção de muitas espécies. Suponha que no ano de 1900, em determinada região, as populações de leões e de zebras, juntas, tinham 2.200 indivíduos e n anos depois a população de leões havia dobrado e a de zebras havia aumentado 10 indivíduos por ano, totalizando, juntas, 3.250 animais. Quando isso ocorreu, um biólogo alertou para o risco de extinção das zebras, pois havia apenas 50 zebras a mais que leões. Em que ano isso ocorreu e quantos leões e quantas zebras havia, então, na região?

9. O fato ocorreu em 1925, e havia 1.600 leões e 1.650 zebras na região.

10. Um agrimensor mediu três terrenos, concluindo que a área dos três juntos é 60 hectares, a área intermediária tem 45 hectares a menos que o dobro da área maior, e a diferença entre a área maior e a menor tem 5 hectares a mais que o dobro da área intermediária. Essas conclusões foram apresentadas em um documento para um inventário. Ao ler esse documento, o juiz, que sabia Matemática, exigiu novas medições dos terrenos, mostrando de forma irrefutável que havia erro nas informações documentadas.

Mostre que há erro nessas informações.

10. Resposta nas **Orientações Específicas** deste capítulo.

11. Um jogo de *videogame* simula uma partida de *paintball* entre dois pelotões virtuais. Nesse tipo de jogo, cada competidor comanda um pelotão de soldados virtuais munidos, cada um, de uma arma de *paintball*, que lança bolinhas cheias de tinta que estouram ao acertar o alvo. Quando um dos soldados virtuais é atingido por uma bolinha, seu corpo é marcado pela tinta, o que faz esse soldado ser eliminado do jogo. O tempo de jogo é estabelecido pelos dois competidores. Ao final desse tempo, será vencedor aquele que tiver o menor número de soldados virtuais eliminados.

João e Maria iniciaram uma partida desse jogo com o mesmo número de soldados em cada um dos dois pelotões. Ao final da partida, o pelotão de João havia perdido 6 soldados a mais que o de Maria; e o número de soldados remanescentes do Pelotão de Maria havia diminuído em relação ao início, mas era o dobro do número de soldados remanescentes do pelotão de João. Qual é o menor número possível de soldados de cada pelotão no início da partida? **11.** 13

12. Todas as letras que aparecem nos sistemas lineares a seguir representam incógnitas. Calcule o determinante da matriz dos coeficientes de cada um deles, classificando-o em: sistema possível e determinado (SPD), sistema possível e indeterminado (SPI) ou sistema impossível (SI).

a. $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 4x - 2y = 3 \end{cases}$ **12. a.** zero; SI

b. $\begin{cases} 3x - y = 5 \\ -9x + 3y = -15 \end{cases}$ **12. b.** zero; SPI

c. $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ y + 2z = 2 \\ 2x + z = 4 \end{cases}$ **12. c.** 9; SPD

13. Resolva, em $\mathbb{R}$, as equações.

a. $\begin{vmatrix} 2 & x-1 & 0 \\ -1 & x+1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 4$ **13. a.** $S = \{2\}$

b. $\begin{vmatrix} 3 & x & -2 \\ x+1 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -12$ **13. b.** $S = \varnothing$

c. $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 4 & x \\ 4 & 0 & x \end{vmatrix} = 0$ **13. c.** $S = \mathbb{R}$

14. Em um mesmo instante foram medidas as temperaturas em duas regiões A e B, obtendo-se, respectivamente, os resultados x e y, em grau Celsius. Essas medidas podem ser relacionadas pelas equações: $3x - 2y = -1$ e $6x + ky = 6$, em que k é uma constante real. Pode-se concluir que: **14.** alternativa **d**

a. $k = -1$
b. $k \neq -1$
c. $k = 2$
d. $k \neq -4$
e. $k \neq 0$

15. Durante uma viagem, um motorista abasteceu o tanque de seu carro *flex* em dois postos de combustível. Em cada posto, abasteceu com gasolina e etanol, conforme descreve a tabela a seguir, em que k representa um número real não negativo.


BUNYARIT/SHUTTERSTOCK

Abastecimento de combustível

Posto	Gasolina (L)	Etanol (L)	Custo (R$)
1º posto	20	10	144,00
2º posto	k	15	210,00

Elaborado para fins didáticos.

Se o preço do litro de cada combustível foi o mesmo nos dois postos, conclui-se que: **15.** alternativa **e**

a. $k = 24$
b. $k \neq 24$
c. $k = 28$
d. $k \neq 28$
e. $k \neq 30$

16. a. $p \neq 10 \Rightarrow$ SPD;
$p = 10$ e $q = 4 \Rightarrow$ SPI;
$p = 10$ e $q \neq 4 \Rightarrow$ SI

16. b. $p \neq 1$ e $p \neq -1 \Rightarrow$ SPD;
$p = 1$ e $q = -3 \Rightarrow$ SPI;
$p = 1$ e $q \neq -3 \Rightarrow$ SI;
$p = -1$ e $q = 1 \Rightarrow$ SPI;
$p = -1$ e $q \neq 1 \Rightarrow$ SI

16. Faça a discussão dos sistemas a seguir, segundo os valores reais dos parâmetros p e q.

a. Nas incógnitas x e y: $\begin{cases} 5x + 2y = 2 \\ px + 4y = q \end{cases}$

b. Nas incógnitas x, y e z: $\begin{cases} x + y - 2z = 3 \\ 2x + py - z = 0 \\ x + pz = q \end{cases}$

17. (Fuvest-SP) No sistema linear $\begin{cases} ax - y = 1 \\ y + z = 1 \\ x + z = m \end{cases}$, nas variáveis x, y e z, a e m são constantes reais. É correto afirmar: **17.** alternativa **a**

a. No caso em que $a = 1$, o sistema tem solução se, e somente se, $m = 2$.

b. O sistema tem solução, quaisquer que sejam os valores de a e de m.

c. No caso em que $m = 2$, o sistema tem solução se, e somente se, $a = 1$.

d. O sistema só tem solução se $a = m = 1$.

e. O sistema não tem solução, quaisquer que sejam os valores de a e de m.

18. As funções $y = 2x + 4$, $y = 3x - p$ e $y = mx + 2$, cujas variáveis são x e y, e m e p são parâmetros reais, representam, respectivamente, retas r, s e t do plano cartesiano. Determine:

a. m para que as retas r e t sejam concorrentes; **18. a.** $m \neq 2$

b. m e p para que as retas s e t sejam paralelas distintas; **18. b.** $m = 3$ e $p \neq -2$

c. m e p para que as retas s e t sejam paralelas coincidentes; **18. c.** $m = 3$ e $p = -2$

d. m de modo que para $p = 2$ as retas r, s e t tenham um ponto em comum. **18. d.** $m = \frac{7}{3}$

19. Para a produção de x garrafas plásticas, um fabricante teve um custo fixo de R\$ 5.000,00 mais um custo de R\$ 0,05 por garrafa produzida. Assim, o custo total C de produção, em real, é dado por:

$$C(x) = 5.000 + 0{,}05x$$

Se toda a produção for vendida, ao custo de k reais por garrafa, o lucro, em real, será dado pela função $L(x) = kx - C(x)$, ou seja:

$$L(x) = kx - 5.000 - 0{,}05x \Rightarrow$$
$$\Rightarrow L(x) = (k - 0{,}05)x - 5.000$$

Representando as funções C e L em um mesmo plano cartesiano xOy, verifica-se que o gráfico de C é formado por pontos da reta de equação $y = 5.000 + 0{,}05x$ e o de L é formado por pontos da reta de equação:

$$y = (k - 0{,}05)x - 5.000$$

KURGA/ISTOCK/GETTY IMAGES

Envazamento de água em garrafas plásticas.

a. Para que valor de k as retas que contêm os gráficos de C e L são paralelas distintas? **19. a.** $k = 0{,}1$

b. Para o valor de k obtido no item **a**, quantas garrafas devem ser vendidas para que o fabricante tenha lucro? **19. b.** Devem ser vendidas mais de 100.000 garrafas.

20. (Ufac) O sistema linear $\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ px + y = q \\ x - 6y = 8 \end{cases}$, nas variáveis x e y, em que p e q são parâmetros reais, é impossível se:

a. $p = \dfrac{q+1}{2}$

b. $p \neq q + 3$

c. $p = q$

d. $q \neq 5p - 2$

e. $q \neq 2p - 1$

20. alternativa **e**

22. $a \neq \frac{4}{3} \Rightarrow$ SPD; $a = \frac{4}{3}$ e $b = 18 \Rightarrow$ SPI; $a = \frac{4}{3}$ e $b \neq 18 \Rightarrow$ SI

21. Junte-se a um colega, e discutam o sistema linear a seguir, nas incógnitas x, y, t e z, em função do parâmetro real a.

$$\begin{cases} x + 2y - t + z = 5 \\ x + y + 2t - z = 1 \\ 3x + 4y + at - z = 1 \end{cases}$$

21. para $a \neq 3$, SPI; para $a = 3$, SI

22. Discuta, em função dos parâmetros reais a e b, o sistema linear $\begin{cases} x + ay + az = 6 \\ 3x + 3ay + 4z = b \end{cases}$ nas variáveis x, y e z.

23. Por terem comprado a mesma marca de café e açúcar no mesmo dia e no mesmo supermercado, João, Carlos e Vera pagaram o mesmo preço por quilograma de café e o mesmo preço por quilograma de açúcar. João gastou R\$ 48,00em 1 kg de café e 2 kg de açúcar; Carlos gastou R\$ 87,00 em 2 kg de café e n kg de açúcar, e Vera gastou R\$ 126,00 em 3 kg de café e $(n + 1)$ kg de açúcar. Nessas condições, conclui-se que:

a. $n = 1$

b. $n = 2$

c. $n = 3$

d. $n = 4$

e. $n = 5$

23. alternativa **c**

24. Resolva os sistemas lineares homogêneos.

a. $\begin{cases} x + 2y = 0 \\ 2x - 4y = 0 \end{cases}$ **24. a.** $S = \{(0, 0)\}$

b. $\begin{cases} x + y = 0 \\ 2x + 2y = 0 \\ 3x + 3y = 0 \end{cases}$ **24. b.** $S = \{(-y, y)$, com $y \in \mathbb{R}\}$

25. Discuta o sistema linear nas incógnitas x, y e z a seguir em função do parâmetro real p.

$$\begin{cases} 2x + y + pz = 0 \\ x + 5y + 2z = 0 \\ x + 5y + z = 0 \end{cases}$$

25. SPD para qualquer valor real de p.

26. Obtenha os valores reais de k de modo que o sistema a seguir, nas variáveis x, y e z, admita soluções diferentes de (0, 0, 0).

$$\begin{cases} x - 2y - 2z = 0 \\ 3x - ky + 2z = 0 \\ kx + y + z = 0 \end{cases}$$

26. $k = -\frac{1}{2}$ ou $k = -2$

27. a. $\begin{cases} 3kx - 4y = 0 \\ 2kx - 4z = 0 \\ 2ky - 3kz = 0 \end{cases}$

27. Um automóvel percorreu um trecho de uma estrada com velocidade constante. Dividindo a distância percorrida pelo automóvel nesse trecho em três partes, x, y e z, em quilômetro, o tempo, em minuto, transcorrido nesses trechos foi 4, $3k$ e $2k$, respectivamente.

a. Considerando as incógnitas x, y e z, equacione esse problema por meio de um sistema linear homogêneo.

b. Discuta o sistema formado no item **a** em função do parâmetro real k, com $k \in \mathbb{R}^*_+$.

27. b. O sistema é SPI para qualquer valor real positivo de k.

Esta seção pode ser utilizada como um instrumento de autoavaliação. Após resolverem as atividades propostas nelas, possibilite aos estudantes compartilharem com os colegas as respostas.

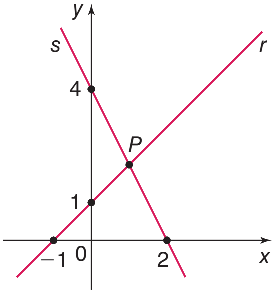
VERIFIQUE O QUE APRENDEU NO CAPÍTULO 4

Além do processo de avaliação promovido pelo professor, é importante que você, estudante, realize uma autoavaliação. O objetivo desse instrumento é mensurar seu nível de aprendizagem em relação ao assunto desenvolvido no capítulo. Para ajudá-lo nessa tarefa, apresentamos as seguintes questões.

1. Em uma caixa há esferas de massas iguais e cubos de massas iguais. Três esferas e dois cubos juntos têm a mesma massa de duas esferas e quatro cubos juntos. Nessas condições, podemos concluir que a massa de uma esfera é: **1.** alternativa **a**

a. O dobro da massa de um cubo.
b. Metade da massa de um cubo.
c. Igual à massa de um cubo.
d. O triplo da massa de um cubo.
e. A terça parte da massa de um cubo.

2. No plano cartesiano a seguir estão representadas as retas *r* e *s*.



ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

a. Aplicando o conceito de função afim, obtenha a equação de cada uma dessas retas. **2. a.** $s: y = -2x + 4$; $r: y = x + 1$

b. Qual é a classificação do sistema formado pelas equações dessas retas, SPD, SPI ou SI? Por quê? **2. b.** Como as retas *r* e *s* são concorrentes, temos que o sistema formado por suas equações é possível e determinado (SPD).

c. Obtenha as coordenadas do ponto *P*, comum a essas retas. **2. c.** $r \cap s = \{(1,2)\}$

3. Os ingressos para um espetáculo teatral são vendidos a três preços diferentes, de acordo com o setor escolhido pelo espectador. O ingresso para o setor *A* custa R$ 20,00 a mais que a metade do preço do ingresso para o setor *B*, e o ingresso para o setor *C* custa R$ 30,00 a mais que o preço para o setor *B*. Em determinado dia, a bilheteria do teatro arrecadou R$ 45.900,00 com a venda de 210 ingressos para o setor *A*, 180 para o setor *B* e 50 para o setor *C*. Qual é o preço do ingresso para cada setor? **3.** *A*: R$ 80,00; *B*: R$ 120,00; *C*: R$ 150,00.

4. Ao final de cada três dias, o gerente de um posto de combustível presta contas ao proprietário. Certo dia o proprietário discordou da tabela apresentada pelo gerente, alegando que os dados eram incompatíveis. Mostre que o proprietário tinha razão.

4. Como esse sistema é impossível, conclui-se que os dados apresentados na tabela são incompatíveis, portanto, o gerente tinha razão.

Vendas de combustível, em hectolitros

Dia da semana	Gasolina	Etanol	Diesel	Faturamento (R$)
2ª feira	15	30	45	17.850,00
3ª feira	24	24	48	19.608,00
4ª feira	18	27	45	16.470,00

Elaborado para fins didáticos.

5. (Fuvest-SP) O sistema linear: $\begin{cases} x + \alpha y - 2z = 0 \\ x + y + z = 1 \\ x - y - z = 3 \end{cases}$ não admite solução se α for igual a: **5.** alternativa **e**

a. 0 **b.** 1 **c.** −1 **d.** 2 **e.** −2

6. Em uma olimpíada, os atletas de certo país conquistaram medalhas de ouro, prata e bronze, totalizando 36 medalhas. O número de medalhas de ouro foi metade da soma do número de medalhas de prata e de bronze; e o número de medalhas de prata foi o dobro do de bronze. Com base nas informações, qual alternativa contém o número de cada tipo de medalhas conquistadas por esses atletas? **6.** alternativa **c**

a. 8 medalhas de ouro, 12 de prata e 16 de bronze

b. 8 medalhas de ouro, 16 de prata e 12 de bronze

c. 12 medalhas de ouro, 16 de prata e 8 de bronze

d. 16 medalhas de ouro, 12 de prata e 8 de bronze

e. 12 medalhas de ouro, 8 de prata e 16 de bronze

Ferramenta de estudo

Ao término da resolução das questões, você deve copiar no caderno a ficha a seguir, que lhe fornecerá uma visão geral sobre o seu desempenho neste capítulo. Você deve assinalar com um X a cada célula se a resposta for "sim".

A ficha de autoavaliação é apresentada neste momento, mas você pode copiá-la e preenchê-la sempre que considerar necessário verificar sua aprendizagem, adequando o número de colunas ao número de exercícios.

Se teve dificuldades ou não resolveu algum exercício, retome os conteúdos abordados no capítulo. Após algumas tentativas, anote as dúvidas e converse com um colega que possa ajudá-lo. Se mesmo assim a dúvida persistir, pergunte ao professor na aula seguinte. Gerencie bem seu tempo de estudo em casa e estabeleça metas diárias alcançáveis, planejando seus estudos passo a passo.

ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

Ficha de autoavaliação

Sobre o exercício...	1	2	3	4	5	6
Li, compreendi o texto, identifiquei os dados principais do problema e consegui resolvê-lo.						
Li, compreendi o texto, identifiquei os dados principais do problema, mas não consegui resolvê-lo sozinho. Pedi ajuda.						
Li, compreendi o texto, identifiquei os dados principais do problema, mas não consegui resolvê-lo sozinho. Não pedi ajuda. Até agora não sei resolvê-lo.						
Tive dificuldade para compreender o texto do problema e não soube relacionar os dados. Pedi ajuda.						
Tive dificuldade para compreender o texto do problema e não soube relacionar os dados. Não pedi ajuda. Até agora não sei resolvê-lo.						
Não consegui resolvê-lo.						

MODELO MODELO

A **abertura** possibilita desenvolver uma conversa acerca do desenvolvimento tecnológico e do uso de GPS para diferentes finalidades, inclusive, para uso militar. Em uma abordagem interdisciplinar com a área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas, pode-se desenvolver os **TCTs Vida familiar e social** e **Educação em direitos humanos** e o **ODS 9**, ao propor uma pesquisa e conversa acerca do uso da tecnologia (de informação, de localização, ou militar) em diferentes conflitos contemporâneos. As atividades assim trabalhadas favorecem o desenvolvimento das **competências gerais 9** e **10**.

CAPÍTULO 5

Geometria analítica: ponto e reta

Oriente os estudantes a consultar as páginas 6 e 7 para saber mais sobre este e os demais Objetivos de Desenvolvimento Sustentável.

ODS 9

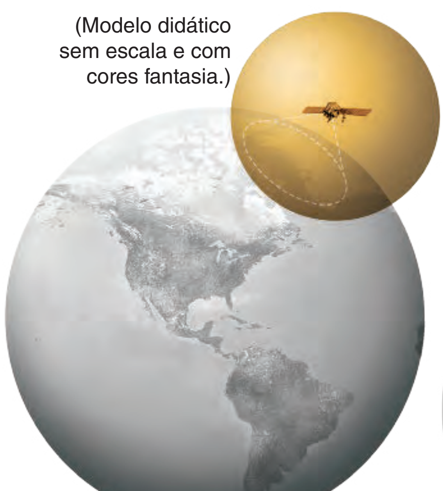
Criado inicialmente para uso militar, o Sistema de Posicionamento Global (GPS) é um sistema de coordenadas que se popularizou e hoje é usado por milhões de pessoas para localizar endereços, rotas e pontos na superfície da Terra.

Quando um receptor de GPS, na superfície da Terra, capta sinais eletromagnéticos enviados pelos satélites, esses satélites calculam o tempo que o sinal levou para chegar até o receptor. Esses cálculos permitem converter os dados em medidas de altitude, **latitude** e **longitude**, possibilitando a determinação precisa (ou quase exata) da localização do ponto.

Latitude: Distância angular entre um ponto qualquer da esfera terrestre e o equador, contada sobre o meridiano que passa por esse ponto.

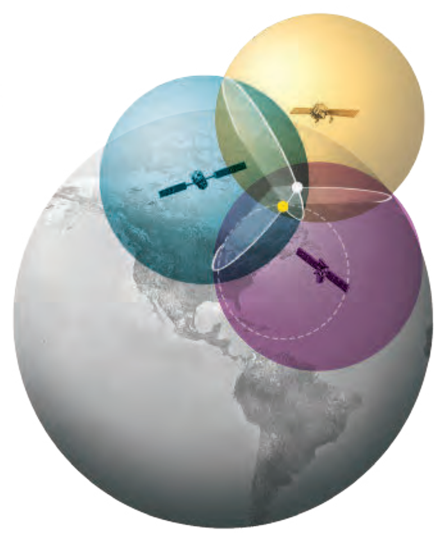
Longitude: Distância angular entre o meridiano 0° (Greenwich) e qualquer ponto da Terra.

(Modelo didático sem escala e com cores fantasia.)



O receptor GPS detecta um satélite e calcula a distância até ele, determinando o raio da esfera cujo centro é o satélite. A intersecção da superfície dessa esfera com a superfície da Terra é uma circunferência C_1, onde o ponto desejado está localizado.

Quando um segundo satélite é detectado, o receptor calcula a distância até ele e uma segunda esfera é determinada. A intersecção da superfície dessa esfera com a da primeira é uma circunferência C_2, que intercepta a superfície da Terra em dois pontos distintos.



Um terceiro satélite define uma terceira esfera cuja superfície intercepta a circunferência C_2 em dois pontos distintos. Um dos pontos está acima da superfície da Terra e é descartado, enquanto o outro, na superfície da Terra, indica a localização correta do ponto procurado.

ILUSTRAÇÕES: ÉBER EVANGELISTA/ARQUIVO DA EDITORA

Além da teoria

1. Você já usou algum aplicativo de GPS para se localizar? Em caso afirmativo, comente com os colegas de turma sobre isso. **Além da teoria: 1.** Resposta pessoal.
2. Quais são as coordenadas usadas para localizar um ponto na superfície da Terra? E no espaço aéreo? **2.** Latitude e longitude; Latitude, longitude e altitude.
3. Você sabe quais são as coordenadas do endereço onde fica sua casa? Em caso negativo, consulte um *site* ou aplicativo de mapas para saber as coordenadas desse endereço. **3.** Resposta pessoal.

Representação artística de René Descartes (1596-1650). Descartes rompeu com as tradições clássicas da Geometria grega e criou a Geometria analítica.

Sugerimos a leitura do livro de Nuno Crato, **A Matemática das coisas: do papel A4 aos cordões de sapatos, do GPS às rodas dentadas**. Neste livro, o autor narra histórias de matemáticos e de situações cotidianas que envolvem a Matemática, como, por exemplo, a orientação por GPS e confusões em rodovias por não seguirem regras da Geometria cartesiana.

1. Introdução

Esclareça que a Geometria analítica é o estudo das figuras geométricas associadas a um sistema de coordenadas. Assim, as figuras geométricas podem ser representadas por meio de coordenadas, equações ou inequações. Apresente os exemplos expostos nessa introdução.

Em qualquer ciência, o entendimento de um objeto de estudo é facilitado quando o representamos por mais de um registro (desenhos, equações, símbolos etc.) e transitamos por esses registros, de modo que a carência de um seja suprida pelo outro.

Um exemplo notável dessa prática é a Geometria analítica, concebida pelo matemático francês René Descartes. Transitando entre Álgebra e Geometria euclidiana, a Geometria analítica possibilita a representação de figuras geométricas por meio de coordenadas, equações ou inequações.

Por exemplo, o par ordenado (5, 4) representa o ponto P destacado na figura 1, a seguir; a equação $y = -2x + 6$ representa a reta r da figura 2; e a inequação $x \geqslant 2$ representa o semiplano α da figura 3.

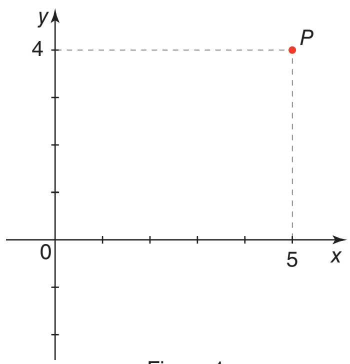


Figura 1

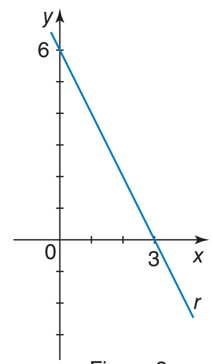


Figura 2

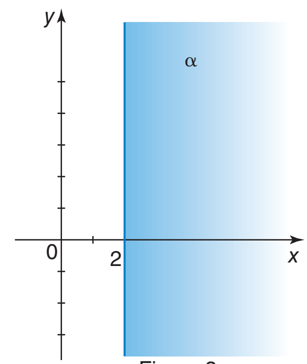


Figura 3

Sintetizando, podemos afirmar:

A **Geometria analítica** estuda as figuras geométricas associadas a um sistema de coordenadas.

Em vários assuntos dos anos escolares anteriores aplicamos conceitos da Geometria analítica, como na representação gráfica de funções no plano cartesiano. Agora, vamos estudá-los mais detalhadamente e aprender novos conceitos.

2. Distância entre dois pontos

Na figura 1 a seguir, os pontos A, B, C e D pertencem aos eixos coordenados, e nas figuras 2 e 3 os segmentos $\overline{EF}$ e $\overline{HG}$ são, respectivamente, paralelos aos eixos Ox e Oy.

Qual é a distância entre os pontos A e B? E a distância entre C e D?

Qual é a distância entre os pontos E e F? E a distância entre G e H?

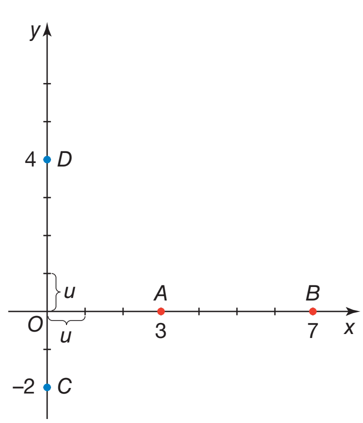


Figura 1

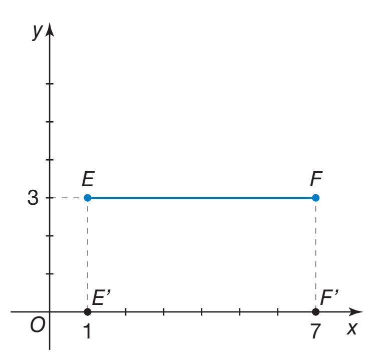


Figura 2

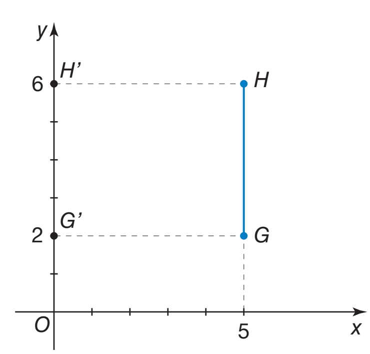


Figura 3

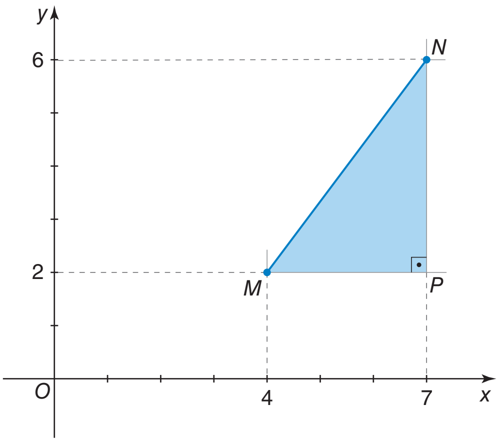
Observamos que quatro unidades ***u*** separam os pontos A e B, por isso dizemos que a distância entre A e B é 4 ou que o comprimento do segmento $\overline{AB}$ é 4. A unidade de medida de comprimento u fica subentendida como a mesma adotada nos eixos coordenados. Essa distância, que indicaremos por AB, pode ser calculada como o módulo da diferença entre as abscissas de A e B, isto é, $AB = |7 - 3| = |3 - 7| = 4$ ou, simplesmente, a abscissa maior menos a menor: $AB = 7 - 3 = 4$

Analogamente, temos: $CD = |4 - (-2)| = |-2 - 4| = 6$ ou, simplesmente, a ordenada maior menos a menor: $CD = 4 - (-2) = 6$

Como o segmento $\overline{EF}$ é paralelo ao eixo Ox, seu comprimento é o mesmo de sua projeção ortogonal $\overline{E'F'}$ sobre esse eixo, pois o quadrilátero $EFF'E'$ é um retângulo, assim: $EF = E'F' = 7 - 1 = 6$

Analogamente, temos: $GH = G'H' = 6 - 2 = 4$

Consideremos, finalmente, o cálculo da distância entre os dois pontos M e N tal que o segmento $\overline{MN}$ não seja paralelo a nenhum dos eixos coordenados; por exemplo, $M(4, 2)$ e $N(7, 6)$. Representando o segmento $\overline{MN}$ no plano cartesiano e traçando por M e N as retas paralelas aos eixos coordenados, obtemos o triângulo retângulo MNP.



ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

Nesse caso, para calcular a distância MP basta aplicar o teorema de Pitágoras:

$$(MN)^2 = (MP)^2 + (NP)^2 \Rightarrow (MN)^2 = 3^2 + 4^2$$

$$\therefore (MN)^2 = 25 \Rightarrow MN = \pm 5$$

Como a distância não pode assumir valor negativo, concluímos que $MN = 5$.

Generalizando, a distância entre dois pontos quaisquer do plano cartesiano pode ser calculada pelo teorema a seguir.

A **distância** AB entre dois pontos $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$ é dada por:

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Observação

A distância entre os pontos A e B é indicada por AB ou d_{AB}.

Nota:

Observando que $(x_B - x_A)^2 = (x_A - x_B)^2$ e que $(y_B - y_A)^2 = (y_A - y_B)^2$, a fórmula da distância AB pode ser $AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$ ou, mais simplificadamente:

$$AB = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2},$$

em que Δx e Δy representam, respectivamente, a diferença entre as abscissas e a diferença entre as ordenadas dos pontos A e B em qualquer ordem.

Observação

Δx lê-se "delta x" e Δy lê-se "delta y".

EXERCÍCIO RESOLVIDO

1. Calcule o comprimento do segmento $\overline{AB}$ em cada um dos casos.

a. $A(3, 4)$ e $B(8, 16)$ **b.** $A(-1, 0)$ e $B(2, -6)$

Resolução

a. $AB = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{(8 - 3)^2 + (16 - 4)^2}$

$\therefore AB = \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{169} = 13$

b. $AB = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} =$

$= \sqrt{(-1 - 2)^2 + [0 - (-6)]^2}$

$= \sqrt{(-3)^2 + 6^2} =$

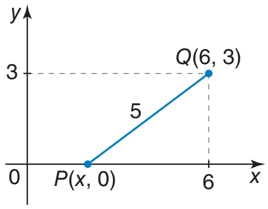
$\therefore AB = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$

2. Determine todos os pontos P, pertencentes ao eixo Ox, que distam 5 unidades do ponto $Q(6, 3)$.

Nota: Determinar um ponto, em Geometria analítica, significa determinar as coordenadas desse ponto.

Resolução

Todo ponto do eixo Ox possui ordenada zero; logo, o ponto P é da forma $P(x, 0)$.

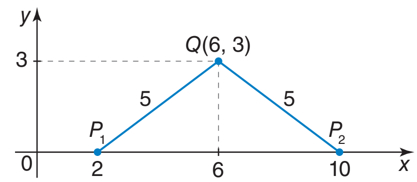


Então, $PQ = 5$, ou seja: $\sqrt{(x-6)^2 + (0-3)^2} = 5$

Elevando ao quadrado ambos os membros dessa igualdade, obtemos:

$$(x-6)^2 + (0-3)^2 = 25 \Rightarrow x^2 - 12x + 20 = 0$$

Resolvendo essa equação polinomial do 2º grau, obtemos $x = 2$ ou $x = 10$. Assim, existem dois pontos $P(x, 0)$ que satisfazem a condição do enunciado: $P_1(2, 0)$ e $P_2(10, 0)$. Graficamente, temos:



EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Faça os exercícios no caderno.

1. Calcule a distância entre os pontos A e B em cada um dos seguintes casos:

a. $A(6, -3)$ e $B(6, 5)$ **1. a.** 8

b. $A(6, 7)$ e $B(9, 11)$ **1. b.** 5

c. $A(-3, 5)$ e $B(3, 13)$ **1. c.** 10

d. $A(-1, 3)$ e $B(1, -1)$ **1. d.** $2\sqrt{5}$

2. No plano cartesiano xOy, faça o que se pede a seguir.

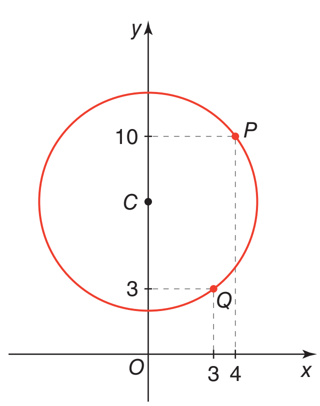
a. Determine todos os ponto P, pertencentes ao eixo Oy, que distam 10 unidades do ponto $A(6, 4)$. **2. a.** $P(0, 12)$ e $P'(0, -4)$

b. Determine o ponto Q, pertencente ao eixo Ox, que dista igualmente dos pontos $E(2, 3)$ e $F(4, -1)$. **2. b.** $Q(1, 0)$

3. Considerando a circunferência de centro C, representada no plano cartesiano a seguir, faça o que se pede.

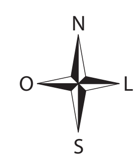
a. Determine as coordenadas do ponto C. **3. a.** $C(0, 7)$

b. Calcule a medida r do raio da circunferência. **3. b.** $r = 5$



4. Em um exercício militar, um submarino, parado em um ponto O do mar, totalmente submerso, tinha a missão de navegar horizontalmente até um ponto B.

Para não ser localizado, o comandante desligou os equipamentos de emissão e recepção de sinais e preparou-se para a navegação manual. Para isso, estabeleceu um sistema cartesiano de origem O, adotando o quilômetro como unidade nos eixos, o eixo Oy no sentido norte e o eixo Ox no sentido leste.



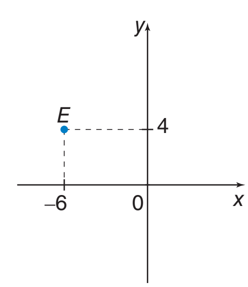
Em seguida, navegou 2,4 km em linha reta no sentido norte e, depois, 1 km em linha reta no sentido oeste, estacionando exatamente no ponto B. **4. a.** $B(-1; 2{,}4)$

a. Determine as coordenadas do ponto B em relação ao sistema cartesiano adotado pelo comandante.

b. Que distância percorreu o submarino no trajeto descrito, de O até B? **4. b.** 3,4 km

c. Que distância teria percorrido o submarino se fosse em linha reta de O até B? **4. c.** 2,6 km

5. Ao mapa de uma região plana foi associado um sistema cartesiano de coordenadas, cuja unidade adotada em cada eixo é o quilômetro, conforme mostra a figura. O ponto E representa uma empresa de entregas, que se comunica com seus **motoboys** via rádio, cujo alcance é de 23 km.



5. c. $GE \leqslant 23 \Rightarrow \sqrt{(x+6)^2 + (y-4)^2} \leqslant 23$

a. A empresa conseguirá se comunicar com o *motoboy*, via rádio, quando ele estiver no ponto $P(6, -12)$? Por quê? **5. a.** Sim, pois: $PE = 20$ km < 23 km

b. A empresa conseguirá se comunicar com o *motoboy*, via rádio, quando ele estiver no ponto $M(14, 16)$? Por quê? **5. b.** Não, pois: $ME \approx 23{,}3$ km > 23 km

c. Indicando por $G(x, y)$ um ponto genérico da região alcançada pelo rádio, obtenha uma sentença matemática relacionando x e y. **6.** Resposta pessoal.

6. Elaborem e resolvam um problema sobre o cálculo da distância entre dois pontos no plano cartesiano. Ao final, confiram se vocês resolveram corretamente.

Para retomar os conteúdos estudados, resolva os exercícios complementares 1 a 3.

Trabalho e juventudes: Pesquisa pessoal.

TRABALHO E JUVENTUDES Logística


ALVAREZ/E+/GETTY IMAGES

A logística abrange diversos cargos essenciais, como analistas e coordenadores de logística, gestores de cadeia de suprimentos e operadores de armazém. Ela é essencial para garantir entregas eficientes de bens e serviços a diversos lugares. Envolve planejamento, coordenação e gerenciamento do fluxo de produtos, desde a origem até o destino, com foco em armazenagem, controle de inventário e transporte. O GPS transformou o setor ao permitir rastreamento em tempo real, otimização de rotas e maior segurança para as mercadorias.

No entanto, áreas como as comunidades apresentam desafios adicionais, como ruas estreitas e infraestrutura precária, que complicam as operações logísticas. De acordo com o Data Favela (instituto de pesquisa e estratégias de negócios focado na realidade das comunidades brasileiras), cerca de 36,2 milhões de pessoas em comunidades brasileiras não recebem compras *on-line* devido à falta de CEP (Código de Endereçamento Postal). Para superar esses desafios, os profissionais de logística têm adotado alguns recursos como uso de veículos menores, colaborado com líderes comunitários e usado tecnologias complementares ao GPS, como aplicativos de mapeamento específicos e sistemas de gestão adaptados às condições locais. Dessa maneira, a adaptação das estratégias e uso de novas tecnologias se fazem necessários para garantir entregas eficazes e seguras em áreas desafiadoras.

"Ao enfrentar todos esses obstáculos de frente, as empresas não apenas expandem sua capacidade de atender a novos mercados, mas também contribuem para o desenvolvimento econômico e social dessas comunidades, que costumam ser tão marginalizadas."

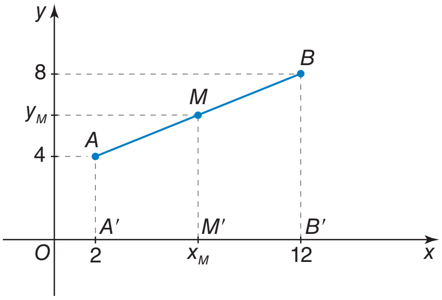
Elaborado com base em: Mundo Logística. **Como superar os desafios logísticos para entregar com eficiência nas favelas**. Disponível em: https://mundologistica.com.br/artigos/como-superar-desafios-logisticos-para-entregas-nas-favelas. Acesso em: 10 set. 2024.

Quer saber mais sobre os profissionais que fazem a logística acontecer? Faça uma pesquisa na internet sobre os cargos que fazem parte dessa área e compartilhe com os colegas um resumo das informações que você obteve.

Com o **Trabalho e juventudes**, pode-se desenvolver uma conversa acerca do profissional de logística e ampliar o assunto para questões como a democratização da comunicação, associada à criação dos serviços postais. Os estudantes podem pesquisar os principais serviços de entregas no município e fazer um levantamento de possíveis regiões do município (ou do Brasil) que os serviços postais e de entrega de encomendas são limitados.

3. Ponto médio de um segmento de reta

Na figura a seguir, M é o ponto médio do segmento $\overline{AB}$. Quais são as coordenadas do ponto M?



FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

Para responder a essa pergunta, observamos que as retas paralelas $\overleftrightarrow{AA'}$, $\overleftrightarrow{MM'}$ e $\overleftrightarrow{BB'}$ concorrem com as transversais $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{A'B'}$. Logo, pelo teorema de Tales, temos:

$$\frac{AM}{MB} = \frac{A'M'}{M'B'}$$

Como $A'M' = x_M - 2$, $M'B' = 12 - x_M$ e $AM = MB$ (pois M é o ponto médio de $\overline{AB}$), temos da proporção anterior:

$$1 = \frac{x_M - 2}{12 - x_M} \Rightarrow x_M - 2 = 12 - x_M$$

$$\therefore 2x_M = 12 + 2 \Rightarrow x_M = \frac{12 + 2}{2} = 7$$

Note que a abscissa x_M é a média aritmética entre as abscissas dos pontos A e B.

Raciocinando de maneira análoga em relação ao eixo Oy, a ordenada y_M é a média aritmética entre as ordenadas dos pontos A e B, isto é:

$$y_M = \frac{4 + 8}{2} = 6$$

Assim, concluímos que $M(7, 6)$.

Podemos generalizar esses procedimentos pelo seguinte teorema:

Se $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$ são pontos distintos, então o **ponto médio** $M(x_M, y_M)$ do segmento $\overline{AB}$ é tal que:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \quad \text{e} \quad y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$$

Reflexão

Se um ponto P divide um dado segmento $\overline{AB}$ em uma razão conhecida, sempre posso aplicar o teorema de Tales para determinar as coordenadas de P?

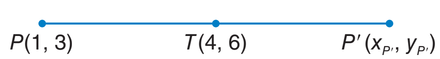
Reflexão: Conhecida a razão com que um ponto P divide um segmento $\overline{AB}$, de A para B ou de B para A, é possível calcular as coordenadas de P pelo teorema de Tales. Observe o seguinte exemplo: Dados os pontos $A(3, 2)$ e $B(8, 7)$, determine o ponto P que divide o segmento $\overline{AB}$, de A para B, na razão $\frac{2}{3}$. Discuta esta seção, que estende a aplicação do teorema de Tales para qualquer ponto que divide o segmento $\overline{AB}$. Sugerimos que essa questão seja explorada, propondo aos estudantes os seguintes exercícios: "Dados os pontos $A(3, 2)$ e $B(8, 7)$, determine o ponto P que divide o segmento $\overline{AB}$, de A para B, na razão $\frac{2}{3}$. ($P(5, 4)$)"; "Determine o baricentro G do triângulo ABC em que $A(4, 2)$, $B(1, 5)$ e $C(7, 23)$. ($G(4, \frac{4}{3})$)"

EXERCÍCIO RESOLVIDO

3. Obtenha o simétrico do ponto $P(1, 3)$ em relação ao ponto $T(4, 6)$.

Resolução

O simétrico de P em relação a T é o ponto $P'(x_{P'}, y_{P'})$ tal que T é o ponto médio do segmento $\overline{PP'}$:



FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

Assim, temos:

$$\frac{1 + x_{P'}}{2} = 4 \Rightarrow x_{P'} = 7 \quad \text{e} \quad \frac{3 + y_{P'}}{2} = 6 \Rightarrow y_{P'} = 9$$

Logo, o simétrico do ponto P em relação ao ponto T é $P'(7, 9)$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Faça os exercícios no caderno.

7. Determine o ponto médio do segmento $\overline{AB}$ em cada um dos seguintes casos:

a. $A(4, 6)$ e $B(8, 10)$ **7. a.** $(6, 8)$

b. $A(-3, 1)$ e $B(5, -7)$ **7. b.** $(1, -3)$

8. Considerando os pontos $A(1, -3)$ e $E(13, 9)$ do plano cartesiano, faça o que se pede.

a. Obtenha os pontos B, C e D que dividem o segmento $\overline{AE}$ em 4 segmentos de reta congruentes. (Suponha que B esteja entre A e C e que D esteja entre C e E.)

b. Determine o simétrico do ponto A em relação ao ponto E. **8. b.** $A'(25, 21)$

8. a. $B(4, 0)$, $C(7, 3)$ e $D(10, 6)$

9. Em um paralelogramo *ABCD*, $A(0, 8)$ e $C(4, 16)$ são vértices opostos e $B(1, 7)$. Determine o vértice *D*.

Nota: O ponto comum às diagonais de um paralelogramo é o ponto médio de cada uma delas.

9. $D(3, 17)$

10. Para estudar o movimento de um astro que se desloca com velocidade constante em trajetória retilínea, um astrônomo fixou um plano cartesiano contendo essa trajetória e adotou nos eixos coordenados uma unidade conveniente para grandes distâncias. Em certo momento, o cientista observou que o astro estava no ponto $A(3, 6)$ e quatro minutos depois estava no ponto $B(5, 8)$.

a. Qual era a posição do astro dois minutos após a passagem pelo ponto *A*? **10. a.** $(4, 7)$

b. Qual era a posição do astro um minuto após a passagem pelo ponto *A*? **10. b.** $\left(\frac{7}{2}, \frac{13}{2}\right)$

c. Qual era a posição do astro oito minutos após a passagem pelo ponto *A*? **10. c.** $(7, 10)$

Para retomar os conteúdos estudados, resolva os exercícios complementares 4 e 5.

Mentes brilhantes

SAMUEL DE ROMAN/GETTY IMAGES

A Via Láctea, esse campo de estrelas visíveis no cinturão de nossa Galáxia, ocupou uma importante posição na mitologia dos povos antigos que a viam como um lugar privilegiado para a morada de seus deuses. Ela representou o Nilo Celeste para os egípcios e o Caminho da Anta para os tupis-guaranis e muitas etnias africanas a chamam de "Caminho de Estrelas".

Desde tempos antigos, africanos e indígenas brasileiros estudavam o céu e entendiam a relação entre fenômenos celestes e terrestres. Eles observavam como os corpos celestes e as estações influenciavam a flora e fauna, moldando uma visão detalhada do Cosmos que guiava suas práticas e mitos cotidianos. Com a chegada dos africanos escravizados ao Brasil, houve uma fusão desses conhecimentos com as tradições indígenas, especialmente nas áreas remotas dos quilombos, onde a troca cultural se intensificou.

Com a chegada dos povos escravizados ao Brasil, os conhecimentos astronômicos dos indígenas e africanos começaram a se integrar, especialmente nos quilombos. Esses locais, de difícil acesso, serviram como refúgios para africanos fugitivos e foram importantes para a resistência à escravidão, facilitando a troca cultural entre africanos e indígenas. Esse intercâmbio persiste até hoje, como evidenciado nas comunidades quilombolas, por exemplo, nas margens do rio Gurupi, na fronteira do Pará com o Maranhão.

Essa integração criou a rica etnoastronomia afro-indígena-brasileira, misturando saberes astronômicos e culturais. Apesar de as diferenças entre os grupos, a colaboração trouxe avanços na compreensão do céu e na vida prática.

Com diversos estudos feitos por antropólogos sobre o conhecimento astronômico desses povos, no final do século XX, foi possível entender as concepções de diversos grupos étnicos e culturais sobre os mesmos fenômenos astronômicos, permitindo ao comparar essas diferentes visões, aprender muito sobre as sociedades que as originaram. Entre esses fenômenos, temos a compreensão sobre o nascimento do sol e da lua, a utilização de constelações como marcação de eventos e a utilização da Via Láctea para se guiar em rotas terrestres ou marítimas.

"Os africanos e os indígenas analisavam a passagem do tempo em termos dos movimentos de corpos celestes, da maturação de plantas benéficas e do padrão de acasalamento de animais. Em cada caso, a visibilidade de uma estrela ou constelação estava sincronizada com o comportamento de uma determinada espécie vegetal ou animal."

Elaborado com base em: AFONSO, G. Relações afro-indígenas. **Scientific American Brasil**, São Paulo, v. 20, n. 5, p. 72-79, set. 2024.

A seção **Mentes brilhantes** aborda como conhecimentos de diferentes culturas se integraram e compuseram a etnoastronomia afro-indígena-brasileira. De maneira interdisciplinar com a área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas, pode-se propor aos estudantes uma pesquisa a fim de listar e estudar outras contribuições dos povos que compõem as matrizes históricas e culturais brasileiras, valorizando esses saberes e culturas.

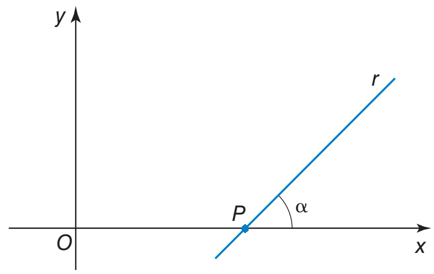
4. Reta

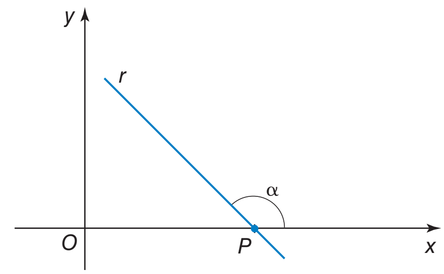
Determinação de uma reta

No plano cartesiano, uma reta pode ser determinada de várias maneiras: por dois pontos distintos, por um ponto e um ângulo, por meio de distâncias etc. Neste tópico, definiremos dois importantes conceitos relacionados à **determinação de uma reta por um ponto e um ângulo**.

Inclinação e coeficiente angular de uma reta

No plano cartesiano xOy a seguir, seja r uma reta que intercepta o eixo das abscissas em um ponto P e forma com esse eixo um ângulo de medida α, com $0° \leqslant \alpha < 180°$, medido no sentido anti-horário a partir de um ponto do eixo Ox à direita de P. A medida α é chamada de **inclinação** da reta r.





A inclinação de uma reta paralela ao eixo Ox é 0°.

Chama-se **coeficiente angular** de uma reta r de inclinação α, com $\alpha \neq 90°$, o número m tal que:

$$m = \text{tg } \alpha$$

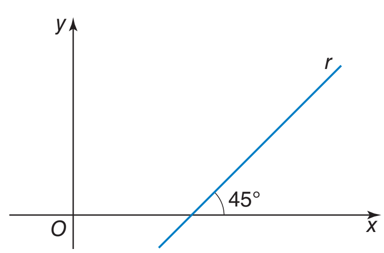
O coeficiente angular de uma reta também é chamado de **declividade** da reta.

Observação

A interpretação do coeficiente angular como a tangente da inclinação da reta pressupõe que o comprimento adotado como unidade nos dois eixos coordenados seja o mesmo.

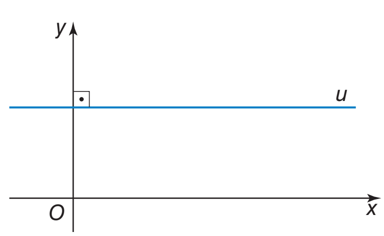
Exemplos

a.



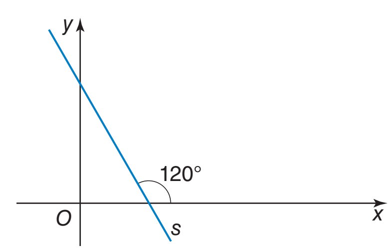
- inclinação de r: 45°
- coeficiente angular de r: $\text{tg } 45° = 1$

b.



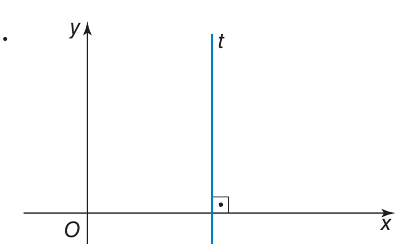
- inclinação de u: 0°
- coeficiente angular de u: $\text{tg } 0° = 0$

c.



- inclinação de s: 120°
- coeficiente angular de s: $\text{tg } 120° = -\sqrt{3}$

d.



- inclinação de t: 90°
- Retas com 90° de inclinação não têm coeficiente angular, pois não existe tg 90°.

ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

Reflexão: Uma reta representa uma função crescente quando sua inclinação α obedece à condição $0° < \alpha < 90°$; portanto, seu coeficiente angular é positivo; uma reta representa uma função decrescente quando sua inclinação β obedece à condição $90° < \beta < 180°$; portanto, seu coeficiente angular é negativo; uma reta representa uma função constante quando ela é paralela ao eixo Ox, ou seja, sua inclinação é 0°; portanto, seu coeficiente angular é igual a zero.

Reflexão

Se o gráfico de uma função f é uma reta, que relação existe entre o sinal do coeficiente angular dessa reta e a variação de f (crescente, decrescente ou constante)?

Notas:

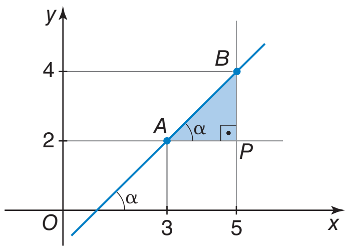
1. Retas com 0° de inclinação (paralelas ao eixo Ox) são chamadas de **retas horizontais**.
2. Retas com 90° de inclinação (paralelas ao eixo Oy) são chamadas de **retas verticais**.
3. Retas não verticais e não horizontais são chamadas de **retas oblíquas**.

Se achar conveniente, peça aos estudantes que calculem o coeficiente angular de uma reta fornecendo dois pontos que estejam nos outros quadrantes.

Cálculo do coeficiente angular de uma reta não vertical por dois de seus pontos

Consideremos a reta $\overleftrightarrow{AB}$, de inclinação α, em que $A(3, 2)$ e $B(5, 4)$. Traçando por A a reta paralela ao eixo Ox e por B a reta paralela ao eixo Oy, determinamos o triângulo retângulo ABP, cujo ângulo interno $B\hat{A}P$ tem medida α.

No triângulo ABP, podemos calcular tg α, que é o coeficiente angular da reta $\overleftrightarrow{AB}$:



FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

$$m = \text{tg } \alpha = \frac{4 - 2}{5 - 3} = \frac{2}{2} = 1$$

Observe com os estudantes que, para calcular o coeficiente angular de uma reta, não é preciso conhecer sua inclinação; basta conhecer dois de seus pontos.

Note, portanto, que o coeficiente angular é a razão da diferença das ordenadas para a diferença das abscissas dos pontos A e B.

O teorema a seguir generaliza o cálculo do coeficiente angular de uma reta não vertical $\overleftrightarrow{AB}$, qualquer que seja sua posição no plano cartesiano.

> Se os pontos distintos $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$ pertencem a uma reta r não vertical, então o coeficiente angular m_r da reta r é dado por:
>
> $$m_r = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

Se achar conveniente, retome com os estudantes o conceito de taxa de variação da função afim, relacionado ao conceito de coeficiente angular.

Nota:
Multiplicando por -1 o numerador e o denominador da fração $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$, obtém-se uma fração equivalente a ela; logo: $m_r = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}$. Por isso, podemos simplificar a notação, escrevendo:

$$m_r = \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

em que Δx e Δy representam as diferenças entre as abscissas e entre as ordenadas, respectivamente, obtidas em um mesmo sentido: ambas de A para B, $\frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}$, ou ambas de B para A, $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

4. Calcule o coeficiente angular da reta $\overleftrightarrow{AB}$ nos seguintes casos:

a. $A(4, 7)$ e $B(-3, 1)$ **b.** $A(7, 9)$ e $B(2, 9)$ **c.** $A(2, 5)$ e $B(2, 7)$

Resolução

a. $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{7 - 1}{4 - (-3)} = \frac{6}{7}$

b. $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{9 - 9}{7 - 2} = \frac{0}{5} = 0$. Note que, nesse caso, a reta $\overleftrightarrow{AB}$ é horizontal.

c. $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{7 - 5}{2 - 2} = \frac{2}{0}$, ou seja, o coeficiente angular não existe. Note que, nesse caso, a reta $\overleftrightarrow{AB}$ é vertical.

Observação

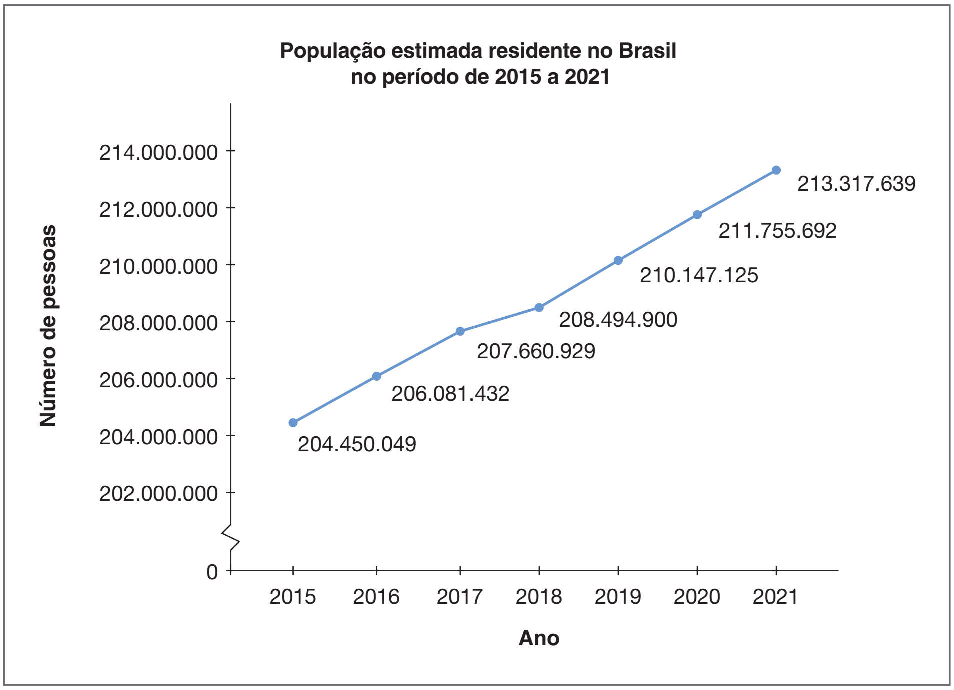
Para indicar que m não existe, podemos usar o símbolo $\nexists$, que significa "não existe".

Observação

Como as unidades adotadas nos eixos são diferentes, a razão $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ deve ser interpretada apenas como uma taxa de variação e não como a tangente da inclinação da reta. Mesmo assim, chamamos essa razão de coeficiente angular, pois ela depende de α.

5. O gráfico de linha a seguir descreve a população residente no Brasil, estimada ao final de cada ano de 2015 a 2021.

ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA



Elaborado com base em: Sidra – IBGE. **Tabela 6579: População residente estimada.** Disponível em: https://sidra.ibge.gov.br/tabela/6579. Acesso em: 6 set. 2024.

a. Calcule o coeficiente angular da reta determinada pelos pontos (2015; 204.450.049) e (2021; 213.317.639).

b. No contexto do gráfico, qual é o significado do coeficiente angular obtido no item **a**?

Resolução

a. O coeficiente angular m da reta que passa pelos pontos (2015; 204.450.049) e (2021; 213.317.639) é dado por:

$$m = \frac{213.317.639 - 204.450.049}{2021 - 2015} \Rightarrow m \approx 1.477.932$$

b. Nesse contexto, o coeficiente angular indica a média aritmética de crescimento anual da população no período considerado. Assim a população cresceu, em média, 1.477.932 pessoas a cada ano, aproximadamente.

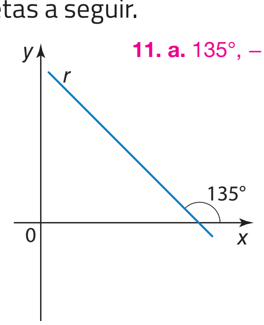
EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Faça os exercícios no caderno.

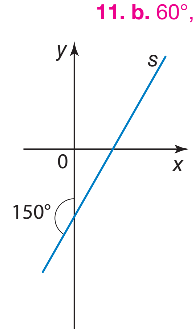
11. Determine a inclinação α e o coeficiente angular m das retas a seguir.

11. b. 60°, $\sqrt{3}$

a. **11. a.** 135°, –1



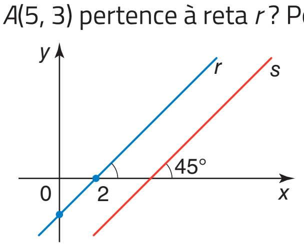
b.



12. As retas r e s representadas no gráfico são paralelas.

a. Determine a inclinação e o coeficiente angular da reta r.

b. O ponto $A(5, 3)$ pertence à reta r? Por quê?



12. a. 45°; 1

12. b. Sim, pois o coeficiente angular da reta que passa pelos pontos $A(5, 3)$ e $(2, 0)$ é igual a $1 = \text{tg } 45°$.

ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

13. Determine o coeficiente angular m da reta $\overleftrightarrow{AB}$ em cada um dos casos a seguir.

a. $A(2, 6)$ e $B(4, 14)$ **13. a.** 4

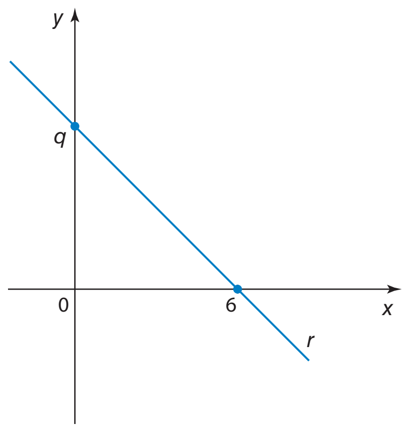
b. $A(-3, 5)$ e $B(1, -1)$ **13. b.** $-\frac{3}{2}$

c. $A(-1, 3)$ e $B(-2, 3)$ **13. c.** zero

d. $A(8, 1)$ e $B(8, 6)$ **13. d.** não existe.

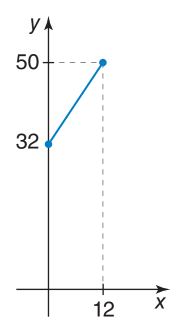
14. A reta r representada no plano cartesiano a seguir tem 135° de inclinação. Determine o número real q.

14. $q = 6$



ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

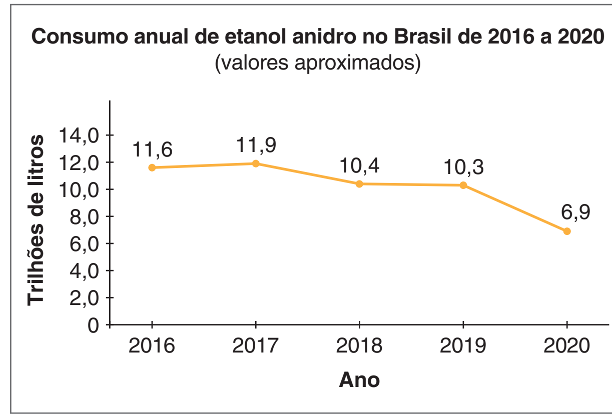
15. O gráfico descreve a temperatura y, em grau Celsius, de um aquecedor de ambiente em função do tempo x, em minuto, desde o instante em que foi ligado (instante zero), quando sua temperatura era 32 °C, até o instante em que atingiu sua temperatura máxima, 50 °C.



a. Calcule o coeficiente angular da reta que contém esse gráfico. **15. a.** 1,5

b. O que significa esse coeficiente no contexto do enunciado? **15. b.** Significa que a cada minuto a temperatura aumentou 1,5 °C.

16. O gráfico de linha a seguir descreve o consumo anual de etanol anidro no Brasil no período de 2016 a 2020. Faça uma dupla para responderem aos itens que seguem.



ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

Elaborado com base em: Observatório da Cana e bioenergia. **Consumo de combustíveis**. Disponível em: https://observatoriodacana.com.br/historico-de-consumo-de-combustiveis.php?idMn=11&tipoHistorico=10&acao=visualizar&idTabela=2484&produto=Etanol%2Banidro%2Bcombust%2526iacute%253Bvel&nivelAgregacao=1. Acesso em: 13 ago. 2024.

a. Calculem o coeficiente angular da reta que passa pelos pontos (2016; 11,6) e (2017; 11,9). **16. a.** $m = 0{,}3$

b. No contexto do gráfico, qual é a interpretação do coeficiente angular obtido no item **a**?

c. Considerando as retas que passam por pontos correspondentes a 2 anos consecutivos do gráfico, qual delas tem maior coeficiente angular? E qual tem menor coeficiente angular?

d. Fazendo apenas a leitura do gráfico, sem efetuar cálculos, é possível determinar qual das retas citadas no item **c** corresponde ao maior crescimento anual no consumo de etanol? Em caso afirmativo, expliquem como.

e. Calculem o coeficiente angular da reta que passa pelos pontos (2016; 11,6) e (2020; 6,9). **16. e.** $m' = -1{,}175$

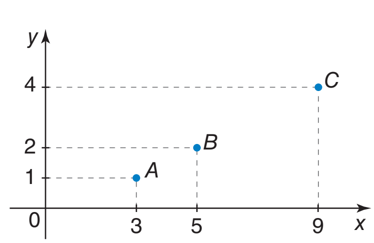
f. No contexto do gráfico, qual é a interpretação do coeficiente angular obtido no item **e**?

17. Elaborem e resolvam um problema com base em uma pesquisa sobre gráficos que contenha as informações necessárias para formular uma questão sobre o coeficiente angular de uma reta. Ao final, confiram se a solução está correta. **17.** Resposta pessoal.

Para retomar os conteúdos estudados, resolva o exercício complementar 6.

Condição de alinhamento de três pontos

Os pontos $A(3, 1)$, $B(5, 2)$ e $C(9, 4)$, representados a seguir, são colineares? Isto é, pertencem à mesma reta?



FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

16. b. O coeficiente angular obtido no item **a** representa o crescimento do consumo de etanol, em trilhão de litro, do ano de 2016 para 2017.

16. c. A reta que tem o maior coeficiente angular é aquela que passa pelos pontos (2016; 11,6) e (2017; 11,9), e a que tem o menor coeficiente angular é aquela que passa pelos pontos (2019; 10,3) e (2020; 6,9).

16. d. A reta de maior coeficiente angular corresponde à maior variação anual no consumo de etanol. Graficamente essa reta é identificada como a que tem o maior ângulo agudo de inclinação. Assim, a leitura do gráfico nos permite concluir que essa reta é a que passa pelos pontos (2016; 11,6) e (2017; 11,9).

16. f. O coeficiente angular m', obtido no item **e**, representa a taxa média anual de variação, em trilhão de litro, no consumo de etanol no período considerado. Assim, o consumo de etanol variou, em média, −1,175 trilhão de litros ao ano. É como se houvesse um decrescimento anual de 1,175 trilhão de litros no consumo de etanol, no período de 2016 a 2020.

Para responder essa pergunta, não basta traçar a reta $\overleftrightarrow{AB}$ com o auxílio de uma régua, pois o ponto C pode estar fora dessa reta a uma distância tão pequena que não seja detectada graficamente. Por isso, vamos usar o conceito de coeficiente angular e a seguinte propriedade:

Se duas retas são paralelas e têm um ponto comum, então elas são paralelas coincidentes.

Indicando por m_{AB} e m_{BC} os coeficientes angulares das retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{BC}$, respectivamente, calculamos:

$$m_{AB} = \frac{2-1}{5-3} = \frac{1}{2} \text{ e } m_{BC} = \frac{4-2}{9-5} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Como $m_{AB} = m_{BC}$, deduzimos que $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{BC}$ têm a mesma inclinação; logo, essas retas são paralelas. Além de paralelas, $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{BC}$ têm o ponto B em comum e, portanto, são paralelas coincidentes, com o que concluímos que os pontos A, B e C são colineares.

Podemos generalizar a condição de alinhamento de três pontos pelo teorema a seguir.

Três pontos $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ e $C(x_C, y_C)$ são **colineares** se, e somente se, $m_{AB} = m_{BC}$ ou não existem m_{AB} e m_{BC}.

Nota:

Se três pontos D, E e F do plano cartesiano são tais que não existem os coeficientes angulares das retas $\overleftrightarrow{DE}$ e $\overleftrightarrow{EF}$, então essas retas são verticais e, portanto, paralelas. Como, além de paralelas, as retas $\overleftrightarrow{DE}$ e $\overleftrightarrow{EF}$ têm o ponto E em comum, concluímos que essas retas são paralelas coincidentes; logo, os pontos D, E e F são colineares.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

6. Verifique se os pontos A, B e C são ou não colineares nos seguintes casos:

a. $A(2, 4)$, $B(3, 7)$ e $C(5, 13)$

b. $A(3, 8)$, $B(3, 4)$ e $C(3, -1)$

c. $A(4, 2)$, $B(4, 7)$ e $C(1, 3)$

d. $A(5, 1)$, $B(3, 3)$ e $C(0, 4)$

Resolução

Em cada item, devemos observar m_{AB} e m_{BC}:

- se $m_{AB} = m_{BC}$ ou não existem m_{AB} e m_{BC}, então concluímos que A, B e C são colineares;
- se $m_{AB} \neq m_{BC}$ ou se existe apenas um dos coeficientes angulares m_{AB} e m_{BC}, então concluímos que A, B e C não são colineares.

a. $m_{AB} = \dfrac{7-4}{3-2} = 3$

$m_{BC} = \dfrac{13-7}{5-3} = \dfrac{6}{2} = 3$

Como $m_{AB} = m_{BC}$, concluímos que A, B e C são colineares.

b. $m_{AB} = \dfrac{8-4}{3-3} = \dfrac{4}{0}$ (∄)

$m_{BC} = \dfrac{4-(-1)}{3-3} = \dfrac{5}{0}$ (∄)

Se achar conveniente, lembre os estudantes que o símbolo ∄ significa "não existe".

Como não existem m_{AB} e m_{BC}, concluímos que A, B e C são colineares.

c. $m_{AB} = \dfrac{7-2}{4-4} = \dfrac{5}{0}$ (∄)

$m_{BC} = \dfrac{7-3}{4-1} = \dfrac{4}{3}$

Como existe apenas um dos coeficientes angulares, concluímos que A, B e C não são colineares.

d. $m_{AB} = \dfrac{3-1}{3-5} = \dfrac{2}{-2} = -1$

$m_{BC} = \dfrac{4-3}{0-3} = -\dfrac{1}{3}$

Como $m_{AB} \neq m_{BC}$, concluímos que A, B e C não são colineares.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Faça os exercícios no caderno.

18. Usando a condição de alinhamento por coeficiente angular, verifique se os pontos A, B e C são colineares nos casos a seguir.

a. $A(1, 6)$, $B(0, 4)$ e $C(-1, 2)$ **18. a.** sim

b. $A(1, 2)$, $B(5, 2)$ e $C(6, 2)$ **18. b.** sim

c. $A(4, 1)$, $B(4, 7)$ e $C(4, 9)$ **18. c.** sim

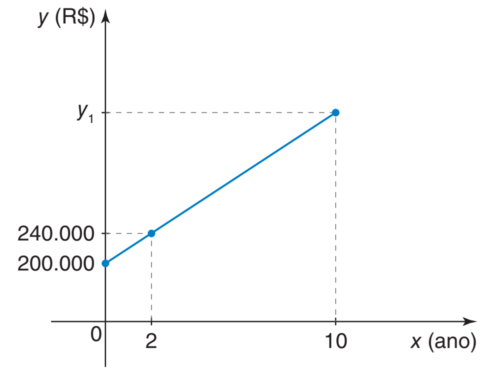
d. $A(3, 6)$, $B(1, 4)$ e $C(4, 1)$ **18. d.** não

19. Faça o que se pede.

a. Determine o valor de x para que os pontos $A(2, 8)$, $B(3, 11)$ e $C(x, -1)$ sejam colineares. **19. a.** $x = -1$

b. Obtenha os possíveis valores de m tal que os pontos $D(1, 4)$, $E(3, 8)$ e $F(6, m)$ sejam vértices de um triângulo. **19. b.** $m \neq 14$

20. (Enem) Um sítio foi adquirido por R$ 200.000,00. O proprietário verificou que a valorização do imóvel, após sua aquisição, cresceu em função do tempo conforme o gráfico, e que essa tendência de valorização se manteve nos anos seguintes.



ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

O valor desse sítio, no décimo ano após sua compra, em real, será de: **20.** alternativa **d**

a. 190.000.

b. 232.000.

c. 272.000.

d. 400.000.

e. 500.000.

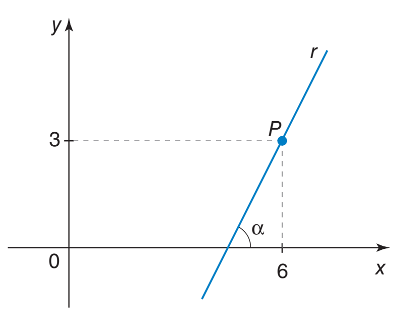
21. Elaborem e resolvam um problema com base em uma pesquisa sobre tabelas ou gráficos que tenha informações necessárias para elaborar uma questão sobre a condição de alinhamento de três pontos. Ao final, confiram se vocês resolveram corretamente.
21. Resposta pessoal.

Para retomar os conteúdos estudados, resolva o exercício complementar 7.

5. Equação fundamental da reta

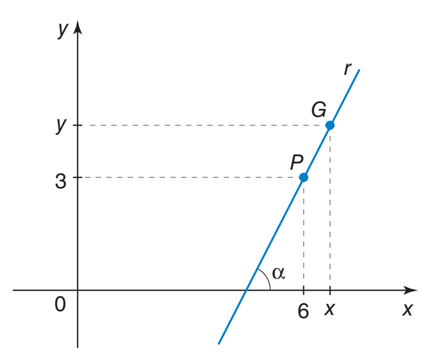
Se achar conveniente, relembre com os estudantes que uma função polinomial do 1º grau é representada no plano cartesiano por uma reta oblíqua, de equação $y = ax + b$, com a e b números reais e a não nulo. Também aprendemos a determinar a equação da reta a partir de dois de seus pontos distintos. Neste capítulo, vamos estudar outros métodos para obter a equação de uma reta.

A reta r representada a seguir passa pelo ponto $P(6, 3)$, e seu coeficiente angular é $m_r = 2$.



$$m_r = \text{tg}\ \alpha = 2$$

Com base nesses dados, podemos obter uma equação que represente todos os pontos (x, y) que pertencem à reta r. Para obtê-la, vamos considerar um ponto genérico $G(x, y)$, distinto de P. O ponto G pertence à reta r se, e somente se, o coeficiente angular calculado pelos pontos P e G é igual ao coeficiente angular de r, ou seja:



$$m_{PG} = m_r \Rightarrow \frac{y - 3}{x - 6} = 2$$

$$\therefore y - 3 = 2(x - 6) \Rightarrow y - 3 = 2x - 12$$

$$\therefore y = 2x - 9$$

ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

Note que o ponto $P(6, 3)$ também satisfaz a equação $y = 2x - 9$, pois, substituindo x por 6 e y por 3, essa igualdade é satisfeita. Acompanhe:

$$3 = 2 \cdot 6 - 9 \Rightarrow 3 = 3$$

Concluímos, assim, que a equação $y = 2x - 9$ representa todos e somente os pontos (x, y) do plano cartesiano que pertencem à reta r; por isso, ela é chamada de **equação da reta *r***.

Podemos generalizar esse raciocínio pelo teorema a seguir.

Observação

A equação apresentada é denominada **equação fundamental da reta *r***.

Se r é a reta não vertical que passa pelo ponto $P(x_0, y_0)$ e tem coeficiente angular m, então uma equação de r é:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

7. Obtenha uma equação da reta r que passa pelo ponto $P(-5, 2)$ e tem coeficiente angular $m = 3$.

Resolução

Na equação fundamental da reta,

$$y - y_0 = m(x - x_0),$$

substituímos x_0, y_0 e m, respectivamente, por -5, 2 e 3, obtendo:

$$y - 2 = 3[x - (-5)]$$

Assim, concluímos que:

$$y = 3x + 17$$

Essa é uma equação da reta r, que também pode ser apresentada na forma: $3x - y + 17 = 0$

8. Obtenha uma equação da reta que passa pelos pontos $A(-1, -2)$ e $B(-4, 7)$.

Resolução

Calculando o coeficiente angular da reta $\overleftrightarrow{AB}$, temos:

$$m_{AB} = \frac{7 - (-2)}{-4 - (-1)} = \frac{9}{-3} = -3$$

Com esse coeficiente angular e **qualquer um** dos dois pontos A ou B, obtemos a equação pedida. Consideremos o ponto $A(-1, -2)$.

Fazendo $x_0 = -1$, $y_0 = -2$ e $m = -3$ na equação fundamental da reta, $y - y_0 = m(x - x_0)$, obtemos:

$$y - (-2) = -3[x - (-1)]$$

Assim, concluímos que uma equação da reta $\overleftrightarrow{AB}$ é:

$$y = -3x - 5$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Faça os exercícios no caderno.

22. Obtenha uma equação da reta que passa pelo ponto P e tem coeficiente angular m em cada um dos seguintes casos:

a. $P(6, 3)$ e $m = 2$ **22. a.** $y = 2x - 9$

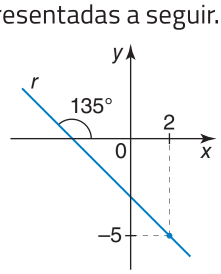
b. $P(4, -5)$ e $m = 1$ **22. b.** $y = x - 9$

c. $P(0, 0)$ e $m = 8$ **22. c.** $y = 8x$

d. $P\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{4}\right)$ e $m = -\frac{5}{6}$ **22. d.** $y = -\frac{5x}{6} + 1$

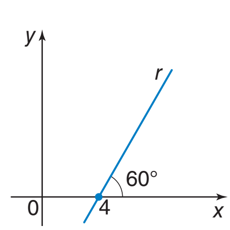
23. Obtenha uma equação para cada uma das retas representadas a seguir.

a.



23. a. $y = -x - 3$

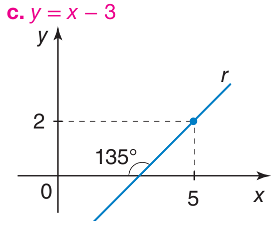
b.



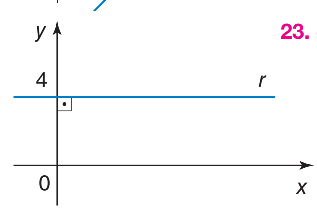
23. b. $y = \sqrt{3}x - 4\sqrt{3}$

23. c. $y = x - 3$

c.



d.



23. d. $y = 4$

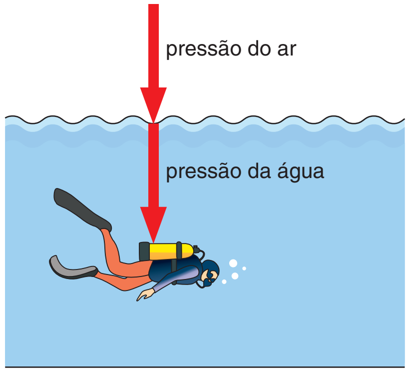
24. Represente, por meio de uma equação, a reta que passa pelos pontos A e B nos casos a seguir.

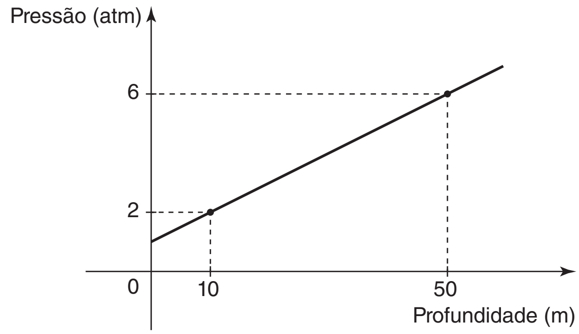
a. $A(2, 3)$ e $B(6, 11)$ **24. a.** $y = 2x - 1$

b. $A(-1, 5)$ e $B(2, -1)$ **24. b.** $y = -2x + 3$

c. $A(4, 8)$ e $B(6, 8)$ **24. c.** $y = 8$

25. O gráfico a seguir descreve a pressão total *y*, em atmosfera, sofrida por um mergulhador em águas marítimas em função da profundidade *x*, em metro. Essa pressão corresponde à soma das pressões das colunas de água e de ar sobre o mergulhador.





a. Obtenha uma equação da reta que contém esse gráfico. **25. a.** $y = 0{,}1x + 1$

b. Usando a equação obtida no item **a**, calcule a pressão total em um ponto a 35 m de profundidade. **25. b.** 4,5 atm

c. Qual é a pressão hidrostática sofrida pelo mergulhador a 35 m de profundidade? (A pressão hidrostática é aquela exercida apenas pela coluna de água sobre o mergulhador.) **25. c.** 3,5 atm

Devido a essa variação de pressão e de outras condições, como a temperatura da água, o mergulho é uma atividade recreativa relativamente segura para pessoas saudáveis que receberam treinamento e que utilizam equipamentos apropriados.

Para retomar os conteúdos estudados, resolva o exercício complementar 8.

As bissetrizes dos quadrantes e as retas horizontais e verticais

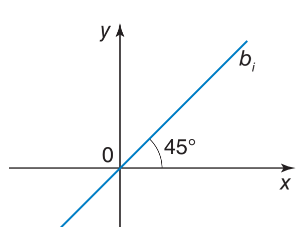
Os 4 gráficos que serão apresentados a seguir mostram retas em quatro posições notáveis do plano cartesiano. Vamos obter as equações dessas retas.

1. A reta b_i, chamada de **bissetriz dos quadrantes ímpares**, passa pelo ponto (0, 0) e tem coeficiente angular $m = \text{tg } 45° = 1$; logo, sua equação é dada por:

$$y - 0 = 1(x - 0), \text{ ou seja: } y = x$$

Por exemplo, são pontos da reta b_i: (0, 0), (−1, −1) e $(\sqrt{5}, \sqrt{5})$.

Podemos representar um ponto genérico dessa reta por (x, x), com $x \in \mathbb{R}$.

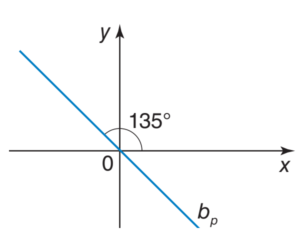


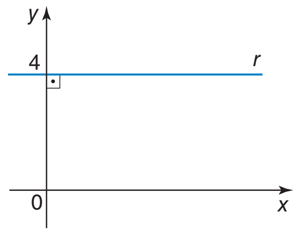
2. A reta b_p, chamada de **bissetriz dos quadrantes pares**, passa pelo ponto (0, 0) e tem coeficiente angular $m = \text{tg } 135° = -1$; logo, sua equação é dada por:

$$y - 0 = -1(x - 0), \text{ ou seja: } y = -x$$

Por exemplo, são pontos da reta b_p: (0, 0), (1, −1) e $(-\sqrt{5}, \sqrt{5})$.

Podemos representar um ponto genérico dessa reta por $(-x, x)$ ou por $(x, -x)$, com $x \in \mathbb{R}$.

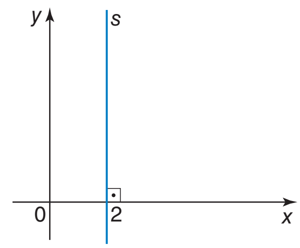




3. A reta r, chamada de **reta horizontal**, passa pelo ponto (0, 4) e tem coeficiente angular $m = \text{tg } 0° = 0$; logo, sua equação é dada por:

$$y - 4 = 0(x - 0), \text{ ou seja: } y = 4$$

Podemos generalizar esse resultado do seguinte modo: toda reta horizontal que passa por um ponto de ordenada k tem equação $y = k$. Note, portanto, que a equação do eixo das abscissas é $y = 0$.



4. A reta s, chamada de **reta vertical**, não tem coeficiente angular, pois não existe tg 90°; portanto, sua equação não pode ser obtida a partir da equação fundamental $y - y_0 = m(x - x_0)$. Porém, podemos obter uma equação dessa reta observando que ela é formada por todos, e somente, os pontos do plano cartesiano que têm abscissa 2, o que nos permite representar essa reta pela equação $x = 2$. Podemos generalizar esse resultado do seguinte modo: toda reta vertical que passa por um ponto de abscissa k tem equação $x = k$. Note, portanto, que a equação do eixo das ordenadas é $x = 0$.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

9. Determine o ponto P, pertencente à bissetriz dos quadrantes ímpares, equidistante dos pontos $A(2, 5)$ e $B(4, 2)$.

Resolução

Todo ponto da bissetriz dos quadrantes ímpares possui a abscissa igual à ordenada.

Logo, o ponto P é da forma $P(x, x)$.

Devemos ter: $AP = BP \Rightarrow \sqrt{(x-2)^2 + (x-5)^2} =$

$= \sqrt{(x-4)^2 + (x-2)^2}$

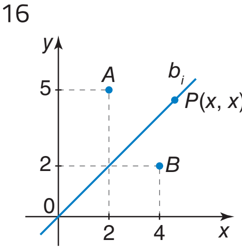
Quadrando ambos os membros dessa igualdade, obtemos:

$\cancel{(x-2)^2} + (x-5)^2 = (x-4)^2 + \cancel{(x-2)^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 - 10x + 25 = x^2 - 8x + 16$

$\therefore 2x = 9 \Rightarrow x = \frac{9}{2}$

Assim, o ponto procurado é $P\left(\frac{9}{2}, \frac{9}{2}\right)$.



ANÁLISE DA RESOLUÇÃO

Um estudante resolveu o exercício conforme a reprodução a seguir. Um erro foi cometido. Apontem o erro e refaçam a resolução no caderno, corrigindo-a.

Exercício

Determine o conjunto de todos os números reais m para que os pontos $A(m, m^2)$, $B(5, 9)$ e $C(m, 16)$ sejam colineares.

Resolução

Os pontos A, B e C serão colineares se o coeficiente angular m_{AB} da reta $\overleftrightarrow{AB}$ for igual ao coeficiente angular m_{BC} da reta $\overleftrightarrow{BC}$, isto é:

$$m_{AB} = m_{BC} \Rightarrow \frac{m^2 - 9}{m - 5} = \frac{16 - 9}{m - 5} \Rightarrow m^2 - 9 = 16 - 9 \Rightarrow m^2 = 16 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m = 4 \quad \text{ou} \quad m = -4$$

Então, o conjunto S de todos os números reais m para que os pontos A, B e C sejam colineares é dado por: $S = \{4, -4\}$

Os pontos A, B e C serão colineares se, e somente se, $m_{AB} = m_{BC}$ ou não existirem m_{AB} e m_{BC}. O estudante não considerou a segunda condição. Para que não existam m_{AB} e m_{BC}, devemos ter $m = 5$. Assim, além dos valores 4 e −4 encontrados pelo estudante, outro possível valor de m é 5. Concluímos, então, que o conjunto S de todos os números reais m para que os pontos A, B e C sejam colineares é dado por $S = \{5, 4, -4\}$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

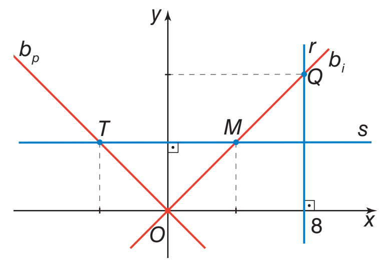
Faça os exercícios no caderno.

26. No gráfico, b_p e b_i são as bissetrizes dos quadrantes pares e ímpares, respectivamente, e M é o ponto médio do segmento $\overline{OQ}$. **26. a.** $M(4, 4)$, $Q(8, 8)$ e $T(-4, 4)$

a. Determine os pontos M, Q e T.

b. Escreva as equações das retas s, r, b_i e b_p.

26. b. (s) $y = 4$; (r) $x = 8$; (b_i) $y = x$; (b_p) $y = -x$



27. Determine:

a. o ponto P, pertencente à bissetriz dos quadrantes ímpares, cuja distância do ponto $Q(1, 3)$ é igual a 10; **27. a.** $P(9, 9)$ ou $P(-5, -5)$

b. o ponto S, pertencente à bissetriz dos quadrantes pares, cuja distância do ponto $T(0, -1)$ é igual a 5. **27. b.** $S(4, -4)$ ou $S(-3, 3)$

Conectado

Conectado: Construção pessoal. Ao atribuir valores distintos e não nulos para m, obtém-se retas que passam pelo ponto $(0, 4)$; ao atribuir valores distintos para q, obtém-se retas paralelas.

Em um computador, acesse um programa de construção de gráficos matemáticos e faça o que se pede.

a. Atribua 5 valores diferentes ao parâmetro real m (com $m \neq 0$) da equação $y = mx + 4$ e construa, no mesmo plano cartesiano (na mesma tela), as retas determinadas pelas 5 equações obtidas.

b. Há algum ponto comum às 5 retas construídas no item **a**? Se houver, qual é esse ponto?

c. Atribua 5 valores diferentes ao parâmetro real q da equação $y = 2x + q$ e construa, no mesmo plano cartesiano, as retas determinadas pelas 5 equações obtidas.

d. Há algum ponto comum às 5 retas construídas no item **c**? Se houver, qual é esse ponto?

Estudamos várias aplicações da equação da reta no dia a dia. Para conhecer outra utilização prática desse tipo de equação, assista ao vídeo **Direitos do consumidor**. Disponível em: https://m3.ime.unicamp.br/recursos/1091. Acesso em: 15 ago. 2024.

ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

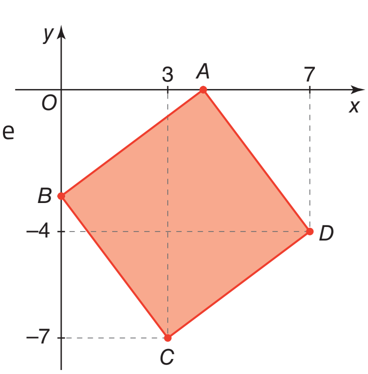
Faça os exercícios no caderno.

1. Ao mapa de uma região plana de uma cidade foi associado um sistema cartesiano ortogonal cuja unidade adotada nos eixos é o centímetro. Nesse sistema, cada um dos pontos $A(-2, -6)$ e $B(13, 2)$ representa a localização de uma escultura. Se um turista caminhou, em linha reta, de uma dessas esculturas até a outra, percorrendo 3,4 km, em que escala foi desenhado esse mapa? **1.** 1 : 20.000

2. Considerando o quadrado $ABCD$ representado no plano cartesiano, faça o que se pede.

a. Calcule a medida do lado desse quadrado.

b. Determine os vértices A e B.



2. b. $A(4, 0)$; $B(0, -3)$

2. a. 5 unidades de comprimento

3. Dados os pontos $A(5, 1)$, $B(3, -1)$ e $C(4, 0)$, determine o ponto $P(x, y)$ tal que $(PA)^2 + (PB)^2 = 8$ e $PC = \sqrt{2}$.

3. Faltam dados no enunciado para que se determine o ponto P.

4. (Enem) Foi utilizado o plano cartesiano para a representação de um pavimento de lojas. A loja A está localizada no ponto $A(1, 2)$. No ponto médio entre a loja A e a loja B está o sanitário S, localizado no ponto $S(5, 10)$. Determine as coordenadas do ponto de localização da loja B. **4.** alternativa **d**

a. $(-3, -6)$

b. $(-6, -3)$

c. $(3, 6)$

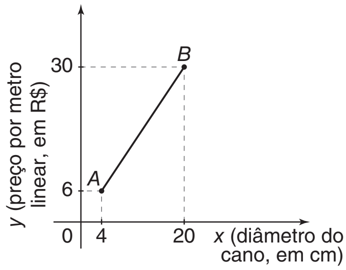
d. $(9, 18)$

e. $(18, 9)$

5. Uma indústria produz tubos cilíndricos para instalações hidráulicas. Esses tubos podem ser fabricados com qualquer diâmetro x, em centímetro, tal que $4 \leqslant x \leqslant 20$. A função que expressa o preço de venda y, em real, do metro de tubo de diâmetro x, em centímetro, tem como

Sugira aos estudantes o **Carrossel de imagens: Evidências do aquecimento global no Brasil** para que os estudantes ampliem seus conhecimento a respeito dos efeitos do aquecimento global.

gráfico o segmento de reta $\overline{AB}$, representado no plano cartesiano a seguir. Calcule o preço de venda do metro de cano com diâmetro de 8 cm.



6. Efeito estufa é o nome dado à retenção de calor na Terra causada pela concentração de diversos tipos de gases na atmosfera.

Entre os cientistas não há consenso, mas alguns afirmam que a emissão desses gases pode aumentar o efeito estufa e, consequentemente, gerar o fenômeno denominado aquecimento global. De acordo com as projeções mais pessimistas, a temperatura da superfície global pode aumentar em até 4,8 °C até 2100, comparada à temperatura média do ano 2000, segundo o Painel Intergovernamental sobre Mudanças Climáticas (IPCC).

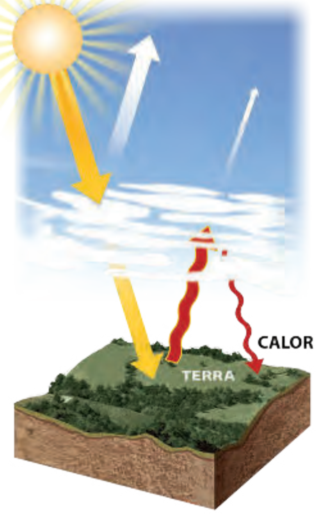
Considerando essa projeção e que a temperatura do planeta aumentará linearmente em função do tempo nesse período, responda: **5.** Concluímos, então, que o preço de venda do metro de cano com 8 cm de diâmetro é R$12,00.

OBJETO DIGITAL Carrossel de imagens: Evidências do aquecimento global no Brasil

ODS 13

O exercício traz o contexto do efeito estufa, com informações que possibilitam a análise desse fenômeno. Esse tema pode ser explorado com base nos estudos feitos em Biologia, de maneira que o estudante se posicione criticamente em relação aos impactos do fenômeno e às projeções de suas consequências. Ao abordar esse tema, favorecemos o trabalho com o **ODS 13**.

ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA



Esquema representativo do efeito estufa. Modelo didático sem escala e com cores fantasia.

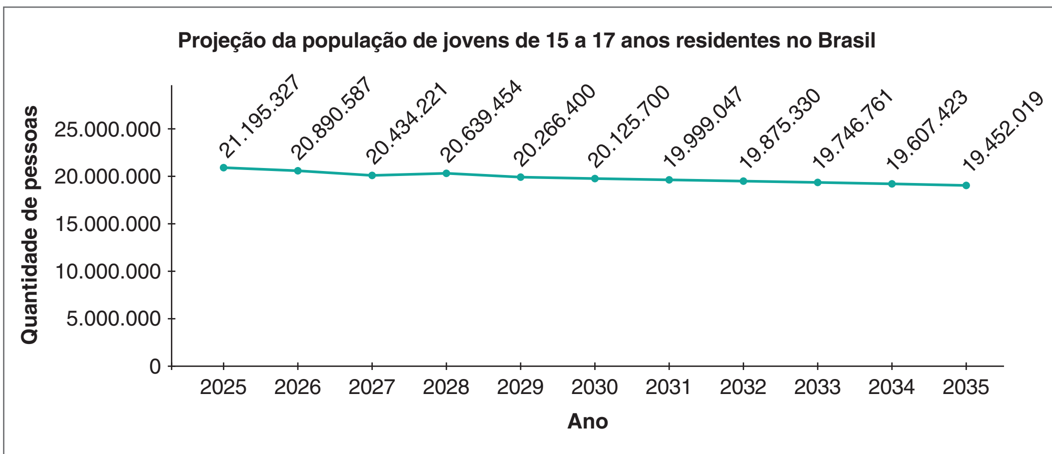
a. Em que ano teremos um aumento de 2,88 °C na temperatura? **6. a.** 2060

b. Qual é a taxa anual de variação da temperatura do planeta no período que vai do ano 2000 ao ano obtido no item **a**?
6. b. 0,048 °C por ano

7. O gráfico de linha a seguir apresenta uma projeção da população de jovens de 15 a 17 anos residentes no Brasil a cada ano de 2025 a 2035. **7. a.** Temos:

$$m = \frac{20.639.454 - 20.434.221}{2028 - 2027} = 205.233$$

ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA



Elaborado com base em: IBGE, **Projeção da População do Brasil por Sexo e Idade para o Período 1980-2050**. Disponível em: https://seriesestatisticas.ibge.gov.br/series.aspx?vcodigo=CAJ570&t=criancas-15-17-anos-idade-projecao. Acesso em: 3 set. 2024.

7. b. O coeficiente angular obtido no item **a** representa o crescimento do número de jovens do ano 2027 para o ano 2028.

7. c. A reta que tem o maior coeficiente angular é aquela que passa pelos pontos (2027; 20.434.221) e (2028; 20.639.454) e a que tem o menor coeficiente angular é aquela que passa pelos pontos (2026; 20.890.587) e (2027; 20.434.221).

a. Calculem o coeficiente angular da reta que passa pelos pontos (2027; 20.434.221) e (2028; 20.639.454).

b. No contexto do gráfico, qual é a interpretação do coeficiente angular obtido no item **a**?

c. Considerando as retas que passam por pontos correspondentes a 2 anos consecutivos do gráfico, qual delas tem maior coeficiente angular? E qual tem menor coeficiente angular?

d. Fazendo apenas a leitura do gráfico, sem efetuar cálculos, é possível determinar qual das retas citadas no item **c** corresponde ao maior decrescimento anual na população de jovens? Em caso afirmativo, expliquem como.

e. Calculem o coeficiente angular da reta que passa pelos pontos (2025; 21.195.327) e (2035; 19.452.019).

f. No contexto do gráfico, qual é a interpretação do coeficiente angular obtido no item **e**?

7. d. A reta que corresponde ao maior decrescimento no número de jovens é aquela que passa pelos pontos (2026; 20.890.587) e (2027; 20.434.221).

7. e. $m_e = -174.330,8$

7. f. Houve um decrescimento médio anual de 174.330,8 jovens.

8. b. Uma equação da reta que contém o gráfico do item **a** é $y = -\frac{3x}{50} + 27$.

8. Em um estudo oceanográfico, a fim de acompanhar as mudanças climáticas, foram feitas duas medições da temperatura das águas de certa região do Oceano Atlântico: uma na superfície, onde se obteve a temperatura de 27 °C, e outra a 100 m de profundidade, onde se obteve a temperatura de 21 °C. Admitindo-se que a temperatura varie linearmente com a profundidade, de 0 a 100 m, responda os itens seguintes.

8. c. O coeficiente angular da reta representa o decrescimento da temperatura, em grau Celsius, a cada metro a mais de profundidade do intervalo de 0 m a 100 m.

8. d. A temperatura da água é de 24,6 °C.


JENS BÜTTNER/PICTURE ALLIANCE/GETTY IMAGES

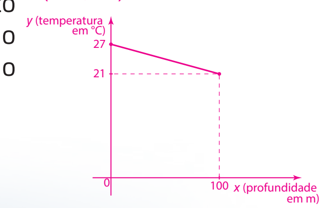
a. Construa o gráfico cartesiano que expressa a temperatura y da água, em grau Celsius, em função da profundidade x, em metro, para $0 \leqslant x \leqslant 100$.

b. Obtenha uma equação da reta que contém o gráfico construído no item **a**.

c. No contexto do enunciado, qual é o significado do coeficiente angular da reta obtida no item **b**.

d. Calcule a temperatura da água a 40 m de profundidade.

8. a. O gráfico é o segmento de reta com extremos em (0, 27) e (100, 21).



ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

9. Mapa mental é uma representação esquemática de ideias, conceitos ou informações, elaborado a partir de um tema central. Ele propicia uma visão geral e simplificada do assunto central, estruturado e conectado a assuntos relacionados. Observe uma síntese sobre o aquecimento global, suas causas e consequências, por meio do mapa mental apresentado a seguir referente ao exercício complementar **6**. 9. Resposta pessoal.

LUIZ IRIA/ARQUIVO DA EDITORA

Elaborado com base em: GUITARRARA, P. Consequências do aquecimento global. **Brasil Escola**. Disponível em: https://brasilescola.uol.com.br/geografia/consequencias-do-aquecimento-global.htm. Acesso em: 3 set. 2024.

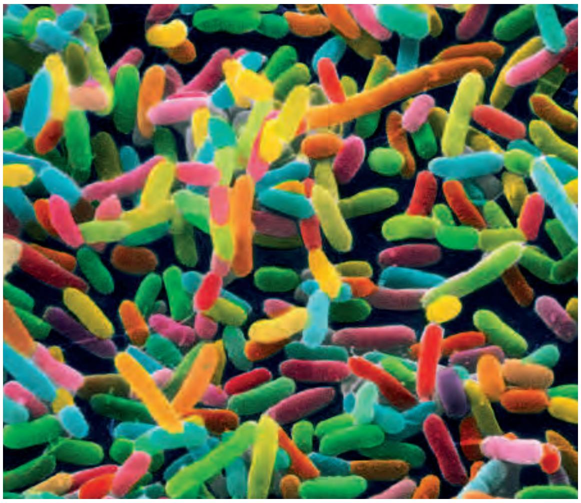
Junte-se a alguns colegas e reflitam sobre o que podemos fazer, individualmente, contra a mudança global do clima, e o que pode ser feito pelo Estado (governo). Construam um gráfico estatístico que possa ser usado em uma campanha contra a mudança global do clima. Compartilhem esse gráfico pelas redes sociais, acompanhado de um texto de alerta.

Para obter mais informações sobre os impactos causados pelo aumento da temperatura média do planeta Terra, leia o texto **Quais as consequências do aquecimento global?**. Disponível em: https://www.ecycle.com.br/consequencias-do-aquecimento-global/. Acesso em: 9 out. 2024.

MATEMÁTICA SEM FRONTEIRAS

Interpolação linear

NIBSC/SCIENCE PHOTO LIBRARY/ FOTOARENA



Bactéria *Escherichia coli*. (Imagem obtida por microscopia eletrônica de varredura, colorizada artificialmente e ampliada 5.500 vezes, aproximadamente.)

Geralmente, ao estudar um fenômeno natural, social, político etc., coletamos dados e os representamos em uma tabela ou um gráfico, formados por pontos isolados (x, y). Se, de alguma maneira, sabemos que entre dois pontos consecutivos do gráfico a função não tem variações “bruscas”, é razoável admitir, com alguma margem de erro, que a variação entre esses pontos é linear; portanto, podemos ligá-los por um segmento de reta. Essa técnica, chamada de **interpolação linear**, permite estimar valores intermediários às observações realizadas na experiência por meio do conceito de colinearidade de pontos.

Para exemplificar, vamos considerar a situação descrita a seguir.

Ao estudar uma cultura bacteriológica, um biólogo contou as bactérias em determinado instante, ao qual chamou de instante zero; e, ao final de cada uma das seis horas seguintes, fez nova contagem.

Nessa seção, exploramos textos sobre aplicações práticas do assunto desenvolvido no capítulo. O conteúdo apresentado tem dois objetivos: primeiro, contextualizar a teoria matemática por meio de situações reais; segundo, despertar a curiosidade dos estudantes para aplicações mais elaboradas. Nesse caso, exploramos a interpolação linear exemplificada por meio de um estudo de cultura bacteriológica. Sugerimos que os estudantes sejam orientados a lerem o texto e a resolverem, em grupos, os exercícios das atividades.

Os resultados dessa experiência são apresentados na tabela a seguir.

Quantidade de bactérias

Tempo (hora)	Número de bactérias
0	32
1	47
2	65
3	90
4	135
5	190
6	275

Dados elaborados para fins didáticos.

Embora não tenha sido feita a contagem no instante 5 h e 30 min, que equivale a 5,5 h, é possível estimar o número n de bactérias nele. Vamos estimar esse número nas atividades a seguir, usando alguns conceitos estudados neste capítulo.

Atividades

Matemática sem fronteiras:
1. Resposta no final do livro.

Faça as atividades no caderno.

1. Construam o gráfico, correspondente à tabela, do número de bactérias em função do tempo.

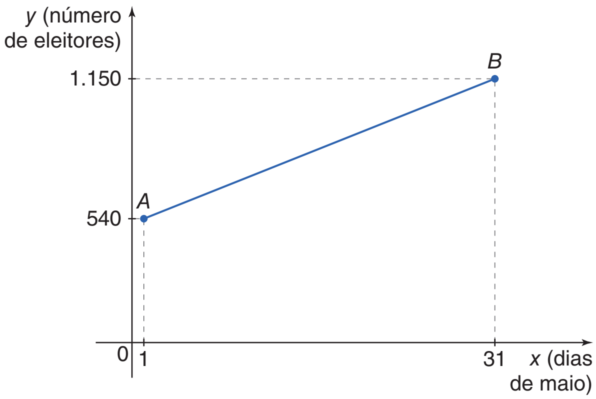
2. Para encontrar um valor intermediário, aproximado, entre dois pontos consecutivos do gráfico, consideramos que um segmento de reta une esses dois pontos. Assim, liguem os pontos $A(5, 190)$ e $B(6, 275)$. **2.** Resposta no final do livro.

3. Agora, usando os conceitos de coeficiente angular e colinearidade de pontos, determinem o número aproximado n de bactérias no instante 5 h e 30 min, que equivale a 5,5 horas. ≈ 233

VERIFIQUE O QUE APRENDEU NO CAPÍTULO 5

Para aperfeiçoar os estudos, você pode retomar os exercícios propostos no decorrer deste capítulo, rever suas resoluções ou utilizar os Exercícios complementares para estudar com os colegas. Você também pode utilizar as questões propostas a seguir para verificar sua aprendizagem.

1. Para avaliar a evolução de seu candidato à prefeitura de uma pequena cidade, um partido político encomendou cinco pesquisas de intenção de voto, que foram realizadas no mês de maio, espaçadas em intervalos iguais de tempo. As pesquisas realizadas nos dias 1 e 31 de maio revelaram que o número de eleitores dispostos a votar no candidato eram 540 e 1.150, respectivamente, e em cada um dos dias das outras pesquisas o número de eleitores que votariam no candidato era, aproximadamente, a respectiva ordenada do ponto do segmento de reta $\overline{AB}$, a seguir.



a. Em que dia de maio foi realizada a 4ª pesquisa?

1. a. no dia 24

b. Calcule o número aproximado de eleitores dispostos a votar no candidato na 4ª pesquisa realizada em maio.

1. b. aproximadamente, 998 eleitores.

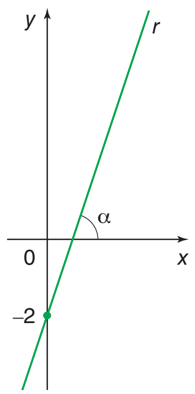
2. **(FGV-SP)** No plano cartesiano, o triângulo de vértices $A(1, -2)$, $B(m, 4)$ e $C(0, 6)$ é retângulo em A. O valor de m é igual a:

a. 47. **b.** 48. **c.** 49. **d.** 50. **e.** 51.

2. alternativa **c**

3. A inclinação α da reta r, representada a seguir, é tal que $\cos \alpha = \frac{\sqrt{10}}{10}$. Obtenha uma equação de r.

3. $y - (-2) = 3(x - 0) \Rightarrow y = 3x - 2$



Ferramenta de estudo

O mapa conceitual é uma ferramenta que representa de forma gráfica as relações entre conceitos, ou entre palavras que usamos para representar conceitos.

A seguir, apresentamos uma sugestão de elaboração de um mapa conceitual.

I. Retome os tópicos deste capítulo e faça um levantamento de informações relevantes para a elaboração do mapa. Por exemplo: conceitos, palavras-chave, situações-problema etc.

II. Escolha uma estrutura para o mapa e defina quais serão os recursos visuais que serão utilizados. Por exemplo: caixas, linhas, setas, cores, imagens, entre outros.

III. Organize a sequência das informações compondo ramificações que relacionem os conteúdos.

Agora, construa um mapa conceitual utilizando o que você aprendeu neste capítulo.

Se teve dificuldades em construir o mapa conceitual ou não resolveu algum exercício, retome os conteúdos abordados no capítulo. Após algumas tentativas, anote as dúvidas e converse com um colega que possa ajudá-lo. Se mesmo assim a dúvida persistir, pergunte ao professor na aula seguinte. Gerencie bem seu tempo de estudo em casa e estabeleça metas diárias alcançáveis, planejando seus estudos passo a passo.

CAPÍTULO 6

A **abertura** apresenta a imagem de veículo autônomo. A tecnologia desses veículos está relacionada à Geometria analítica, que estuda retas, trajetórias, interseções e distâncias. Esses conceitos são essenciais para garantir a navegação segura e eficiente dos veículos autônomos nas vias. Esse tema favorece o desenvolvimento do **TCT Ciência e Tecnologia** e do **ODS 9**. Além disso, desenvolve a **competência geral 1**, ao compreender e aplicar conceitos de Geometria analítica e tecnologia; da **competência geral 4**, ao utilizar tecnologias digitais de forma crítica e significativa; e da **competência geral 10**, ao compreender as implicações éticas e sociais do uso de carros autônomos.

Complementos sobre o estudo da reta

Veículos autônomos utilizam uma combinação de câmeras, radares, sensores de profundidade, GPS e *lasers* de detecção de alcance para reunir informações sobre o ambiente circundante. A inteligência artificial processa esses dados para reconhecer objetos, avaliar seus movimentos e localizar sua posição na via. Os sensores de profundidade emitem pulsos de luz que atingem os objetos e obstáculos. Esses pulsos são refletidos de volta e são detectados pelos sensores. Deste modo, determina-se o intervalo de tempo que o pulso leva para fazer o trajeto de ida e volta, e assim, calculam a distância em relação ao objeto.

O funcionamento dos veículos autônomos está diretamente relacionado ao estudo da reta e de outros conceitos da Geometria analítica. A análise de posições, trajetórias, interseções e distâncias envolve o uso de retas para garantir a navegação segura e eficiente do veículo no ambiente rodoviário.

VCG/VISUAL CHINA GROUP/GETTY IMAGES

Micro-ônibus autônomo em Qianhai, China. Foto de 2024.

Além da teoria

Além da teoria: Resposta pessoal.

Em relação ao uso de veículos autônomos, alguns desafios são relacionados à insegurança de passar o controle de um automóvel para uma inteligência artificial (IA) e a falta de regulamentação no uso da IA e nos veículos. O que você acha a respeito desse assunto?

1. Formas de equação da reta

No plano cartesiano xOy, a reta que passa pelo ponto $P(x_0, y_0)$ e tem coeficiente angular m pode ser representada pela equação $y - y_0 = m(x - x_0)$, e a reta vertical que passa por $P(x_0, y_0)$ tem como representação a equação $x = x_0$.

Embora essas equações sejam suficientes para representar qualquer reta do plano cartesiano, é útil conhecer outras maneiras de apresentá-las.

Estudaremos três formas de equação da reta: a **forma geral**, a **forma reduzida** e a **forma paramétrica**. Cada uma delas tem uma utilidade específica: a forma geral recebe esse nome porque permite a representação de qualquer reta do plano, horizontal, vertical ou oblíqua; a forma reduzida explicita o coeficiente angular e o coeficiente linear (você vai aprender o significado mais adiante) da reta; e a forma paramétrica possibilita estudar cada variável da equação em função de um parâmetro real.

No tópico **Equação geral da reta**, pergunte: "A equação fundamental $y - y_0 = m(x - x_0)$, em que m, x_0 e y_0 assumem todos os valores reais, representa todas as retas do plano cartesiano xOy? (Não, pois as retas verticais não são representadas por esse tipo de equação.)"; "Qual seria a forma de representar todas as retas do plano cartesiano? (Uma forma possível seria pelas equações: $y - y_0 = m(x - x_0)$ ou $x = x_0$.)". Comente que outra forma de representar todas as retas do plano cartesiano seria por meio da equação: $ax + by + c = 0$, em que a, b e c são números reais, com a e b não simultaneamente nulos. Essa forma de representação é chamada **equação geral da reta**. Ressalte que, se $ax + by + c = 0$ é a equação geral de uma reta r, então $kax + kby + kc = 0$, com $k \in \mathbb{R}^*$, também é uma equação geral de r. Assim, existem infinitas equações gerais de uma mesma reta.

2. Equação geral da reta

Toda reta do plano cartesiano xOy é gráfico de uma equação da forma $ax + by + c = 0$, em que x e y são variáveis e a, b e c são constantes reais com a e b não simultaneamente nulas. Reciprocamente, toda equação dessa forma representa uma reta do plano cartesiano. Essa equação é chamada de **equação geral da reta**.

Note, portanto, que a equação geral da reta é uma equação do 1º grau com duas variáveis em que um dos membros da igualdade é zero.

Exemplos

a. A reta oblíqua de equação $y = 5x - 6$ pode ser representada pela equação geral $5x - y - 6 = 0$.

b. A reta horizontal de equação $y = 7$ pode ser representada pela equação geral $0x + y - 7 = 0$.

c. A reta vertical de equação $x = 2$ pode ser representada pela equação geral $x + 0y - 2 = 0$.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

1. Considerando o ponto $P(1, 5)$ e a reta r de equação $x - y - 3 = 0$, determine o(s) ponto(s) de r que dista(m) 5 unidades de P.

Resolução

Tomemos um ponto genérico G de r. Para isso, basta atribuir um valor genérico para x. Substituindo x por um valor genérico a, temos:

$$a - y - 3 = 0 \Rightarrow y = a - 3$$

Assim, podemos representar G por $G(a, a - 3)$.

Impomos a condição exigida no enunciado, isto é, $PG = 5$:

$$PG = 5 \Rightarrow \sqrt{(a-1)^2 + (a-3-5)^2} = 5$$

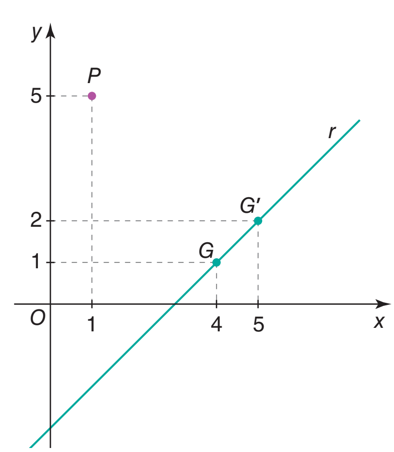
Elevando ao quadrado ambos os membros dessa igualdade, obtemos:

$$(a-1)^2 + (a-8)^2 = 5^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow a^2 - 2a + 1 + a^2 - 16a + 64 = 25$$
$$\therefore 2a^2 - 18a + 40 = 0 \Rightarrow a^2 - 9a + 20 = 0$$

Resolvendo essa equação polinomial do 2º grau, obtemos $a = 4$ ou $a = 5$.

Há, portanto, dois pontos, G e G', de r que distam 5 unidades de P:

- para $a = 4$, temos $G(4, 1)$;
- para $a = 5$, temos $G'(5, 2)$.



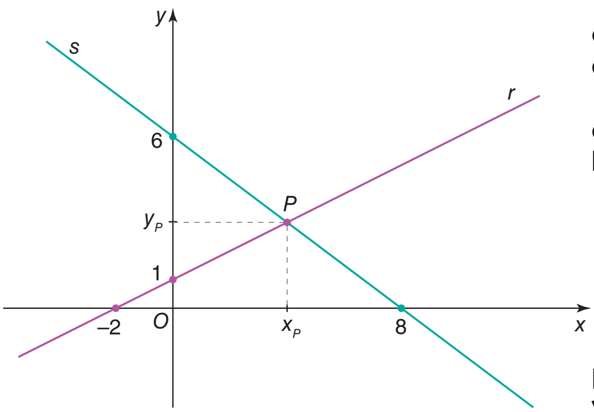
FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

Mostre que as coordenadas do ponto comum a duas retas concorrentes é a solução do sistema formado por suas equações. Exemplifique. Pergunte: "Sob que condição as retas de equações $2x + 3y - 1 = 0$ e $4x + ky + 3 = 0$ são concorrentes? ($k \neq 6$)". Após essa discussão, apresente a condição de concorrência de duas retas.

Intersecção de duas retas concorrentes

Conhecidas as equações de duas retas concorrentes, como determinar o ponto comum a elas?

Vamos responder a essa pergunta partindo do exemplo a seguir.



No plano cartesiano xOy, indicamos por $P(x_P, y_P)$ o ponto comum às retas concorrentes r e s de equações $x - 2y + 2 = 0$ e $3x + 4y - 24 = 0$, respectivamente.

Como $P(x_P, y_P)$ pertence às duas retas simultaneamente, deduzimos que o par ordenado (x_P, y_P) é a solução do sistema linear:

$$\begin{cases} x - 2y + 2 = 0 \\ 3x + 4y - 24 = 0 \end{cases}$$

Resolvendo-o, obtemos $P(4, 3)$.

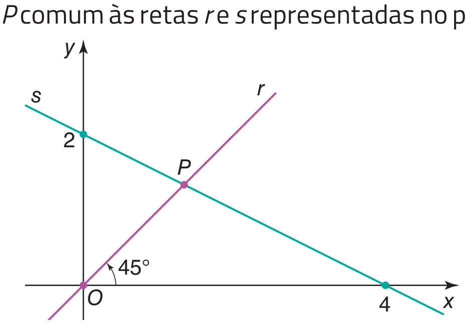
Generalizando, para obter as coordenadas cartesianas do ponto de intersecção de duas retas concorrentes basta resolver o sistema formado por suas equações.

Reflexão **Reflexão:** As retas representadas pelas equações do sistema são paralelas distintas.

Se um sistema linear com duas equações e duas incógnitas é impossível (não tem solução), qual é a posição relativa entre as retas representadas por suas equações?

EXERCÍCIO RESOLVIDO

2. Determine o ponto P comum às retas r e s representadas no plano cartesiano a seguir.



Resolução

A reta r passa pelo ponto (0, 0) e tem coeficiente angular $m_r = \text{tg } 45° = 1$; logo, a equação de r é $y - 0 = 1(x - 0)$, ou seja, $y = x$.

A reta s passa pelo ponto (4, 0) e tem coeficiente angular $m_s = \frac{2 - 0}{0 - 4} = -\frac{1}{2}$; logo, a equação de s é $y - 0 = -\frac{1}{2} \cdot (x - 4)$, ou seja, $y = -\frac{x}{2} + 2$.

A solução do sistema formado pelas equações de r e s é o par ordenado que representa o ponto P.

$$\begin{cases} y = x & (1) \\ y = -\frac{x}{2} + 2 & (2) \end{cases}$$

Substituindo (1) em (2), obtemos:

$$x = -\frac{x}{2} + 2 \Rightarrow x = \frac{4}{3}$$

Como a equação (1) expressa que $y = x$, deduzimos que $y = \frac{4}{3}$.

Concluímos, então, que $P\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Faça os exercícios no caderno.

1. Construa o gráfico cartesiano da reta:

a. q de equação geral $3x - 2y - 12 = 0$;

b. t de equação geral $2x + 3y = 0$;

c. u de equação geral $x - 6 = 0$;

d. v de equação geral $y + 3 = 0$;

e. r de equação geral $x = 0$;

f. s de equação geral $y = 0$.

1. Respostas no final do livro.

2. Determine o ponto de intersecção das retas r e s em cada um dos casos.

a. $(r)\ x + 2y - 1 = 0$ e $(s)\ 2x - y + 3 = 0$ **2. a.** (–1, 1)

b. $(r)\ 5x + y - 3 = 0$ e $(s)\ 2x + 3y + 17 = 0$ **2. b.** (2, –7)

3. a. Resposta no final do livro.

3. A reta r, de equação $2x + 3y - 6 = 0$, intercepta os eixos das abscissas e das ordenadas nos pontos M e N, respectivamente, e a reta s de equação $3x + 2y - 18 = 0$ intercepta os eixos das abscissas e das ordenadas nos pontos Q e P, respectivamente.

a. Construa o gráfico das retas r e s, destacando as coordenadas dos pontos M, N, P e Q.

b. Calcule a área do quadrilátero $MNPQ$. **3. b.** 24 u

4. Considere o triângulo ABC cujos lados estão contidos nas retas $(r)\ x - 2y + 5 = 0$, $(s)\ x + 2y + 5 = 0$ e $(t)\ x - 3 = 0$, tal que $\{A\} = r \cap s$, $\{B\} = r \cap t$ e $\{C\} = s \cap t$. Obtenha uma equação geral da reta suporte da mediana relativa ao lado $\overline{AC}$ do triângulo.

4. $3x - 2y - 1 = 0$

5. Considere a reta r de equação geral $x + y - 1 = 0$.

a. Construa o gráfico da reta r no plano cartesiano.

b. Se um ponto G da reta r tem abscissa k, qual é a ordenada de G em função de k? **5. b.** $1 - k$

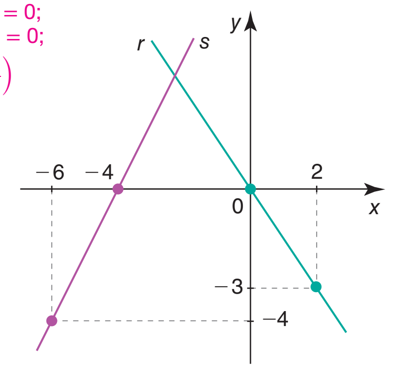
c. Determine o(s) ponto(s) da reta r que dista(m) 5 unidades da origem do sistema. **5. c.** (4, –3); (–3, 4)

Sugestão: Use o ponto genérico G do item **b**.

5. a. Resposta no final do livro.

6. Obtenha uma equação geral para cada uma das retas r e s representadas no plano cartesiano a seguir e determine o ponto de intersecção dessas retas.

6. $3x + 2y = 0$; $2x - y + 8 = 0$; $\left(-\frac{16}{7}, \frac{24}{7}\right)$



FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

7. Duas empresas, A e B, iniciaram suas atividades simultaneamente com patrimônios de 4 milhões de reais e 6 milhões de reais, respectivamente. Dois anos depois do início das atividades, os patrimônios de A e B eram de 6 milhões de reais e 7 milhões de reais, respectivamente. Supondo que nos 10 primeiros anos de atividade o patrimônio de cada uma dessas empresas variou linearmente com o tempo, responda aos itens seguintes. **7. a.** Resposta no final do livro.

a. Represente, no mesmo plano cartesiano xOy, o gráfico que expressa o patrimônio y de cada uma dessas empresas, em milhão de reais, em função do tempo x de atividade, em ano, com $0 \leqslant x \leqslant 10$.

b. Quantos anos após o início de suas atividades os patrimônios de A e B se tornaram iguais?

7. b. Após 4 anos.

8. Elaborem e resolvam um problema sobre a intersecção de duas retas. Se possível, utilizem os recursos de uma planilha eletrônica para determinar as retas que se associam aos dados do problema. **8.** Resposta pessoal.

Para retomar os conteúdos estudados, resolva os exercícios complementares 1 e 2.

3. Equação reduzida da reta

A equação da reta r que passa pelo ponto $P(x_0, y_0)$ e tem coeficiente angular igual a m é: $y - y_0 = m(x - x_0)$. Isolando a variável y nessa equação, obtemos:

$$y = mx + y_0 - mx_0$$

Observando que a expressão $y_0 - mx_0$ é uma constante e indicando-a por q, podemos representar:

$$\boxed{y = mx + q}$$

Essa equação é chamada de **equação reduzida** da reta r.

Observação

Lembre-se de que, para uma reta não vertical, o coeficiente angular é a tangente da inclinação da reta.

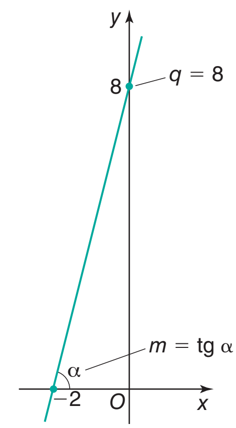
O coeficiente m de x na equação reduzida é o **coeficiente angular** da reta. Ao termo q, independente de x e y, que é a ordenada do ponto de intersecção da reta com o eixo das ordenadas, damos o nome de **coeficiente linear** da reta.

Exemplos

a. Na equação reduzida $y = 4x + 8$ de uma reta r, temos:

- $m = 4$ (coeficiente angular);
- $q = 8$ (coeficiente linear).

O gráfico de r pode ser construído tomando-se dois de seus pontos distintos; por exemplo, a partir dos pontos de intersecção de r com os eixos coordenados. Substituindo x por 0 na equação da reta, obtemos $y = 8$, e, substituindo y por 0, obtemos $x = -2$. Logo, dois pontos da reta são (0, 8) e (−2, 0).



FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

Observe no gráfico as interpretações geométricas do coeficiente angular e do coeficiente linear da reta r:

- No triângulo retângulo limitado pela reta r e pelos eixos coordenados, a tangente do ângulo α é a razão entre o comprimento do cateto oposto a α e o comprimento do cateto adjacente a α, isto é:

$$\text{tg } \alpha = \frac{8}{2} = 4$$

  Esse número, que é o coeficiente angular da reta r, é o coeficiente de x na equação reduzida de r.

- A ordenada do ponto de intersecção da reta r com o eixo das ordenadas é 8. Esse número, que é o coeficiente linear da reta r, é o termo independente de x e y na equação reduzida da reta.

b. Seja s a reta de equação geral $7x + 3y - 12 = 0$. Obtemos a forma reduzida da equação de s isolando a variável y na equação geral, isto é:

$$3y = -7x + 12 \Rightarrow y = -\frac{7x}{3} + 4$$

Assim, temos:

- $m = -\frac{7}{3}$ (coeficiente angular);
- $q = 4$ (coeficiente linear).

O resultado obtido nesse último exemplo pode ser generalizado do seguinte modo:

> Sendo r uma reta não vertical de equação geral $ax + by + c = 0$, seu coeficiente angular m e seu coeficiente linear q são $m = -\frac{a}{b}$ e $q = -\frac{c}{b}$, pois a forma reduzida da equação dessa reta é: $y = -\frac{ax}{b} - \frac{c}{b}$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Faça os exercícios no caderno.

9. Considere a reta r de equação $y = 2x + 6$ e faça o que se pede.

a. Construa o gráfico de r. **9. a.** Resposta no final do livro.

b. Determine o coeficiente angular e o coeficiente linear da reta r. **9. b.** $m = 2$; $q = 6$

c. Explique, a partir do gráfico da reta r, a interpretação geométrica do coeficiente angular da reta r e a interpretação geométrica do coeficiente linear da reta r.

9. c. O coeficiente angular da reta é a tangente da inclinação de r. O coeficiente linear da reta é a ordenada do ponto em que a reta intercepta o eixo das ordenadas.

10. Um tanque T_1 continha 18 L de água e um tanque T_2 continha 24 L de água quando foram abertas, simultaneamente, duas torneiras t_1 e t_2 para abastecê-los, respectivamente. A partir do instante em que foram abertas as torneiras, o volume y, em litro, de água em T_1 era dado em função do tempo x, em minuto, pela função $y = 20x + p$, e em T_2 por $y = 15x + q$, em que p e q são constantes reais.

a. Determine os coeficientes lineares p e q, explicando o significado de cada um no contexto do enunciado. **10. a.** $p = 18$ e $q = 24$; representam a quantidade inicial de água em cada tanque.

b. No contexto do enunciado, qual é a interpretação dos coeficientes angulares nas equações $y = 20x + p$ e $y = 15x + q$?

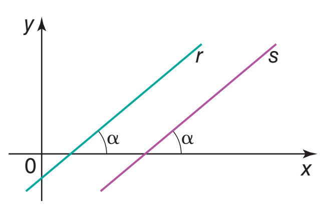
10. b. O coeficiente angular 20 indica a vazão da torneira t_1, em litro por minuto, e o coeficiente angular 15 indica a vazão da torneira t_2, em litro por minuto.

Para retomar os conteúdos estudados, resolva o exercício complementar 3.

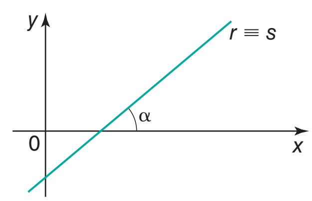
Estudo das posições relativas de duas retas no plano cartesiano

No plano cartesiano, duas retas, r e s, podem ser paralelas distintas, paralelas coincidentes ou concorrentes. A seguir, vamos determinar as posições relativas de duas retas a partir de seus coeficientes angulares e lineares.

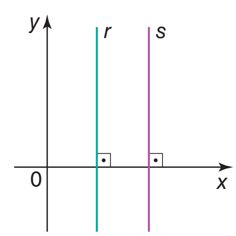
(1) As retas r e s são **paralelas** se, e somente se, têm o mesmo coeficiente angular ou não existem seus coeficientes angulares:



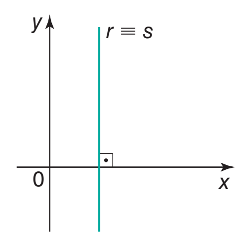
$m_r = m_s \Rightarrow r \parallel s$



$m_r = m_s \Rightarrow r \parallel s$

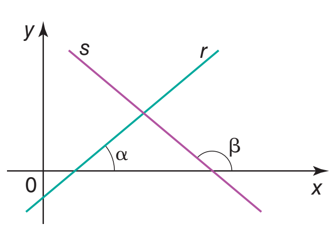


$\nexists\, m_r$ e $\nexists\, m_s \Rightarrow r \parallel s$

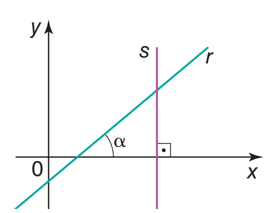


$\nexists\, m_r$ e $\nexists\, m_s \Rightarrow r \parallel s$

(2) As retas r e s são **concorrentes** se, e somente se, têm coeficientes angulares diferentes ou existe o coeficiente angular de uma delas e não existe o da outra:



$m_r \neq m_s \Rightarrow r$ concorre com s

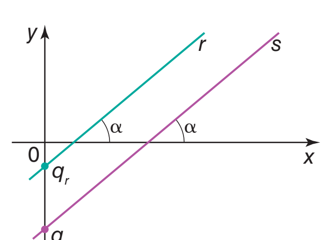


$\exists\, m_r$ e $\nexists\, m_s \Rightarrow r$ concorre com s

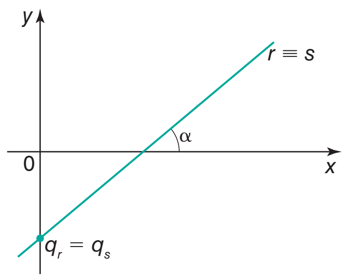
As propriedades apresentadas em (1) e (2) nos permitem enunciar:

Duas retas não verticais, r e s, de equações reduzidas $y = m_r x + q_r$ e $y = m_s x + q_s$, respectivamente, são:

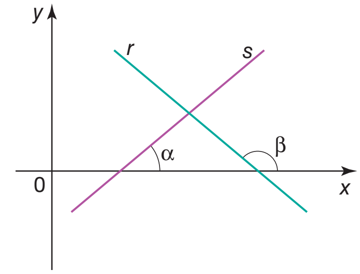
- **paralelas distintas** se, e somente se, $m_r = m_s$ e $q_r \neq q_s$;



- **paralelas coincidentes** se, e somente se, $m_r = m_s$ e $q_r = q_s$;



- **concorrentes** se, e somente se, $m_r \neq m_s$.



EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

3. No plano cartesiano xOy, as equações de duas retas, r e s, são, respectivamente, $3x + 2y - 1 = 0$ e $kx + 4y + 6 = 0$, em que k é um número real. Para que valores de k essas retas são concorrentes?

Resolução

Representando na forma reduzida a equação das retas, temos:

$$(r)\ y = -\frac{3x}{2} + \frac{1}{2} \text{ e } (s)\ y = -\frac{kx}{4} - \frac{3}{2}$$

Para que r e s sejam concorrentes, seus coeficientes angulares devem ser diferentes, logo:

$$-\frac{3}{2} \neq -\frac{k}{4} \Rightarrow k \neq 6$$

4. Obtenha uma equação da reta r que passa pelo ponto $P(-5, 1)$ e é paralela à reta s, de equação $6x + 3y - 1 = 0$.

Resolução

Representando sob a forma reduzida a equação da reta s, obtemos: $y = -2x + \frac{1}{3}$

Portanto, o coeficiente angular de s é $m_s = -2$.

Para que sejam paralelas, as retas r e s devem ter o mesmo coeficiente angular; então, $m_r = m_s = -2$. Assim, como r passa pelo ponto $P(-5, 1)$, sua equação fundamental é:

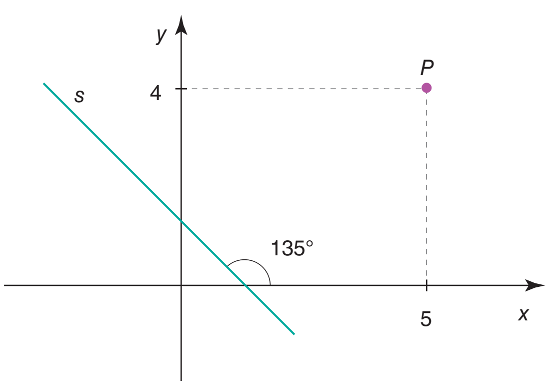
$$y - 1 = -2 \cdot [x - (-5)]$$

Portanto, uma equação da reta r é $2x + y + 9 = 0$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

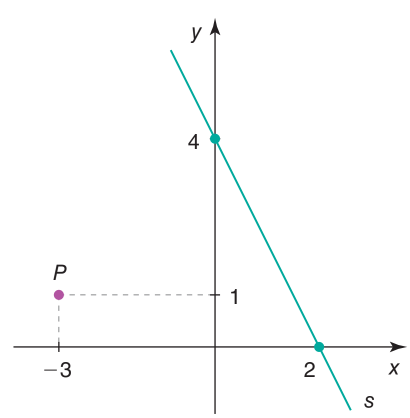
Faça os exercícios no caderno.

11. Obtenha uma equação geral da reta r que passa pelo ponto $P(5, 4)$ e é paralela à reta s representada no plano cartesiano a seguir. **11.** $x + y - 9 = 0$



12. Qual é a equação reduzida da reta r que passa pelo ponto $P(-3, 1)$ e é paralela à reta s representada no plano cartesiano a seguir?

12. $y = -2x - 5$



13. Determine a equação reduzida da reta r que passa pelo ponto P e é paralela à reta s nos seguintes casos:

a. $P(2, 5)$ e $(s)\ 3x + y - 2 = 0$ **13. a.** $y = -3x + 11$

b. $P(0, 1)$ e $(s)\ y = -4x + 2$ **13. b.** $y = -4x + 1$

c. $P(0, 0)$ e $(s)\ 2x - 3y + 1 = 0$ **13. c.** $y = \frac{2x}{3}$

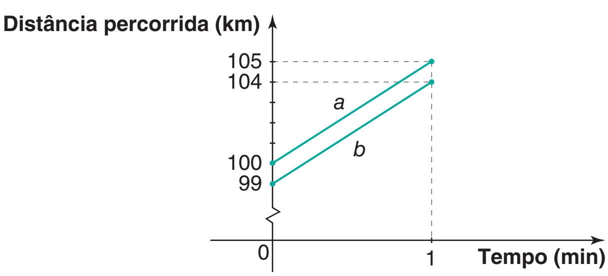
14. As retas r e s têm, respectivamente, as equações $kx - y - k = 0$ e $y = \frac{9x}{k} + 3$, sendo k uma constante real não nula. Para que valor(es) de k as retas r e s são:

a. concorrentes? **14. a.** Qualquer número real k, com $k \neq 0$ e $k \neq 3$ e $k \neq -3$.

b. paralelas distintas? **14. b.** $k = 3$

c. paralelas coincidentes? **14. b.** $k = -3$

15. Em uma corrida da Fórmula Indy, a partir de determinado instante que chamou de instante zero, um engenheiro de uma equipe marcou, durante 1 minuto, a distância percorrida pelos dois primeiros colocados, A e B. Os gráficos a e b, a seguir, são segmentos de reta e descrevem as distâncias percorridas por A e B, respectivamente, em função do tempo, durante esse período de monitoramento do engenheiro.



ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

15. a. verdadeira

Considerando essa situação, classifique como verdadeira ou falsa cada uma das afirmações seguintes.

a. Se as equações reduzidas das retas que contêm os gráficos a e b são, respectivamente, $y = px + q$ e $y = rx + s$, então $p = r = 5$ e $q = s + 1 = 100$.

b. Os coeficientes angulares p e r das equações reduzidas citadas no item **a** representam as velocidades, em quilômetro por minuto, dos carros A e B, respectivamente, durante o tempo de monitoramento do engenheiro. **15. b.** verdadeira

c. O carro A estava a uma velocidade maior que a de B durante o minuto descrito no gráfico. **15. c.** falsa

d. No instante em que o engenheiro iniciou a marcação de tempo, os carros A e B já haviam percorrido 100 km e 99 km, respectivamente, desde a largada. **15. d.** verdadeira

e. Se os carros mantiveram as velocidades descritas nos gráficos até o final da prova e nenhum deles foi ultrapassado por outro carro, então o carro B chegou em segundo lugar, 12 segundos depois de o carro A ter cruzado a linha de chegada. **15. e.** verdadeira

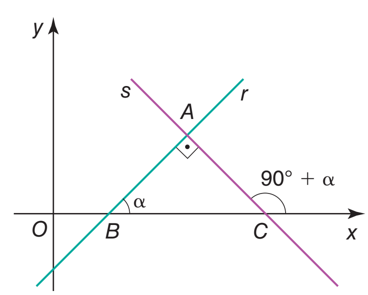
16. Elaborem e resolvam um problema sobre retas paralelas que envolva uma situação contextualizada.
16. Resposta pessoal.

Para retomar os conteúdos estudados, resolva o exercício complementar 4.

Retas perpendiculares

O gráfico mostra duas retas perpendiculares, r e s, de coeficientes angulares m_r e m_s, respectivamente.

Note que a inclinação de s é a medida do ângulo externo relativo ao vértice C do triângulo ABC; por isso, essa inclinação é a soma das medidas dos ângulos internos $\hat{A}$ e $\hat{B}$.



FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

Da Trigonometria, temos:

$$\text{tg}\,(90° + \alpha) = \frac{\text{sen}\,(90° + \alpha)}{\cos\,(90° + \alpha)} = \frac{\text{sen}\,90° \cdot \cos\alpha + \text{sen}\,\alpha \cdot \cos 90°}{\cos 90° \cdot \cos\alpha - \text{sen}\,90° \cdot \text{sen}\,\alpha} = \frac{\cos\alpha}{-\text{sen}\,\alpha}$$

$$\therefore \text{tg}\,(90° + \alpha) = -\frac{1}{\text{tg}\,\alpha}$$

Portanto, os coeficientes angulares das retas r e s são:

$$\begin{cases} m_r = \text{tg}\,\alpha \\ m_s = \text{tg}\,(90° + \alpha) = -\dfrac{1}{\text{tg}\,\alpha} \end{cases} \Rightarrow \quad m_s = -\frac{1}{m_r}$$

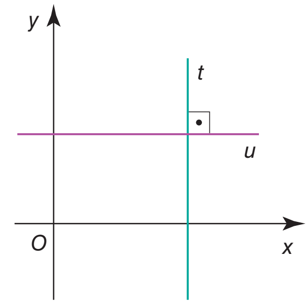
Demonstramos, assim, que se duas retas não verticais são perpendiculares, então o coeficiente angular de uma delas é igual ao oposto do inverso do coeficiente angular da outra. A recíproca desse teorema também é verdadeira, isto é, se os coeficientes angulares m_r e m_s de duas retas r e s satisfazem a condição $m_s = -\frac{1}{m_r}$, então r e s são perpendiculares.

Assim, esse teorema demonstrado e sua recíproca podem ser sintetizados no enunciado:

Duas retas, r e s, não verticais são **perpendiculares** se, e somente se, o coeficiente angular de uma delas é igual ao oposto do inverso do coeficiente angular da outra.

Nota:

Sendo t uma reta vertical, uma reta u é perpendicular a t se, e somente se, u é horizontal.



EXERCÍCIO RESOLVIDO

5. Obtenha uma equação geral da reta r que passa pelo ponto $P(1, 5)$ e é perpendicular à reta s de equação $2x + y + 4 = 0$. Em seguida, represente graficamente essas retas.

Resolução

Representando na forma reduzida a equação da reta s, temos: $y = -2x - 4$; portanto, $m_s = -2$.

Para que as retas r e s sejam perpendiculares, o coeficiente angular de r deve ser igual ao oposto do inverso do coeficiente angular de s. Assim:

$$m_r = -\frac{1}{m_s} = -\frac{1}{-2} = \frac{1}{2}$$

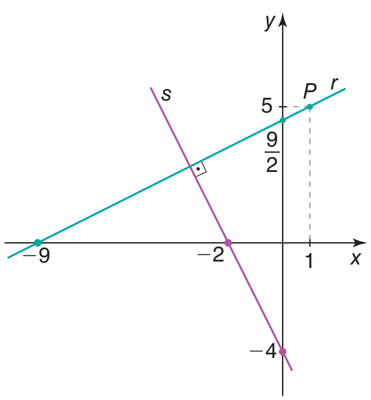
Como a reta r passa pelo ponto $P(1, 5)$, sua equação fundamental é dada por:

$$y - 5 = \frac{1}{2} \cdot (x - 1)$$

Logo, uma equação geral da reta r é:

$$x - 2y + 9 = 0$$

Graficamente, temos:



EXERCÍCIOS PROPOSTOS

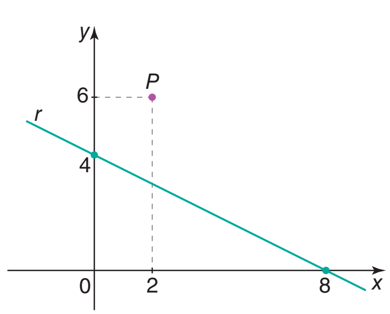
Faça os exercícios no caderno.

17. Obtenha uma equação da reta s que passa pelo ponto P e é perpendicular à reta r nos seguintes casos:

a. $P(2, 4)$ e $(r)\ x + 2y - 10 = 0$ **17. a.** $y = 2x$

b. $P(0, -4)$ e $(r)\ 5x + 4y = 0$ **17. b.** $4x - 5y - 20 = 0$

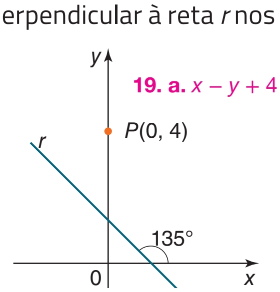
18. Obtenha uma equação da reta s que passa pelo ponto $P(2, 6)$ e é perpendicular à reta r representada a seguir. **18.** $y = 2x + 2$



19. Obtenha a equação da reta que passa pelo ponto P e é perpendicular à reta r nos seguintes casos:

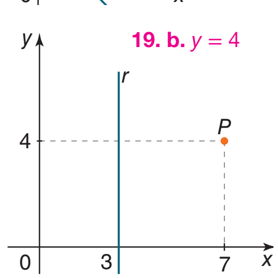
a.

19. a. $x - y + 4 = 0$

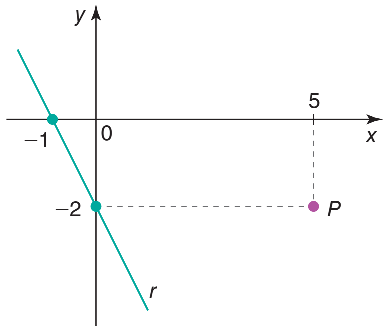


b.

19. b. $y = 4$



20. Considere o gráfico a seguir.



a. Obtenha uma equação da reta *r*. **20. a.** $2x + y + 2 = 0$

b. Obtenha uma equação da reta *s* que passa por *P* e é perpendicular a *r*. **20. b.** $x - 2y - 9 = 0$

c. Determine o ponto *A* de intersecção de *r* com a reta *s* obtida no item **b**. **20. c.** $(1, -4)$

d. Determine o ponto P', simétrico de *P* em relação ao ponto *A* obtido no item **c**. **20. d.** $(-3, -6)$

21. Considerando o triângulo *ABC*, com $A(0, 2)$, $B(6, 8)$ e $C(10, 0)$, faça o que se pede.

a. Obtenha as equações das mediatrizes dos lados $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$. **21. a.** $x + y - 8 = 0$ e $x - 2y = 0$

b. Determine o ponto *D*, comum às mediatrizes obtidas no item **a**. **21. b.** $D\left(\frac{16}{3}, \frac{8}{3}\right)$ **21. c.** $R = \frac{2\sqrt{65}}{3}$

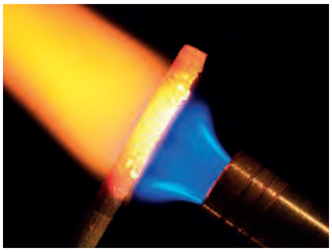
c. Lembrando que o ponto comum às mediatrizes dos lados de um triângulo é o centro da circunferência circunscrita a ele, calcule a medida *R* do raio da circunferência circunscrita ao triângulo *ABC*.

Para retomar os conteúdos estudados, resolva o exercício complementar 5.

4. Equações paramétricas da reta

Em uma aula no laboratório de Física, mediu-se a temperatura de uma barra metálica com 300 mm de comprimento, obtendo-se 20 °C. A seguir, a barra foi aquecida, durante determinado tempo, observando-se uma variação linear de sua temperatura em função do tempo, à razão de 10 °C por minuto; e uma variação linear do comprimento em função do tempo, à razão de 0,036 mm por minuto. Essas observações foram registradas pelos estudantes por meio das seguintes equações, que relacionam o comprimento *L* da barra, em milímetro, com sua temperatura *T*, em grau Celsius, e o tempo *t* de aquecimento, em minuto:

$$\begin{cases} T = 20 + 10t \\ L = 300 + 0{,}036t \end{cases}$$



Quando aquecemos uma barra metálica, ela sofre uma dilatação térmica, que é o aumento do seu comprimento quando aquecida.

No relatório, que será entregue ao professor, os estudantes devem apresentar uma equação que expresse o comprimento *L* da barra em função de sua temperatura *T*. Como isso pode ser feito?

Para obter essa equação, eles podem utilizar o sistema anterior, isolando *t* em uma das equações e substituindo o valor obtido na outra. Observe:

$$\begin{cases} t = \dfrac{T - 20}{10} & (1) \\ L = 300 + 0{,}036t & (2) \end{cases} \xrightarrow[\text{em (2)}]{\text{Substituindo (1)}} L = 300 + 0{,}036 \cdot \dfrac{T - 20}{10}$$

Portanto, para $T \geqslant 20$, a equação pedida é: $L = 299{,}928 + 0{,}0036T$

As equações $T = 20 + 10t$ e $L = 300 + 0{,}036t$ são chamadas de equações paramétricas associadas à equação $L = 299{,}928 + 0{,}0036T$. A variável *t* é chamada de parâmetro das equações paramétricas.

De modo geral, para qualquer equação que relacione apenas as variáveis *x* e *y*, podemos apresentar essas variáveis em função de um parâmetro *t*:

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$$

Se essas equações representam uma reta *r*, são chamadas de **equações paramétricas da reta** ***r***.

Nota:
Quando as equações paramétricas são aplicadas em situações práticas, como em Física, Química, Economia etc., o parâmetro *t* pode representar qualquer grandeza, como tempo, pressão ou preço.

OBJETO DIGITAL **Vídeo: Dilatação térmica**

O **Vídeo: Dilatação térmica** possibilita ampliar o contexto desse tópico a fim de explorar o assunto de maneira interdisciplinar com Física. Os estudantes podem assistir ao vídeo e, depois, pesquisar como a dilatação térmica interfere, por exemplo, em estruturas arquitetônicas, de construção civil e outras.

Reflexão

Duas equações paramétricas podem ter como gráfico cartesiano outra figura além da reta?

Reflexão: Sim, qualquer gráfico do plano cartesiano está associado a equações paramétricas. Por exemplo: $\begin{cases} x = t - 1 \\ x = t^2 - 4 \end{cases}$, em que o parâmetro *t* pode assumir qualquer valor em $\mathbb{R}^*$. Isolando *t* na primeira equação, temos $t = x + 1$. Substituindo essa expressão de *t* na segunda equação, obtemos: $y = (x + 1)^2 - 4 \Rightarrow y = x^2 + 2x - 3$. O gráfico dessa equação é uma parábola.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

6. As equações paramétricas de uma reta r são $\begin{cases} x = 2t + 5 \\ y = 4t - 2 \end{cases}$, em que t é o parâmetro.

Obtenha uma equação geral da reta r.

Resolução

Isolamos o parâmetro t em uma das equações; por exemplo, na primeira:

$$\begin{cases} t = \dfrac{x-5}{2} & (1) \\ y = 4t - 2 & (2) \end{cases}$$

Substituímos o parâmetro t da equação (2) pela expressão obtida em (1):

$$y = 4 \cdot \left(\frac{x-5}{2}\right) - 2 \Rightarrow y = 2x - 12$$

Logo, uma equação geral da reta r é:

$2x - y - 12 = 0$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Faça os exercícios no caderno.

22. As equações paramétricas de uma reta r são $\begin{cases} x = 2t - 5 \\ y = 3 - t \end{cases}$, em que o parâmetro t assume todos os valores reais. Obtenha a equação reduzida da reta r.

22. $y = -\frac{x}{2} + \frac{1}{2}$

23. Um produtor de milho estima que para a próxima safra o custo C de produção e o lucro L, em real, em função da área S plantada, em hectare, sejam dados pelas equações:

$$\begin{cases} C = 12.000 + 100S \\ L = 70S - 12.000 \end{cases}$$

Qual é a equação que expressa o lucro L em função do custo de produção C? **23.** $L = \frac{7C}{10} - 20.400$

24. O volume V de álcool no bulbo de um termômetro varia em função da temperatura T, de acordo com o gráfico 1. Simultaneamente, o comprimento c da coluna de álcool varia em função da temperatura T de acordo com o gráfico 2. Obtenham uma equação que expresse V em função de c.

24. $V = 0{,}036c + 998{,}56$, para $c \in \mathbb{R}$, com $40 \leqslant c \leqslant 90$

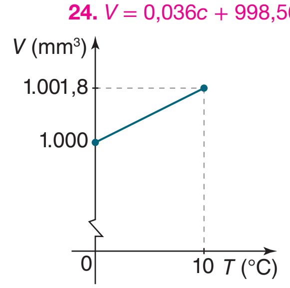


Gráfico 1

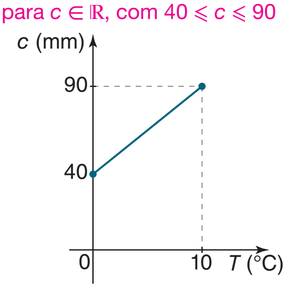


Gráfico 2

25. Neste capítulo estudamos as formas mais importantes de apresentação da equação da reta, mas há outras. Pesquise na internet a equação segmentária da reta e escreva um texto, seguido de um exercício resolvido, a respeito do assunto. Depois, compartilhe os resultados com os colegas e o professor.

25. Resposta nas **Orientações Específicas** deste capítulo.

Para retomar os conteúdos estudados, resolva o exercício complementar 6.

5. Distância entre ponto e reta

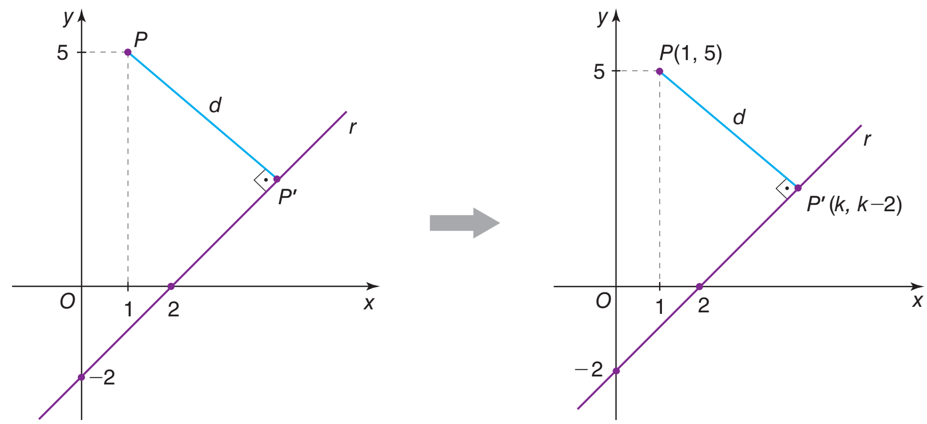
Como já foi apresentado anteriormente, a distância entre dois pontos $P(x_P, y_P)$ e $Q(x_Q, y_Q)$ é o comprimento do segmento $\overline{PQ}$, dado por:

$$PQ = \sqrt{(x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2}$$

Agora, vamos tratar do cálculo analítico da distância entre um ponto P e uma reta r a partir das coordenadas do ponto e da equação da reta. Essa distância é o comprimento do segmento $\overline{PP'}$, em que P' é a projeção ortogonal de P sobre r.

Por exemplo, vamos calcular a distância d entre o ponto $P(1, 5)$ e a reta r de equação $y = x - 2$, representados a seguir.

Para esse cálculo, verificamos que todo ponto da reta r é da forma $(k, k - 2)$. Portanto, podemos representar P' por $P'(k, k - 2)$.



ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

Como a reta $\overleftrightarrow{PP'}$ é perpendicular a r, o coeficiente angular de $\overleftrightarrow{PP'}$ é o oposto do inverso do coeficiente angular de r, isto é:

$$m_{PP'} = -\frac{1}{m_r} \Rightarrow \frac{k - 2 - 5}{k - 1} = -\frac{1}{1}$$

$$\therefore k = 4$$

Assim, substituindo k por 4 em $P'(k, k - 2)$, obtemos o ponto $P'(4, 2)$. Portanto:

$$PP' = \sqrt{(4 - 1)^2 + (2 - 5)^2} = 3\sqrt{2}$$

Ou seja, a distância entre o ponto P e a reta r é $3\sqrt{2}$.

Esse procedimento pode ser generalizado pelo seguinte teorema:

A **distância** d entre um ponto $P(x_0, y_0)$ e uma reta r de equação geral $ax + by + c = 0$ é dada por:

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Observação

É importante observar que, para aplicar essa fórmula, a equação da reta precisa estar na forma geral.

Reflexão: Por definição, a distância entre duas figuras geométricas $F1$ e $F2$ é a medida do menor segmento de reta que tem um extremo em $F1$ e o outro extremo em $F2$. Assim, a distância entre duas retas concorrentes é zero, pois, sendo P o ponto de concorrência, o segmento nulo $\overline{PP}$ indica a distância entre as retas.

Reflexão

Qual é a distância entre duas retas concorrentes?

Exemplo

Vamos aplicar esse teorema no cálculo da distância d entre o ponto $P(1, 5)$ e a reta r de equação $y = x - 2$. Para isso, devemos inicialmente representar a reta r por meio de sua equação geral, isto é, $x - y - 2 = 0$.

Assim, atribuímos os valores $a = 1$, $b = -1$, $c = -2$, $x_0 = 1$ e $y_0 = 5$ à fórmula $d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, obtendo:

$$d = \frac{|1 \cdot 1 + (-1) \cdot 5 + (-2)|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} \Rightarrow d = \frac{|-6|}{\sqrt{2}} = \frac{6}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Faça os exercícios no caderno.

26. Calcule a distância do ponto P à reta r em cada um dos casos a seguir.

a. $P(1, 3)$ e (r) $5x + 12y - 2 = 0$ **26. a.** 3

b. $P(-2, -4)$ e (r) $y = x - 8$ **26. b.** $3\sqrt{2}$

c. $P(9, 6)$ e (r) $x = 4$ **26. c.** 5

d. $P(5, -2)$ e (r) $y = 3$ **26. d.** 5

27. a. Basta mostrar que P equidista de r e s.

27. Lembrando que todo ponto da bissetriz de um ângulo equidista dos lados do ângulo, faça o que se pede.

a. Prove que o ponto $P(3, 5)$ pertence a uma das bissetrizes dos ângulos formados pelas retas r e s de equações $x + 2y - 3 = 0$ e $2x + y - 1 = 0$, respectivamente.

b. Obtenha as equações das retas que contêm as bissetrizes dos ângulos formados pelas retas r e s, citadas no item **a.** **27. b.** $x - y + 2 = 0$ e $3x + 3y - 4 = 0$

28. Os vértices de um triângulo são dados pelos pontos $A(1, 3)$, $B(5, 0)$ e $C(0, 5)$. **28. a.** $3x + 4y - 15 = 0$

a. Obtenha uma equação geral da reta $\overleftrightarrow{AB}$.

b. Calcule a medida da altura relativa ao vértice C. **28. b.** 1

c. Calcule a área do triângulo ABC. **28. c.** $\frac{5}{2}$

29. Considerando a reta r de equação $4x - 3y - 12 = 0$, determine:

a. os pontos do eixo das abscissas que distam 4 unidades de r; **29. a.** $A(8, 0)$ e $A'(-2, 0)$

b. os pontos da bissetriz dos quadrantes ímpares que distam 2 unidades de r; **29. b.** $B(22, 22)$ e $B'(2, 2)$

c. os pontos que pertencem à reta s de equação $y = x + 2$ e distam 3 unidades de r. **29. c.** $C(33, 35)$ e $C'(3, 5)$

30. Em um exercício militar, um míssil teleguiado será lançado de um ponto A, localizado no topo de um morro a 120 m de altura, percorrendo uma trajetória retilínea com uma inclinação de 45° em relação à planície horizontal que contém a base do morro. Nessa planície há uma central C de monitoramento, distante 500 m da reta vertical r que passa por A. Para monitorar a trajetória do míssil, foi estabelecido que ela deve estar contida no plano determinado pela vertical r e pelo ponto C. Calcule a menor distância com que o míssil passará da central C após o lançamento.

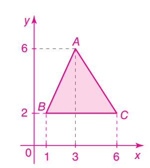
Sugestão: Fixe um sistema cartesiano em uma posição conveniente e calcule a distância entre o ponto C e a reta que contém a trajetória do míssil. **30.** $310\sqrt{2}$ m

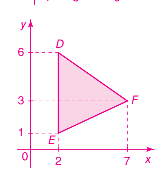
31. No plano cartesiano xOy, a reta t, representada pela equação $y = -\frac{3x}{4}$, tangencia um círculo de centro $C(3, 4)$. Obtenha a área A desse círculo. **31.** 25π

32. Elaborem e resolvam um problema sobre a distância entre ponto e reta que envolva uma situação contextualizada. **32.** Resposta pessoal.

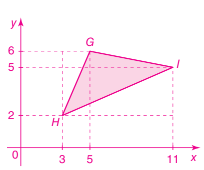
Para retomar os conteúdos estudados, resolva o exercício complementar 7.

Ao iniciar o tópico **Área de um triângulo**, reproduza, na lousa, os triângulos representados a seguir e peça aos estudantes que calculem a área de cada um deles.





FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA



Nos dois primeiros, eles podem ter mais facilidade, pois cada um dos triângulos tem um lado paralelo a um dos eixos coordenados. A dificuldade aparecerá no terceiro triângulo, o que vai exigir a interferência do professor. Repita o cálculo da área do terceiro triângulo como aparece no livro. Em seguida, ressalte que, se fizermos esses cálculos genericamente, obteremos uma expressão que pode ser sintetizada com a ajuda de um determinante.

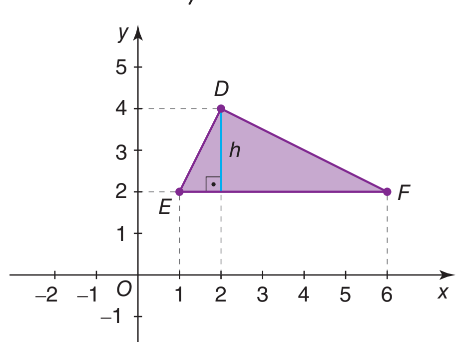
6. Aplicação de determinantes na Geometria analítica

O conceito de determinante pode ser aplicado em diversos ramos da Matemática, como na discussão de sistemas lineares com número de equações igual ao número de incógnitas. Neste item, vamos mostrar o emprego de determinantes no cálculo de áreas e na condição de alinhamento de três pontos.

Área de um triângulo

Da Geometria plana, sabemos que a área de um triângulo é igual à metade do produto da medida de uma base pela medida da altura relativa. Aplicando essa ideia, podemos calcular a área de um triângulo representado no plano cartesiano a partir das coordenadas de seus vértices, como mostram os procedimentos a seguir.

Inicialmente, vamos estudar o caso mais simples, que é o cálculo da área de um triângulo que tem um dos lados paralelo a um dos eixos coordenados. Consideremos, por exemplo, os triângulos DEF e GHI representados a seguir, em que o lado $\overline{EF}$ é paralelo ao eixo Ox e o lado $\overline{HI}$ é paralelo ao eixo Oy.



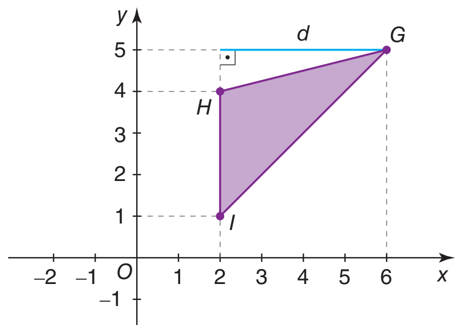
FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

No triângulo DEF, como a base $\overline{EF}$ é paralela ao eixo Ox e a altura relativa a essa base é paralela ao eixo Oy, logo, $EF = 6 - 1 = 5$ e $h = 4 - 2 = 2$.

Portanto, a área A_{DEF} do triângulo DEF é dada por:

$$A_{DEF} = \frac{5 \cdot 2}{2} = 5$$

De modo análogo, podemos determinar a área do triângulo *GHI* representado a seguir.

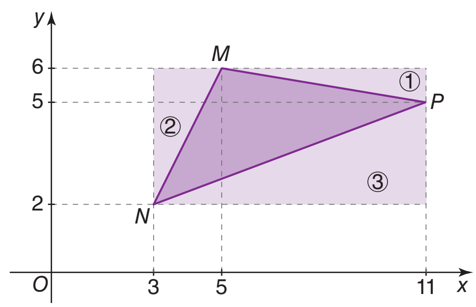


Como o lado $\overline{HI}$ é paralelo ao eixo *Oy*, temos: $HI = 4 - 1 = 3$ e $d = 6 - 2 = 4$

Logo, a área A_{GHI} do triângulo *GHI* é dada por:

$$A_{GHI} = \frac{3 \cdot 4}{2} = 6$$

Vamos considerar agora o caso em que nenhum dos lados do triângulo é paralelo a um dos eixos coordenados. Podemos calcular a área construindo um retângulo com lados paralelos aos eixos coordenados, de modo que os três vértices do triângulo (ou pelo menos dois deles) pertençam a lados desse retângulo. Por exemplo, para calcular a área do triângulo de vértices $M(5, 6)$, $N(3, 2)$ e $P(11, 5)$, construímos o retângulo representado a seguir.



Observe que a área do triângulo *MNP* é igual à área A_R desse retângulo menos as áreas dos triângulos 1, 2 e 3, isto é:

$$A_{MNP} = \underbrace{8 \cdot 4}_{A_R} - \underbrace{\frac{6 \cdot 1}{2}}_{A_1} - \underbrace{\frac{2 \cdot 4}{2}}_{A_2} - \underbrace{\frac{8 \cdot 3}{2}}_{A_3} = 13$$

Se reproduzirmos os procedimentos anteriores para um triângulo qualquer de vértices $M(x_M, y_M)$, $N(x_N, y_N)$ e $P(x_p, y_p)$, teremos a área *A* desse triângulo, dada por:

$$A = \frac{x_M y_N}{2} + \frac{x_P y_M}{2} + \frac{x_N y_P}{2} - \frac{x_P y_N}{2} - \frac{x_N y_M}{2} - \frac{x_M y_P}{2}$$

Observação

O símbolo $|D|$ representa o módulo do determinante.

Para facilitar, podemos organizar esse cálculo em um determinante, obtendo o seguinte teorema:

A **área** *A* de um triângulo qualquer de vértices $M(x_M, y_M)$, $N(x_N, y_N)$ e $P(x_p, y_p)$ é dada por:

$$A = \frac{|D|}{2}, \text{ em que } D \text{ é o determinante } \begin{vmatrix} x_M & y_M & 1 \\ x_N & y_N & 1 \\ x_P & y_P & 1 \end{vmatrix}$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

7. Calcule os determinantes D_A e D_B das matrizes $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, respectivamente.

Resolução

$$D_A = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = 5 \cdot 2 - 6 \cdot 3 \Rightarrow D_A = -8$$

$$\begin{array}{ccccc} & & 9 & -10 & 2 \end{array}$$

$$D_B = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{matrix} \Rightarrow D_B = 4 + 15 + 3 + 9 - 10 + 2 = 23$$

$$\begin{array}{ccc} 4 & 15 & 3 \end{array}$$

Comente com os estudantes que o **exercício resolvido 8** poderia ser solucionado representando os pontos no plano cartesiano e seguindo os mesmos procedimentos do exemplo anterior. O uso do determinante apenas agiliza os cálculos.

8. Calcule a área do triângulo cujos vértices são os pontos $M(-1, 2)$, $N(1, 5)$ e $P(6, 0)$.

Resolução

Inicialmente, calculamos o seguinte determinante: $D = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 6 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -5 + 12 - 30 - 2 = -25$

Pelo teorema anterior, a área A do triângulo MNP é dada por: $A = \dfrac{|D|}{2} = \dfrac{|-25|}{2} = \dfrac{25}{2} = 12{,}5$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Faça os exercícios no caderno.

33. Calcule a área do triângulo MNP nos seguintes casos:

a. $M(1, 5)$, $N(6, 4)$, $P(3, 1)$ — **33. a.** 9 unidades de área

b. $M(-2, -3)$, $N(1, 4)$, $P(8, 0)$ — **33. b.** 30,5 unidades de área

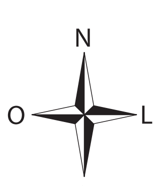
34. (Ufes) A área do triângulo limitado pelas retas $y = x$, $y = 2x$ e $x + y = 6$ vale: **34.** alternativa **b**

a. $\sqrt{2}$ **b.** 3 **c.** $3\sqrt{2}$ **d.** 2

35. No plano cartesiano xOy, um triângulo MNP tem área 4, $M(1, 1)$, $N(3, 3)$, e o vértice P pertence à bissetriz dos quadrantes pares. Determine o vértice P.

36. Para medir a área de uma região com formato de um quadrilátero plano $ABCD$, um agrimensor constatou que as posições dos vértices B, C e D, em relação ao vértice A, obedecem às seguintes condições:

- o ponto B está localizado a 8 km ao norte e 5 km a leste de A;
- o ponto C está localizado a 2 km ao norte e 9 km a leste de A;
- o ponto D está localizado a 6 km ao sul e 7 km a leste de A.

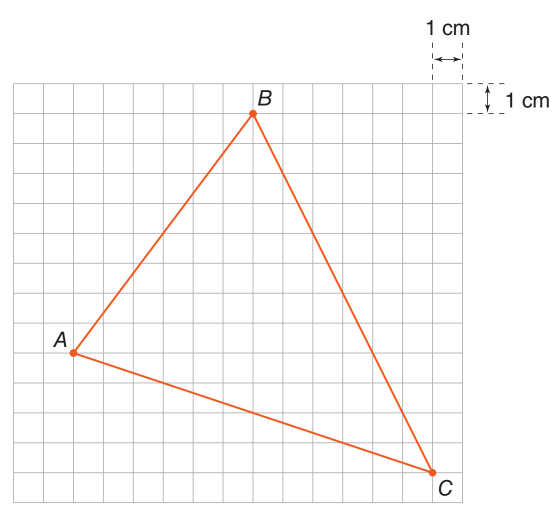


FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

35. $P(-2, 2)$ ou $P(2, -2)$

Com esses dados, o agrimensor calculou a área da região. Qual é essa área? **36.** 65 km²

37. Pesquisando sobre o cálculo de áreas de polígonos, um estudante desenhou um triângulo ABC em uma malha quadriculada formada por quadradinhos com 1 cm de lado, como mostra a figura a seguir.



ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

É possível calcular a área desse triângulo por meio de um determinante? Em caso afirmativo, explique como e calcule essa área em centímetro quadrado. **37.** sim; 60 cm²

38. Elaborem e resolvam um problema sobre a área de um triângulo que envolva uma situação contextualizada. **38.** Resposta pessoal.

Para retomar os conteúdos estudados, resolva os exercícios complementares 8 e 9.

TRABALHO E JUVENTUDES **Agrimensor**

Oriente os estudantes a consultar as páginas 6 e 7 para saber mais sobre este e os demais Objetivos de Desenvolvimento Sustentável.

ODS 5

Mulheres desbravam e conquistam espaço em profissões tradicionalmente masculinas

No mercado de trabalho, cada vez mais, mulheres desafiam estereótipos e preconceitos, além de quebrarem barreiras ao se destacarem em áreas tradicionalmente ocupadas por homens. [...]

Gabriela Mesquita, 27 anos, é engenheira cartógrafa, formada pela Ufra, e agrimensora na Primeira Comissão Brasileira Demarcadora de Limites (PCDL), desde 2022. Ela trabalha com a aquisição, processamento, representação e análise espacial de geoinformação. Como agrimensora, sua função é determinar os limites legais das propriedades, sejam elas rurais ou urbanas. Gabriela é a primeira mulher com formação de nível superior atuando na fronteira.

PIRES, E. Mulheres desbravam e conquistam espaço em profissões tradicionalmente masculinas. **O Liberal**, 15 mar. 2024. Disponível em: https://www.oliberal.com/belem/mulheres-desbravam-e-conquistam-espaco-em-profissoes-tradicionalmente-masculinas-1.791868. Acesso em: 29 jul. 2024.

Observação

O agrimensor é o profissional que determina os limites legais das propriedades, sejam elas rurais ou urbanas.

Quer saber mais sobre a profissão de agrimensor? Faça uma pesquisa na internet e compartilhe com os colegas um resumo das informações que você encontrar.

Trabalho e juventudes: Pesquisa pessoal.

Pessoa usando um teodolito, instrumento para medir ângulos horizontais e verticais, distâncias e alturas.

PIPAT WONGSAWANG/MOMENT RF/GETTY IMAGES

7. Condição de alinhamento de três pontos

Já foi estudada uma condição de alinhamento de três pontos aplicando o conceito de coeficiente angular. Agora, veremos uma condição de alinhamento aplicando o conceito de determinante.

De acordo com o teorema anterior, a área A de um triângulo qualquer de vértices $M(x_M, y_M)$, $N(x_N, y_N)$ e $P(x_P, y_P)$ é dada por:

$$A = \frac{|D|}{2}, \text{ em que } D \text{ é o determinante } \begin{vmatrix} x_M & y_M & 1 \\ x_N & y_N & 1 \\ x_P & y_P & 1 \end{vmatrix}$$

Como interpretar esse teorema quando $D = 0$?

Se $D = 0$, não existe o triângulo MNP; portanto, os três pontos, M, N e P, estão em uma mesma reta. Desse modo, podemos enunciar:

Três pontos, $M(x_M, y_M)$, $N(x_N, y_N)$ e $P(x_P, y_P)$, são **colineares** se, e somente se:

$$\begin{vmatrix} x_M & y_M & 1 \\ x_N & y_N & 1 \\ x_P & y_P & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Conectado

Utilizando um *software* de Geometria dinâmica, verifique que os pontos do exemplo **a** são colineares; faça o mesmo para os pontos do exemplo **b**. Depois, utilizando as ferramentas de uma planilha eletrônica, organize a entrada de 3 pontos quaisquer (dadas suas coordenadas) a fim de, automaticamente, determinar se eles são colineares.

Conectado: Respostas no final do livro.

Exemplos

a. Para verificar se os pontos $A(1, 2)$, $B(0, -1)$ e $C(2, 5)$ são colineares ou não, calculamos o seguinte determinante:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -1 + 4 + 2 - 5 = 0$$

Como $D = 0$, concluímos que A, B e C são colineares.

b. Para verificar se os pontos $A(1, 4)$, $B(2, 5)$ e $C(1, 3)$ são colineares ou não, calculamos o seguinte determinante:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 5 + 6 + 4 - 5 - 3 - 8 = -1$$

Como $D \neq 0$, concluímos que A, B e C não são colineares.

Obtenção da equação de uma reta por meio de determinante

Consideremos os pontos $A(2, 1)$, $B(1, -1)$ e um ponto genérico $G(x, y)$. Para que A, B e G sejam colineares, devemos ter: $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

Desenvolvendo esse determinante, temos:

$$x - 2 + y - 1 + x - 2y = 0 \Rightarrow 2x - y - 3 = 0$$

Essa equação representa todos os pontos $G(x, y)$ alinhados com $A(2, 1)$ e $B(1, -1)$; por isso, trata-se de uma equação da reta $\overleftrightarrow{AB}$.

Assim, podemos enunciar:

> Dados dois pontos distintos, $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$, uma **equação** da reta $\overleftrightarrow{AB}$ é dada por:
>
> $$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{vmatrix} = 0$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Faça os exercícios no caderno.

39. Em cada um dos itens a seguir, verifique se os três pontos são ou não colineares, aplicando a condição de alinhamento por determinante.

a. $A(1, -2)$, $B(0, -5)$ e $C(2, 1)$ **39. a.** sim

b. $A(1, 7)$, $B(0, 1)$ e $C(4, 3)$ **39. b.** não

c. $A\left(\frac{1}{4}, -4\right)$, $B\left(\frac{1}{2}, -3\right)$ e $C\left(\frac{5}{4}, 0\right)$ **39. c.** sim

40. Faça o que se pede.

a. Determine os possíveis números reais x para que os pontos $A(x, 5)$, $B(1, x)$ e $C(-1, -2x)$ sejam colineares. **40. a.** $x = 2$ ou $x = -\frac{5}{3}$

b. Mostre que os pontos $C(0, k)$, $D(1, -k)$ e $E(k, 1)$ são vértices de um triângulo para qualquer valor real de k. **40. b.** Resposta nas **Orientações Específicas** deste capítulo.

41. Usando a condição de alinhamento por determinante, obtenha uma equação da reta que passa pelos pontos A e B nos seguintes casos:

a. $A(4, 5)$ e $B(1, 2)$ **41. a.** $x - y + 1 = 0$

b. $A(-2, 0)$ e $B(6, -8)$ **41. b.** $x + y + 2 = 0$

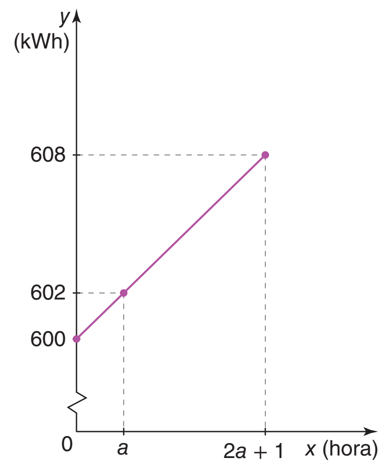
c. $A(2, 3)$ e $B(2, 5)$ **41. c.** $x = 2$

d. $A(1, -2)$ e $B(4, -2)$ **41. d.** $y = -2$

42. Para calcular o consumo de energia elétrica de seu aparelho de ar-condicionado, uma pessoa registrou, inicialmente, a medida 600 kWh indicada no relógio de luz (medidor de consumo de energia elétrica da residência). A seguir, desligou todos os equipamentos elétricos da casa, deixando ligado apenas o de ar-condicionado. O gráfico a seguir descreve os valores y, em kWh, observados no relógio de luz, em função do tempo x, em hora, durante o período da medição.

FERNANDO FAVORETTO/CRIAR IMAGEM

Relógio de luz.



ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

Reflexão: Resposta pessoal. Incentive os estudantes a pesquisarem os aparelhos elétricos que utilizam e que têm o maior consumo de energia e, ainda, a calcular o consumo médio de energia elétrica mensal de outros aparelhos.

Reflexão

Você sabe qual aparelho eletrônico tem o maior consumo de energia elétrica na sua residência ou na escola? Compare o consumo de energia do aparelho que você listou com o dos demais colegas e, depois, conversem acerca da importância de um consumo responsável de energia elétrica.

a. Determine o número real a. **42. a.** $a = 0{,}5$

b. Qual é o consumo desse condicionador de ar, em kWh, por hora? **42. b.** 4 kWh por hora.

43. Um ponto P inicia um movimento no plano cartesiano. A posição de P em cada instante t, em minuto, é determinada por $P(t^2 + 4, t)$ a partir do instante $t = 0$, em que teve início o movimento. Quanto tempo depois de iniciado o movimento o ponto P cruzou a reta determinada pelos pontos $A(3, 2)$ e $B(5, 1)$? **43.** 1 minuto

44. Elaborem e resolvam um problema sobre a condição de alinhamento de três pontos que envolva uma situação contextualizada. **44.** Resposta pessoal.

Para retomar os conteúdos estudados, resolva os exercícios complementares 10 e 11.

ANÁLISE DA RESOLUÇÃO

Reúna-se com um colega. Apontem o erro cometido na resolução a seguir e, depois, refaçam a resolução no caderno, corrigindo-a.

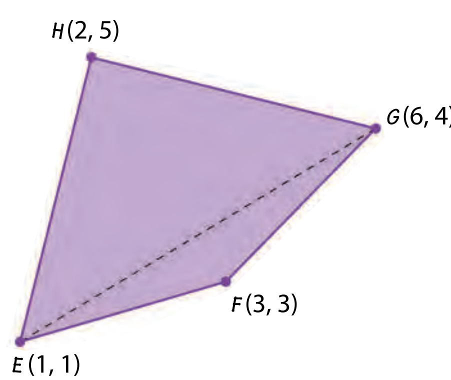
Exercício

Calcule a área do quadrilátero cujos vértices são os pontos $E(1, 1)$, $F(3, 3)$, $G(6, 4)$ e $H(2, 5)$.

Resolução

A diagonal $\overline{EG}$ divide o quadrilátero EFGH em dois triângulos: EFG e EHG.

área de EFGH = área de EFG + área de EHG

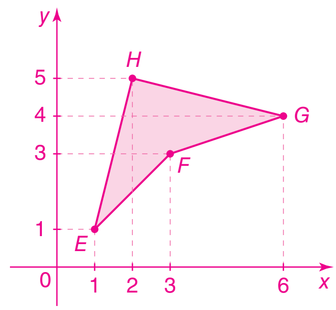


ELISA NIEVAS/ARQUIVO DA EDITORA

Análise da resolução: Comente que a falta de precisão na construção de um esquema pode induzir a erro. Foi o que aconteceu nesta resolução, pois representando os pontos E, F, G e H no plano cartesiano o quadrilátero $EFGH$ não é convexo, como mostra a figura a seguir; portanto, a área A_{EFGH} é dada por:

$A_{EFGH} = A_{EGH} - A_{EFG}$

$\therefore A_{EFGH} = \frac{17}{2} - 2 = \frac{13}{2}$



FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

- *Área do triângulo EFG:*

$$D_{EFG} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 6 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 3 + 12 + 6 - 18 - 4 - 3 = -4$$

$$A_{EFG} = \frac{|D_{EFG}|}{2} = \frac{|-4|}{2} = 2$$

- *Área do triângulo EHG:*

$$D_{EHG} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 6 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 5 + 8 + 6 - 30 - 4 - 2 = -17$$

$$A_{EHG} = \frac{|D_{EHG}|}{2} = \frac{|-17|}{2} = \frac{17}{2}$$

- *Área do quadrilátero EFGH:*

$$A_{EFGH} = 2 + \frac{17}{2} = \frac{21}{2}$$

Se achar conveniente, explore este assunto com os estudantes no computador, usando um programa de construção de gráficos.

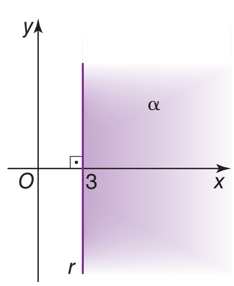
8. Representação gráfica de uma inequação do 1º grau

Qualquer reta *r* de um plano separa esse plano em duas regiões. A reunião da reta *r* com qualquer uma dessas regiões é chamada de **semiplano de origem *r***.

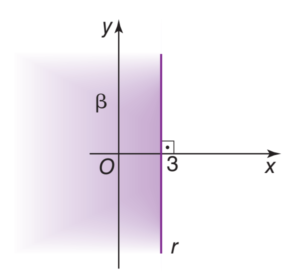
Associado a um sistema de coordenadas, um semiplano pode ser representado por uma inequação do 1º grau, conforme apresentado a seguir.

Semiplano de origem paralela a um dos eixos coordenados

A reta vertical *r*, de equação $x = 3$, é a origem dos dois semiplanos, α e β, representados a seguir.

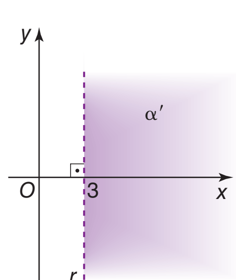


Todos os pontos que pertencem a α, e somente eles, têm abscissa maior ou igual a 3; por isso, podemos representar esse semiplano pela inequação $x \geqslant 3$.

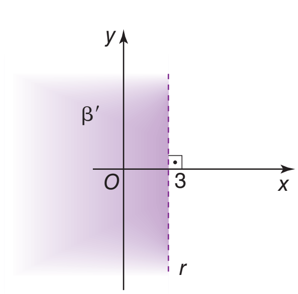


Analogamente, todos os pontos que pertencem a β, e somente eles, têm abscissa menor ou igual a 3; por isso, podemos representar esse semiplano pela inequação $x \leqslant 3$.

Quando quisermos nos referir a um semiplano que não contenha a reta origem, adotaremos a denominação **semiplano aberto**. Para representá-lo graficamente, desenhamos a reta origem tracejada. Assim:



Se excluirmos de α a reta origem, obteremos o semiplano aberto α', formado por todos os pontos do plano cujas abscissas são maiores que 3, ou seja, $x > 3$.



Se excluirmos de β a reta origem, obteremos o semiplano aberto β', formado por todos os pontos do plano cujas abscissas são menores que 3, ou seja, $x < 3$.

ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

Observação

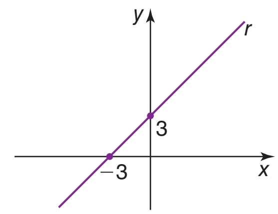
Raciocínio análogo é aplicado para semiplanos de origem paralela ao eixo das abscissas.

Semiplano de origem oblíqua

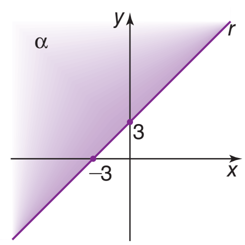
Considere a reta r de equação $y = x + 3$, cujo gráfico está representado a seguir.

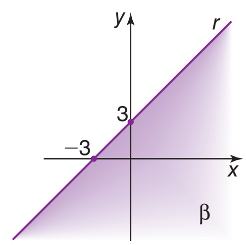
$y = x + 3$

x	y
0	3
-3	0



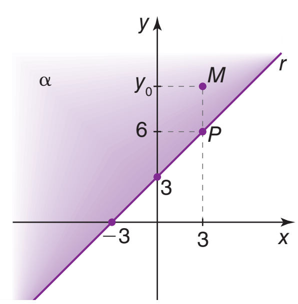
A reta r é origem dos dois semiplanos, α e β, representados a seguir.





Seja P um ponto da reta r; por exemplo, $P(3, 6)$.

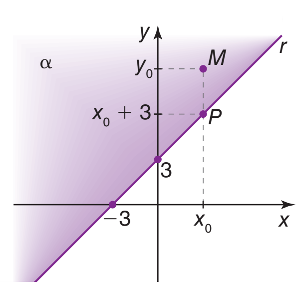
Observe que qualquer ponto M de α que tenha a mesma abscissa de P e esteja acima da reta r tem ordenada y_0 maior que a ordenada de P, ou seja, maior que 6.



Generalizando, vamos considerar um ponto qualquer $P(x_0, x_0 + 3)$ da reta r.

Todo ponto $M(x_0, y_0)$ que esteja acima da reta r terá ordenada maior que $x_0 + 3$, isto é, $y_0 > x_0 + 3$.

Temos, então:



(1) Se (x, y) é um ponto da reta r, então $y = x + 3$.

(2) Se (x, y) está acima da reta r, então $y > x + 3$.

Por (1) e (2), concluímos que o semiplano α é determinado pela inequação $y \geqslant x + 3$.

De modo análogo, o semiplano β é determinado pela inequação $y \leqslant x + 3$.

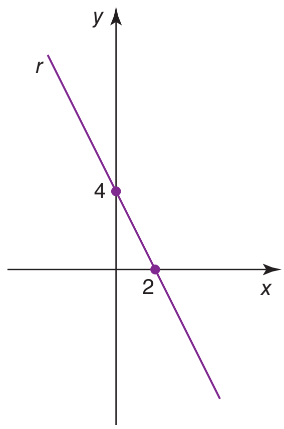
ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

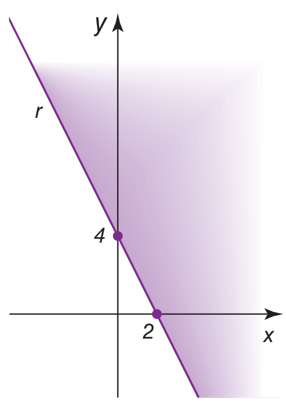
9. Represente no plano cartesiano o semiplano determinado pela inequação $y \geqslant -2x + 4$.

Resolução

Inicialmente, desenhamos a reta r, origem desse semiplano, de equação $y = -2x + 4$:



A inequação $y \geqslant -2x + 4$ determina o semiplano formado pela reunião da reta r com o conjunto de pontos localizados acima dessa reta, representado na figura a seguir.



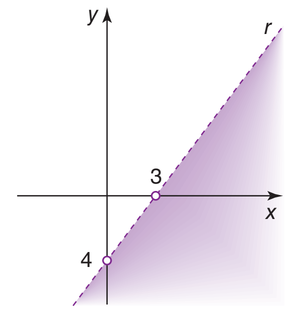
10. Represente no plano cartesiano o semiplano determinado pela inequação $4x - 3y - 12 > 0$.

Resolução

Convém isolar a variável y na inequação, pois assim é mais fácil identificar o semiplano:

$$4x - 3y - 12 > 0 \Rightarrow y < \frac{4x}{3} - 4$$

A reta r, origem desse semiplano, tem equação $y = \frac{4x}{3} - 4$. O semiplano determinado pela inequação $y < \frac{4x}{3} - 4$ é formado apenas pelos pontos localizados abaixo da reta origem; por isso, devemos desenhar essa reta tracejada:



11. Represente no plano cartesiano os pontos (x, y) que formam o conjunto solução do sistema de inequações:

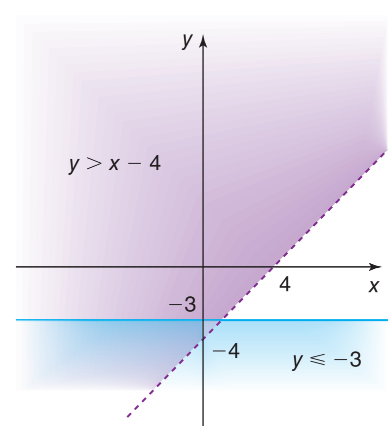
$$\begin{cases} x - y - 4 < 0 \\ y + 3 \leqslant 0 \end{cases}$$

Resolução

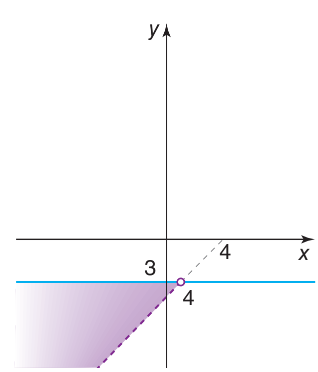
É conveniente trabalhar com a variável y isolada em cada uma das inequações do sistema:

$$\begin{cases} y > x - 4 \\ y \leqslant -3 \end{cases}$$

Representando os semiplanos determinados por essas inequações, temos:

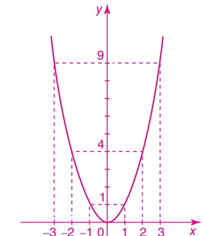


O conjunto dos pontos (x, y) que satisfazem, simultaneamente, as duas inequações do sistema é a intersecção dos semiplanos representados por elas, indicada pela figura a seguir.



ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

Reflexão: Sim. Por exemplo, a representação de $y \geqslant x^2$. Inicialmente, representamos a parábola de equação $y = x^2$. Em seguida, observamos que qualquer reta vertical r intercepta a parábola em um ponto $P(x, x^2)$. Os pontos de r que estão acima de P têm a ordenada y maior que x^2, e no ponto P a ordenada y é igual a x^2, ou seja, nesses pontos temos: $y \geqslant x^2$. Assim, as soluções da inequação $y \geqslant x^2$ formam a região representada a seguir.



FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

Com esse exemplo, constatamos que a representação gráfica das soluções de uma inequação em duas variáveis pode não ser um semiplano.

Mentes brilhantes

O criador do método Simplex

Conta-se que, certa vez, o estadunidense George Dantzig (1914-2005) atrasou-se para a primeira aula de Estatística do curso que frequentava na Universidade de Berkeley. Como perdeu o começo da aula, copiou três problemas que estavam escritos na lousa, pensando que fossem tarefas de um exame. Dois deles foram resolvidos sem dificuldades, mas o terceiro parecia insolúvel, até que, pouco antes de a aula acabar, resolveu os três problemas e os entregou ao professor. Naquela noite Dantzig teria recebido um telefonema do professor explicando que o terceiro problema era uma questão que matemáticos, desde Einstein, tentavam resolver e que Dantzig teria, então, solucionado.

George Dantzig pode ser considerado o pioneiro na resolução de problemas de otimização por meio da programação linear, pois é o criador do Simplex, o primeiro algoritmo para resolução de problemas lineares de otimização. Nesse método, são fundamentais os conceitos de equação e inequação do 1º grau com n variáveis.

Elaborado com base em: BUESCU, J. A lenda do problema insolúvel. **Ingenium**, nov. 2001. p. 36-38.

Reflexão

A representação no plano cartesiano de uma inequação em duas variáveis pode não ser um semiplano?

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Faça os exercícios no caderno.

45. Represente no plano cartesiano os semiplanos determinados pelas inequações a seguir. **45.** Respostas no final do livro.

a. $x \geqslant 3$

b. $y - 4 < 0$

c. $y \leqslant x - 5$

d. $3x + y - 6 > 0$

46. Represente a região do plano cartesiano determinada por todos os pontos $P(x, y)$ tais que:

a. $\begin{cases} y < x \\ x + y - 2 \geqslant 0 \end{cases}$

b. $\begin{cases} x \geqslant 4 \\ 2x + y - 4 > 0 \end{cases}$

c. $\begin{cases} x \geqslant 3 \\ y \geqslant 4 \\ 5y - 4x > 4 \end{cases}$

46. Respostas nas **Orientações Específicas** deste capítulo.

47. Uma construtora estimou que, para pavimentar um trecho de uma estrada, serão necessários, no máximo, 60 m³ da mistura de areia e cimento, com pelo menos 30 m³ de areia e pelo menos 20 m³ de cimento. Indicando, respectivamente, por x e y as quantidades, em metro cúbico, de areia e cimento que serão usados na mistura, represente no plano cartesiano a região formada pelos pontos (x, y).
47. Respostas nas **Orientações Específicas** deste capítulo.

48. Um motorista sempre abastece seu carro *flex-fuel* com o máximo de 50 litros de uma mistura de etanol e gasolina, de modo que a quantidade de cada um desses dois combustíveis nunca é superior a 60% do total da mistura. Indicando por x e y, respectivamente, as possíveis quantidades, em litro, de etanol e gasolina que formaram a mistura em cada abastecimento, construa o gráfico cartesiano formado pelos pontos (x, y).
48. Respostas nas **Orientações Específicas** deste capítulo.

49. Um agricultor dispõe de 480 ha para plantar milho ou soja, podendo semear toda a área disponível ou apenas uma parte dela. Ele pode optar por plantar somente um dos tipos de grão ou os dois tipos, a área plantada com milho, porém, não pode ultrapassar 360 ha, e a plantada com soja não pode ultrapassar 420 ha.

a. Indicando por x e y as áreas plantadas com milho e soja, respectivamente, represente no plano cartesiano xOy o polígono formado por todos os possíveis pontos (x, y). **49. a.** Resposta nas **Orientações Específicas** deste capítulo.

b. O lucro obtido com a colheita é de R$ 2.700,00 por hectare de milho e de R$ 2.400,00 por hectare de soja. Considerando x e y as áreas plantadas com milho e soja, respectivamente, demonstra-se que o máximo lucro possível é calculado atribuindo-se a x e y as coordenadas de um dos vértices do polígono representado no item **a**. Quantos hectares de milho e quantos de soja devem ser plantados para que o lucro seja máximo?
49. b. 360 ha de milho e 120 ha de soja.

LOURENCOLF/SHUTTERSTOCK

Máquina em colheita de soja, em Chapadão do Sul (MS). Foto de 2020.

Conectado

Usando um programa de construção de gráficos, faça o que se pede.

a. Represente no plano cartesiano (na tela) as soluções (x, y) da inequação:

$$2x + y - 4 \leqslant 0$$

b. Represente no plano cartesiano (na tela) as soluções (x, y) do sistema de inequações:

$$\begin{cases} 4x + y - 8 \geqslant 0 \\ x - y - 4 < 0 \end{cases}$$

Assista ao vídeo **Vou de táxi**. Disponível em: https://m3.ime.unicamp.br/recursos/1191. Acesso em: 10 set. 2024. Nele é apresentado que em uma cidade, nem sempre existe uma rua reta que passa por dois pontos A e B, por isso o caminho mais curto entre A e B pode não ser o segmento $\overline{AB}$, pois devemos nos deslocar pelas ruas. Porém, existe um procedimento matemático para calcular o caminho mais curto entre eles, demonstrado no vídeo indicado.

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

Faça os exercícios no caderno.

1. Para estudar o movimento de um projétil de trajetória reta que se movimenta em um mesmo sentido, um físico fixou um plano cartesiano contendo essa trajetória tal que o eixo das abscissas está contido no plano horizontal do solo e o eixo das ordenadas é vertical e orientado para cima. Adotando o metro como unidade em cada um dos eixos coordenados, o físico observou que no início do experimento o projétil estava no ponto $P(-3, 5)$ e, após 0,5 *s*, chocou-se com o solo no ponto $Q(9, 0)$.

a. Obtenha a equação geral da reta $\overleftrightarrow{PQ}$ que contém a trajetória do projétil. **1. a.** $5x + 12y - 45 = 0$

b. A que altura, em relação ao solo, estava o projétil ao cruzar o eixo das ordenadas? **1. b.** 3,75 m

c. Qual foi a velocidade média do projétil, em quilômetro por hora, no trajeto $\overline{PQ}$? **1. c.** 93,6 km/h

2. Em Economia destacam-se três conceitos básicos: função custo (C), função receita (R) e função lucro (L). A função C descreve o custo de produção de x unidades de determinado produto. Ela é composta de um custo fixo (aluguel, impostos, pagamento de funcionários etc.) e um custo variável, que depende do número de unidades fabricadas; a função R descreve o total bruto recebido pela venda de x unidades desse produto; e a função lucro (L) expressa a diferença entre as funções R e C, nessa ordem. O ponto de intersecção dos gráficos das funções R e C é chamado de *break-even point* (ponto de equilíbrio), que é o ponto em que as funções R e C se igualam, ou seja, a receita gerada pela venda da quantidade produzida se iguala ao custo de produção, portanto, não há lucro nem prejuízo. Suponha que, para determinado período, um fabricante de sorvete tem um custo fixo de R$ 1.000,00 mais um custo de R$ 40,00 por quilograma de sorvete de determinado sabor produzido. Sabendo que cada quilograma desse sorvete é vendido por R$ 65,00, e toda a produção de x quilogramas é vendida nesse período, responda aos seguintes itens:

a. Construa o gráfico das funções C e R, em um mesmo plano cartesiano. **2. a.** Resposta no final do livro.

b. Determine o *break-even point* (ponto de equilíbrio) em relação às funções C e R, obtidas no item a. **2. b.** (40, 2.600)

c. Quantos quilogramas de sorvete devem ser produzidos e vendidos no período considerado, para que o fabricante obtenha lucro? **2. c.** Mais de 40 kg.

3. Uma colheitadeira A, em funcionamento, consome 16 litros de óleo *diesel* por hora e outra colheitadeira B consome 24 litros de óleo *diesel* por hora. Em determinado dia, a máquina A foi ligada pela manhã e 2 horas depois foi ligada a máquina B, funcionando juntas por mais 6 horas, quando ambas foram desligadas. Considerando apenas o período de trabalho das colheitadeiras nesse dia, resolva os itens a seguir.

IGNACIO COSTA/MOMENT RF/GETTY IMAGES

Colheitadeira em plantação de soja em Belo Horizonte (MG). Foto de 2023.

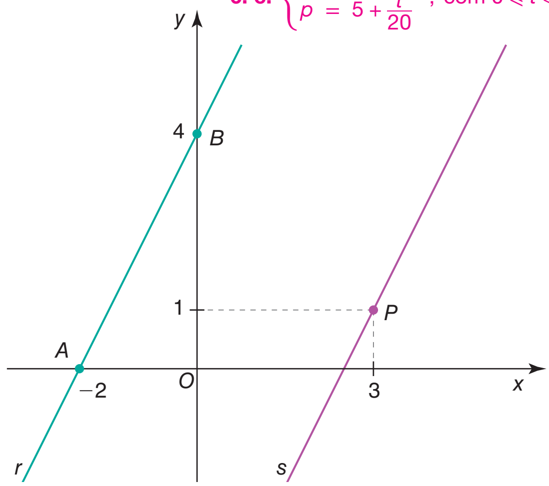
a. Construa o gráfico cartesiano que expressa o consumo y da colheitadeira A, em litro de óleo *diesel*, em função do tempo x, em hora, considerando $x = 0$ o instante em que ela foi ligada. **3. a.** Respostas no final do livro.

b. No mesmo plano cartesiano do item **a**, construa o gráfico que expressa o consumo y da colheitadeira B, em litro de óleo *diesel*, em função do tempo x, em hora. **3. b.** Respostas no final do livro.

c. Quantas horas depois de ligada a colheitadeira A as duas máquinas haviam consumido a mesma quantidade de óleo? Qual foi essa quantidade? **3. c.** 6 h; 96 L

4. As retas r e s representadas no gráfico são paralelas.

6. c. $\begin{cases} T = 200 + 2t \\ p = 5 + \frac{t}{20} \end{cases}$, com $0 \leqslant t \leqslant 20$



a. Obtenha a equação reduzida da reta s. **4. a.** $y = 2x - 5$

b. Se um ponto G da reta s tem abscissa k, qual é a ordenada de G em função de k? **4. b.** $2k - 5$

c. Determine o ponto da reta s que equidista do ponto B e da origem O do sistema. **4. c.** $\left(\frac{7}{2}, 2\right)$

5. Considerando o ponto $P(1, 4)$ e a reta r de equação $3x + y + 3 = 0$, faça o que se pede.

a. Obtenha a projeção ortogonal P' do ponto P sobre a reta r. **5. a.** $P'(-2, 3)$

b. Determine o ponto Q, simétrico do ponto P em relação à reta r. **5. b.** $Q(-5, 2)$

6. Dos estudos de Química sabe-se que se o volume de um gás ideal permanece constante, então a medida da pressão do gás, em atmosfera, é diretamente proporcional à medida de sua temperatura, em kelvin. Essa propriedade é conhecida como lei de Boyle. Aplicando essa lei, resolva o problema a seguir.

Em uma experiência, uma amostra de gás ideal encontrava-se no interior de um recipiente fechado e indeformável, à temperatura de 200 K (kelvin) e à pressão de 5 atm (atmosfera). Aumentou-se a temperatura no interior do recipiente durante um período de 20 min, à razão constante de 2 K/min.

a. Calcule a pressão do gás, em atmosfera, no interior do recipiente, ao final do período de tempo considerado? **6. a.** 6 atm

b. Indicando por T a temperatura do gás, em kelvin, e por p a pressão, em atmosfera, no interior do recipiente, construa no plano cartesiano o gráfico formado pelos pontos (T, p), correspondente a todos os instantes do período considerado. **6. b.** Resposta no final do livro.

c. Obtenha as equações paramétricas que expressem as coordenadas T e p dos pontos do gráfico construído no item **b**, em função do tempo t, em minuto, tal que $t = 0$ e $t = 20$ correspondam, respectivamente, ao início e ao final do período considerado.

7. Determine o número real a para o qual o ponto $P(4, a)$ pertença à bissetriz de um ângulo formado pelas retas r e s de equações $3x + 4y - 2 = 0$ e $4x - 3y + 1 = 0$, respectivamente. **7.** $a = 1$ ou $a = -27$

8. (Acafe-SC) Na atualidade, o amplo conhecimento das necessidades do solo e das plantas, associado aos equipamentos e à pesquisa genética de cultivos (plantas especializadas para serem produzidas em solos e clima específicos), alavancou os estudos de combinação de cultivos para um patamar de conhecimentos altamente especializados. Assim, com o auxílio do *Global Position System* (GPS) e da análise do solo feito em escala de detalhe, é possível produzir várias culturas ao mesmo tempo em espaços que, anteriormente, sequer eram cogitados para esse tipo de atividade. Com a ajuda do GPS, podemos, por exemplo, calcular a área de desmatamento de determinado local. Geólogos de um estado sobrevoaram determinado local e avistaram um desmatamento. Por meio do GPS, localizaram os seguintes pontos cartesianos: (3, 4); (6, −1); (0, 3) e (2, 0). A área do desmatamento descoberta pelos geólogos, em km^2, foi de: **8.** alternativa **c**

a. 28

b. 3,5

c. 14

d. 17,5

e. 7

9. No plano cartesiano xOy, um triângulo MNP tem área 10, $M(2, 0)$, $N(0, 4)$ e o vértice P pertence à reta r de equação $y = 2x - 6$. Determine o vértice P. **9.** $P(0, -6)$ ou $P(5, 4)$

10. Determine a medida α, em radiano, com $0 \leqslant \alpha < 2\pi$, de modo que os pontos $A(\text{sen}\ \alpha, \cos \alpha)$, $B(1, \sqrt{3})$ e $O(0, 0)$ estejam sobre uma mesma reta. **10.** $\alpha = \frac{\pi}{3}$ ou $\alpha = \frac{4\pi}{3}$

11. Sendo $A(1, 3)$, $B(a, 7)$ e $C(a - 2, -1)$, com $a \in \mathbb{R}$, determine o valor de a de modo que a soma $AB + BC$ seja a menor possível. **11.** 2

Propomos uma avaliação e uma ficha de autoavaliação como ferramenta de estudo. Oriente os estudantes a fazer essas atividades com atenção e, caso encontrem dificuldades, incentive-os a revisitar os conteúdos estudados para reforçar a compreensão.

VERIFIQUE O QUE APRENDEU NO CAPÍTULO 6

1. O ponto $A(1, 8)$ é um vértice de um triângulo equilátero ABC, cuja reta suporte do lado $\overline{BC}$ tem equação $3x + 4y + 10 = 0$.

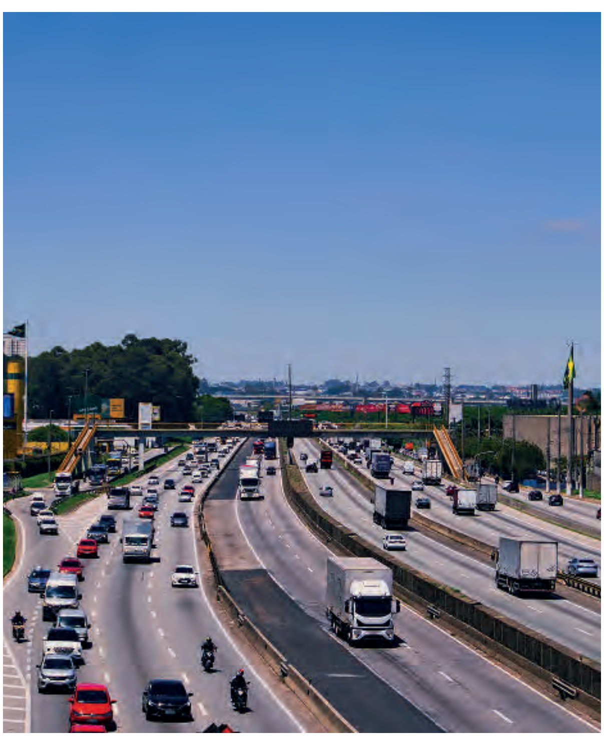
1. a. 9

a. Calcule a medida h da altura desse triângulo.

b. Calcule a área desse triângulo. **1. b.** $27\sqrt{3}$

2. A rodovia Presidente Dutra tem 400 km de extensão e liga as cidades do Rio de Janeiro e São Paulo. Consideremos um sistema de medidas, em quilômetro, associado a essa estrada tal que a origem O seja o quilômetro zero (km 0), localizado na Cidade do Rio de Janeiro. Um automóvel e um ônibus viajam do Rio de Janeiro para São Paulo, com velocidades constantes de 100 km/h e 80 km/h, respectivamente. Em um mesmo instante, que indicaremos por $t = 0$, o automóvel e o ônibus passam pelos marcos quilométricos "km 62" e "km 118", respectivamente, que indicam a distância ao início da estrada.

HANS ELMO/SHUTTERSTOCK



Trecho da Rodovia Presidente Dutra em Garulhos (SP). Foto de 2023.

Indicando por d_A e d_B as distâncias percorridas pelo automóvel e pelo ônibus a partir do quilômetro zero, respectivamente:

a. Obtenha as equações que expressam d_A e d_B, em quilômetro, em função do tempo t, em hora, a partir do instante $t = 0$;

2. a. $d_A = 62 + 100t$ e $d_B = 118 + 80t$

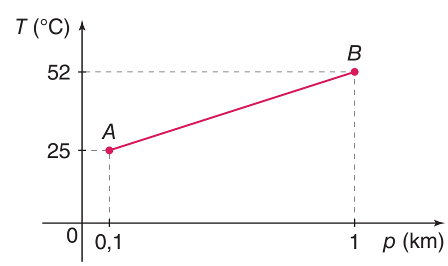
2. b. Resposta no final do livro.

b. Em um mesmo plano cartesiano, construa os gráficos das funções $d_A(t)$ e $d_B(t)$, obtidas no item **a**, até o instante em que cada veículo chega ao final da via Dutra;

c. Determine, se existir, o ponto de intersecção dos gráficos obtidos no item **b**; **2. c.** $P(2{,}8;\ 342)$

d. Caso exista o ponto de intersecção dos gráficos das funções $d_A(t)$ e $d_B(t)$, qual é o significado físico da abscissa desse ponto? Qual é o significado físico da ordenada desse ponto?

3. Em determinado local, mediu-se a temperatura T, em grau Celsius, no interior da Terra, em função da profundidade p, em quilômetro. Representando em um gráfico cartesiano os resultados obtidos para profundidades de 0,1 km a 1 km obteve-se o segmento de reta $\overline{AB}$, a seguir.



ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

a. Qual era a temperatura no interior da Terra nesse local a 800 m de profundidade? **3. a.** 46 °C

b. Supondo que nesse local a temperatura variou linearmente com a profundidade, desde a superfície da Terra até 1 km de profundidade, qual era a temperatura na superfície? **3. b.** 22 °C

4. Resposta nas **Orientações Específicas** deste capítulo.

4. Paulo tem R\$ 600,00, que é o máximo que pode gastar na compra de dois tipos de desinfetante, A e B, vendidos a granel. O preço por litro de A é R\$20,00 e o de B é R\$ 30,00. Sabendo-se que Paulo pretende gastar no máximo R\$ 300,00 com o desinfetante A, e que ele pode comprar um ou os dois tipos de desinfetante, represente no plano cartesiano o conjunto dos pares (x, y), em que x e y representem, respectivamente, as possíveis quantidades dos desinfetantes A e B que o rapaz pode comprar.

5. (Espcex) Considere as retas $r: -\frac{x}{2} + 2y - 3 = 0$ e $s: ax + by + c = 0$. Sabendo que $r \perp s$ e que $P(2, 2) \in s$, assinale a opção que contém valores corretos possíveis para a, b e c respectivamente:

a. 4, 1, 10
b. 4, 1, –10
c. –4, –1, –10
d. –4, 1, 10
e. 4, –1, 10

5. alternativa **b**

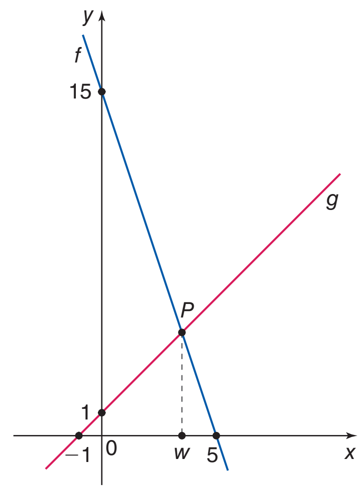
2. d. A abscissa 2,8 indica o tempo em hora, a partir do instante $t = 0$, transcorrido para que o automóvel alcançasse o ônibus. A ordenada 342 indica a distância, em quilômetro, relativa ao início da estrada, em que o automóvel alcançou o ônibus.

6. (Uerj) Observe o plano cartesiano, no qual estão representadas as funções *f* e *g*:

O ponto *P* de interseção entre os gráficos dessas funções possui abscissa *w*, cujo valor é:

6. alternativa **c**

ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA



a. $\frac{5}{2}$

b. 3

c. $\frac{7}{2}$

d. 4

Ferramenta de estudo

Ao término da resolução dos exercícios, copie no caderno o quadro indicado a seguir e preencha-o assinalando a resposta mais adequada ao seu aprendizado. Se julgar necessário, retome os tópicos de conteúdos relacionados a cada questão ou converse com os colegas e com o professor a fim de tirar dúvidas a respeito delas.

ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

Ficha de Autoavaliação

Sobre o exercício...	Sim	Parcialmente	Não
Uso a equação geral da reta na resolução de problemas?			
Consigo determinar a equação reduzida da reta?			
Posso fazer o estudo da posição relativa entre duas retas no plano?			
Sei determinar as equações paramétricas da reta?			
Posso calcular a distância entre um ponto e uma reta?			
Compreendi como utilizar determinante para calcular a área de um triângulo qualquer?			
Sei como determinar se três pontos são colineares?			
Posso representar graficamente a solução de uma inequação do primeiro grau?			

Na **abertura**, o objetivo do infográfico é mostrar uma aplicação do conceito de circunferência. Apresenta-se o processo de formação de um *tsunami* e o funcionamento do sistema de alerta, composto de estações sismológicas utilizadas para determinar seu epicentro.

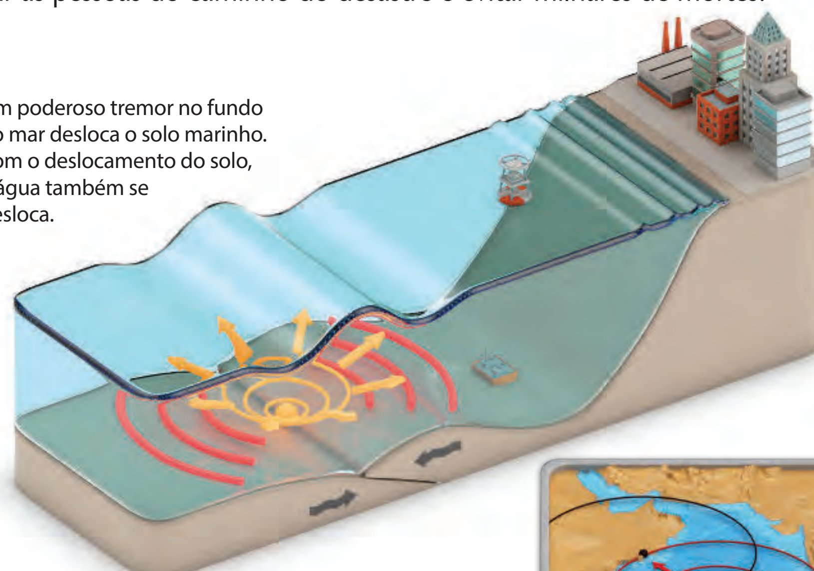
CAPÍTULO 7

Equações da circunferência

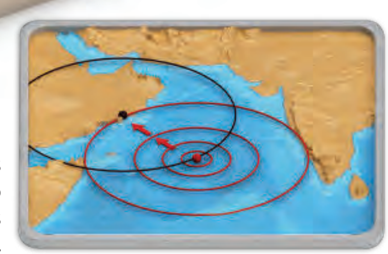
O tema possibilita uma integração com a área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias ao apresentar um fenômeno de grande impacto social. Se possível, promova a participação do professor de Biologia para aprofundar o assunto. Essa proposta auxilia desenvolver nos estudantes uma postura crítica diante das informações que recebem, avaliando os impactos de um *tsunami* no ambiente e na economia, bem como as possíveis causas desse fenômeno.
Peça aos estudantes que, em grupos, leiam o texto e respondam às questões propostas no boxe **Além da teoria**.

Detectando *tsunamis*

Os *tsunamis* estão entre as mais destrutivas forças da natureza, mas, se sua origem é detectada rapidamente, é possível tirar as pessoas do caminho do desastre e evitar milhares de mortes.



1 Um poderoso tremor no fundo do mar desloca o solo marinho. Com o deslocamento do solo, a água também se desloca.



As ondas sísmicas chegam pelo subsolo a diferentes estações sismológicas em terra.

ILUSTRAÇÕES: CARLOS FONSECA/ARQUIVO DA EDITORA

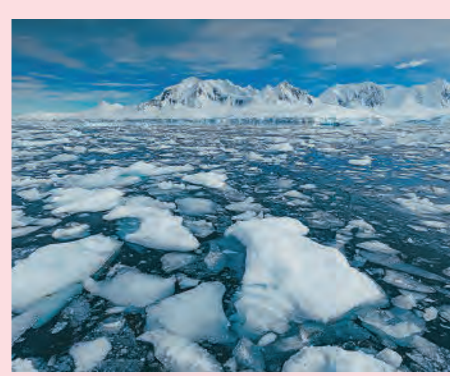
(Modelo didático sem escala e com cores fantasia.)
Elaborado com base em: NOAA Center for Tsunami Research. **Overview of the first operational DART® Mooring System**. Disponível em: http://nctr.pmel.noaa.gov/Dart/dart_ms1.html. Acesso em: 13 set. 2024; GEOSCIENCE Australia news. **Geoscience Australia's role in the Australian Tsunami Warning System**. Disponível em: http://www.ga.gov.au/ausgeonews/ausgeonews200506/atws.jsp. Acesso em: 13 set. 2024; Fonte: COSTA, Luisa. Aumento de temperatura no Oceano Antártico pode gerar *tsunamis*, diz estudo. **UOL**, 30 maio 2023. Disponível em: https://gizmodo.uol.com.br/aumento-de-temperatura-no-oceano-antartico-pode-gerar-tsunamis-diz-estudo/. Acesso em: 13 set. 2024.

Oriente os estudantes a consultar as páginas 6 e 7 para saber mais sobre este e os demais Objetivos de Desenvolvimento Sustentável.

Aumento de temperatura no Oceano Antártico pode gerar *tsunamis*

ODS 13

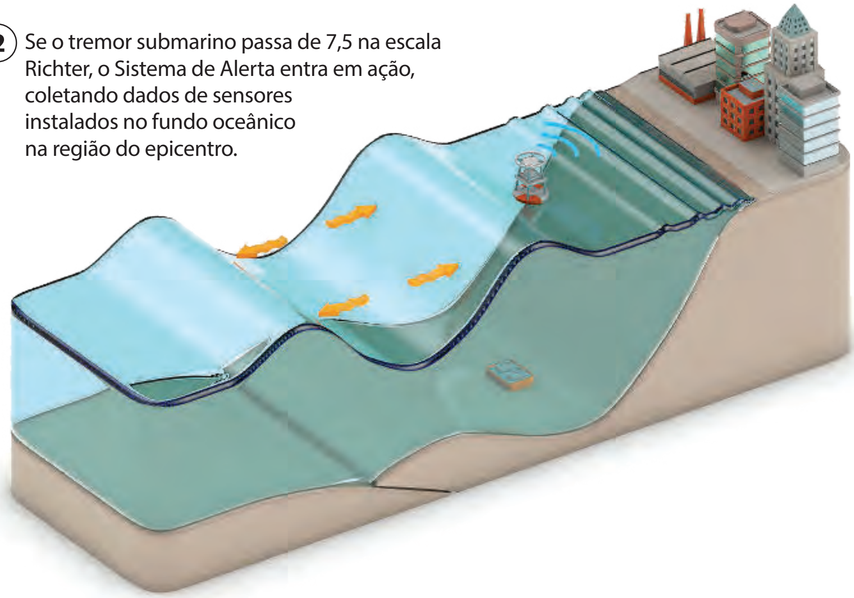
Os *tsunamis* são causados por terremotos ou deslizamentos de terra no fundo mar. Cientistas descobriram "camadas fracas" de sedimentos no fundo do Mar de Ross, formadas há 3 e 15 milhões de anos, que são propensas a deslizamentos submarinos. Essas camadas estão ligadas a períodos em que as águas da Antártica eram 3 °C mais quentes, favorecendo o crescimento excessivo de algas e resultando em sedimentos escorregadios. O aquecimento global e o consequente derretimento das geleiras aliviou a pressão sobre a placa tectônica, causando terremotos e *tsunamis*. O estudo, publicado na revista *Nature Communications*, alerta para a necessidade de se preparar para futuros deslizamentos e *tsunamis* na Antártica, destacando a urgência de entender como a mudança climática pode impactar a estabilidade da região, segundo Jenny Gales, autora do estudo.



DAVID MERRON PHOTOGRAPHY/MOMENT RF/GETTY IMAGS

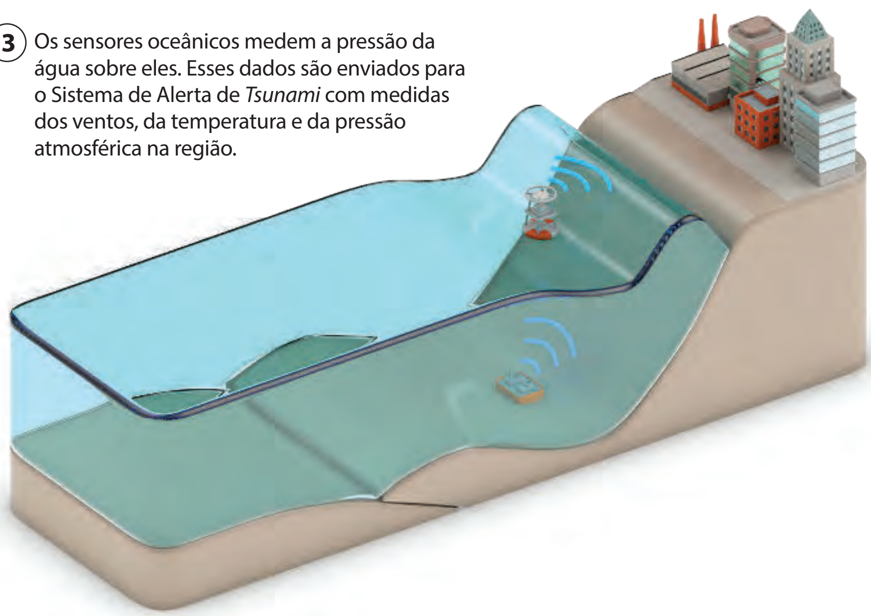
O aquecimento dos oceanos provocado pelas mudanças climáticas pode provocar o desprendimento de *icebergs*. Antártica. Foto de 2020.

2 Se o tremor submarino passa de 7,5 na escala Richter, o Sistema de Alerta entra em ação, coletando dados de sensores instalados no fundo oceânico na região do epicentro.



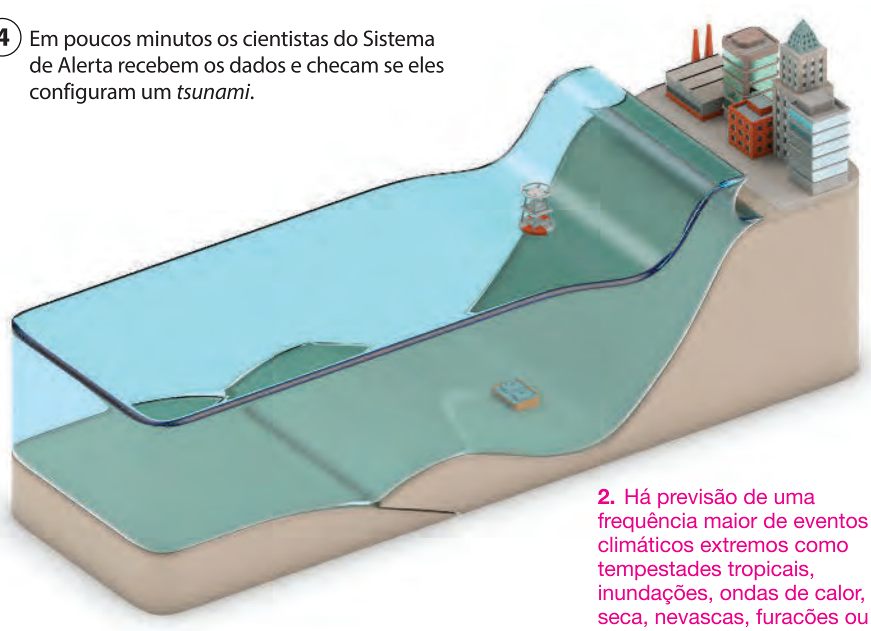
No momento em que o tremor é sentido em cada estação, calcula-se o raio da onda sísmica.

3 Os sensores oceânicos medem a pressão da água sobre eles. Esses dados são enviados para o Sistema de Alerta de *Tsunami* com medidas dos ventos, da temperatura e da pressão atmosférica na região.



Com centros em três estações e raios previamente calculados, constroem-se três circunferências, determinando-se o epicentro na intersecção delas.

4 Em poucos minutos os cientistas do Sistema de Alerta recebem os dados e checam se eles configuram um *tsunami*.



5 Com a análise desse conjunto de dados, os cientistas conseguem prever os locais que podem ser atingidos, calculam quando e com que força as ondas vão chegar e decidem se a população deve ser retirada do local.

ILUSTRAÇÕES: CARLOS FONSECA/ARQUIVO DA EDITORA

Além da teoria: 1. Duas circunferências secantes determinam dois pontos; então, é necessária uma terceira circunferência que intercepta as duas anteriores em um desses pontos, que será o epicentro.

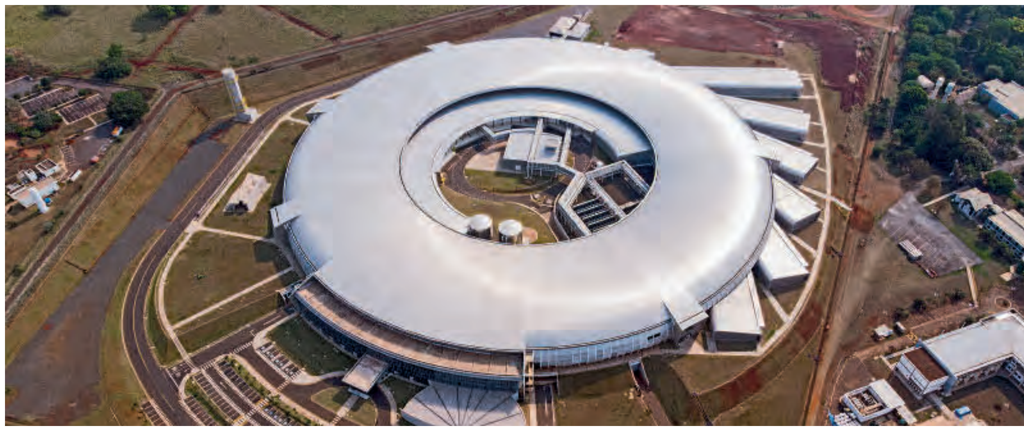
2. Há previsão de uma frequência maior de eventos climáticos extremos como tempestades tropicais, inundações, ondas de calor, seca, nevascas, furacões ou tornados.

Além da teoria

1. Por que são necessárias três circunferências para determinar o epicentro do *tsunami*?
2. Além dos *tsunamis*, cite outras consequências do aquecimento global.

1. Introdução: equacionando uma circunferência

Um acelerador de partículas impulsiona um elétron, que descreve, em seu percurso, uma circunferência de centro O e raio medindo 80 m. Com o objetivo de estudar o movimento do elétron, os cientistas equacionaram sua trajetória.



EDSON GRANDISOLI/PULSAR IMAGENS

O Laboratório Nacional de Luz Síncrotron (LNLS), em Campinas (SP), coordena o projeto Sirius. Com uma circunferência de 518 m de perímetro, o Sirius é um dos mais modernos aceleradores de partículas do mundo. Foto de 2020.

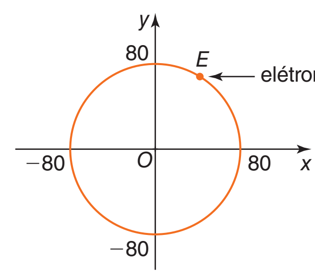
O tema do acelerador de partículas apresentado possibilita a discussão de ações e processos tecnológicos que levam em consideração as interações entre matéria e energia e as necessidades do ser humano. Se possível, promova a parceria com o professor de Física para explorar o assunto.

- Peça aos estudantes que definam circunferência. (Sendo C um ponto de um plano e R uma distância não nula, chama-se circunferência de centro C e raio R o conjunto dos pontos desse plano cuja distância ao ponto C é igual a R.)

Considerando, no plano cartesiano, uma circunferência λ de centro $C(1, 2)$ e raio $R = 5$, pergunte:

- O ponto $P(4, 6)$ pertence a λ? Por quê? (Sim, o ponto P pertence a λ, pois a distância $\overline{PC}$ é igual ao raio de λ.)
- O ponto $Q(9, 8)$ pertence a λ? Por quê? (Não, o ponto Q não pertence a λ, pois a distância $\overline{QC}$ é diferente do raio de λ.)
- Que equação representa todos os pontos que $G(x, y)$ que pertencem a λ? ($\sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} = 5$ ou, na forma equivalente, $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 25$.)

Para isso, associaram ao plano dessa trajetória um sistema cartesiano de origem O, cuja unidade adotada nos eixos é o metro.



Em qualquer posição da trajetória do elétron E, a distância EO será igual a 80 m. Assim, indicando a posição do elétron por $E(x, y)$, temos:

$$EO = 80 \Rightarrow \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = 80$$

$$\therefore \sqrt{x^2 + y^2} = 80$$

Elevando ao quadrado ambos os membros dessa igualdade, obtemos a equação:

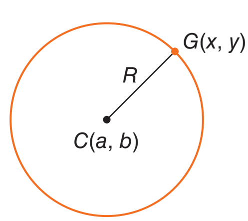
$$x^2 + y^2 = 6.400$$

Essa é a equação da trajetória do elétron.

Generalizando o procedimento adotado nesse exemplo, podemos obter a equação de qualquer circunferência do plano cartesiano. É isso o que faremos a seguir.

2. Equação reduzida de uma circunferência

Consideremos no plano cartesiano uma circunferência λ de centro $C(a, b)$ e raio R. Sendo $G(x, y)$ um ponto genérico, ele pertence à circunferência λ se, e somente se, $GC = R$, ou seja:



$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = R$$

ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

Elevando ao quadrado ambos os membros dessa igualdade, obtemos a **equação reduzida** da circunferência λ de centro $C(a, b)$ e raio R:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Obtenha a equação reduzida da circunferência de centro C e raio R em cada um dos seguintes casos:

a. $C(4, 5)$ e $R = 7$

b. $C(0, 2)$ e $R = \sqrt{7}$

c. $C(-3, 0)$ e $R = \frac{4}{5}$

d. $C(0, 0)$ e $R = 1$

Resolução

a. Na equação $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$, substituímos a, b e R por 4, 5 e 7, respectivamente, obtendo a equação reduzida:

$(x - 4)^2 + (y - 5)^2 = 7^2$, ou seja,

$(x - 4)^2 + (y - 5)^2 = 49$

b. Na equação $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$, substituímos a, b e R por 0, 2 e $\sqrt{7}$, respectivamente, obtendo a equação reduzida:

$(x - 0)^2 + (y - 2)^2 = (\sqrt{7})^2$, ou seja,

$x^2 + (y - 2)^2 = 7$

c. Fazendo $a = -3$, $b = 0$ e $R = \frac{4}{5}$ na equação $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$, obtemos a equação reduzida:

$[x - (-3)]^2 + (y - 0)^2 = \left(\frac{4}{5}\right)^2$, ou seja,

$(x + 3)^2 + y^2 = \frac{16}{25}$

d. $\begin{cases} (x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2 \\ a = 0 \\ b = 0 \\ R = 1 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow (x - 0)^2 + (y - 0)^2 = 1^2$, ou seja, $x^2 + y^2 = 1$

2. Determine o centro e o raio da circunferência que tem por equação:

a. $(x - 6)^2 + (y - 2)^2 = 16$

b. $(x + 4)^2 + (y - 1)^2 = 3$

c. $(x + 2)^2 + y^2 = \frac{16}{9}$

Resolução

a. Comparando a equação $(x - 6)^2 + (y - 2)^2 = 16$ com $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$, temos:

$$\begin{cases} a = 6 \\ b = 2 \\ R^2 = 16 \Rightarrow R = 4 \end{cases}$$

Assim, o centro da circunferência é o ponto $C(6, 2)$ e o raio é $R = 4$.

b. A equação $(x + 4)^2 + (y - 1)^2 = 3$ pode ser escrita na forma $[x - (-4)]^2 + (y - 1)^2 = 3$. Comparando essa equação com $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$, obtemos: $a = -4$, $b = 1$ e $R^2 = 3$

Portanto, o centro da circunferência é o ponto $C(-4, 1)$ e o raio é $R = \sqrt{3}$.

c. Podemos escrever a equação

$(x + 2)^2 + y^2 = \frac{16}{9}$ sob a forma

$[x - (-2)]^2 + (y - 0)^2 = \frac{16}{9}$.

Comparando essa equação com $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$, concluímos que:

$$\begin{cases} a = -2 \\ b = 0 \\ R^2 = \frac{16}{9} \Rightarrow R = \frac{4}{3} \end{cases}$$

Logo, o centro e o raio dessa circunferência são, respectivamente, $C(-2, 0)$ e $R = \frac{4}{3}$.

3. A equação $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = k$ representa uma circunferência para quais valores reais de k?

Resolução

Comparando a equação $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = k$ com $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$, temos:

$$\begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \\ R^2 = k \end{cases}$$

Como $R^2 > 0$, a equação representa uma circunferência para todos os valores reais de k tais que $k > 0$.

4. Qual é o conjunto de pontos (x, y) do plano cartesiano tal que $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 0$?

Resolução

Como $(x - 2)^2 \geqslant 0$ e $(y - 3)^2 \geqslant 0$ para quaisquer valores reais de x e y, temos:

$(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)^2 = 0$

e $(y - 3)^2 = 0$

$\therefore x = 2$ e $y = 3$

Assim, a equação $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 0$ representa um único ponto, que é $C(2, 3)$.

5. Qual é o conjunto dos pontos (x, y) do plano cartesiano tal que $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = -16$?

Resolução

Para quaisquer valores reais de x e y, temos:

$(x - 2)^2 \geqslant 0$ e $(y - 3)^2 \geqslant 0$. Logo, a igualdade

$(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = -16$ é impossível. Essa equação, portanto, representa o conjunto vazio.

Reconhecimento de uma circunferência

Generalizando as conclusões dos exercícios resolvidos **3**, **4** e **5**, temos que a equação $(x - a)^2 + (y - b)^2 = k$, nas variáveis x e y, com $\{a, b, k\} \subset \mathbb{R}$, representa:

- uma circunferência se, e somente se, $k > 0$;
- um ponto se, e somente se, $k = 0$;
- o conjunto vazio se, e somente se, $k < 0$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Faça os exercícios no caderno.

1. Determine a equação reduzida da circunferência de centro C e raio R nos seguintes casos:

a. $C(4, 6)$ e $R = 10$ **1. a.** $(x - 4)^2 + (y - 6)^2 = 100$

b. $C(7, 0)$ e $R = \sqrt{3}$ **1. b.** $(x - 7)^2 + y^2 = 3$

c. $C(0, -1)$ e $R = \frac{2}{3}$ **1. c.** $x^2 + (y + 1)^2 = \frac{4}{9}$

d. $C(0, 0)$ e $R = 4$ **1. d.** $x^2 + y^2 = 16$

2. Obtenha o centro C e o raio R da circunferência de equação:

a. $(x - 6)^2 + (y - 2)^2 = 49$ **2. a.** $C(6, 2)$ e $R = 7$

b. $(x - 4)^2 + y^2 = 5$ **2. b.** $C(4, 0)$ e $R = \sqrt{5}$

c. $(x + 1)^2 + (y + 2)^2 = \frac{16}{25}$ **2. c.** $C(-1, -2)$ e $R = \frac{4}{5}$

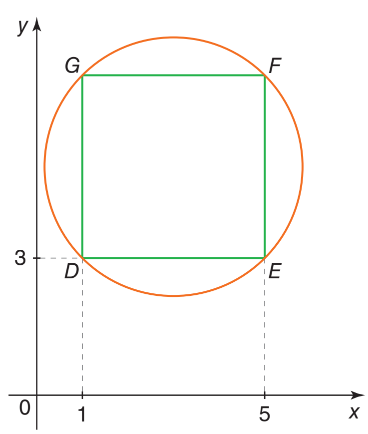
3. a. A não pertence a λ, e B pertence a λ.

3. Em relação à circunferência λ de equação $(x - 2)^2 + (y + 6)^2 = 25$, responda aos itens a seguir.

a. Qual dos pontos $A(1, 4)$ e $B(6, -3)$ pertence a λ?

b. Para que valores reais de k o ponto $P(-1, k)$ pertence a λ? **3. b.** $k = -2$ ou $k = -10$

4. O gráfico a seguir mostra uma circunferência circunscrita a um quadrado $DEFG$, em que $D(1, 3)$ e $E(5, 3)$.



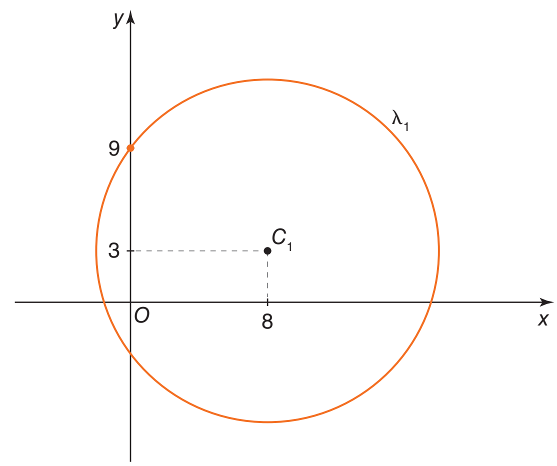
a. Determine os pontos F e G. **4. a.** $F(5, 7)$ e $G(1, 7)$

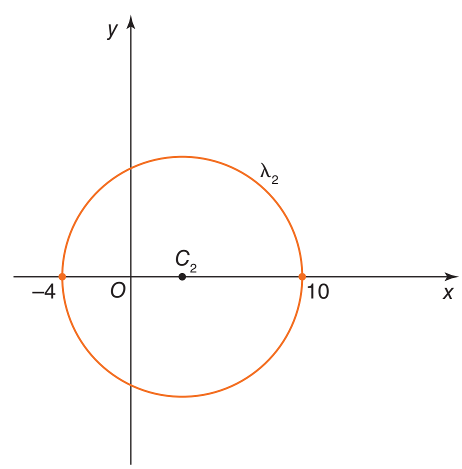
b. Obtenha a equação reduzida dessa circunferência. **4. b.** $(x - 3)^2 + (y - 5)^2 = 8$

c. Determine o ponto P de abscissa máxima pertencente a essa circunferência. **4. c.** $P(3 + 2\sqrt{2}, 5)$

d. Determine o ponto Q de ordenada mínima pertencente a essa circunferência. **4. d.** $Q(3, 5 - 2\sqrt{2})$

5. As circunferências λ_1 e λ_2 têm centros C_1 e C_2, respectivamente. Obtenha a equação reduzida de cada uma delas.
5. λ_1: $(x - 8)^2 + (y - 3)^2 = 100$ e λ_2: $(x - 3)^2 + y^2 = 49$





6. Uma circunferência λ passa pelo ponto $P(6, -1)$, seu centro pertence à reta bissetriz dos quadrantes ímpares e seu raio mede 5 unidades. Obtenha a equação reduzida de λ.
6. $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 25$ ou $(x - 3)^2 + (y - 3)^2 = 25$

7. Considere a equação $(x - 5)^2 + (y + 1)^2 = k - 4$ nas variáveis x e y. Determine o(s) valor(es) real(is) de k de modo que essa equação represente:

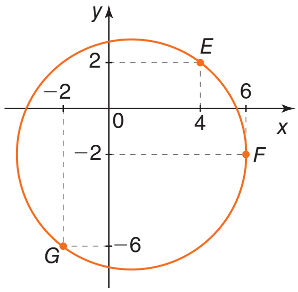
a. uma circunferência; **7. a.** $k > 4$

b. um ponto; **7. b.** $k = 4$

c. o conjunto vazio. **7. c.** $k < 4$

8. Obtenham a equação reduzida da circunferência λ que passa pelos pontos $E(4, 2)$, $F(6, -2)$ e $G(-2, -6)$.

O **exercício 8** apresenta um problema fundamental: determinação da equação de uma circunferência que passa por três pontos não colineares. Faça uma revisão do circuncentro de um triângulo.



Nota: Lembrem-se de que o centro C de uma circunferência é a intersecção das mediatrizes de duas cordas não paralelas quaisquer. **8.** $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 25$

9. Considerem um sistema cartesiano ortogonal cuja origem $O(0, 0)$ é o centro da Terra e a unidade adotada nos eixos Ox e Oy é o quilômetro. No plano determinado por esses eixos, um satélite gira em órbita circular com centro $O(0, 0)$ e velocidade constante de 12.560 km/h, completando uma volta a cada 5 horas. Admitindo que $\pi = 3,14$, concluímos que a equação da órbita desse satélite é: **9.** alternativa **a**

a. $x^2 + y^2 = 10^8$

b. $x^2 + y^2 = 2^8$

c. $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 8^{10}$

d. $(x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 8^{10}$

e. $x^2 + y^2 = 2^{10}$

10. Resposta pessoal.

10. Elabore um problema envolvendo a equação reduzida da circunferência cujo ponto $A(2, 4)$ pertence a circunferência e tem o centro C no eixo das abscissas. Depois, junte-se a um colega a fim de resolver o problema elaborado por ele. Por fim, analisem e conversem sobres as resoluções.

Para retomar os conteúdos estudados, resolva os exercícios complementares 1 e 2.

Com o boxe **Mentes brilhantes**, incentive os estudantes a pesquisarem sobre Eratóstenes e apresentarem outras informações aos colegas. É importante que eles percebam que os conhecimentos científicos, geralmente, são fruto da colaboração de diversas pessoas. Aproveite o conteúdo do **Vídeo: Eratóstenes e a medida da Terra** e comente que o crivo de Eratóstenes é utilizado até hoje em algoritmos de programação. Se os estudantes demonstrarem interesse, podem desenvolver um algoritmo, em linguagem natural ou Português estruturado, que modele esse método.

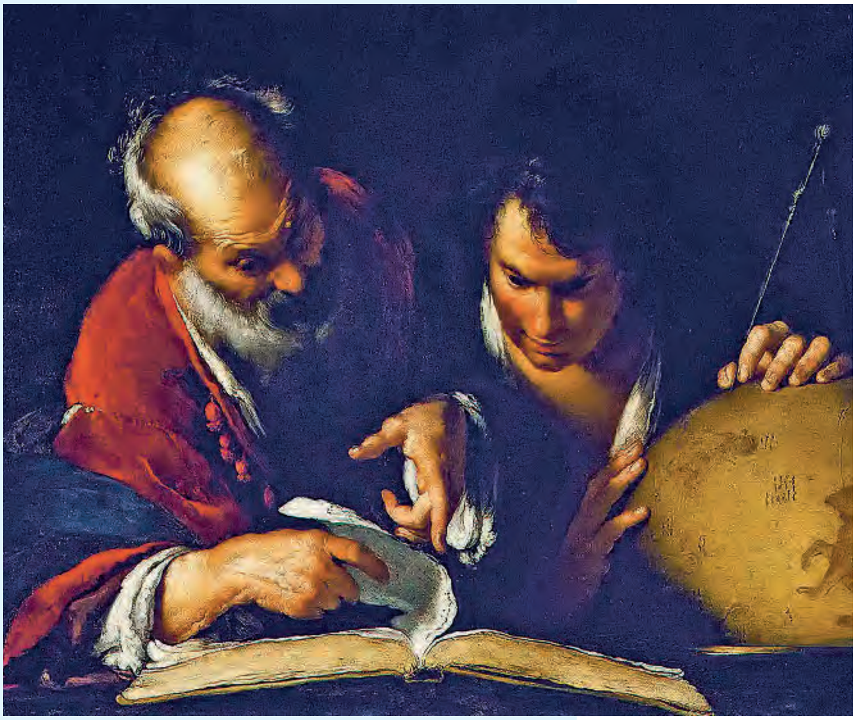
Mentes brilhantes

OBJETO DIGITAL Vídeo: Eratóstenes e a medida da Terra

Quem foi Eratóstenes?

Eratóstenes nasceu por volta de 276 a.C. em Cirene, na atual Líbia, e transcendeu as fronteiras do conhecimento, deixando um legado marcante em diversas áreas. Como um dos mais notáveis eruditos do mundo antigo, sua vida foi dedicada à busca pelo entendimento do mundo, resultou em contribuições significativas para Matemática, Astronomia, Geografia e outras áreas.

Como bibliotecário-chefe da Biblioteca de Alexandria, Eratóstenes organizou vasto conhecimento, compilando uma lista de 675 estrelas e descrevendo o rio Nilo até Khartoum. Outra de suas realizações foi a criação de um algoritmo para a obtenção de uma tabela de números primos, que é conhecida como **Crivo de Eratóstenes**. Porém, seu feito mais notável foi calcular o comprimento da circunferência máxima da Terra, baseado em observações durante o solstício de verão em Siena. Seu trabalho revolucionou a compreensão da Geografia e da Astronomia na Antiguidade.



STROZZI, B. Eratóstenes ensinando em Alexandria. c. 1635. Óleo sobre tela, 78,9 × 99,4 cm.

Peça aos estudantes que eliminem os parênteses na equação: $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$
Partindo do desenvolvimento realizado pelos estudantes, obtenha a equação geral da circunferência: $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - R^2 = 0$.
Enfatize que, multiplicando ambos os membros da equação geral por uma constante k não nula, obtemos outra equação da circunferência: $kx^2 + ky^2 - 2kax - 2kby + ka^2 + kb^2 - kR^2 = 0$
Apresente os métodos da comparação e da redução para a determinação do centro e do raio de uma circunferência a partir da equação geral.

3. Equação geral de uma circunferência

Estudamos que a equação reduzida de uma circunferência de centro $C(a, b)$ e raio R é:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$$

Eliminando os parênteses dessa equação, obtemos $x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 = R^2$ ou, de forma equivalente:

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - R^2 = 0$$

Essa é a **equação geral** ou **equação normal** da circunferência.

Exemplo

A equação reduzida da circunferência de centro $C(4, 2)$ e raio $R = 6$ é:

$$(x - 4)^2 + (y - 2)^2 = 36$$

Eliminando os parênteses dessa equação, obtemos:

$$x^2 - 8x + 16 + y^2 - 4y + 4 = 36$$

Reordenando os termos dessa equação e deixando um dos membros igual a zero, obtemos a equação geral (ou normal):

$$x^2 + y^2 - 8x - 4y - 16 = 0$$

Nota:

Multiplicando ambos os membros dessa equação por uma constante k não nula, obtemos outra equação da mesma circunferência. Por exemplo, multiplicando-a por 2:

$$2x^2 + 2y^2 - 16x - 8y - 32 = 0$$

Determinação do centro e do raio de uma circunferência a partir de sua equação geral

Dada a equação geral de uma circunferência λ, por exemplo, $x^2 + y^2 + 12x - 6y + 41 = 0$, podemos determinar o centro e raio de λ de dois modos: por comparação ou por redução.

Por comparação

Comparando a equação $x^2 + y^2 + 12x - 6y + 41 = 0$ com a equação geral $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - R^2 = 0$, temos:

$$\begin{cases} -2a = 12 \\ -2b = -6 \\ a^2 + b^2 - R^2 = 41 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -6 & (1) \\ b = 3 & (2) \\ a^2 + b^2 - R^2 = 41 & (3) \end{cases}$$

Substituindo (1) e (2) em (3), obtemos:

$$(-6)^2 + 3^2 - R^2 = 41 \Rightarrow R^2 = 4$$

$$\therefore R = 2$$

Assim, concluímos que a circunferência λ tem centro $C(-6, 3)$ e raio $R = 2$.

Por redução

Esse método consiste na obtenção da forma reduzida a partir da equação geral. Para isso:

- agrupamos os termos em x e os termos em y, isolando em um dos membros da igualdade o termo independente:

$$x^2 + y^2 + 12x - 6y + 41 = 0 \Rightarrow (x^2 + 12x) + (y^2 - 6y) = -41$$

- adicionamos a ambos os membros dessa igualdade um mesmo termo, de modo que o agrupamento em x se transforme em um **quadrado perfeito**:

$$\underbrace{(x^2 + 12x + 36)}_{(x+6)^2} + (y^2 - 6y) = -41 + 36$$

- adicionamos a ambos os membros dessa igualdade um mesmo termo, de modo que o agrupamento em y se transforme em um **quadrado perfeito**:

$$\underbrace{(x^2 + 12x + 36)}_{(x+6)^2} + \underbrace{(y^2 - 6y + 9)}_{(y-3)^2} = \underbrace{-41 + 36 + 9}_{4}$$

Obtivemos, assim, a equação reduzida da circunferência λ. Logo, o centro C e o raio R de λ são: $C(-6, 3)$ e $R = 2$.

Observação

Note que o coeficiente de x^2 é 1; por isso, o termo que deve ser adicionado a ambos os membros é o quadrado da metade do coeficiente de x.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

6. Aplicando o método da comparação, obtenha o centro e o raio da circunferência das equações a seguir.

a. $x^2 + y^2 + 6y - 16 = 0$

b. $16x^2 + 16y^2 + 16x - 8y - 31 = 0$

Resolução

Devemos comparar cada uma das equações com

$$\lambda: x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - R^2 = 0$$

a. Comparando com a circunferência λ a equação $x^2 + y^2 + 6y - 16 = 0$, temos:

$$\begin{cases} -2a = 0 \Rightarrow a = 0 \ (1) \\ -2b = 6 \Rightarrow b = -3 \ (2) \\ a^2 + b^2 - R^2 = -16 \ (3) \end{cases}$$

Substituindo (1) e (2) em (3), obtemos:

$$0^2 + (-3)^2 - R^2 = -16 \Rightarrow R^2 = 25$$

$$\therefore R = 5$$

Portanto, o centro C e o raio R da circunferência são $C(0, -3)$ e $R = 5$.

b. Para poder comparar com a circunferência λ a equação $16x^2 + 16y^2 + 16x - 8y - 31 = 0$, devemos dividir por 16 ambos os membros dessa igualdade, obtendo:

$$x^2 + y^2 + x - \frac{y}{2} - \frac{31}{16} = 0$$

Assim, temos:

$$\begin{cases} -2a = 1 \Rightarrow a = -\frac{1}{2} \ (1) \\ -2b = -\frac{1}{2} \Rightarrow b = \frac{1}{4} \ (2) \\ a^2 + b^2 - R^2 = -\frac{31}{16} \ (3) \end{cases}$$

Substituindo (1) e (2) em (3), obtemos:

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 - R^2 = -\frac{31}{16} \Rightarrow R^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{31}{16}$$

$$\therefore R^2 = \frac{36}{16} \Rightarrow R = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

Portanto, o centro C e o raio R dessa circunferência são $C\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ e $R = \frac{3}{2}$.

7. Aplicando o método da redução, determine o centro e o raio da circunferência de equação:

a. $x^2 + y^2 + 6y - 16 = 0$

b. $16x^2 + 16y^2 + 16x - 8y - 31 = 0$

Resolução

a. Agrupamos os termos em x, os termos em y e isolamos o termo independente em um dos membros da igualdade: $(x^2) + (y^2 + 6y) = 16$.

Completando o quadrado perfeito no agrupamento em y, temos:

$$(x^2) + (y^2 + 6y + \mathbf{9}) = 16 + \mathbf{9}$$

quadrado da metade do coeficiente de y

Assim, a equação reduzida da circunferência é:

$$x^2 + (y + 3)^2 = 25$$

Logo, o centro C e o raio R da circunferência são $C(0, -3)$ e $R = 5$.

b. Para obter a equação reduzida, convém dividir por 16 ambos os membros da equação:

$$x^2 + y^2 + x - \frac{y}{2} - \frac{31}{16} = 0$$

Agrupamos os termos em x, os termos em y e isolamos o termo independente em um dos membros da igualdade:

$$(x^2 + x) + \left(y^2 - \frac{y}{2}\right) = \frac{31}{16}$$

Completando os quadrados, obtemos:

$$\left(x^2 + x + \underbrace{\mathbf{\frac{1}{4}}}_{\substack{\text{quadrado da}\\ \text{metade do}\\ \text{coeficiente de } x}}\right) + \left(y^2 + \frac{y}{2} + \underbrace{\mathbf{\frac{1}{16}}}_{\substack{\text{quadrado da}\\ \text{metade do}\\ \text{coeficiente de } y}}\right) = \frac{31}{16} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16}$$

Assim, a equação reduzida da circunferência é:

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{36}{16}$$

Portanto, o centro C e o raio R da circunferência são $C\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ e $R = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Faça os exercícios no caderno.

11. Aplicando o método da comparação, determine o centro C e o raio R da circunferência de equação:

a. $x^2 + y^2 - 10x - 2y + 17 = 0$ **11. a.** $C(5, 1)$ e $R = 3$

b. $x^2 + y^2 - 8x + 6y + 19 = 0$ **11. b.** $C(4, -3)$ e $R = \sqrt{6}$

c. $x^2 + y^2 - 14x + 44 = 0$ **11. c.** $C(7, 0)$ e $R = \sqrt{5}$

d. $x^2 + y^2 - 3 = 0$ **11. d.** $C(0, 0)$ e $R = \sqrt{3}$

e. $5x^2 + 5y^2 - 10x + 10y - 10 = 0$ **11. e.** $C(1, -1)$ e $R = 2$

12. Utilizando o método da redução, obtenha o centro C e o raio R da circunferência de equação:

a. $x^2 + y^2 - 6x - 2y - 26 = 0$ **12. a.** $C(3, 1)$ e $R = 6$

b. $x^2 + y^2 + 4x - 8y + 19 = 0$ **12. b.** $C(-2, 4)$ e $R = 1$

c. $x^2 + y^2 + 10x + 23 = 0$ **12. c.** $C(-5, 0)$ e $R = \sqrt{2}$

d. $9x^2 + 9y^2 - 6x - 9y + 1 = 0$ **12. d.** $C\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$ e $R = \frac{1}{2}$

13. Obtenha a equação geral da circunferência λ que passa pelos pontos $A(3, 1)$ e $B(6, 2)$, cujo centro C pertence ao eixo das abscissas. **13.** $x^2 + y^2 - 10x + 20 = 0$

14. Um ponto C da bissetriz dos quadrantes ímpares é o centro de uma circunferência λ que passa pelos pontos $A(2, 8)$ e $B(4, -2)$. Obtenha a equação geral da circunferência λ. **14.** $x^2 + y^2 - 6x - 6y - 8 = 0$

15. Obtenha a equação geral da circunferência λ que passa pelos pontos $A(1, 3)$ e $B(7, -5)$, cujo centro pertence à reta r de equação $y = x - 5$.
Nota: Um ponto genérico da reta r é obtido atribuindo-se um valor genérico à variável x; por exemplo, fazendo $x = a$, obtém-se $y = a - 5$. Logo, o centro da circunferência é um ponto da forma $(a, a - 5)$.
15. $x^2 + y^2 - 8x + 2y - 8 = 0$

16. Para a realização de uma experiência, fixou-se um sistema cartesiano xOy em uma planície, adotando-se o quilômetro como unidade nos eixos coordenados. Nos pontos $P(1, 4)$ e $Q(10, 16)$ foram geradas, no mesmo instante, ondas sísmicas artificiais, α e β, que se propagaram nessa planície em forma de circunferências de centros P e Q, respectivamente, e com velocidades constantes. Dado que a onda β se deslocava com o dobro da velocidade de α, obtenha a equação geral das duas circunferências que representam essas ondas, no momento em que elas se tocaram.
16. $x^2 + y^2 - 2x - 8y - 8 = 0$ e $x^2 + y^2 - 20x - 32y + 256 = 0$

17. Elabore uma equação geral da circunferência. Em seguida, troque a equação com um colega e peça para ele descrever os passos para determinar o centro C e o raio R da circunferência aplicando o método da comparação. Por fim, analisem e conversem sobre as estratégias que cada um utilizou para resolver o problema.
17. Resposta pessoal.

Para retomar os conteúdos estudados, resolva o exercício complementar 3.

Identificação de uma circunferência por uma equação do 2º grau

Chama-se **equação polinomial do 2º grau em duas variáveis** x e y toda equação que pode ser apresentada sob a forma:

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$$

com $\{A, B, C, D, E, F\} \subset \mathbb{R}$, em que A, B e C não são simultaneamente nulos.

Para que essa equação represente uma **circunferência**, é necessário e suficiente que sejam obedecidas as condições a seguir:

(1) $A = B \neq 0$

(2) $C = 0$

(3) Obedecidas as condições (1) e (2), a equação representada na forma $(x - p)^2 + (y - q)^2 = k$, com $\{p, q, k\} \subset \mathbb{R}$, chamada forma reduzida, apresente como valor de k um número positivo.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

8. Qual das alternativas apresenta a equação de uma circunferência?

a. $4x^2 + 3y^2 + 2x - 8y + 1 = 0$

b. $x^2 - y^2 - 5x + 9y = 0$

c. $x^2 + y^2 + 3xy - 5x + y = 0$

d. $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 6 = 0$

e. $2x^2 + 2y^2 - 8x - 12y + 24 = 0$

Resolução

a. Não é equação de uma circunferência, pois os coeficientes de x^2 e y^2 são diferentes ($4 \neq 3$).

b. Não é equação de uma circunferência, pois os coeficientes de x^2 e y^2 são diferentes ($1 \neq -1$).

c. Não é equação de uma circunferência, pois o coeficiente de xy é diferente de zero.

d. Essa equação obedece às condições (1) e (2), isto é, os coeficientes de x^2 e y^2 são iguais e não nulos, e o coeficiente de xy é igual a zero. Agora, verificamos se a equação obedece à condição (3).

$x^2 + y^2 - 2x - 4y + 6 = 0$

$(x^2 - 2x + \mathbf{1}) + (y^2 - 4y + \mathbf{4}) = -6 + \mathbf{1} + \mathbf{4}$

$\therefore (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = -1$

Como o membro constante da equação reduzida é negativo, $-1 < 0$, concluímos que a equação não representa uma circunferência.

e. Essa equação obedece às condições (1) e (2), isto é, os coeficientes de x^2 e y^2 são iguais e não nulos, e o coeficiente de xy é igual a zero. Verificamos se a equação obedece à condição (3):

$2x^2 + 2y^2 - 8x - 12y + 24 = 0$

$x^2 + y^2 - 4x - 6y + 12 = 0$

$(x^2 - 4x + \mathbf{4}) + (y^2 - 6y + \mathbf{9}) = -12 + \mathbf{4} + \mathbf{9}$

$\therefore (x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 1$

Como o membro constante da equação reduzida é positivo, $1 > 0$, concluímos que a equação representa uma circunferência.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Faça os exercícios no caderno.

18. Qual das equações a seguir representa uma circunferência?

18. alternativa e

a. $x^2 + 3y^2 - 6x + 4y - 9 = 0$

b. $x^2 + 6x - 4y + 1 = 0$

c. $x^2 + y^2 + 4xy - 2 = 0$

d. $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 6 = 0$

e. $-x^2 - y^2 + 8x - 7 = 0$

19. (UFRGS-RS) A equação $x^2 + y^2 + 4x - 6y + m = 0$ representa uma circunferência se, e somente se:

19. alternativa e

a. $m > 0$

b. $m < 0$

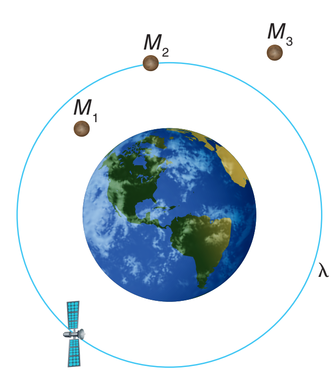
c. $m > 13$

d. $m > -13$

e. $m < 13$

4. Posições relativas entre um ponto e uma circunferência

Neste instante, três meteoritos, M_1, M_2 e M_3, estão em pontos coplanares com a órbita circular λ de um satélite ao redor da Terra, como ilustra a figura. Temos, portanto, que M_1 está em um ponto interior à órbita λ, M_2 está em um ponto de λ e que M_3 está em um ponto exterior a λ. Essa situação exemplifica as três posições relativas possíveis entre um ponto e uma circunferência coplanares.



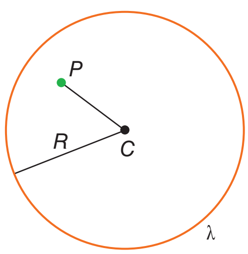
(Modelo didático sem escala e com cores fantasia.)

ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

A seguir, faremos o estudo analítico das posições relativas entre um ponto e uma circunferência de um mesmo plano, isto é, associaremos um sistema cartesiano a esse plano e descreveremos as posições relativas em termos das coordenadas do ponto e da equação da circunferência.

Um ponto $P(x_0, y_0)$ em relação a uma circunferência λ de equação $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$ tem uma entre três posições relativas possíveis: P pode ser interior a λ, pode pertencer a λ, ou pode ser exterior a λ. Essas posições podem ser descritas comparando a medida R do raio com a distância entre P e o centro C da circunferência. Observe a seguir.

- ***P* é interior a λ** se, e somente se, a distância entre P e o centro C da circunferência é menor que a medida R do raio.



$$CP < R \Rightarrow \sqrt{(x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2} < R$$

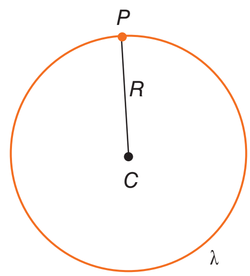
Como os dois membros dessa desigualdade são números não negativos, podemos quadrá-los, obtendo:

$$(x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 < R^2$$

ou, de forma equivalente:

$$x_0^2 + y_0^2 - 2ax_0 - 2by_0 + a^2 + b^2 - R^2 < 0$$

- ***P* pertence a λ** se, e somente se, a distância entre P e o centro C da circunferência é igual à medida R do raio.



$$CP = R \Rightarrow \sqrt{(x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2} = R$$

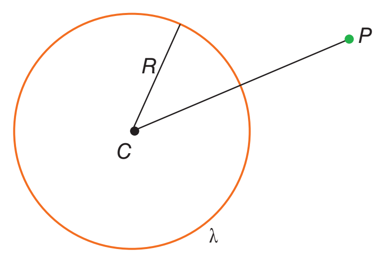
Elevando ao quadrado ambos os membros dessa igualdade, obtemos:

$$(x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 = R^2$$

ou, de forma equivalente:

$$x_0^2 + y_0^2 - 2ax_0 - 2by_0 + a^2 + b^2 - R^2 = 0$$

- ***P* é exterior a λ** se, e somente se, a distância entre P e o centro C da circunferência é maior que a medida R do raio.



$$CP > R \Rightarrow \sqrt{(x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2} > R$$

Como os dois membros dessa desigualdade são números não negativos, podemos quadrá-los, obtendo:

$$(x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 > R^2$$

ou, de forma equivalente:

$$x_0^2 + y_0^2 - 2ax_0 - 2by_0 + a^2 + b^2 - R^2 > 0$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

9. Em cada um dos casos a seguir, determine a posição relativa entre o ponto P e a circunferência λ:

a. $P(1, 3)$ e $(\lambda)\ (x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 16$

b. $P(5, 6)$ e $(\lambda)\ (x - 3)^2 + (y - 6)^2 = 4$

c. $P(3, 1)$ e $(\lambda)\ x^2 + y^2 - 4x + 2y + 2 = 0$

Resolução

Substituindo as variáveis x e y de cada equação pelas coordenadas do ponto P, temos:

a. $\underbrace{(1 + 1)^2 + (3 - 2)^2}_{5} < 16$

Logo, P é interior a λ.

b. $\underbrace{(5 - 3)^2 + (6 - 6)^2}_{4} = 4$

Logo, P pertence a λ.

c. $\underbrace{3^2 + 1^2 - 4 \cdot 3 + 2 \cdot 1 + 2}_{2} > 0$

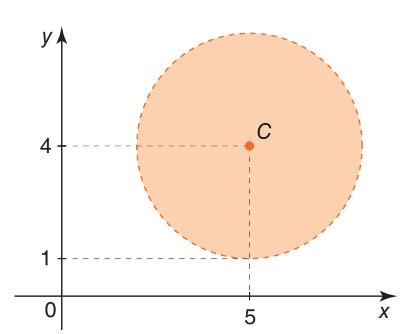
Logo, P é exterior a λ.

10. Represente no plano cartesiano o conjunto dos pontos (x, y) tais que $(x - 5)^2 + (y - 4)^2 < 9$.

Resolução

As soluções (x, y) da inequação $(x - 5)^2 + (y - 4)^2 < 9$ são os pontos interiores à circunferência de centro $C(5, 4)$ e raio 3.

Representando esses pontos no plano cartesiano, temos:



Desenhamos a circunferência tracejada porque ela não faz parte do gráfico. (Caso fizesse parte, a desenharíamos com uma linha contínua.)

20. Qual é a posição do ponto P em relação à circunferência λ em cada caso?

a. $P(1, 2)$ e $(\lambda)\ (x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 5$

20. a. P é interior a λ.

b. $P(1, 5)$ e $(\lambda)\ x^2 + y^2 - 8x + 6 = 0$

20. b. P é exterior a λ.

c. $P(4, -2)$ e $(\lambda)\ x^2 + y^2 - 2x - 6y - 24 = 0$

20. c. P pertence a λ.

21. Em cada caso, represente no plano cartesiano a região formada por todos os pontos $P(x, y)$ que satisfaçam a inequação:

21. Resposta nas **Orientações Específicas** deste capítulo.

a. $(x + 4)^2 + (y - 4)^2 \leqslant 4$

b. $(x + 4)^2 + (y - 4)^2 < 4$

c. $x^2 + y^2 - 12x - 16y + 75 > 0$

d. $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 1 \geqslant 0$

22. Construa o gráfico cartesiano da região formada pelos pontos (x, y) que são soluções de cada sistema.

a. $\begin{cases} x^2 + (y - 4)^2 \geqslant 4 \\ x^2 + (y - 4)^2 \leqslant 16 \end{cases}$

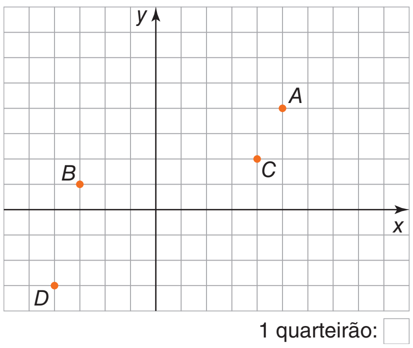
b. $\begin{cases} (x - 3)^2 + y^2 \leqslant 25 \\ (x + 3)^2 + y^2 \leqslant 25 \end{cases}$

c. $\begin{cases} x^2 + y^2 \geqslant 100 \\ -10 \leqslant x \leqslant 10 \\ -10 \leqslant y \leqslant 10 \end{cases}$

22. Resposta nas **Orientações Específicas** deste capítulo.

23. (Enem) Considere que os quarteirões de um bairro tenham sido desenhados no sistema cartesiano, sendo a origem o cruzamento das duas ruas mais movimentadas desse bairro. Nesse desenho, as ruas têm suas larguras desconsideradas e todos os quarteirões são quadrados de mesma área e a medida de seu lado é a unidade do sistema. A seguir há uma representação dessa situação, em que os pontos A, B, C e D representam estabelecimentos comerciais desse bairro.

23. alternativa **d**



ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

Suponha que uma rádio comunitária, de fraco sinal, garante área de cobertura para todo estabelecimento que se encontre num ponto cujas coordenadas satisfaçam à inequação: $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 31 \leqslant 0$.

A fim de avaliar a qualidade do sinal, e proporcionar uma futura melhora, a assistência técnica da rádio realizou uma inspeção para saber quais estabelecimentos estavam dentro da área de cobertura, pois estes conseguem ouvir a rádio enquanto os outros, não. Os estabelecimentos que conseguem ouvir a rádio são apenas:

a. A e C.
b. B e C.
c. B e D.
d. A, B e C.
e. B, C e D.

Para retomar os conteúdos estudados, resolva o exercício complementar 4.

5. Posições relativas entre uma reta e uma circunferência

Na sequência de imagens a seguir, contemplamos três fotos do pôr do sol, observado de uma praia. Sendo s a reta que representa a linha do horizonte e λ a circunferência que contorna a imagem do Sol, como você descreveria a posição relativa entre s e λ no plano de cada foto?

MUNIMARA/ SHUTTERSTOCK

Sequência de pôr do sol no mar Mediterrâneo em Almuñecar, Espanha. Foto de 2017.

Com esse exemplo queremos revisar as posições relativas entre uma reta s e uma circunferência λ:

- s é exterior a λ se, e somente se, s e λ são coplanares e não têm ponto em comum;
- s é tangente a λ se, e somente se, s e λ são coplanares e têm um único ponto em comum;
- s é secante a λ se, e somente se, s e λ são coplanares e têm dois pontos distintos em comum.

Revise a fórmula da distância entre o ponto $M(x_0, y_0)$ e a reta r de equação geral $ax + by + c = 0$:

$$d_{Mr} = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Antes de iniciar os estudos do tópico, explore a iniciativa dos estudantes com a questão seguinte: Qual é a posição relativa entre a reta s e a circunferência λ, em cada um dos casos a seguir?

a. $(s)\ 5x + 12y - 5 = 0$ e $(\lambda)\ (x - 4)^2 + (y - 2)^2 = 1$ (s é exterior a λ.)

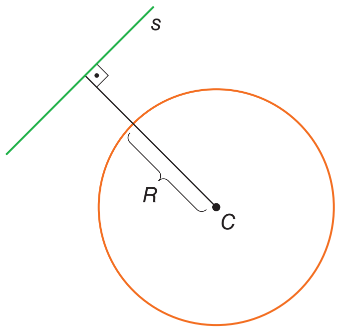
b. $(s)\ 6x - 8y - 1 = 0$ e $(\lambda)\ (x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 9$ (s é secante a λ.)

c. $(s)\ y = 4x + 9$ e $(\lambda)\ x^2 + y^2 - 4x - 13 = 0$ (s é tangente a λ.)

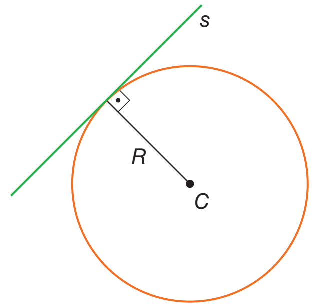
Após essa discussão, desenvolva a proposta do tópico.

Com a participação dos estudantes, refaça os **exercícios resolvidos 11** e **12**. No **exercício resolvido 12**, enfatize que, para obter a equação de todas as retas do plano cartesiano paralelas à reta t de equação $4x + 3y - 1 = 0$, basta substituir o termo independente por um parâmetro real k, obtendo-se $4x + 3y + k = 0$. Mostre que para qualquer valor real de k, a reta terá o mesmo coeficiente angular de t, portanto, será paralela a t.

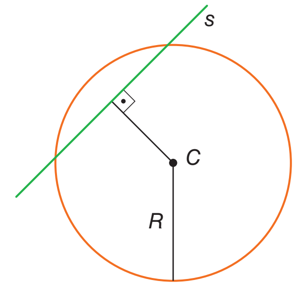
A seguir, estudaremos as posições relativas entre uma reta s e uma circunferência λ, contidas no plano cartesiano, a partir de suas equações. Essas posições podem ser determinadas comparando-se a medida R do raio de λ com a distância d_{Cs} entre o centro C de λ e a reta s. Observe:



s é **exterior** a λ se, e somente se: $d_{Cs} > R$



s é **tangente** a λ se, e somente se: $d_{Cs} = R$



s é **secante** a λ se, e somente se: $d_{Cs} < R$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

11. Qual é a posição da reta s em relação à circunferência λ em cada um dos casos a seguir?

a. $(s)\ 3x + 4y + 4 = 0$ e $(\lambda)\ (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 1$

b. $(s)\ 12x - 5y - 5 = 0$ e $(\lambda)\ (x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 4$

c. $(s)\ y = \frac{4x}{3} + \frac{10}{3}$ e $(\lambda)\ x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 = 0$

Resolução

a. O centro C e o raio R de λ são $C(1, 2)$ e $R = 1$. A distância entre C e s é calculada pela fórmula da distância entre ponto e reta:

$$d_{Cs} = \frac{|3 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 4|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|15|}{\sqrt{25}} = \frac{15}{5} = 3$$

Temos $d_{Cs} > R$, pois $3 > 1$; logo, a reta s é exterior à circunferência.

b. O centro C e o raio R de λ são $C(3, 1)$ e $R = 2$. A distância entre C e s é:

$$d_{Cs} = \frac{|12 \cdot 3 - 5 \cdot 1 - 5|}{\sqrt{12^2 + (-5)^2}} = \frac{|26|}{\sqrt{169}} = \frac{26}{13} = 2$$

Assim, $d_{Cs} = R$, pois $2 = 2$; logo, a reta s é tangente a λ.

c. Para obter o centro C e o raio R de λ, vamos aplicar o método da redução:

$$(x^2 - 2x) + (y^2 + 4y) = 20 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (x^2 - 2x + 1) + (y^2 + 4y + 4) =$$
$$= 20 + 1 + 4$$
$$\therefore (x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 25$$

Logo: $C(1, -2)$ e $R = 5$.

Passamos para a forma geral a equação da reta:

$$(s)\ 4x - 3y + 10 = 0$$

A distância entre $C(1, -2)$ e s é:

$$d_{Cs} = \frac{|4 \cdot 1 - 3 \cdot (-2) + 10|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \frac{|20|}{\sqrt{25}} = \frac{20}{5} = 4$$

Temos $d_{Cs} < R$, pois $4 < 5$; logo, a reta s é secante à circunferência λ.

12. Obtenha as equações das retas paralelas à reta $(t)\ 4x + 3y - 1 = 0$ e tangentes à circunferência λ de equação $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 4$.

Resolução

O centro C e o raio R de λ são $C(-2, 1)$ e $R = 2$.

As retas paralelas à reta t têm o mesmo coeficiente angular que t; então, podem ser representadas pela equação:

$$(s)\ 4x + 3y + k = 0, \text{ com } k \in \mathbb{R}$$

A reta s é tangente a λ se, e somente se, $d_{Cs} = 2$:

$$\frac{|4 \cdot (-2) + 3 \cdot 1 + k|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = 2 \Rightarrow \frac{|k - 5|}{\sqrt{25}} = 2$$

$$\therefore |k - 5| = 10 \Rightarrow k - 5 = 10 \text{ ou } k - 5 = -10$$

$$\therefore k = 15 \text{ ou } k = -5$$

Assim, obtivemos duas retas, s e s', paralelas a t e tangentes a λ. São elas:

$$(s)\ 4x + 3y + 15 = 0 \text{ e } (s')\ 4x + 3y - 5 = 0$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Faça os exercícios no caderno.

24. Dê a posição da reta s em relação à circunferência λ em cada um dos casos a seguir. **24. a.** s é tangente a λ.

a. $(s)\ 3x - 4y + 15 = 0$ e $(\lambda)\ (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 4$

b. $(s)\ 2x - y + 1 = 0$ e $(\lambda)\ (x + 1)^2 + (y - 4)^2 = 9$

c. $(s)\ 4x + 3y + 8 = 0$ e $(\lambda)\ x^2 + y^2 + 2x - 4y + 4 = 0$

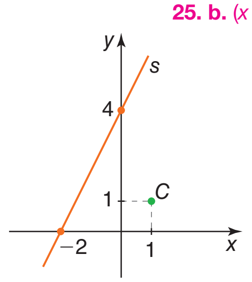
24. b. s é secante a λ. **24. c.** s é exterior a λ.

25. Considere a reta s e o ponto C representados a seguir.

a. Determine uma equação geral da reta s.

b. Determine a equação reduzida da circunferência de centro C e tangente a s.

25. a. $2x - y + 4 = 0$
25. b. $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 5$



FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

26. Considerando a circunferência λ de equação $x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0$ e o ponto $B(4, 2)$, façam o que se pede: **26. a.** $4^2 + 2^2 - 4 \cdot 4 - 2 \cdot 2 = 0 \Rightarrow 0 = 0$ é verdadeiro. Logo, o ponto B pertence a λ.

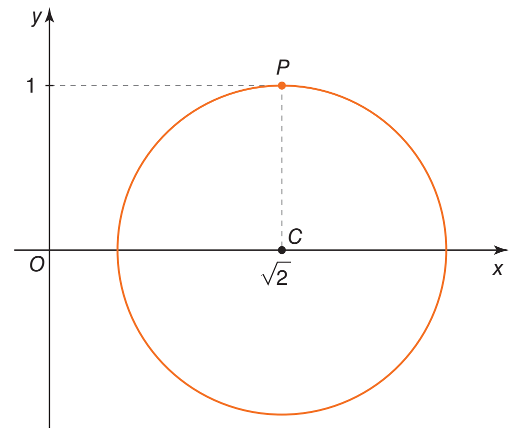
a. Mostrem que B pertence a λ. **26. b.** $C(2, 1)$ e $R = \sqrt{5}$

b. Determinem o centro C e o raio R de λ.

c. Obtenham uma equação da reta t tangente a λ no ponto B. **26. c.** $2x + y - 10 = 0$

d. Sendo A o ponto onde a reta t intercepta o eixo Ox, obtenham a área S do triângulo ABC. (Calculem essa área de dois modos diferentes.) **26. d.** $S = 2{,}5$

27. No plano cartesiano xOy, a seguir, estão representados o ponto $O(0, 0)$ e a circunferência λ que passa por $P(\sqrt{2}, 1)$ e tem centro $C(\sqrt{2}, 0)$. Observando que todas as retas não verticais que passam pela origem O têm equação da forma $y = mx$, com $m \in \mathbb{R}$, façam o que se pede.



ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

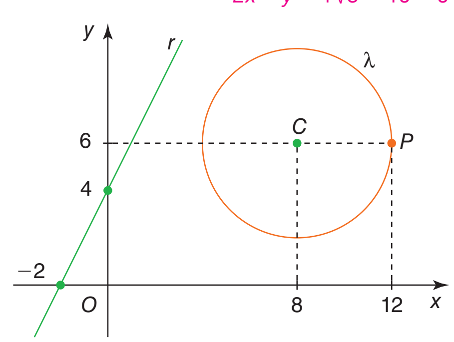
a. Obtenham a equação da reta s que passa por O e tangencia λ no primeiro quadrante. **27. a.** $y = x$

b. Obtenham a equação da reta t que passa por O e tangencia λ no quarto quadrante. **27. b.** $y = -x$

c. Quais os possíveis valores do coeficiente angular das retas u que passam pela origem O e são secantes à circunferência λ? **27. c.** $-1 < m_u < 1$

d. Quais os possíveis valores do coeficiente angular das retas v que passam pela origem O e são exteriores à circunferência λ? **27. d.** $m_v < -1$ ou $m_v > 1$

28. Obtenham as equações das retas paralelas à reta r e tangentes à circunferência λ de centro C, representadas no plano cartesiano. **28.** $2x - y + 4\sqrt{5} - 10 = 0$ e $2x - y - 4\sqrt{5} - 10 = 0$



FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

Para retomar os conteúdos estudados, resolva o exercício complementar 5.

Reflexão

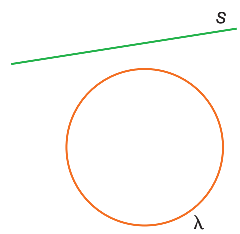
No plano cartesiano, como é possível determinar a posição relativa de duas circunferências a partir de suas equações?

Reflexão: Resposta nas **Orientações Específicas** deste capítulo.

Intersecção de uma reta com uma circunferência

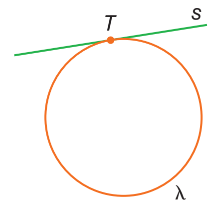
O conjunto intersecção de uma reta s com uma circunferência λ, contidas em um mesmo plano, pode ser vazio, unitário ou binário, conforme a reta seja exterior, tangente ou secante à circunferência, respectivamente.

- s exterior a λ



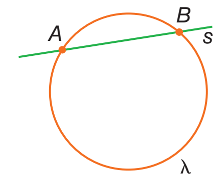
$s \cap \lambda = \varnothing$

- s tangente a λ



$s \cap \lambda = \{T\}$

- s secante a λ



$s \cap \lambda = \{A, B\}$

Em qualquer um dos três casos, sendo conhecidas as equações de (s) $ax + by + c = 0$ e de (λ) $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$, temos que $s \cap \lambda$ é o conjunto solução do sistema:

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2 \end{cases}$$

Esse sistema:

- é **impossível** se, e somente se, s é **exterior** a λ;
- tem **uma única solução** se, e somente se, s é **tangente** a λ;
- tem **exatamente duas soluções** se, e somente se, s é **secante** a λ.

A partir desse sistema, podemos reconhecer a posição relativa entre a reta s e a circunferência λ. Para isso, isolamos uma das variáveis na equação de s e substituímos o valor obtido na equação de λ, gerando, assim, uma equação polinomial do 2º grau com uma variável. Se essa equação tem discriminante:

- negativo ($\Delta < 0$), então a reta s é exterior a λ;
- nulo ($\Delta = 0$), então a reta s é tangente a λ;
- positivo ($\Delta > 0$), então a reta s é secante a λ.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

13. Obtenha a intersecção da reta s de equação $x + y - 3 = 0$ com a circunferência λ de equação $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 4$.

Resolução

O conjunto $s \cap \lambda$ é o conjunto solução do sistema:

$$\begin{cases} x + y - 3 = 0 \\ (x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 4 \end{cases}, \text{ que é equivalente a } \begin{cases} y = 3 - x & (1) \\ (x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 4 & (2) \end{cases}$$

Substituindo (1) em (2), obtemos:

$(x - 3)^2 + (3 - x - 2)^2 = 4 \Rightarrow (x - 3)^2 + (1 - x)^2 = 4$

$\therefore x^2 - 6x + 9 + 1 - 2x + x^2 = 4 \Rightarrow 2x^2 - 8x + 6 = 0$

$\therefore x^2 - 4x + 3 = 0$

$\therefore x = 3$ ou $x = 1$

- Para $x = 3$, temos, da equação (1):

$$y = 3 - 3 = 0$$

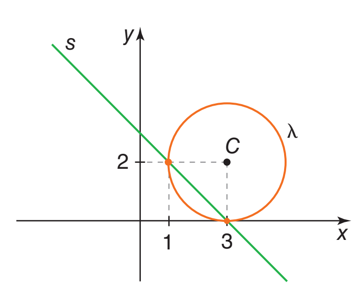
- Para $x = 1$, temos, da equação (1):

$$y = 3 - 1 = 2$$

Concluímos, então, que:

$$s \cap \lambda = \{(3, 0), (1, 2)\}$$

Representando graficamente, observamos a reta secante à circunferência.



Reflexão: Para determinar a intersecção, basta resolver o sistema formado por essas equações. O conjunto solução desse sistema é a intersecção das circunferências.

Reflexão

No plano cartesiano, como posso determinar a intersecção de duas circunferências a partir de suas equações?

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Faça os exercícios no caderno.

29. Considerando a reta $(s)\ x + y - 6 = 0$ e a circunferência $(\lambda)\ (x + 1)^2 + y^2 = 25$: **29. a.** $s \cap \lambda = \{(2, 4), (3, 3)\}$

a. determine as coordenadas dos pontos de intersecção da reta *s* com a circunferência λ;

b. calcule o comprimento da corda que a circunferência λ determina na reta *s*. **29. b.** $\sqrt{2}$

30. Determine a intersecção da reta *s* com a circunferência λ em cada um dos casos.

a. $(s)\ x + y - 1 = 0$ **30. a.** $s \cap \lambda = \{(0, 1)\}$

$(\lambda)\ x^2 + y^2 - 2x - 4y + 3 = 0$

b. $(s)\ x + 3y - 4 = 0$ **30. b.** $s \cap \lambda = \varnothing$

$(\lambda)\ x^2 + y^2 - 8x - 6y + 22 = 0$

31. Obtenha os pontos de intersecção da circunferência λ de equação $x^2 - 8x + y^2 - 9 = 0$ com:

a. o eixo das abscissas; **31. a.** $(-1, 0)$ e $(9, 0)$

b. o eixo das ordenadas; **31. b.** $(0, 3)$ e $(0, -3)$

c. a reta vertical que passa pelo centro de λ.
31. c. $(4, 5)$ e $(4, -5)$

32. Considerando a circunferência $(\lambda)\ x^2 + y^2 = 4$ e a reta horizontal $(r)\ y = k$ determine os valores reais de *k* de modo que:

a. *r* seja exterior a λ; **32. a.** $k < -2$ ou $k > 2$

b. *r* seja tangente a λ; **32. b.** $k = -2$ ou $k = 2$

c. *r* seja secante a λ. **32. c.** $-2 < k < 2$

33. Usando um *software* para construção de gráficos, faça o que se pede. **33.** Resposta nas **Orientações Específicas** deste capítulo.

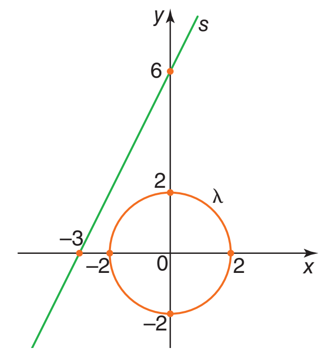
a. Represente a reta *s* que passa pelo ponto $P(1, 0)$ e tem 45° de inclinação.

b. No mesmo plano cartesiano (mesma tela) do item **a**, represente a circunferência λ que tangencia o eixo *Oy* no ponto $(0, 3)$ e tem como centro *C* um ponto da reta *s*.

c. Represente os pontos comuns à circunferência λ e ao eixo *Ox*.

d. Represente os pontos comuns à circunferência λ e à reta *s*.

34. No plano cartesiano estão representadas uma reta *s* e uma circunferência λ. Em relação a esse plano, responda aos itens seguintes.



a. Obtenha a equação de todas as retas paralelas à reta *s*. **34. a.** $y = 2x + q$, com $q \in \mathbb{R}$

b. Quais são os possíveis valores do coeficiente linear das retas paralelas a *s* para que elas sejam tangentes a λ? **34. b.** $2\sqrt{5}$ ou $-2\sqrt{5}$

c. Quais são os possíveis valores do coeficiente linear das retas paralelas a *s* para que elas sejam secantes a λ? **34. c.** $-2\sqrt{5} < q < 2\sqrt{5}$

d. Quais são os possíveis valores do coeficiente linear das retas paralelas a *s* para que elas sejam exteriores a λ? **34. d.** $q < -2\sqrt{5}$ ou $q > 2\sqrt{5}$

Para retomar os conteúdos estudados, resolva os exercícios complementares 6 e 7.

ANÁLISE DA RESOLUÇÃO

Um estudante resolveu o exercício conforme a reprodução a seguir. Um erro foi cometido. Identifique o erro e refaça a resolução no caderno, corrigindo-a.

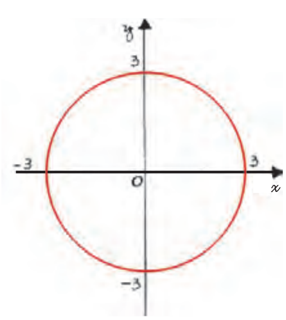
Exercício

No plano cartesiano, construa o gráfico formado pelos pontos (x, y) tais que: $y = \sqrt{9 - x^2}$.

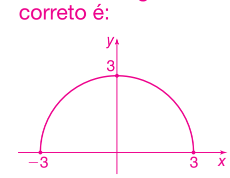
Resolução

$$y = \sqrt{9 - x^2} \Rightarrow y^2 = (\cancel{\sqrt{9 - x^2}})^{\cancel{2}}$$

$$\therefore y^2 = 9 - x^2 \quad \therefore \quad \underbrace{x^2 + y^2 = 9}_{\text{equação da circunferência de centro } (0,\,0) \text{ e raio } 3}$$



Análise da resolução: O estudante esqueceu que, por definição, a raiz quadrada de um número real, quando existe, é um número positivo ou nulo. Assim, a variável *y* na equação $y = \sqrt{9 - x^2}$ não pode assumir valores negativos. Logo, o gráfico apresentado pelo estudante está incorreto. O gráfico correto é:



TRABALHO E JUVENTUDES

Artista plástico

OBJETO DIGITAL **Carrossel de imagens: Arte geométrica dos povos originários e dos quilombolas**

Com o boxe **Trabalho e juventudes**, incentive os estudantes a comentarem sobre a profissão e verifique se algum deles faz trabalhos de arte ou se conhecem alguém que seja artista plástico. Caso haja, possibilite que compartilhem algumas produções desses profissionais a fim de valorizar a cultura local e os conhecimentos e saberes dos estudantes. Para direcionar a conversa, pode-se utilizar o **Carrossel de imagens: Arte geométrica dos povos originários e dos quilombolas** a fim de possibilitar aos estudantes fruir essas manifestações artísticas.

O profissional de artes plásticas ou artista visual é aquele que cria obras de arte nas mais diversas modalidades, seja ela desenho, pintura, escultura, gravura, arte digital, entre outras. Para esse profissional é fundamental ter conhecimento das técnicas e do manuseio dos materiais que cada área de conhecimento exige. A Matemática se cruza com a Arte de maneiras surpreendentes, um exemplo é o estudo da circunferência, estudado neste capítulo, pode se tornar uma importante ferramenta para os artistas planejarem suas composições visuais, criarem padrões e texturas, desenvolverem esculturas com formatos circulares e explorarem a tridimensionalidade em suas obras. Outro exemplo é o uso de padrões geométricos nas expressões artísticas dos povos originários, seja na produção de cestarias, pinturas corporais ou utensílios.

Embora existam artistas plásticos de grande talento que são autodidatas, ou seja, aprenderam sozinhos seus ofícios, há cursos superiores, técnicos e de especialização para quem deseja trabalhar nessa área. Além disso, ter conhecimento sobre história da arte, estética, semiótica e filosofia, por exemplo, auxiliam o profissional a desenvolver melhor suas aptidões.

O mercado de arte no Brasil é bastante aquecido, com eventos como a SP-Arte, a Bienal de Arte em São Paulo e a Art Rio, que beneficiam artistas e outros profissionais, como curadores e galeristas. Além de trabalhar como artistas plásticos em ateliês, eles podem se envolver em áreas como curadoria, restauração e história da arte em museus, galerias e ONGs. Há também oportunidades na direção de arte e cenografia para teatro, cinema e TV assim como na indústria, onde podem coordenar a confecção de objetos e criar estampas. Profissionais de multimídia encontram emprego em agências de propaganda e emissoras de TV; o ensino de linguagens artísticas no ensino básico amplia as oportunidades para licenciados, incluindo a coordenação de cursos e projetos educativos em instituições artísticas e culturais.

Assim, a atuação do artista plástico é rica em possibilidades, e a integração de conhecimentos matemáticos enriquece a criação artística, resultando em obras que encantam visualmente e provocam reflexões sobre a relação entre forma e espaço.

Elaborado com base em: Mundo do Trabalho: Artes Visuais. **Guia do estudante**, 25 jun. 2024. Disponível em: https://guiadoestudante.abril.com.br/profissoes/artes-visuais. Acesso em: 13 set. 2024.

Quer saber mais sobre a profissão de artista plástico? Faça uma pesquisa na internet e compartilhe com os colegas um resumo das informações que você obteve.

RUBENS CHAVES/PULSAR IMAGENS

Xilogravurista Nivaldo Oliveira Barbosa em seu ateliê. São Cristóvão (SE). Foto de 2024.

Trabalho e juventudes: Pesquisa pessoal.

1. Há duas circunferências possíveis: $(x - 2)^2 - (y - 2)^2 = 25$ e $(x - 3)^2 - (y - 3)^2 = 25$.

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

Faça os exercícios no caderno.

1. Uma circunferência de raio 5 passa pelo ponto $A(6, -1)$ e tem o centro C na bissetriz dos quadrantes ímpares. Obtenha a equação reduzida dessa circunferência.

2. Um acelerador de partículas impulsiona um elétron que descreve, em sua trajetória, uma circunferência de centro *O*. Ao plano dessa trajetória é associado um sistema cartesiano de origem *O* cuja unidade adotada nos eixos coordenados é o hectômetro, e considera-se uma unidade *u* de tempo, adequada a altas velocidades. Em relação a esse sistema e a essa unidade *u* de tempo, a abscissa *x* e a ordenada *y* de cada ponto em que se localiza o elétron em cada instante *t* são dadas por:

$$\begin{cases} x = 3 \cos t \\ y = 3 \text{ sen } t \end{cases}$$

em que $t = 0$ indica o instante inicial de marcação do tempo.

a. Obtenha a equação, nas variáveis *x* e *y*, da trajetória do elétron. **2. a.** $x^2 + y^2 = 9$

b. Após o início da marcação de tempo, qual foi o primeiro instante em que o elétron cruzou a bissetriz dos quadrantes ímpares? **2. b.** $\frac{\pi}{4}\ u$

3. Na construção de uma estrada, a detonação de uma carga de dinamite ocorreu em um ponto *O* de uma região plana onde a velocidade do som é 1.200 km/h. Considerando no plano dessa região um sistema cartesiano de origem *O*, em que a unidade adotada nos eixos *Ox* e *Oy* é o quilômetro, calcule o tempo, em segundo, a partir do instante da detonação para que o som da explosão atinja os pontos (x, y), com $x^2 + y^2 - 100 = 0$. **3.** 30 segundos

4. Em um banco, um sensor magnético detecta a presença de metal em qualquer ponto do espaço até uma distância de 10 m. Esse sensor está localizado em um ponto *P*, cuja projeção ortogonal sobre o plano α do piso horizontal é um ponto *O* tal que $OP = 6$ m. Associando ao plano α um sistema cartesiano *xOy*, dê uma relação entre *x* e *y* que represente a região do plano cartesiano contida no campo magnético do sensor.

4. $x^2 + y^2 \leqslant 64$

5. Atribuindo todos os valores reais ao parâmetro *k* da equação $3x + 2y + k = 0$, obtêm-se as equações de todas as retas do plano cartesiano paralelas entre si com coeficiente angular $-\frac{3}{2}$. Por isso, essa equação é chamada equação do feixe de retas paralelas com esse coeficiente angular. Obtenha as equações das retas desse feixe tangentes à circunferência λ de equação $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 13$.

5. $3x + 2y + 16 = 0$; $3x + 2y - 10 = 0$

6. Considerando a reta *s* e a circunferência λ de equações $y = x - 2$ e $x^2 + (y - 3)^2 = 17$, respectivamente:

a. Determine $s \cap \lambda$ **6. a.** $s \cap \lambda = \{(1, -1), (4, 2)\}$

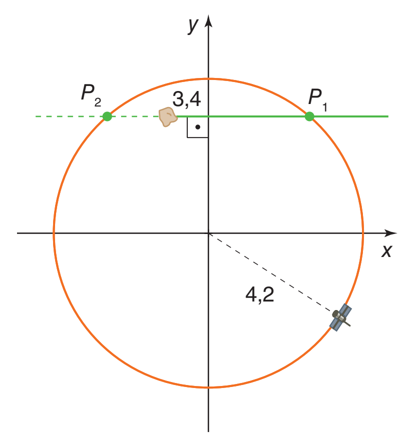
b. Represente no plano cartesiano os pontos (x, y) que são soluções do sistema:

$$\begin{cases} y > x - 2 \\ x^2 + (y - 3)^2 \leqslant 17 \end{cases}$$

6. b. Resposta no final do livro.

7. Na noite de 15 de fevereiro de 2013, o asteroide 2012 DA 14, com 130.000 toneladas, passou a 34.000 km do centro da Terra, cruzando em linha reta a órbita de um satélite *S* de comunicação.

Se o satélite *S* tinha órbita circular com 42.000 km de raio, concêntrica com a Terra, e a trajetória do asteroide foi secante a essa órbita, é possível conhecer as posições desses objetos, em cada instante, associando ao plano de suas trajetórias um sistema cartesiano. Por exemplo, consideremos um sistema cartesiano cuja origem *O* seja o centro da Terra, a unidade *u* adotada nos eixos seja tal que $1\ u = 10.000$ km, o eixo das ordenadas seja perpendicular à trajetória do asteroide e o primeiro ponto P_1 de intersecção da trajetória do asteroide com a órbita do satélite *S* esteja no primeiro quadrante, conforme mostra a figura.



FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

Em relação ao sistema cartesiano adotado:

a. obtenha uma equação da trajetória do asteroide; **7. a.** $y = 3{,}4$

b. obtenha uma equação da trajetória do satélite; **7. b.** $x^2 + y^2 = 17{,}64$

c. determine os pontos P_1 e P_2; **7. c.** $P_1(2{,}5; 3{,}4)$ e $P_2(-2{,}5; 3{,}4)$

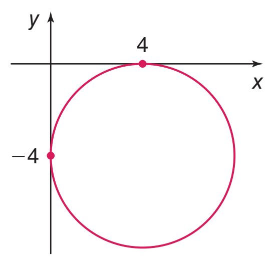
d. calcule em quanto tempo o asteroide percorreu a distância P_1P_2, se sua velocidade era de 7,8 km/s.

7. d. 6.410 segundos = 1 hora e 47 minutos

VERIFIQUE O QUE APRENDEU NO CAPÍTULO 7

Além do processo de avaliação promovido pelo professor, é importante que você, estudante, faça uma autoavaliação. O objetivo desse instrumento é mensurar seu nível de aprendizagem em relação ao assunto desenvolvido no capítulo. Para ajudá-lo nessa tarefa, apresentamos as seguintes questões.

1. A circunferência representada a seguir tangencia os eixos coordenados. Determine a equação reduzida dessa circunferência. **1.** $(x - 4)^2 + (y + 4)^2 = 16$



ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

2. Escreva a equação normal da circunferência λ que passa pelos pontos $A(4, 2)$ e $B(2, 6)$, cujo centro C pertence à reta r de equação $y = x + 2$. **2.** $x^2 + y^2 - 2x - 6y = 0$

3. (**Uel-PR**) Sejam os pontos A e B as intersecções da reta r, de equação $x + y = 0$, com a circunferência λ de equação $x^2 + y^2 - 4x = 0$. Se A e B são tais que a abscissa de A é menor que a de B, a equação da reta t, tangente a λ, traçada pelo ponto B, é:

3. alternativa **a**

a. $y = -2$.

b. $x = -2$.

c. $y = 2x$.

d. $x = 2$.

e. $y = 2$.

Ferramenta de estudo

Elaborar um resumo dos tópicos estudados é uma ferramenta de estudo que retoma o que foi estudado, em que você pode destacar conteúdos nos quais ainda apresenta dificuldades ou que ainda não foram compreendidos.

Para elaborar um resumo, você pode seguir algumas dicas, como as sugeridas a seguir.

1. A cada conteúdo estudado, faça anotações detalhadas com tudo o que você aprendeu.

2. Ao finalizar o estudo dos tópicos do capítulo, retome suas anotações e elabore um texto resumindo-as.

3. Para fazer o resumo, você também pode retomar os tópicos deste capítulo a fim de verificar ou relembrar conceitos, palavras-chave, situações-problema etc.

4. Organize em tópicos a sequência das informações que você pretende apresentar no resumo antes de escrevê-lo.

Agora, elabore um resumo utilizando o que você aprendeu neste capítulo. Compartilhe seu resumo com outros colegas e leia o resumo deles também, a fim de aprimorar seu registro.

Se teve dificuldades em elaborar o resumo ou não resolveu algum exercício, retome os conteúdos abordados no capítulo. Após algumas tentativas, anote as dúvidas e converse com um colega que possa ajudá-lo. Se mesmo assim a dúvida persistir, pergunte ao professor na aula seguinte. Gerencie bem seu tempo de estudo em casa e estabeleça metas diárias alcançáveis, planejando seus estudos, passo a passo.

CAPÍTULO 8

As cônicas: elipse, hipérbole e parábola

Forno solar é um equipamento que transforma a luz do Sol em calor e pode ser usado para cozinhar alimentos ou derreter ligas metálicas, por exemplo. O maior forno solar conhecido atualmente está localizado na França, em Odeillo.

É composto de espelhos planos, um grande refletor parabólico e uma torre que abriga o foco. É esse formato parabólico que permite a concentração de energia no foco. Assim, os raios solares que atingem os espelhos planos são refletidos em direção ao refletor parabólico, que, por sua vez, centralizam os raios no foco. A energia concentrada neste ponto pode atingir uma temperatura de 3.800 °C, permitindo o derretimento de ligas metálicas em escala industrial.

SEPPFRIEDHUBER/ISTOCK/GETTY IMAGES

O grande forno solar de Odeillo é mundialmente conhecido por cientistas e é um dos lugares que recebe mais visitantes por ano nesta área de França. Foto de 2024.

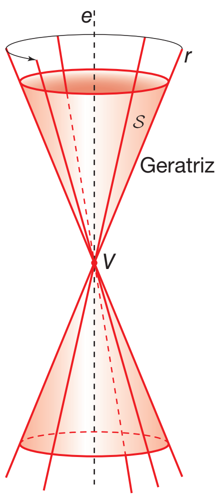
Além da teoria

Além da teoria: Respostas pessoais.

1. Você conhece outros equipamentos com formatos parabólicos?
2. Fogões solares em escalas menores podem ser usados para preparar alimentos, purificar água ou esterilizar equipamentos. Quais são as vantagens desse tipo de equipamento?
3. Pesquise outros equipamentos com formato parabólico e suas funções. Compartilhe as informações obtidas com o professor e os colegas.

1. Figura cônica

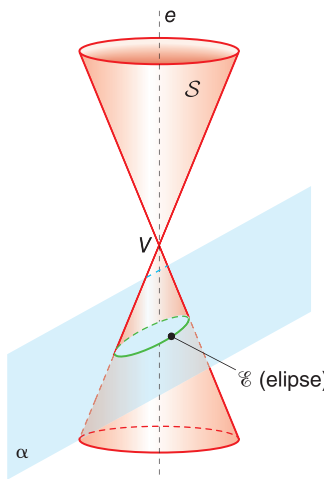
Figura 1



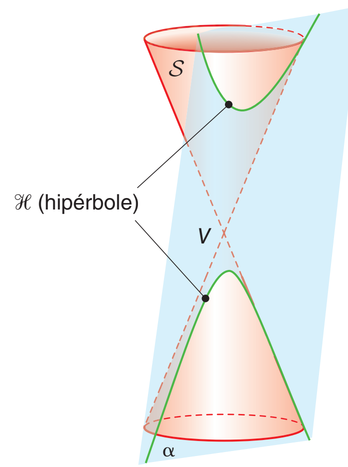
ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

Como o nome sugere, uma figura cônica é obtida a partir de um cone. Para definir figura cônica, vamos considerar duas retas r e e concorrentes no ponto V. A superfície $\mathcal{S}$ obtida pela rotação de 360° de r em torno de e é chamada de **superfície cônica circular reta de duas folhas**, com vértice V, eixo de rotação e e geratrizes ilimitadas, conforme a figura 1.

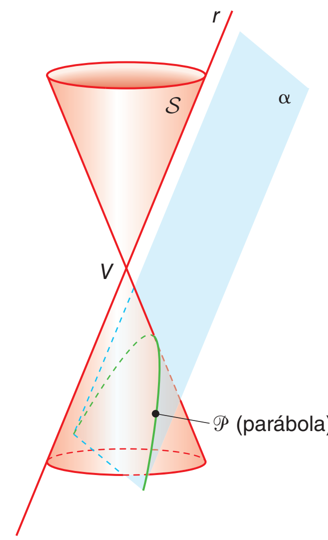
A intersecção de um plano α qualquer com a superfície $\mathcal{S}$ é chamada de **figura cônica**. Essa figura pode ser um ponto, uma reta, um par de retas, uma circunferência, uma elipse, uma hipérbole ou uma parábola. Neste capítulo, estudaremos as três últimas figuras, definidas a seguir.



Elipse: o plano α não passa pelo vértice V e intercepta todas as geratrizes de $\mathcal{S}$ obliquamente ao eixo de rotação e.

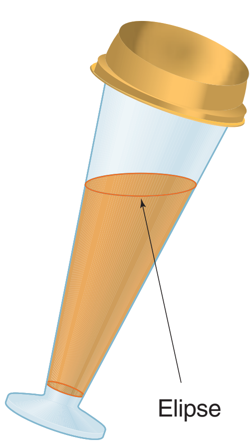


Hipérbole: o plano α não passa pelo vértice V e intercepta as duas folhas de $\mathcal{S}$.

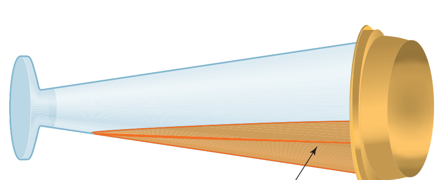


Parábola: o plano α é paralelo a uma geratriz de $\mathcal{S}$.

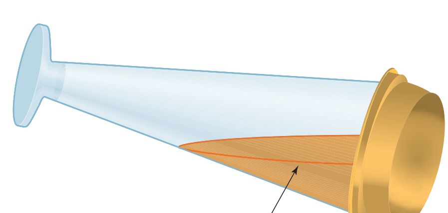
Essas figuras podem ser associadas à seguinte experimentação: coloque um pouco de água com corante em um copo cônico transparente e tampe-o com uma fita adesiva (o corante facilita a visualização das formas). Em seguida, varie a inclinação do eixo do cone em relação ao plano horizontal e, nas intersecções da superfície interna do copo com o plano da superfície da água, poderão ser observadas algumas figuras cônicas, conforme mostram as figuras a seguir.



Elipse



Ramo de hipérbole



Parábola

ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

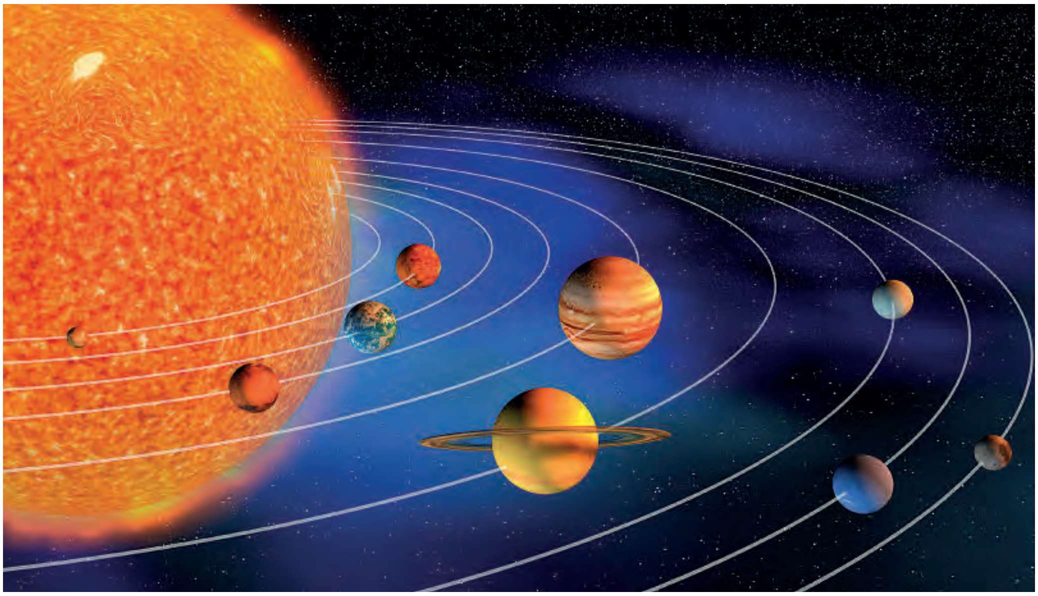
Reflexão **Reflexão:** Resposta nas **Orientações Específicas** deste capítulo.

Como é possível a intersecção de um plano com uma superfície cônica de duas folhas ser um ponto ou uma reta ou um par de retas?

2. Elipse

Durante muitos séculos, acreditou-se que as órbitas dos planetas do Sistema Solar fossem circulares, até que o astrônomo alemão Johannes Kepler (1571-1630) demonstrou que elas têm forma elíptica. Essa forma, presente em diversas áreas do conhecimento, além da Astronomia, é o objeto de estudo deste item.

ORLA/SHUTTERSTOCK

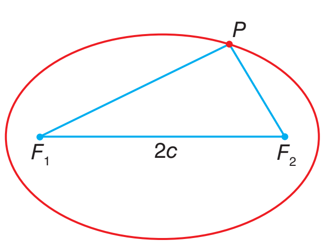


Representação das órbitas dos planetas do Sistema Solar. Modelo didático sem escala e com cores fantasia.

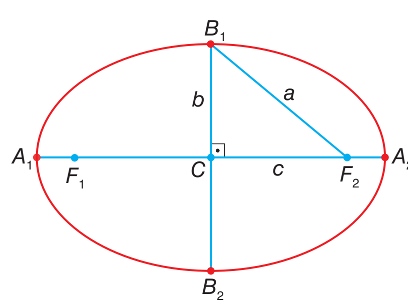
Definimos elipse como a intersecção de um plano com a superfície de um cone; porém, para um estudo analítico dessa cônica, convém defini-la a partir da propriedade comum a todos os seus pontos, enunciada a seguir.

Fixados dois pontos, F_1 e F_2, de um plano α, tais que $F_1F_2 = 2c$, com $c > 0$, chama-se **elipse** o conjunto dos pontos P do plano α cuja soma das distâncias PF_1 e PF_2 é uma constante $2a$, com $2a > 2c$.

$$PF_1 + PF_2 = 2a$$



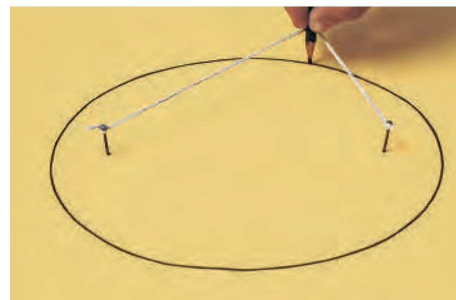
$PF_1 + PF_2 = 2a$
$(2a > 2c > 0)$



$A_1A_2 = 2a$
$B_1B_2 = 2b$
$F_1F_2 = 2c$
$B_1F_1 = B_1F_2 = a$
$B_2F_1 = B_2F_2 = a$

- Os pontos F_1 e F_2 são os **focos** da elipse.
- A medida $2c$ é a **distância focal** (distância entre os focos); c é a **semidistância focal**.
- Qualquer segmento de reta cujos extremos são pontos da elipse é chamado de **corda** da elipse.
- A corda $\overline{A_1A_2}$, que passa pelos focos F_1 e F_2, é chamada de **eixo maior** da elipse, e sua medida é $2a$.
- O ponto médio C do eixo maior $\overline{A_1A_2}$, que também é ponto médio do segmento $\overline{F_1F_2}$, é chamado de **centro** da elipse; $\overline{A_1C}$ e $\overline{A_2C}$ são os **semieixos maiores, de medida *a***.

- A corda $\overline{B_1B_2}$, que passa por C e é perpendicular ao eixo maior, é o **eixo menor** da elipse; os segmentos $\overline{B_1C}$ e $\overline{B_2C}$ são os **semieixos menores**. Esses semieixos têm medidas iguais, que serão indicadas por b, isto é, $B_1C = B_2C = b$.
- Pelo teorema de Pitágoras, temos do triângulo B_1CF_2: $a^2 = b^2 + c^2$
- O número $e = \frac{c}{a}$ é chamado de **excentricidade** da elipse. Observando que esse número é o cosseno do ângulo agudo $B_1\widehat{F_2}C$, temos $0 < e < 1$.

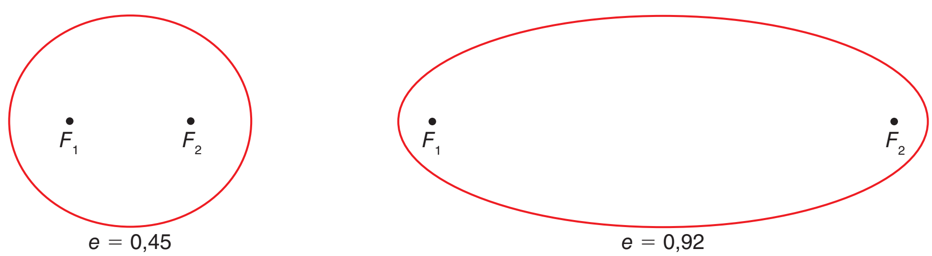


LUIZ ANTÔNIO DA SILVA/ARQUIVO DA EDITORA

Na foto, dois pontos focais de uma elipse podem ser associados à posição dos pregos, e o comprimento do barbante pode ser associado à medida do eixo maior dessa elipse.

Observação

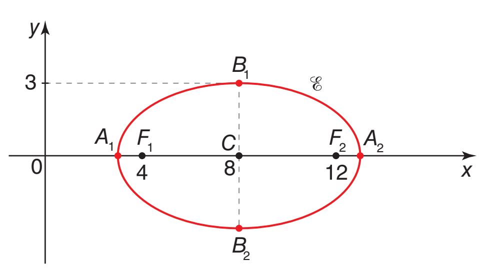
A excentricidade, $e = \frac{c}{a}$, indica o quanto a elipse é "achatada". Quanto mais próximo de zero estiver o número e, mais próxima de uma circunferência estará a elipse; e quanto mais próximo de 1, mais "achatada" será.



EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Faça os exercícios no caderno.

1. Em relação à elipse $\mathscr{E}$ de centro C, focos F_1 e F_2 e eixos $\overline{A_1A_2}$ e $\overline{B_1B_2}$, representada a seguir, faça o que se pede.



ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

a. Calcule a medida do eixo maior de $\mathscr{E}$. **1. a.** $2a = 10$

b. Determine os pontos A_1 e A_2. **1. b.** $A_1(3, 0)$ e $A_2(13, 0)$

c. Obtenha a medida do eixo menor de $\mathscr{E}$. **1. c.** $B_1B_2 = 6$

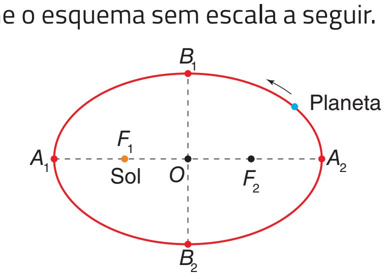
d. Determine o ponto B_2. **1. d.** $B_2(8, -3)$

e. Calcule a excentricidade de $\mathscr{E}$. **1. e.** $\mathscr{E} = 0{,}8$

f. Mostre que o ponto $P\left(4, \frac{9}{5}\right)$ pertence a $\mathscr{E}$.

1. f. Resposta nas **Orientações Específicas** deste capítulo.

2. A primeira lei de Kepler estabelece que qualquer planeta do Sistema Solar descreve uma órbita elíptica em torno do Sol, estando este em um dos focos da elipse, conforme o esquema sem escala a seguir.



Sabendo que a maior e a menor distância da Terra ao Sol são, aproximadamente, $1{,}53 \cdot 10^8$ km e $1{,}47 \cdot 10^8$ km, calcule a medida do eixo maior e a distância focal da órbita elíptica da Terra em torno do Sol.

2. $A_1A_2 = 3 \cdot 10^8$ km; $F_1F_2 = 6 \cdot 10^6$ km

3. Elaborem e resolvam um problema sobre a elipse, envolvendo uma situação do cotidiano.

3. Resposta pessoal.

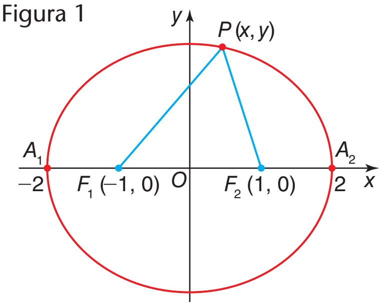
ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

Para retomar os conteúdos estudados, resolva o exercício complementar 1.

Equação reduzida da elipse

Associando um sistema de eixos cartesianos ao plano de uma elipse, podemos representá-la por uma equação. Como introdução, estudaremos apenas o caso em que os eixos da elipse são, respectivamente, paralelos aos eixos coordenados do sistema cartesiano. Por exemplo, consideremos a elipse da figura 1, de focos $F_1(-1, 0)$ e $F_2(1, 0)$, cujo eixo maior mede 4 unidades.

Figura 1



Obtemos uma equação dessa elipse considerando um ponto genérico $P(x, y)$ e impondo que $PF_1 + PF_2 = 4$, ou seja:

$$\sqrt{(x-(-1))^2+(y-0)^2}+\sqrt{(x-1)^2+(y-0)^2}=4 \Rightarrow \sqrt{(x+1)^2+y^2}+\sqrt{(x-1)^2+y^2}=4$$

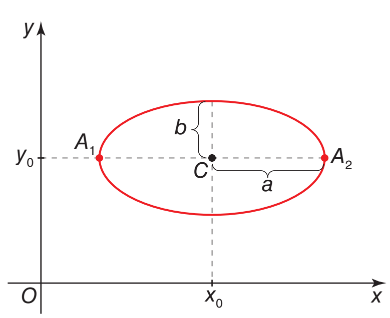
Essa já é uma equação da elipse, porém, se eliminarmos os radicais, chegaremos à forma simplificada, chamada de **equação reduzida da elipse**:

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$$

Generalizando

Reproduzindo os procedimentos apresentados no exemplo anterior para uma elipse qualquer de centro $C(x_0, y_0)$, com eixo maior de medida $2a$ e eixo menor de medida $2b$, concluímos que:

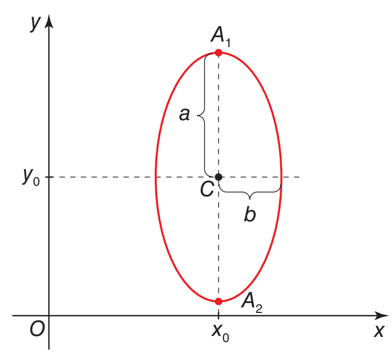
- Se a elipse tem o eixo maior paralelo ao eixo das abscissas, conforme a figura:



Sua equação pode ser apresentada sob a forma:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$$

- Se a elipse tem o eixo maior paralelo ao eixo das ordenadas, conforme a figura:



Sua equação pode ser apresentada sob a forma:

$$\frac{(x-x_0)^2}{b^2}+\frac{(y-y_0)^2}{a^2}=1$$

Observação

As figuras apresentadas são meramente ilustrativas; as elipses poderiam estar em outras posições.

Essas duas equações são denominadas **equações reduzidas da elipse**.

A equação reduzida da elipse tem várias aplicações práticas importantes. Na astronomia, ela pode descrever órbitas elípticas dos planetas ao redor do Sol. Em engenharia, pode ser usada no *design* de antenas e sistemas de comunicação para otimizar a focalização de sinais. Na óptica, pode contribuir para melhorar a qualidade das imagens em telescópios e microscópios. Essas e outras aplicações demonstram a relevância da equação reduzida da elipse em diversas áreas da ciência e tecnologia.

ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

Reflexão

Como se eliminam os radicais da equação da elipse a seguir?

$$\sqrt{(x+1)^2+y^2} + \sqrt{(x-1)^2+y^2} = 4$$

Reflexão: Para obter a equação reduzida da elipse, isolamos um dos radicais, digamos, o primeiro; depois, elevando ao quadrado ambos os membros, obtemos:

$2\sqrt{(x-1)^2+y^2} = 4 - x$

Elevando ao quadrado ambos os membros novamente, temos:

$4(x^2 - 2x + 1 + y^2) =$
$= 16 - 8x + x^2$

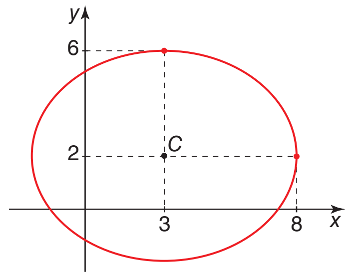
De onde obtemos:

$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$

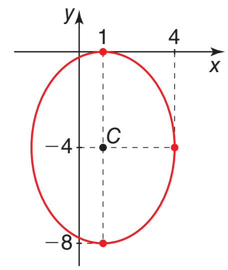
EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Obtenha a equação reduzida da elipse de centro C nos seguintes casos:

a.



b.



ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

Resolução

a. Pelo gráfico, temos:

- o centro da elipse é o ponto $C(3, 2)$;
- a medida do semieixo maior (metade do eixo maior) é $a = 8 - 3 = 5$;
- a medida do semieixo menor (metade do eixo menor) é $b = 6 - 2 = 4$;
- o eixo maior é paralelo ao eixo das abscissas.

Logo, a equação reduzida da elipse é:

$$\frac{(x-3)^2}{25} + \frac{(y-2)^2}{16} = 1$$

b. Pelo gráfico, temos:

- o centro da elipse é o ponto $C(1, -4)$;
- a medida do semieixo maior é $a = 0 - (-4) = 4$;
- a medida do semieixo menor é $b = 4 - 1 = 3$;
- o eixo maior é paralelo ao eixo das ordenadas.

Logo, a equação reduzida da elipse é:

$$\frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y+4)^2}{16} = 1$$

2. Uma elipse é representada pela equação:

$$9x^2 + 4y^2 - 18x + 16y - 11 = 0$$

Represente essa equação na forma reduzida.

Resolução

A forma reduzida pode ser obtida por meio dos seguintes procedimentos:

- Agrupamos os termos em x e os termos em y e isolamos o termo independente em um dos membros da equação:

$$(9x^2 - 18x) + (4y^2 + 16y) = 11$$

- Fatoramos cada agrupamento, pondo em evidência os coeficientes de x^2 e y^2:

$$9(x^2 - 2x) + 4(y^2 + 4y) = 11$$

- Completamos os quadrados perfeitos nas expressões entre parênteses adicionando um mesmo número a ambos os membros da igualdade:

$$9(x^2 - 2x + 1) + 4(y^2 + 4y + 4) = 11 + 9 + 16$$

Ou seja: $9(x-1)^2 + 4(y+2)^2 = 36$

- Dividimos por 36 ambos os membros dessa equação, obtendo a forma reduzida:

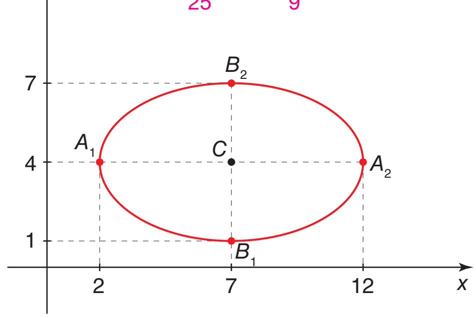
$$\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y+2)^2}{9} = 1$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

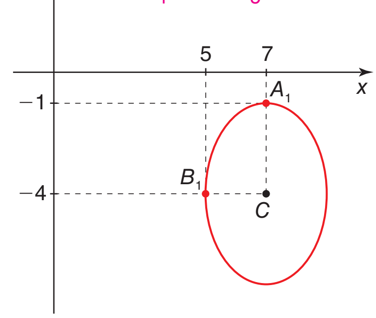
Faça os exercícios no caderno.

4. Obtenha a equação reduzida da elipse de centro C e eixos $\overline{A_1A_2}$ e $\overline{B_1B_2}$ em cada um dos casos a seguir.

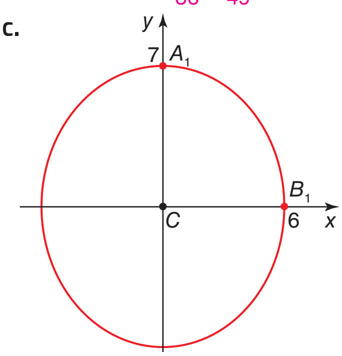
a. **4. a.** $\frac{(x-7)^2}{25} + \frac{(y-4)^2}{9} = 1$



b. **4. b.** $\frac{(x-7)^2}{4} + \frac{(y+4)^2}{9} = 1$



c. **4. c.** $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{49} = 1$



5. Determine a excentricidade e as coordenadas dos focos F_1 e F_2 da elipse do item **a** do exercício **4**. (Suponha que F_1 seja o foco entre A_1 e C.) **5.** $e = \frac{4}{5}$; $F_1(3, 4)$ e $F_2(11, 4)$

6. Em relação à elipse $\mathscr{E}$ de equação $x^2 + 9y^2 - 4x + 18y + 4 = 0$ e focos F_1 e F_2, faça o que se pede.

a. Obtenha a equação reduzida de $\mathscr{E}$. **6. a.** $\frac{(x-2)^2}{9} + \frac{(y+1)^2}{1} = 1$

b. Calcule a excentricidade de $\mathscr{E}$. **6. b.** $e = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

c. Dado que os pontos A e B pertencem a $\mathscr{E}$ e estão em semiplanos opostos em relação à reta que contém o eixo maior dessa elipse, calcule o perímetro do quadrilátero AF_1BF_2. **6. c.** 12

7. Uma indústria produz dois tipos de refrigerante, A e B. Para a produção diária de x quilolitros de A e y quilolitros de B, tem-se que o custo diário de produção por quilolitro do tipo A é $100 - x$, para $x \leqslant 60$, e do tipo B, o custo é $120 - \frac{y}{4}$, para $y \leqslant 260$. Sob essas condições, represente no plano cartesiano o gráfico formado pelos pontos (x, y) correspondentes à produção diária de x quilolitros do tipo A e y quilolitros do tipo B, de modo que o custo total da produção seja R$ 16.800,00. **7.** Resposta no final do livro.

Reflexão: É a reunião da elipse de equação $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} \leqslant 1$ com seu interior.

Reflexão

Qual é o gráfico cartesiano da inequação $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} \leqslant 1$?

Para retomar os conteúdos estudados, resolva os exercícios complementares 2 a 5.

3. Hipérbole

Por sua excepcional estabilidade, a forma do hiperboloide é usada na construção das torres de resfriamento de usinas nucleares. A superfície desse tipo de hiperboloide é obtida pela rotação de uma hipérbole em torno de seu eixo imaginário.

OLE SPATA/PICTURE ALLIANCE/GETTY IMAGES

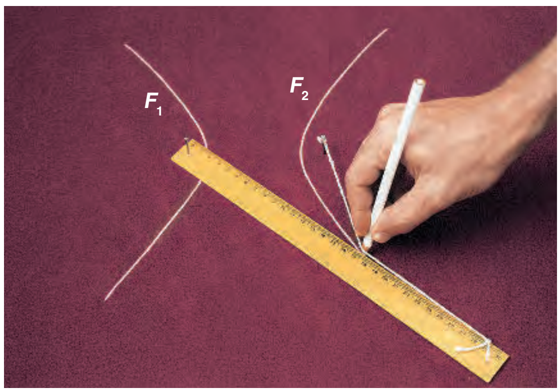
Torres de resfriamento em uma estação de energia nuclear, Grohnde, Alemanha. Foto de 2023.

Da mesma maneira que na elipse, necessitamos de uma definição de hipérbole que nos permita um estudo analítico dessa cônica. Por isso, a seguir definimos hipérbole a partir de uma propriedade comum a todos os seus pontos.

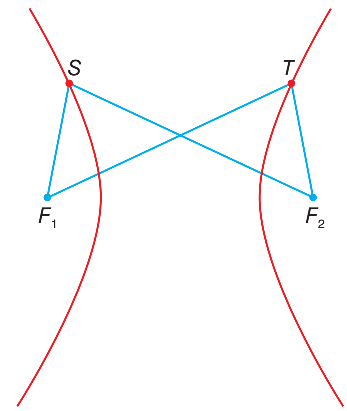
Fixados dois pontos F_1 e F_2 de um plano α, tais que $F_1F_2 = 2c$, com $c > 0$, chama-se **hipérbole** o conjunto dos pontos P do plano α cujas diferenças, em módulo, das distâncias PF_1 e PF_2 são iguais a uma constante $2a$, com $0 < 2a < 2c$.

$$|PF_1 - PF_2| = 2a$$

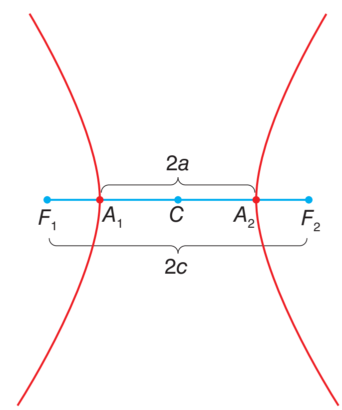
LUIZ ANTÔNIO DA SILVA/ARQUIVO DA EDITORA



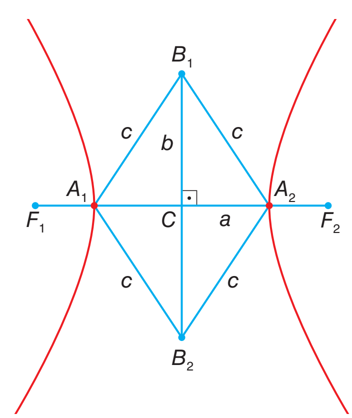
Na foto, os pontos associados aos pregos são os focos da hipérbole desenhada pelo lápis.



- Os pontos T, com $T \in \alpha$, $TF_1 > TF_2$, tais que $TF_1 - TF_2 = 2a$, determinam um **ramo** da hipérbole, e os pontos S, com $S \in \alpha$, $SF_2 > SF_1$, tais que $SF_2 - SF_1 = 2a$, determinam o outro **ramo**.
- Os pontos F_1 e F_2 são os **focos da hipérbole**.
- A medida $2c$ é a **distância focal** (distância entre os focos); c é a **semidistância focal**.



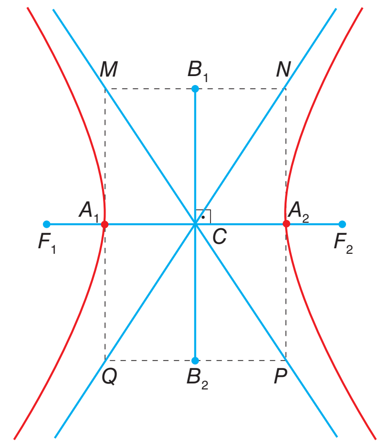
- Os pontos A_1 e A_2, intersecções da hipérbole com o segmento $\overline{F_1F_2}$, são chamados de **vértices** da hipérbole. Note que: $A_1F_1 = A_2F_2$
- O segmento $\overline{A_1A_2}$ é chamado de **eixo real** da hipérbole, e sua medida é $2a$.
- O ponto médio C do eixo real $\overline{A_1A_2}$, que também é o ponto médio do segmento $\overline{F_1F_2}$, é chamado de **centro da hipérbole**; $\overline{A_1C}$ e $\overline{A_2C}$ são os **semieixos reais** de medida a.
- O segmento $\overline{B_1B_2}$ do plano α, tal que $B_1A_1 = B_1A_2 = B_2A_1 = B_2A_2 = c$, é chamado de **eixo imaginário** da hipérbole (note que a reta $\overleftrightarrow{B_1B_2}$ é a mediatriz do eixo real). Os segmentos $\overline{B_1C}$ e $\overline{B_2C}$, que têm medidas iguais e são indicadas por b, são os **semieixos imaginários**.



Pelo teorema de Pitágoras, temos do triângulo retângulo B_1CA_2: $c^2 = a^2 + b^2$

ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

- Chama-se **retângulo referência** da hipérbole o retângulo *MNPQ* cujos pontos médios dos lados são A_1, B_1, A_2 e B_2. As retas $\overleftrightarrow{MP}$ e $\overleftrightarrow{NQ}$, que contêm as diagonais do retângulo referência, são denominadas **assíntotas** da hipérbole. A hipérbole não tem ponto em comum com nenhuma das assíntotas, e a distância entre a hipérbole e cada assíntota se aproxima indefinidamente de zero.



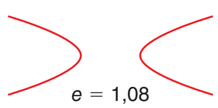
Observação

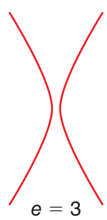
Quando o retângulo referência é um quadrado ($2a = 2b$), a hipérbole é chamada de **equilátera**.

- O número $e = \frac{c}{a}$ é chamado de **excentricidade** da hipérbole. Observando que esse número é a razão entre a hipotenusa e um cateto de um triângulo retângulo, nessa ordem, concluímos que $e > 1$.

Observação

A excentricidade, $e = \frac{c}{a}$, mostra o quanto a hipérbole é "achatada". Quanto mais próximo de 1 estiver o número *e*, mais próximos de duas semirretas opostas estarão os ramos da hipérbole.

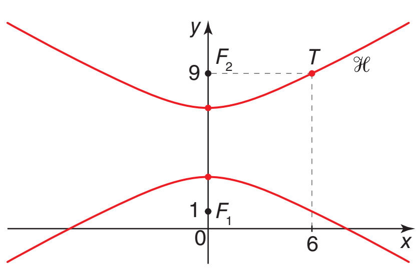

$e = 1{,}08$


$e = 3$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Faça os exercícios no caderno.

8. O gráfico a seguir representa uma hipérbole $\mathcal{H}$ de focos F_1 e F_2.



a. Determine a medida do eixo real de $\mathcal{H}$. **8. a.** $2a = 4$

b. Determine a distância focal de $\mathcal{H}$. **8. b.** $2c = 8$

c. Determine a medida do eixo imaginário de $\mathcal{H}$. **8. c.** $b = 2\sqrt{3}$

d. Determine a excentricidade de $\mathcal{H}$. **8. d.** $e = 2$

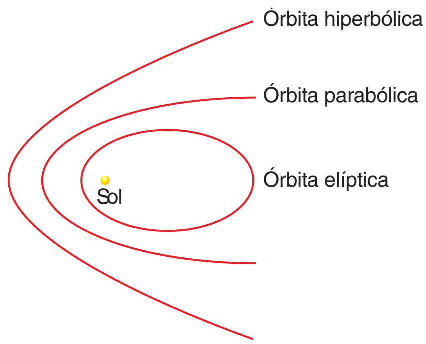
e. Determine as coordenadas do centro *C* de $\mathcal{H}$. **8. e.** $C(0, 5)$

f. Copie o gráfico em seu caderno e desenhe o retângulo referência de $\mathcal{H}$. **8. f.** Resposta no final do livro.

g. No gráfico copiado, desenhe as assíntotas de $\mathcal{H}$.

h. Obtenha as equações das assíntotas de $\mathcal{H}$.

9. Alguns cometas têm órbita elíptica, outros escapam do Sistema Solar em órbitas hiperbólicas ou parabólicas.



(Modelo didático sem escala e com cores fantasia.)

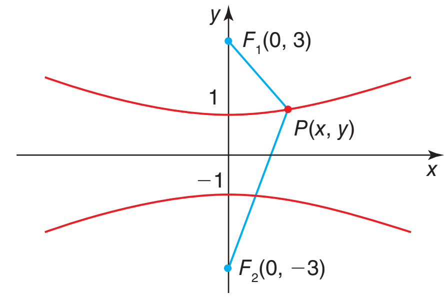
Se a órbita de um cometa é o ramo de uma hipérbole com o foco no Sol e eixos real e imaginário medindo 8 ua e 6 ua, respectivamente, qual é a menor distância possível, em ua, entre esse cometa e o Sol? **9.** 2 ua

Nota: A sigla ua indica a **unidade astronômica** e representa a distância média entre a Terra e o Sol, que vale aproximadamente 150 milhões de quilômetros.

8. g. Resposta no final do livro. **8. h.** $y = -\frac{\sqrt{3}x}{3} + 5$ e $y = \frac{\sqrt{3}x}{3} + 5$

Equação reduzida da hipérbole

Associando um sistema de eixos cartesianos ao plano de uma hipérbole, podemos representá-la por uma equação. Como introdução, estudaremos apenas o caso em que os eixos da hipérbole são, respectivamente, paralelos aos eixos coordenados do sistema cartesiano. Por exemplo, consideremos a hipérbole de focos $F_1(0, 3)$ e $F_2(0, -3)$, cujo eixo real mede 2 unidades:



Uma equação dessa hipérbole é obtida tomando-se um ponto genérico $P(x, y)$ e impondo que $|PF_1 - PF_2| = 2$, ou seja:

$$\left|\sqrt{(x-0)^2+(y-3)^2}-\sqrt{(x-0)^2+[y-(-3)]^2}\right| = 2 \Rightarrow \left|\sqrt{x^2+(y-3)^2}-\sqrt{x^2+(y+3)^2}\right| = 2$$

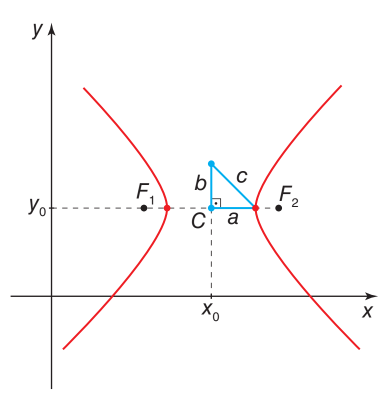
Essa já é uma equação da hipérbole, porém, se eliminarmos o módulo e os radicais, chegaremos à forma simplificada, chamada de **equação reduzida da hipérbole**:

$$\frac{y^2}{1}-\frac{x^2}{8}=1$$

Generalizando

Reproduzindo os procedimentos apresentados no exemplo anterior para uma hipérbole qualquer de centro $C(x_0, y_0)$, com eixo real de medida $2a$ e eixo imaginário de medida $2b$, concluímos que:

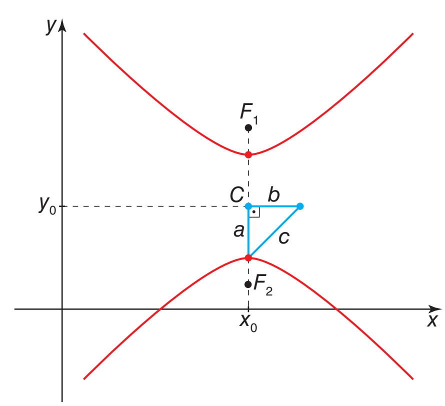
- Se essa hipérbole tem o eixo real paralelo ao eixo das abscissas, conforme a figura:



Sua equação pode ser apresentada na forma:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$$

- Se essa hipérbole tem o eixo real paralelo ao eixo das ordenadas, conforme a figura:



Sua equação pode ser apresentada na forma:

$$\frac{(y-y_0)^2}{a^2}-\frac{(x-x_0)^2}{b^2}=1$$

Essas duas equações são denominadas **equações reduzidas das hipérboles**.

Observação

As figuras apresentadas são meramente ilustrativas; as hipérboles poderiam estar em outras posições.

Reflexão:

$\left|\sqrt{(x-0)^2+(y-3)^2}\right. -$

$\left. -\sqrt{(x-0)^2+[y-(-3)]^2}\right| = 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt{x^2+(y-3)^2}-\sqrt{x^2+(y+3)^2} = \pm 2$

$\therefore \sqrt{x^2+(y-3)^2} = \pm 2 + \sqrt{x^2+(y+3)^2}$

Quadrando ambos os membros, temos:

$\left(\sqrt{x^2+(y-3)^2}\right)^2 = \left(\pm 2 + \sqrt{x^2+(y+3)^2}\right)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \therefore \pm\sqrt{x^2+(y+3)^2} = 3y+1$

Quadrando ambos os membros:

$\left(\pm\sqrt{x^2+(y+3)^2}\right)^2 = (3y+1)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2+(y+3)^2 = (3y+1)^2$

$\therefore \frac{y^2}{1}-\frac{x^2}{8}=1$

Reflexão

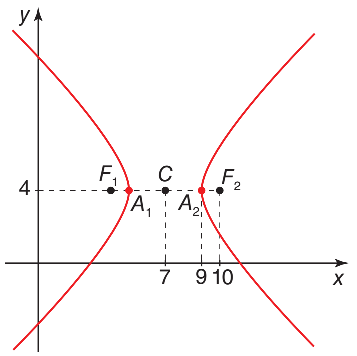
Como se eliminam o módulo e os radicais da equação da hipérbole a seguir?

$$\left|\sqrt{(x-0)^2+(y-3)^2}-\sqrt{(x-0)^2+[y-(-3)]^2}\right| = 2$$

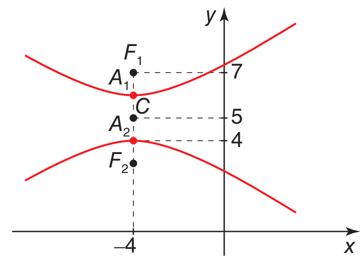
EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

3. Obtenha a equação reduzida da hipérbole de centro C, eixo real $\overline{A_1A_2}$ e focos F_1 e F_2 em cada um dos casos a seguir.

a.



b.



Resolução

a. Pelo gráfico:

- o centro da hipérbole é o ponto $C(7, 4)$;
- a medida do semieixo real é $a = 9 - 7 = 2$;
- a semidistância focal é $c = 10 - 7 = 3$;
- a medida b do semieixo imaginário é dada por:

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow 3^2 = 2^2 + b^2$$
$$\therefore b^2 = 5 \Rightarrow b = \sqrt{5}$$

- o eixo real é paralelo ao eixo das abscissas.

Logo, a equação da hipérbole é:

$$\frac{(x-7)^2}{4} - \frac{(y-4)^2}{5} = 1$$

b. Pelo gráfico:

- o centro da hipérbole é o ponto $C(-4, 5)$;
- a medida do semieixo real é $a = 5 - 4 = 1$;
- a semidistância focal é $c = 7 - 5 = 2$;
- a medida b do semieixo imaginário é dada por:

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow 2^2 = 1^2 + b^2$$
$$\therefore b^2 = 3 \Rightarrow b = \sqrt{3}$$

- o eixo real é paralelo ao eixo das ordenadas.

Logo, a equação da hipérbole é:

$$(y-5)^2 - \frac{(x+4)^2}{3} = 1$$

4. Uma hipérbole tem equação $9y^2 - 16x^2 - 36y - 96x - 252 = 0$. Obtenha a forma reduzida dessa equação.

Resolução

Para obter a equação reduzida da hipérbole, adotamos os procedimentos a seguir.

- Agrupamos os termos em y e os termos em x e isolamos o termo independente em um dos membros da igualdade:

$$(9y^2 - 36y) + (-16x^2 - 96x) = 252$$

- Fatoramos cada agrupamento, pondo em evidência os coeficientes de y^2 e de x^2:

$$9(y^2 - 4y) - 16(x^2 + 6x) = 252$$

- Completamos os quadrados perfeitos nas expressões entre parênteses adicionando um mesmo número a ambos os membros da igualdade:

$$9(y^2 - 4y + 4) - 16(x^2 + 6x + 9) = 252 + 36 - 144$$

Ou seja:

$$9(y-2)^2 - 16(x+3)^2 = 144$$

- Dividimos por 144 ambos os membros dessa equação, obtendo a forma reduzida:

$$\frac{(y-2)^2}{16} - \frac{(x+3)^2}{9} = 1$$

ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

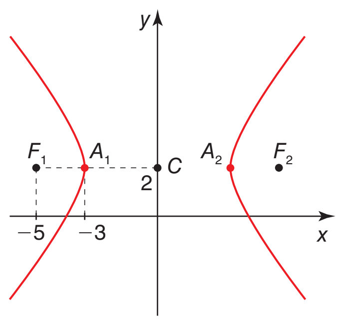
EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Faça os exercícios no caderno.

10. Obtenha a equação reduzida da hipérbole de centro C, eixo real $\overline{A_1A_2}$ e focos F_1 e F_2 em cada um dos casos a seguir, destacando as coordenadas do centro, dos vértices e dos focos.

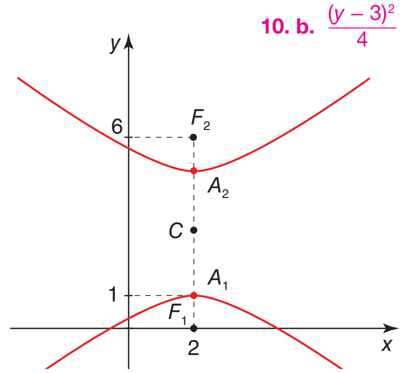
10. a. $\frac{x^2}{9} - \frac{(y-2)^2}{16} = 1$

a.



10. b. $\frac{(y-3)^2}{4} - \frac{(x-2)^2}{5} = 1$

b.



11. b. $A_1(-2, -1)$, $A_2(6, -1)$, $C(2, -1)$, $F_1(-3, -1)$ e $F_2(7, -1)$

11. No plano cartesiano xOy, uma hipérbole $\mathcal{H}$ tem o eixo real paralelo ao eixo das abscissas e seu retângulo referência tem os lados contidos, respectivamente, nas retas de equações $y = 2$, $y = -4$, $x = -2$ e $x = 6$.

a. Represente, no plano cartesiano, o retângulo referência de $\mathcal{H}$. **11. a.** Resposta no final do livro.

b. Determine os vértices A_1 e A_2, o centro C e os focos F_1 e F_2 de $\mathcal{H}$. (Indique por A_1 e F_1 o vértice e o foco de abscissas negativas.) **11. c.** $\frac{(x-2)^2}{16} - \frac{(y+1)^2}{9} = 1$

c. Escreva a equação reduzida de $\mathcal{H}$.

d. Obtenha as equações das assíntotas de $\mathcal{H}$.

11. d. $3x + 4y - 2 = 0$ e $3x - 4y - 10 = 0$

12. No plano cartesiano xOy, uma hipérbole equilátera $\mathcal{H}$ tem vértices $A_1(0, -3)$ e $A_2(0, 3)$.

a. Esboce o gráfico de $\mathcal{H}$, destacando as coordenadas do centro C, dos vértices A_1 e A_2 e dos focos F_1 e F_2. (Indique por F_1 o foco de ordenada negativa.)

b. Obtenha a equação reduzida de $\mathcal{H}$.

c. Efetuando-se uma rotação de 45° do gráfico de $\mathcal{H}$ em torno da origem $O(0, 0)$, no sentido horário, e mantendo-se a posição dos eixos Ox e Oy, quais serão as equações das assíntotas da hipérbole na nova posição? **12. c.** $y = 0$ e $x = 0$

13. Considerando a hipérbole de equação $4x^2 - 9y^2 - 8x + 18y - 41 = 0$: **13. a.** $\frac{(x-1)^2}{9} - \frac{(y-1)^2}{4} = 1$

a. obtenha sua equação reduzida;

b. esboce seu gráfico; **13. b.** Resposta no final do livro.

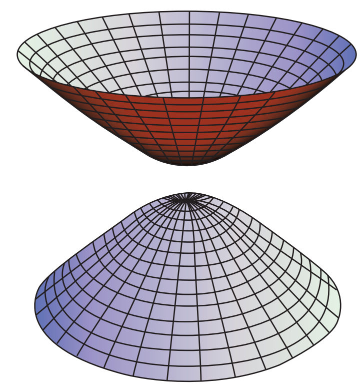
c. obtenha as equações de suas assíntotas.

13. c. $y = -\frac{2x}{3} + \frac{5}{3}$ e $y = \frac{2x}{3} + \frac{1}{3}$

14. A rotação de uma hipérbole em torno do seu eixo real gera uma figura chamada de **hiperboloide de duas folhas**, como mostra a figura 1. A hipérbole é chamada de **geradora** do hiperboloide.

Uma das aplicações desse tipo de hiperboloide é a fabricação de espelhos hiperbólicos, usados, por exemplo, na fabricação de telescópios refletores.

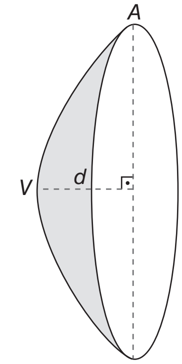
Figura 1



A figura 2 representa um espelho hiperbólico de borda circular cujo diâmetro $\overline{AB}$ passa pelo foco do hiperboloide. Sabendo que uma equação da hipérbole geradora da superfície desse espelho é $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{144} = 1$, em relação a um sistema cartesiano em que a unidade adotada nos eixos é o centímetro, calcule a distância d.

14. $d = 8$ cm

Figura 2



15. Elaborem e resolvam um problema sobre hipérbole que envolva uma situação do cotidiano.

15. Resposta pessoal.

12. a. Resposta no final do livro.

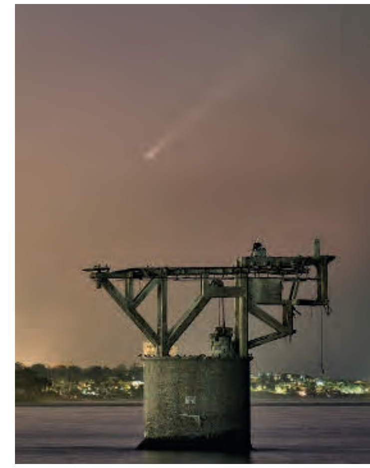
12. b. $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{9} = 1$

Para retomar os conteúdos estudados, resolva os exercícios complementares 6 a 8.

4. Parábola

Em 2024, o cometa C/2023 A3 Tsuchinshan-Atlas passou a 0,472764 ua da Terra. Ele foi descoberto em janeiro de 2023 e tem uma órbita retrógrada e parabólica que o faz se mover na direção oposta à maioria dos corpos celestes do sistema solar.

A trajetória parabólica descrita por um cometa que tem o Sol como foco indica que a distância do cometa ao Sol é igual à distância do cometa a uma reta fixa, chamada de diretriz da parábola. Para a determinação do tipo de órbita de um cometa, os astrônomos calculam a energia orbital específica E, conceito decorrente da lei da gravitação universal de Isaac Newton. O valor de E pode ser positivo, zero ou negativo, caracterizando uma órbita hiperbólica, parabólica ou elíptica, respectivamente.



ANTONIO MARQUEZ LANZA/MOMENT RF/GETTY IMAGES

Cometa C/2023 A3 Tsuchinshan-Atlas, visto da Espanha. Foto de 2024.

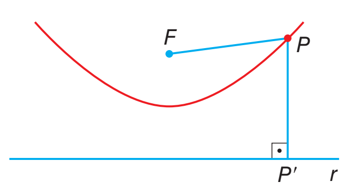
A parábola pode ser definida como a intersecção de uma superfície cônica ilimitada com um plano paralelo a uma geratriz dessa superfície, como vimos anteriormente. Porém, para o estudo analítico dessa cônica, é mais adequado defini-la a partir de uma propriedade comum a todos os seus pontos, como é feito a seguir.

Dados um ponto F e uma reta r de um plano, com $F \notin r$, chama-se **parábola** o conjunto dos pontos P desse plano equidistantes de r e F.

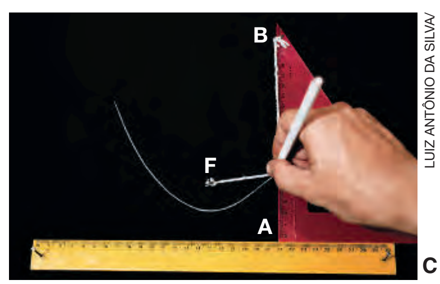
$$Pr = PF$$

Observação

A notação Pr indica a distância entre o ponto P e a reta r.



$PF = PP'$
(P' é a projeção ortogonal de P sobre r)



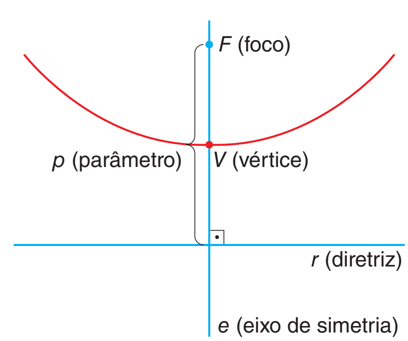
LUIZ ANTÔNIO DA SILVA/ ARQUIVO DA EDITORA

Na foto, o ponto F é o foco da parábola, e o comprimento do barbante é o mesmo do segmento $\overline{AB}$.

- O ponto F e a reta r são o **foco** e a **diretriz** da parábola, respectivamente.
- A reta e que passa por F e é perpendicular à diretriz é o **eixo de simetria** da parábola.
- O ponto V, intersecção da parábola com o eixo e, é o **vértice** da parábola.
- A distância p do foco à diretriz é chamada de **parâmetro** da parábola.

Note que a distância entre o vértice V e o foco F é metade do parâmetro, pois V pertence à parábola; portanto, V equidista de F e r. Assim, temos:

$$\begin{cases} VF = Vr \\ VF + Vr = p \end{cases} \Rightarrow VF = \frac{p}{2} \text{ e } Vr = \frac{p}{2}$$

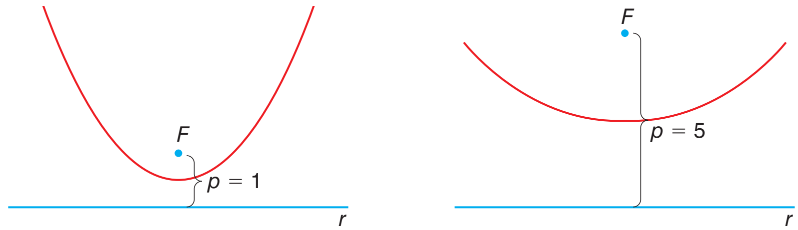


- A razão entre as distâncias de um ponto P da parábola ao foco e à diretriz é chamada de **excentricidade** da parábola. Como essas distâncias são iguais, a excentricidade da parábola é igual a 1.

ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

Observação

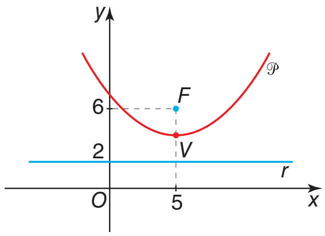
O eixo de simetria separa a parábola em dois ramos. O que determina a abertura entre esses ramos é o parâmetro p, e não a excentricidade, que é constante. Quanto maior o parâmetro, maior a abertura entre os ramos.



EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Faça os exercícios no caderno.

16. O gráfico a seguir mostra uma parábola $\mathcal{P}$ de foco F e diretriz r, paralela ao eixo Ox.



Obtenha:

a. a equação da diretriz de $\mathcal{P}$; **16. a.** $y = 2$

b. o parâmetro de $\mathcal{P}$; **16. b.** $p = 4$

c. a equação do eixo de simetria de $\mathcal{P}$; **16. c.** $x = 5$

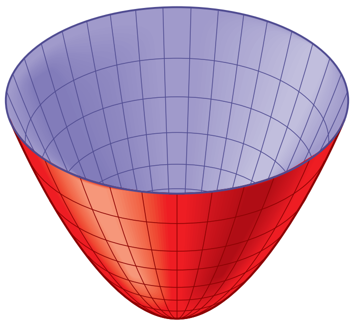
d. as coordenadas do vértice V de $\mathcal{P}$. **16. d.** $V(5, 4)$

17. Obtenha o número real k para que o ponto $A(k, 12)$ pertença à parábola $\mathcal{P}$ do exercício anterior.

17. $k = 13$ ou $k = -3$

18. A rotação de uma parábola em torno do seu eixo de simetria gera uma superfície parabólica conhecida como paraboloide (figura 1). A região côncava dessa superfície tem inúmeras aplicações práticas em razão de suas propriedades receptoras e emissoras. Por exemplo, todo raio de luz que incide na superfície de um espelho côncavo parabólico paralelamente ao eixo de simetria reflete-se passando pelo foco. Essa propriedade é usada na construção de fornos solares, como o de Odeillo, na França, formado por um gigantesco espelho parabólico.

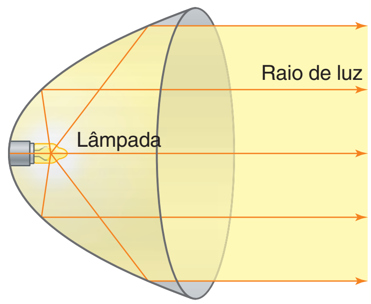
Figura 1



O mesmo princípio é aplicado na construção de antenas parabólicas, que captam ondas eletromagnéticas e as refletem para um receptor, localizado no foco, que as transforma em sinais elétricos.

Os paraboloides são usados também como emissores; por exemplo, se uma fonte emite ondas sonoras a partir do foco de um paraboloide, essas ondas são refletidas pela superfície parabólica paralelamente ao eixo de simetria. Algumas casas de espetáculos são projetadas de modo que um ponto do palco seja o foco de um paraboloide cuja superfície reflete sobre o auditório o som ali produzido. Outro exemplo pode ser observado nos faróis de automóvel com espelhos refletores parabólicos côncavos, em que os raios de luz provenientes da lâmpada localizada no foco são refletidos pelo espelho paralelamente ao eixo de simetria do paraboloide (figura 2).

Figura 2



Suponham que, no farol de um automóvel, a lâmpada F, localizada no foco do espelho refletor parabólico côncavo de vértice V, emita um raio de luz que se reflete em um ponto P do espelho, tal que o ângulo $P\hat{F}V$ meça 45° e $FV = 4$ cm.

18. a. $8(\sqrt{2} - 1)$ cm

a. Qual é a distância entre o raio refletido e o eixo de simetria do paraboloide?

b. Qual é a distância PF? **18. b.** $8(2 - \sqrt{2})$ cm

19. Elaborem e resolvam um problema sobre parábola que envolva uma situação do cotidiano.

19. Resposta pessoal.

No boxe **Matemática Sem Fronteiras**, exploramos fontes de energia sustentáveis. O forno solar industrial, apresentado na abertura do capítulo, é um exemplo de inovação que utiliza energia limpa para substituir o gás, cuja produção depende de combustíveis fósseis. O projeto, desenvolvido por pesquisadores brasileiros, demonstra como a radiação solar pode ser convertida em calor, criando alternativas acessíveis e sustentáveis para cozinhar e aquecer alimentos. Utilizando materiais de baixo custo, como sucata e espelhos, essa tecnologia simples e eficaz surge como uma solução viável para economizar recursos energéticos e reduzir o impacto ambiental.

MATEMÁTICA SEM FRONTEIRAS

Fontes de energia sustentável

Na abertura deste capítulo apresentamos um forno solar de uso industrial. Alguns pesquisadores brasileiros estão propondo a fabricação deste tipo de equipamento como alternativa para substituir o fogão a gás. Acompanhe o texto a seguir:

[...] protótipos de fornos, fogões e secadores [são] desenvolvidos no laboratório de máquinas hidráulicas do curso de Engenharia Mecânica, coordenado pelo professor Luiz Guilherme Meira de Souza, que pesquisa a energia solar há 40 anos – 37 deles, na UFRN [Universidade Federal do Rio Grande do Norte].

Os equipamentos [fornos solares], construídos com sucata, espelhos e outros materiais de baixo custo, podem ser alternativas viáveis para substituir o botijão de gás, assegura o pesquisador. [...]

A ideia do fogão é simples: transformar a radiação solar em calor, criar um efeito estufa e usar esse calor para aquecer água, cozinhar, secar ou assar os alimentos.

[...]

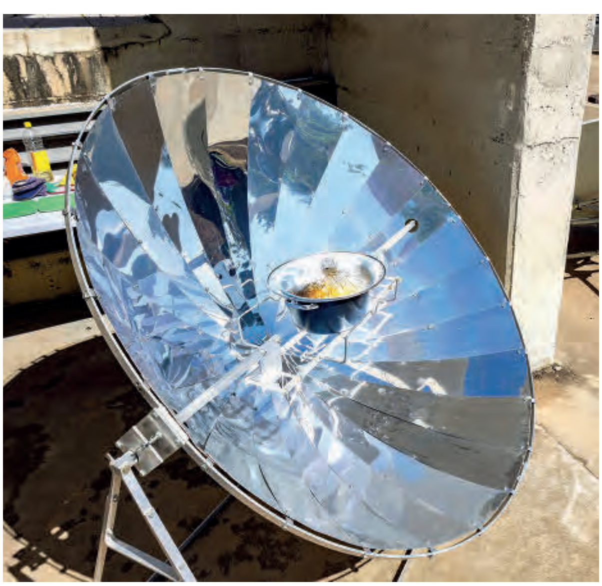
"A energia solar é uma energia social porque está disponível para todos, mas é a que menos tem investimentos porque o modelo de sociedade que nós temos sempre busca concentrar a energia e produzir pra vender e nosso trabalho não está na geração de energia pra vender", justifica o professor Luiz Guilherme.

Para o pesquisador, o produto poderia ser fabricado em escala se o Brasil investisse em pesquisas de tecnologia social. Mas os estudos que são realizados esbarram, na opinião dele, no desinteresse político, industrial e até acadêmico.

BBC. Pesquisadores brasileiros fabricam fogão solar para substituir botijão de gás. **G1**, 25 jun. 2018. Disponível em: https://g1.globo.com/ciencia-e-saude/noticia/pesquisadores-brasileiros-fabricam-fogao-solar-para-substituir-botijao-de-gas.ghtml. Acesso em: 2 ago. 2024.

OBJETO DIGITAL
Infográfico: Transição energética

Iniciativas como essa estão diretamente relacionadas ao conceito de energia limpa, que utiliza fontes renováveis. Ao explorar tecnologias como fornos solares e energia eólica, podemos promover o uso de recursos sustentáveis. No entanto, para que essas soluções se tornem amplamente viáveis, é necessário um maior investimento e comprometimento de setores públicos, industriais e acadêmicos. Esse tema promove um trabalho interdisciplinar com a área de Ciências da Natureza e suas tecnologias, favorecendo o trabalho com a habilidade **EM13CNT309**. Além disso, contribuímos para o desenvolvimento dos TCT Ciência e tecnologia e Educação ambiental, dos **ODSs 7**, **9**, **11** e **13**, e das **competências gerais 1**, **2**, **6**, **7** e **10**. Aproveite o conteúdo do **Infográfico clicável: Transição energética**, que relaciona o uso de energias renováveis à sustentabilidade e ao bem-estar social.



AGSAZ/ALAMY/FOTOARENA

Forno solar na Espanha. Foto de 2022.

RICARDO FUNARI/BRAZIL PHOTOS/LIGHTROCKET/GETTY IMAGES

O Parque Eólico de Osório, situado no Rio Grande do Sul, é o maior complexo gerador de energia eólica da América Latina. Foto de 2020.

Além do forno solar, existem outras formas de geração de energia sustentável, como a energia eólica.

Oriente os estudantes a consultar as páginas 6 e 7 para saber mais sobre este e os demais Objetivos de Desenvolvimento Sustentável.

A energia eólica, produzida com a força dos ventos, é limpa, renovável e, em muitos lugares, farta.

Produzida por meio de aerogeradores, nos quais a força do vento é captada por hélices ligadas a uma turbina que aciona um gerador elétrico, essa energia depende da área coberta pela rotação das hélices, da densidade do ar e da velocidade do vento.

Atividades

Faça as atividades no caderno.

1. Resposta pessoal.
2. 85,5%
3. Energias renováveis reduzem emissões de poluentes, conservam recursos naturais e promovem segurança energética e desenvolvimento econômico.
4. Pesquisa pessoal.
5. Pesquisa pessoal.

Na **atividade 5** os estudantes deverão construir maquetes de diferentes usinas de geração de energia. Aproveite para propor essa atividade em conjunto com o professor de Física, de modo a utilizarem os conhecimentos estudados na construção da maquete, favorecendo o desenvolvimento do TCT Ciência e tecnologia e da habilidade **EM13CNT309**. Como apoio, sugerimos o artigo: SANTOS, M. L. B. et al. Interdisciplinaridade e os três momentos pedagógicos no ensino de física: uma prática sobre a matriz energética brasileira. **Experiências em Ensino de Ciências**. Cuiabá, v. 13, n. 5, p. 115-125, dez. 2018. Disponível em: https://fisica.ufmt.br/eenciojs/index.php/eenci/issue/view/3. Acesso em: 29 out. 2024.

1. Na sua opinião, qual é a importância de projetos como esse da construção de fornos solares? Como esse tipo de projeto pode contribuir para uma sociedade mais justa?

2. As fontes energéticas renováveis utilizam recursos naturais que costumam se renovar espontaneamente ou pela ação humana. No Brasil, exemplos dessas fontes são a hídrica, a solar fotovoltaica, a eólica, a biomassa e o biogás. Qual porcentagem da energia produzida no Brasil, em 2023, foi de origem renovável?

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE ENERGIA SOLAR FOTOVOLTAICA - ABSOLAR

Fonte: ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE ENERGIA SOLAR FOTOVOLTAICA. Energia solar fotovoltaica no Brasil. **Infográfico ABSOLAR**, n. 64, 19 fev. 2024. Disponível em: https://www.absolar.org.br/mercado/infografico/. Acesso em: 14 out. 2024.

3. Quais são os aspectos positivos do uso de energias renováveis?

4. A fonte energética hídrica utiliza a força das águas dos rios para gerar energia elétrica por meio de usinas hidrelétricas. No entanto, a construção dessas usinas também pode causar impactos negativos. Pesquisem alguns impactos negativos provocados pela construção de usinas hidrelétricas.

5. Dividam a turma em 5 grupos para realizar a atividade.

a. Cada grupo ficará com a responsabilidade de pesquisar sobre uma das fontes de energia renovável produzidas no Brasil. Nessa pesquisa, vocês deverão colher informações sobre como é realizada a geração de energia e como e onde a energia produzida é utilizada, além das características físicas das usinas geradoras.

b. Com base nas informações pesquisadas, deverão construir uma maquete da usina. Para isso, poderão utilizar materiais recicláveis ou outros que considerarem adequados.

c. Organizem uma exposição sobre os dados coletados e as maquetes construídas em um espaço adequado da escola.

O conteúdo do boxe **Trabalho e juventudes** aborda o papel do tecnólogo em energias renováveis, destacando sua contribuição para o desenvolvimento de tecnologias eficientes de produção de energia limpa a partir de fontes como a solar, eólica, hídrica, geotérmica e oceânica. O profissional utiliza ferramentas como análises estatísticas, probabilísticas e simulações para otimizar sistemas geradores de energia. Pode-se aprofundar o assunto, propondo aos estudantes que citem algumas habilidades que precisam ser desenvolvidas para alguém se tornar tecnólogo em energias renováveis. Após a leitura e a discussão inicial, peça aos estudantes que pesquisem mais informações sobre essa profissão, façam um resumo da pesquisa e compartilhem-na com os demais colegas. Ao explorar esse tema, contribuímos para o desenvolvimento do **TCT Trabalho** e da **competência geral 6**, pois os estudantes podem se apropriar de procedimentos adotados no mundo do trabalho.

TRABALHO E JUVENTUDES Tecnólogo em energias renováveis

A pessoa tecnóloga em energias renováveis contribui para a criação de modernas e melhores tecnologias que possam produzir, com eficiência, energia limpa, ou seja, a partir de fontes renováveis, como energia eólica, hídrica, solar, geotérmica, oceânica etc. Algumas ferramentas necessárias ao desempenho de suas tarefas são:

- estudos estatísticos sobre a evolução das populações e suas atividades econômicas;
- análises probabilísticas das alterações na temperatura;
- gráficos de emissões de gás carbônico (CO_2);
- modelar e simular, por meio de equações e/ou algoritmos, o comportamento dos sistemas geradores de energia (turbinas eólicas, painéis solares, sistema geotérmicos, dentre outros) para avaliar desempenho e otimização do funcionamento desses sistemas.

ANDRESWD/E+/GETTY IMAGES

Com a crescente demanda por fontes de energia limpa e sustentável, a carreira de tecnólogo em energias renováveis é extremamente relevante.

A preocupação com o meio ambiente e as soluções sustentáveis criou um amplo mercado para os profissionais dos cursos ligados às Ciências da Natureza. Na última década, com o conceito da economia verde – que visa desenvolver o País sem causar degradação ambiental –, surgiram novas profissões, como as relacionadas a energias renováveis e edificações sustentáveis.

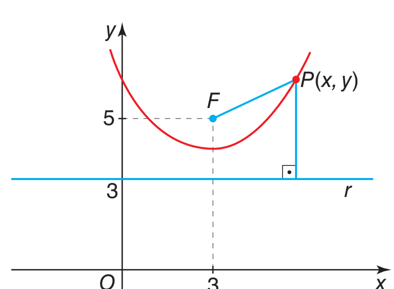
Em 2013, a Universidade de Fortaleza (Unifor) criou o curso de Tecnólogo de Energias Renováveis em resposta a uma demanda do mercado. “O Estado tem um potencial grande na área eólica e solar e precisávamos de um profissional que tivesse um leque mais amplo de formação, para entender o mercado e prover soluções”, explica Dayane Carneiro, professora da Unifor, engenheira eletricista e mestre em energias renováveis.

FAJARDO, V. Mercado sustentável e de energias renováveis revigora profissões. **Terra**, 31 maio 2022. Disponível em: https://www.terra.com.br/noticias/educacao/mercado-sustentavel-e-de-energias-renovaveis-revigora-profissoes,e7f0daa19954fd5e7fb94f949ad00e59dfz37bll.html?utm_source=clipboard. Acesso em: 2 ago. 2024.

Quer saber mais sobre a profissão de tecnólogo em energias renováveis? Faça uma pesquisa na internet e compartilhe com os colegas um resumo das informações que você obteve.

Equação reduzida da parábola

Associando um sistema de eixos cartesianos ao plano de uma parábola, podemos representá-la por uma equação. Como introdução, estudaremos apenas o caso em que a diretriz da parábola é paralela a um dos eixos coordenados. Por exemplo, vamos considerar a parábola de foco $F(3, 5)$, cuja diretriz r tem equação $y - 3 = 0$:



FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

Uma equação dessa parábola é obtida tomando um ponto genérico $P(x, y)$ e impondo que $PF = Pr$, ou seja:

$$\sqrt{(x-3)^2 + (y-5)^2} = \frac{|0x + y - 3|}{\sqrt{0^2 + 1^2}} \Rightarrow \sqrt{(x-3)^2 + (y-5)^2} = |y - 3|$$

Quadrando ambos os membros dessa igualdade, temos:

$$\left(\sqrt{(x-3)^2 + (y-5)^2}\right)^2 = (|y-3|)^2 \Rightarrow (x-3)^2 + (y-5)^2 = (y-3)^2$$

$$\therefore (x-3)^2 + \cancel{y^2} - 10y + 25 = \cancel{y^2} - 6y + 9 \Rightarrow (x-3)^2 = 4y - 16$$

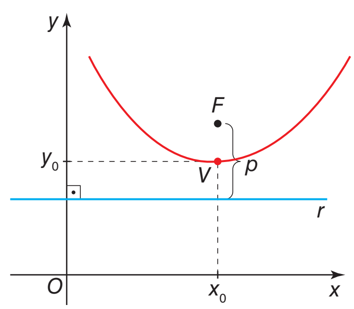
$$\therefore (x-3)^2 = 4(y-4)$$

Essa última equação é chamada de **equação reduzida da parábola**.

Generalizando

Reproduzindo os procedimentos apresentados no exemplo anterior em uma parábola qualquer de vértice $V(x_0, y_0)$ e parâmetro p, concluímos que:

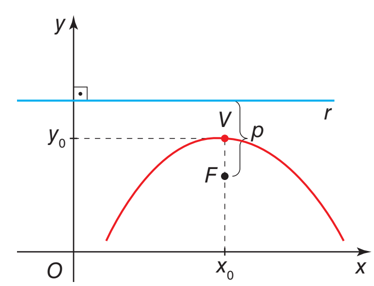
- Se essa parábola tem a diretriz paralela ao eixo Ox e a concavidade voltada para o sentido positivo do eixo Oy (concavidade voltada para cima), conforme a figura:



Sua equação pode ser representada na forma:

$$(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0)$$

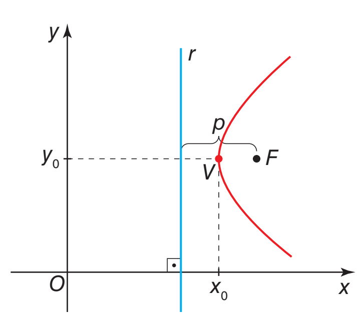
- Se essa parábola tem a diretriz paralela ao eixo Ox e a concavidade voltada para o sentido negativo do eixo Oy (concavidade voltada para baixo), conforme a figura:



Sua equação pode ser representada na forma:

$$(x - x_0)^2 = -2p(y - y_0)$$

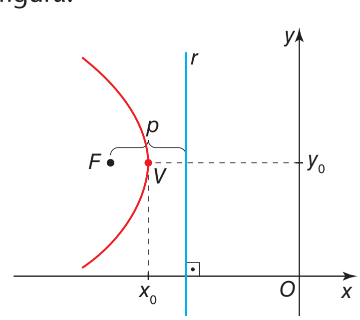
- Se essa parábola tem a diretriz paralela ao eixo Oy e a concavidade voltada para o sentido positivo do eixo Ox (concavidade voltada para a direita), conforme a figura:



Sua equação pode ser representada na forma:

$$(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0)$$

- Se essa parábola tem a diretriz paralela ao eixo Oy e a concavidade voltada para o sentido negativo do eixo Ox (concavidade voltada para a esquerda), conforme a figura:



Sua equação pode ser representada na forma:

$$(y - y_0)^2 = -2p(x - x_0)$$

Essas quatro equações são denominadas **equações reduzidas das parábolas**.

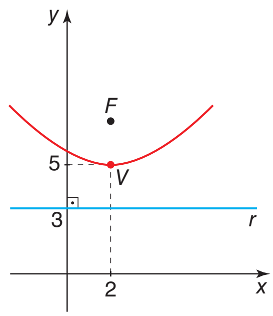
Observação

As figuras são meramente ilustrativas; as parábolas poderiam estar em outras posições.

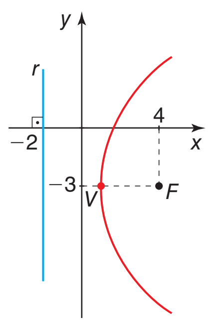
EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

5. Obtenha a equação reduzida da parábola de vértice V, foco F e diretriz r nos seguintes casos:

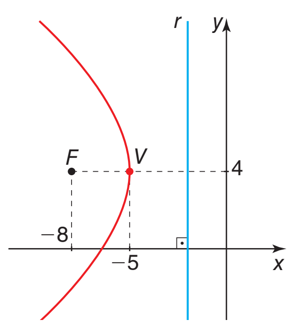
a.



b.



c.



ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

Resolução

a. O vértice da parábola é o ponto $V(2, 5)$.

A distância do foco à diretriz é o parâmetro p. Como a distância do vértice à diretriz é a metade do parâmetro, temos:

$Vr = \frac{p}{2} \Rightarrow 5 - 3 = \frac{p}{2}$ e, portanto, $p = 4$.

A diretriz é paralela ao eixo Ox, e a concavidade da parábola é voltada para o sentido positivo do eixo Oy (voltada para cima). Portanto, a equação reduzida da parábola é:

$$(x - 2)^2 = 8(y - 5)$$

b. O vértice da parábola é o ponto médio do segmento de reta de extremos $(-2, -3)$ e $(4, -3)$, isto é:

$$V\left(\frac{-2 + 4}{2}, \frac{-3 + (-3)}{2}\right) = V(1, -3)$$

A distância do foco F à diretriz r é o parâmetro p.

Logo: $p = 4 - (-2) = 6$.

A diretriz é paralela ao eixo Oy, e a concavidade da parábola é voltada para o sentido positivo do eixo Ox (voltada para a direita). Logo, a equação da parábola é:

$$[y - (-3)]^2 = 12(x - 1)$$

Ou seja: $(y + 3)^2 = 12(x - 1)$.

c. O vértice da parábola é o ponto $V(-5, 4)$.

A distância do foco F à diretriz r é o parâmetro p. Como a distância do vértice ao foco é a metade do parâmetro, temos:

$VF = \frac{p}{2} \Rightarrow -5 - (-8) = \frac{p}{2}$ e, logo, $p = 6$.

A diretriz é paralela ao eixo Oy, e a concavidade da parábola é voltada para o sentido negativo do eixo Ox (voltada para a esquerda). Assim, a equação da parábola é:

$$(y - 4)^2 = -12[x - (-5)]$$

Ou seja: $(y - 4)^2 = -12(x + 5)$.

6. Uma parábola tem equação $y = 2x^2 - 4x + 3$. Represente essa equação na forma reduzida.

Resolução

Para transformar essa equação na forma reduzida, podemos adotar os seguintes procedimentos:

- Isolamos em um dos membros da igualdade os termos na variável que contém o expoente 2:

$$y - 3 = 2x^2 - 4x$$

- Fatoramos o polinômio do 2º grau isolado colocando em evidência o coeficiente do termo do 2º grau:

$$y - 3 = 2(x^2 - 2x)$$

- Completamos o quadrado perfeito na expressão entre parênteses, adicionando um mesmo número a ambos os membros da igualdade:

$$y - 3 + 2 = 2(x^2 - 2x + 1)$$

Ou seja:

$$y - 1 = 2(x - 1)^2$$

- Concluímos, obtendo a equação reduzida:

$$(x - 1)^2 = \frac{1}{2}(y - 1)$$

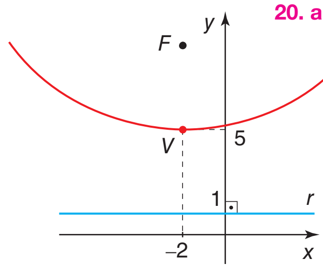
22. Vértice: $V(1, 3)$; parâmetro $p = \frac{1}{4}$; foco: $F\left(1;\ 3 + \frac{1}{8}\right)$, ou seja, $F\left(1;\ \frac{25}{8}\right)$; equação da diretriz d: $y = 3 - \frac{1}{8}$, ou seja, $y = \frac{23}{8}$; equação do eixo de simetria e: $x = 1$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

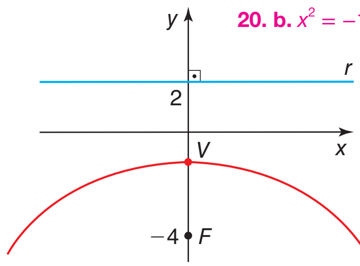
Faça os exercícios no caderno.

20. Obtenha a equação reduzida da parábola de vértice V, foco F e diretriz r nos casos a seguir.

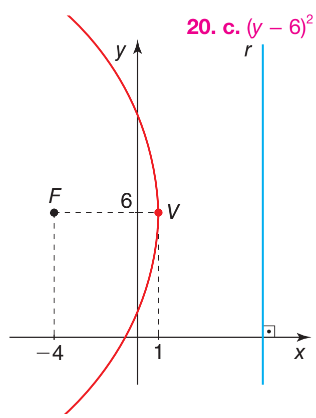
a. **20. a.** $(x + 2)^2 = 16(y - 5)$



b. **20. b.** $x^2 = -12(y + 1)$



c. **20. c.** $(y - 6)^2 = -20(x - 1)$



ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

21. Escreva na forma reduzida a equação da parábola em cada um dos casos a seguir.

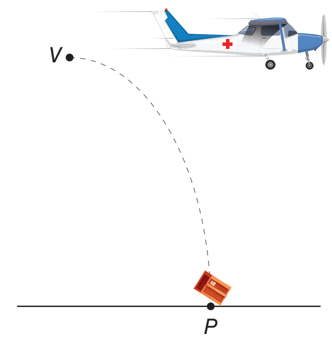
a. $y = 3x^2 + 6x - 5$ **21. a.** $(x + 1)^2 = \frac{1}{3}(y + 8)$

b. $x = y^2 - 6y + 7$ **21. b.** $(y - 3)^2 = x + 2$

c. $y = \frac{x^2}{4} - x - 3$ **21. c.** $(x - 2)^2 = 4(y + 4)$

22. Determine o vértice V, o parâmetro p, o foco F, a equação da diretriz d e a equação do eixo de simetria e da parábola $\mathcal{P}$ de equação $y = 2x^2 - 4x + 5$.

23. Em missão de socorro, um avião da Cruz Vermelha, voando horizontalmente a 400 m de altura em relação ao solo plano e horizontal, deve soltar em queda livre uma carga de medicamentos a refugiados de guerra. O ponto V de soltura é o vértice da parábola que contém a trajetória da carga, a qual deve atingir o solo em um ponto P a 200 m de distância da vertical que passa por V. Para que o objetivo seja atingido, devem ser efetuados alguns cálculos que dependem da altura, em relação ao solo, da diretriz e do foco e da parábola.



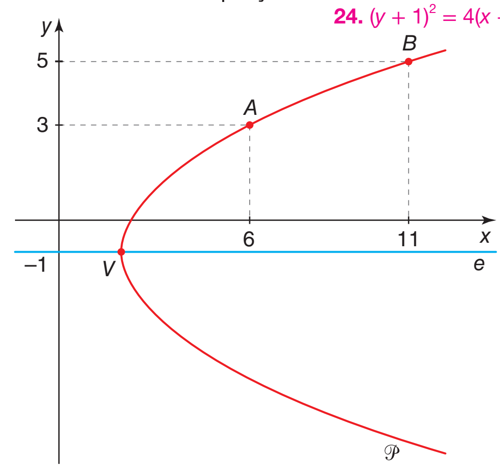
ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

a. A que altura, em relação ao solo, passa a diretriz d da parábola que contém essa trajetória? **23. a.** 425 m

b. A que altura, em relação ao solo, está o foco F da parábola que contém essa trajetória? **23. b.** 375 m

24. A parábola $\mathcal{P}$, representada a seguir, tem vértice V, passa pelos pontos A e B e seu eixo de simetria e é horizontal. Obtenha a equação reduzida de $\mathcal{P}$.

24. $(y + 1)^2 = 4(x - 2)$



ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

25. A órbita de um cometa é uma parábola cujo foco F é o Sol. Para o estudo do movimento desse cometa, um astrônomo fixou um sistema cartesiano ortogonal xOy no plano dessa órbita, adotando nos eixos uma unidade de comprimento u, conveniente para grandes distâncias. Em relação a esse sistema, a trajetória parabólica descrita pelo cometa tinha o eixo Oy como eixo de simetria e a concavidade voltada para o sentido positivo desse eixo, com o Sol no ponto $F(0, 7)$. Com isso, o cientista calculou que, quando o cometa passou pelo ponto $P(6, 7)$, sua distância do Sol era 6 u.

a. Qual é a menor distância possível entre o cometa e Sol? **25. a.** 3 u

b. Qual é a equação reduzida da parábola descrita nessa órbita? **25. b.** $x^2 = 12(y - 4)$

Nota: A órbita de um cometa pode ser elíptica, parabólica ou hiperbólica. Quando a órbita é elíptica, o cometa é periódico; ou seja, ele entra periodicamente no Sistema Solar. Quando a órbita é parabólica ou hiperbólica, o cometa não é periódico, passando uma única vez pelo Sistema Solar.

26. As antenas parabólicas receptoras captam as ondas eletromagnéticas e as refletem para um receptor, localizado no foco do paraboloide, que as transforma em sinais elétricos e as envia a um decodificador que, por sua vez, os transforma em imagem ou som. Se a circunferência que limita uma antena parabólica tem 2 m de raio e o plano dessa circunferência dista 0,5 m do vértice do paraboloide, a que distância do vértice está localizado o receptor da antena? **26.** 2 m

CHRIS REDAN/ SHUTTERSTOCK

Antena parabólica em estação de telecomunicações da Alta Baviera, Alemanha. Foto de 2020.

Para retomar os conteúdos estudados, resolva os exercícios complementares 9 a 11.

Reflexão: Resposta no final do livro.

Entre as várias aplicações das figuras cônicas, está o estudo das órbitas de astros celestes. Observe alguns aspectos interessantes desse estudo no vídeo **Na cauda do cometa**, disponível em: https://m3.ime.unicamp.br/recursos/1137. Acesso em: 2 ago. 2024.

Reflexão

Qual é o gráfico da inequação $y > \frac{x^2}{4} + 2$?

O boxe **Mentes brilhantes** aborda a invenção e a evolução dos telescópios. O texto descreve dois tipos principais de telescópios: o refrator, que utiliza lentes para captar e ampliar imagens, e o refletor, que utiliza espelhos para a mesma finalidade. Além disso, o texto menciona as limitações dos telescópios refratores, como as distorções cromáticas, e como o telescópio refletor de Newton foi uma solução para esses problemas.

Mentes brilhantes

Os telescópios

Credita-se ao holandês Hans Lippershey (1570-1619), fabricante de lentes, a invenção do telescópio, em 1608. Lippershey teria associado duas lentes no interior de um tubo para observar objetos distantes. De lá para cá houve constantes aperfeiçoamentos dessa invenção.

Há, fundamentalmente, dois tipos de telescópio: o refrator e o refletor. Os primeiros telescópios construídos, e a maioria dos pequenos telescópios fabricados hoje, são refratores, isto é, trabalham com a refração da luz dos objetos observados através de lentes. Os telescópios refratores atuais são compostos basicamente de duas lentes: uma objetiva, que coleta as imagens e as concentra no foco da lente, e outra ocular, que aumenta o tamanho da imagem para o observador (a ocular pode ter também um conjunto de lentes).

Os telescópios refratores apresentam algumas limitações: a mais importante delas é que as lentes provocam distorções cromáticas, prejudicando as observações; outra é a dificuldade da construção de grandes lentes. Para contornar essas dificuldades, Isaac Newton construiu, em 1668, um telescópio refletor, projeto do monge italiano Niccolo Zucchi (1586--1670), que tentou construí-lo 50 anos antes de Newton, mas desistiu. Alguns telescópios refletores trabalham com a reflexão da luz por um espelho parabólico, que concentra a luz no foco do paraboloide, onde há outro espelho que reflete a luz para a lente ocular.

Pesquise se, no município ou na região onde reside, há observatórios astronômicos com acesso ao público. Se possível, agende uma visita e compartilhe com os colegas dados e curiosidades obtidas.

Se julgar oportuno, peça aos estudantes que pesquisem exemplos atuais de telescópios utilizados na Astronomia, como o Telescópio Hubble, e façam um texto sobre as contribuições deles para o estudo do Universo. Verifique a possibilidade de agendar a visitação em algum observatório astronômico da região.

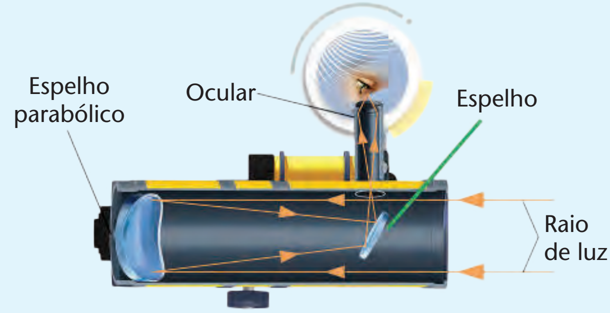
Telescópio refrator

Corte transversal de um telescópio refrator.

(Modelos didáticos sem escala e com cores fantasia.)

ILUSTRAÇÕES: ANDRÉ VAZZIOS/ARQUIVO DA EDITORA

Telescópio refletor



Corte transversal de um telescópio refletor.

(Modelo didático sem escala e com cores fantasia.)

ILUSTRAÇÕES: ANDRÉ VAZZIOS/ARQUIVO DA EDITORA

Hoje, a maioria dos telescópios dos grandes observatórios é do tipo refletor com grandes espelhos parabólicos, como os do Observatório Austral Europeu, no alto do monte Paranal, no Chile.

Elaborado com base em: OLIVEIRA FILHO, K. S.; SARAIVA, M. F. O. **Astronomia e Astrofísica**. Instituto de Física, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, *c.* 2017. Disponível em: http://astro.if.ufrgs.br/. Acesso em: 2 ago. 2024.

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

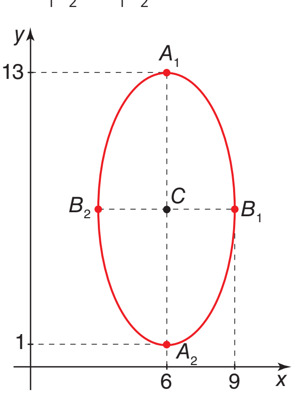
Faça os exercícios no caderno.

1. Para delimitar um jardim, um jardineiro traçou uma elipse em um terreno plano, adotando os seguintes procedimentos: fincou duas estacas a 6 m de distância, uma da outra; a seguir amarrou em cada estaca uma extremidade de uma corda, de modo que, excluindo-se os nós das extremidades, o comprimento restante da corda fosse 10 m. Finalmente, riscou uma linha contínua no terreno com uma haste apoiada na corda, mantendo-a o mais esticada possível, conforme sugere a figura a seguir. Calcule a medida do eixo maior, a do eixo menor e a excentricidade dessa elipse.

ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

2. Obtenha a equação reduzida da elipse de centro C e eixos $\overline{A_1A_2}$ e $\overline{B_1B_2}$ em cada um dos casos a seguir.

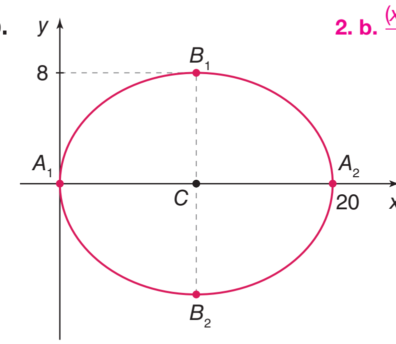
a.



2. a. $\frac{(x-6)^2}{9} + \frac{(y-7)^2}{36} = 1$

1. O eixo maior mede 10 m, o eixo menor mede 8 m, e a excentricidade é $\frac{3}{5}$.

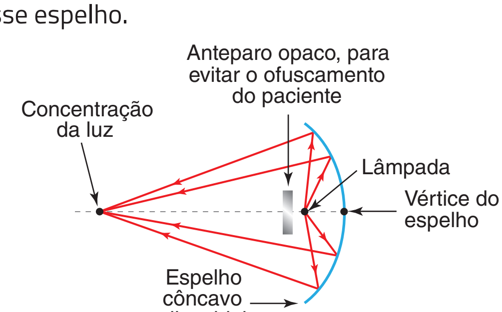
b.



2. b. $\frac{(x-10)^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$

3. A rotação de uma elipse em torno de um dos eixos gera uma **superfície elipsoidal**. Quando a rotação é efetuada em torno do eixo maior, os focos da elipse geradora são também os focos da superfície gerada. Uma importante propriedade física desse tipo de elipsoide é que toda onda sonora ou luminosa que irradia de um dos focos é refletida pela superfície côncava para o outro foco.

Essa propriedade é aplicada, por exemplo, na construção de espelhos côncavos elipsoidais, usados em consultórios odontológicos. Observe um esquema desse espelho.



ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

Esses espelhos refletem a luz de uma lâmpada localizada em um dos focos, concentrando os raios refletidos no outro foco (dente do paciente).

Um dentista possui em seu consultório uma luminária com espelho refletor elipsoidal côncavo em que a lâmpada está a 6 cm do vértice do espelho (conforme o esquema anterior). Um paciente acomodou-se na cadeira, e o dentista ajustou a posição do espelho de modo que os raios refletidos concentraram-se em um dente do paciente. Sabendo que a excentricidade desse espelho elipsoidal é 0,85, calcule a distância entre a lâmpada e o dente iluminado. **3.** 68 cm

PAPA/SHUTTERSTOCK

Espelho côncavo elipsoidal de um consultório odontológico.

4. O ponto $P\left(\frac{12}{5}, 2\right)$ pertence a uma elipse $\mathscr{E}$ de focos $F_1(0, 1)$ e $F_2(0, 9)$. Determine a equação reduzida de $\mathscr{E}$.

4. $\frac{x^2}{9} + \frac{(y-5)^2}{25} = 1$

5. Dê a equação reduzida da elipse em cada um dos casos a seguir.

a. $16x^2 + 9y^2 + 64x - 54y + 1 = 0$ **5. a.** $\frac{(x+2)^2}{9} + \frac{(y-3)^2}{16} = 1$

b. $x^2 + 9y^2 - 4x - 18y - 23 = 0$ **5. b.** $\frac{(x-2)^2}{36} + \frac{(y-1)^2}{4} = 1$

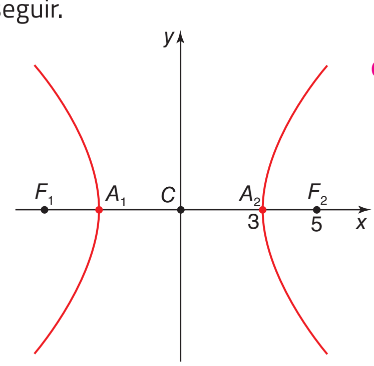
c. $3x^2 + 5y^2 - 12x - 3 = 0$ **5. c.** $\frac{(x-2)^2}{5} + \frac{y^2}{3} = 1$

d. $9x^2 + 4y^2 = 1$ **5. d.** $\frac{x^2}{\frac{1}{9}} + \frac{y^2}{\frac{1}{4}} = 1$

e. $3x^2 + 5y^2 = 2$ **5. e.** $\frac{x^2}{\frac{2}{3}} + \frac{y^2}{\frac{2}{5}} = 1$

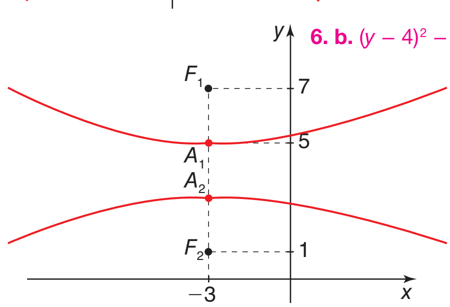
6. Obtenha a equação reduzida da hipérbole de centro C, eixo real $\overline{A_1A_2}$ e focos F_1 e F_2 em cada um dos casos a seguir.

a.



6. a. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$

b.



6. b. $(y-4)^2 - \frac{(x+3)^2}{8} = 1$

ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

7. Esboce o gráfico da hipérbole em cada um dos casos.

a. $\frac{y^2}{144} - \frac{x^2}{25} = 1$

b. $(y-4)^2 - (x-2)^2 = 1$

c. $\frac{y^2}{16} - (x-2)^2 = 1$

7. Respostas no final do livro.

8. Os pontos F_1 e F_2 são os focos da hipérbole $\mathscr{H}$ de equação $4x^2 - 9y^2 - 8x + 36y - 68 = 0$. Sendo A e B pontos distintos de $\mathscr{H}$, faça o que se pede.

a. Calcule a soma $S = |AF_1 - AF_2| + |BF_1 - BF_2|$. **8. a.** 12

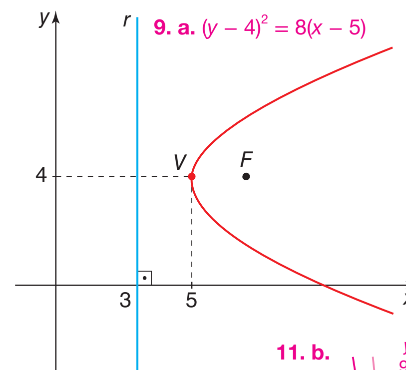
b. Calcule a excentricidade e de $\mathscr{H}$. **8. b.** $e = \frac{\sqrt{13}}{3}$

c. Obtenha as equações das assíntotas de $\mathscr{H}$.

8. c. $2x - 3y + 4 = 0$ e $2x + 3y - 8 = 0$

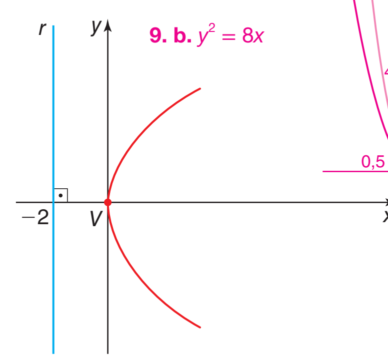
9. Obtenha a equação reduzida da parábola de vértice V, foco F e diretriz r nos seguintes casos:

a.



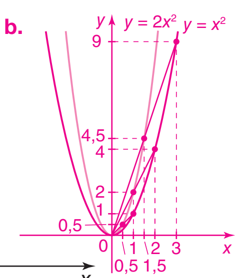
9. a. $(y-4)^2 = 8(x-5)$

b.



9. b. $y^2 = 8x$

11. b.



ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

10. Escreva na forma reduzida a equação da parábola em cada um dos casos a seguir.

a. $x = 2y^2 + 2y - 1$ **10. a.** $\left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(x + \frac{3}{2}\right)$

b. $y = x^2 + 3x$ **10. b.** $\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 = y + \frac{9}{4}$

c. $y = -3x^2 + 6x + 4$ **10. c.** $(x-1)^2 = -\frac{1}{3}(y-7)$

d. $x = 1 - y^2$ **10. d.** $y^2 = -1(x-1)$

11. No plano cartesiano xOy, considere todos os infinitos segmentos de reta $\overline{OA}$ em que $O(0, 0)$ e A pertence à parábola $\mathscr{P}$ de equação $y = x^2$. **11. a.** $y = 2x^2$

a. Obtenha uma equação do lugar geométrico dos pontos médios $M(x, y)$ dos segmentos $\overline{OA}$.

b. Construa em um mesmo plano cartesiano a parábola $\mathscr{P}$ e o lugar geométrico citado no item **a.** Em seguida, represente alguns segmentos $\overline{OA}$ e seus respectivos pontos médios M, registrando as coordenadas dos pontos O, A e M.

Nota: Lugar Geométrico (L.G.) determinado por uma propriedade p é o conjunto de todos os pontos que possuem essa propriedade.

11. b. Respostas no final do livro.

Nesta seção, apresentamos uma proposta de avaliação e uma autoavaliação como ferramenta de estudo. Oriente os estudantes a fazerem essas atividades com atenção e, caso tenham dificuldades, a retomarem os conteúdos estudados. Se considerar adequado, promova uma roda de conversa para que os estudantes apresentem suas dificuldades.

VERIFIQUE O QUE APRENDEU NO CAPÍTULO 8

1. Em uma elipse de focos $F_1(0, 0)$ e $F_2(2, 0)$, o eixo maior mede 4 unidades.

1. a. $\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$

a. Obtenha uma equação reduzida dessa elipse.

b. Represente essa elipse no plano cartesiano, destacando as coordenadas de seu centro, dos focos, dos pontos de coordenadas máxima e mínima e dos pontos de intersecção com os eixos coordenados, se existirem.

1. b. Resposta no final do livro. **1. c.** $e = \frac{c}{a} = \frac{1}{2}$

c. Calcule a excentricidade dessa elipse.

2. Em uma hipérbole de focos $F_1(0, 0)$ e $F_2(4, 0)$, o eixo real mede 2 unidades.

a. Aplicando a definição, obtenha uma equação dessa hipérbole. **2. a.** $3x^2 - y^2 - 12x + 9 = 0$

b. Represente essa hipérbole no plano cartesiano, destacando as coordenadas de seu centro, dos focos, dos vértices e dos pontos de intersecção com os eixos coordenados, se existirem.

2. b. Resposta no final do livro.

c. Calcule a excentricidade dessa hipérbole.

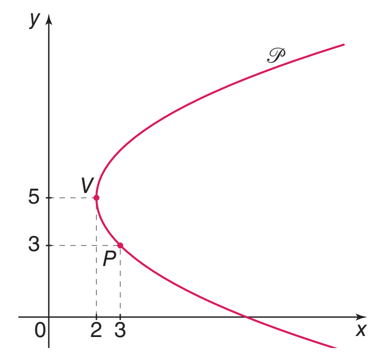
2. c. $e = \frac{c}{a} = \frac{2}{1} = 2$

3. A equação de uma hipérbole $\mathcal{H}$ é $4x^2 - 9y^2 - 16x - 20 = 0$. **3. a.** Resposta no final do livro.

a. Esboce o gráfico cartesiano de $\mathcal{H}$, com seu retângulo referência e suas assíntotas.

b. Obtenha as equações das assíntotas de $\mathcal{H}$.

4. A parábola $\mathcal{P}$ a seguir tem vértice V, passa pelo ponto P e seu eixo de simetria é horizontal. Obtenha a equação reduzida de $\mathcal{P}$. **4.** $(y-5)^2 = 4(x-2)$



3. b. equação de r: $y - 2 = -\frac{2}{3} \cdot [x - (-1)] \Rightarrow y = -\frac{2x}{3} + \frac{4}{3}$

equação de s: $y - 2 = \frac{2}{3} \cdot (x - 5) \Rightarrow y = \frac{2x}{3} - \frac{4}{3}$.

Ferramenta de estudo

Ao término da resolução dos exercícios, copie no caderno o quadro indicado a seguir e preencha-o assinalando a resposta mais adequada ao seu aprendizado. Se julgar necessário, retome os tópicos de conteúdos relacionados a cada questão ou converse com os colegas e com o professor a fim de tirar dúvidas a respeito delas.

Questão	Sim	Parcialmente	Não
Sei o que é uma figura cônica?			
Reconheço o que é uma elipse e seus elementos?			
Utilizo a equação reduzida da elipse na resolução de problemas?			
Reconheço o que é uma hipérbole e seus elementos?			
Utilizo a equação reduzida da hipérbole na resolução de problemas?			
Reconheço o que é uma parábola e seus elementos?			
Utilizo a equação reduzida da parábola na resolução de problemas?			

MODELO

ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

O contexto da **abertura** possibilita um trabalho interdisciplinar com a área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias, associado aos **TCTs Ciência e Tecnologia e Educação Ambiental**. É possível tratar dos números complexos e sua aplicação em Engenharia elétrica como em circuitos de corrente alternada para calcular impedâncias, em transformadores e motores elétricos para modelar e analisar o comportamento eletromagnético, incluindo perdas e eficiência.

CAPÍTULO 9

Conjunto dos números complexos

A energia elétrica que é produzida em hidrelétricas, ou usinas eólicas, por exemplo, é enviada por linhas de transmissão até subestações de transmissão, depois passa por subestações de distribuição, fiação dos postes e, por fim, chega a residências, estabelecimentos comerciais etc.

Além disso, no Brasil a energia elétrica é transmitida por esse caminho através de correntes alternadas, e empresas de distribuição de energia garantem a qualidade do serviço monitorando essas correntes, com o auxílio de números complexos.

Aproveite o **Mapa interativo: Usinas elétricas no Brasil** para realizar uma conversa acerca de energias limpas e de fontes renováveis, possíveis impactos ambientais como perda da biodiversidade, mudanças nos ecossistemas aquáticos e terrestres, alterações no microclima da região que afetem a fauna ou a flora etc.


AJHVEPHOTO/SHUTTERSTOCK

Usina hidrelétrica de Itaipu, em Foz do Iguaçu, no estado do Paraná. Foto de 2022.

Além da teoria

Além da teoria: 1. Resposta pessoal.

1. Que empresa faz a distribuição de energia elétrica em sua cidade? Ela distribui energia elétrica produzida em que usina?
2. Pesquise quais são as principais fontes de energia renovável e verifique se há projetos viáveis de aplicação desse tipo de energia em sua cidade ou região. Depois, converse com os colegas acerca da importância de fontes de energia limpa.

2. Resposta pessoal.

OBJETO DIGITAL **Mapa clicável: Usinas elétricas no Brasil**

1. Número complexo

A descoberta do número como abstração de quantidades observadas no cotidiano foi o primeiro e, talvez, o mais importante feito matemático da humanidade. Houve uma longa e árdua caminhada desde os números naturais até os números reais. Mas seriam os números reais o último estágio na escalada do conceito de número?

Neste capítulo ampliaremos o conceito de número para além dos reais, definindo os **números complexos**.

A insuficiência dos números reais se revela na radiciação: não existem, em $\mathbb{R}$, raízes quadradas, quartas, sextas, ... de números negativos. Para que a radiciação seja sempre possível, os matemáticos ampliaram o conceito de número, definindo o número **i**, não real, chamado de **unidade imaginária**, e que satisfaz a seguinte condição:

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = -1$$

A partir da unidade imaginária, define-se:

> **Número complexo** é todo número da forma $a + b\text{i}$, em que a e b são números reais, e i é a unidade imaginária.

Exemplos

a. $5 - 2\text{i}$
b. $7 + \sqrt{2}\text{i}$
c. 3i
d. 0i (que é igual a zero)

O conjunto dos números complexos é indicado por $\mathbb{C}$, isto é:

$$\mathbb{C} = \{a + b\text{i}, \text{ com } a \text{ e } b \text{ reais}\}$$

Com os números complexos é possível definir raiz de índice par e radicando negativo, pois potências de números complexos com expoente par podem ser negativas. Por exemplo:

$$(3\text{i})^2 = 3^2 \cdot \text{i}^2 = 9 \cdot (-1) = -9$$

Assim, 3i é uma raiz quadrada de -9.

Sugerimos a leitura do livro de Alex Bellos, **Alex através do espelho: como a vida reflete os números e como os números refletem a vida**. Nesse livro, por meio de uma história fictícia envolvendo o personagem principal Bellos, o autor explora diferentes conceitos matemáticos, como os números complexos.

Forma algébrica de um número complexo

A expressão $a + b\text{i}$, com $\{a, b\} \subset \mathbb{R}$, é chamada de **forma algébrica** do número complexo, em que a é a **parte real** e b é a **parte imaginária**.

Exemplos

a. No número complexo $5 + 4\text{i}$, a parte real é 5 e a parte imaginária é 4.

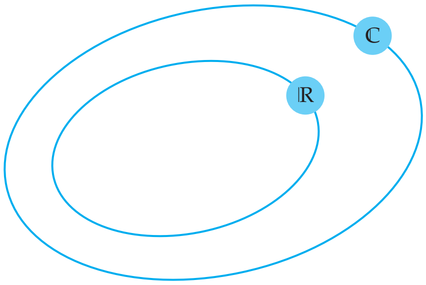
Todo número complexo cuja parte imaginária é diferente de zero é chamado de **número imaginário**.

b. No número complexo 7i, que pode ser representado por $0 + 7\text{i}$, a parte real é 0 (zero) e a parte imaginária é 7.

Todo número complexo cuja parte real é zero e a parte imaginária é diferente de zero é chamado de **número imaginário puro**.

c. No número complexo 9, que pode ser representado por $9 + 0\text{i}$, a parte real é 9 e a parte imaginária é zero.

Todo número complexo com parte imaginária zero é um **número real**. Note, portanto, que todo número real a é, também, um número complexo, pois pode ser representado por $a + 0i$. Assim, temos que $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, como representado no diagrama.



FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Determine x, com $x \in \mathbb{R}$, de modo que o número complexo $8 + (3x - 6)i$ seja real.

Resolução

O número $8 + (3x - 6)i$ é real se, e somente se, a parte imaginária é zero, isto é:

$$3x - 6 = 0$$

Assim, concluímos que $x = 2$.

2. Obtenha k, com $k \in \mathbb{R}$, de modo que o número complexo $k^2 - 4 + (k - 2)i$ seja:

a. imaginário.

b. imaginário puro.

Resolução

a. O número $k^2 - 4 + (k - 2)i$ é imaginário se, e somente se, a parte imaginária é diferente de zero, isto é:

$$k - 2 \neq 0$$

Assim, concluímos que $k \neq 2$.

b. O número $k^2 - 4 + (k - 2)i$ é imaginário puro se, e somente se, a parte real é zero e a parte imaginária é diferente de zero, isto é:

$$\begin{cases} k^2 - 4 = 0 \\ k - 2 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = \pm 2 \\ k \neq 2 \end{cases}$$

Assim, concluímos que $k = -2$.

Igualdade entre números complexos

Dois números complexos $a + bi$ e $c + di$, com $\{a, b, c, d\} \subset \mathbb{R}$, são **iguais** se, e somente se, suas partes reais são iguais e suas partes imaginárias são iguais.

Ou seja:

$$a + bi = c + di \Leftrightarrow \begin{cases} a = c \\ b = d \end{cases}$$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

3. Determine os números reais x e y tais que $2x + y + 5i = 6 + (x + y)i$.

Resolução

Dois números complexos são iguais se, e somente se, suas partes reais são iguais e suas partes imaginárias são iguais, ou seja:

$$\begin{cases} 2x + y = 6 \\ x + y = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 6 - 2x & (1) \\ x + y = 5 & (2) \end{cases}$$

Substituindo (1) em (2), obtemos: $x + 6 - 2x = 5 \Rightarrow x = 1$

Substituindo x por 1 na equação (1), obtemos: $y = 6 - 2 \cdot 1 \Rightarrow y = 4$

Números complexos conjugados

O número complexo $a + bi$ é o **conjugado** do número complexo $c + di$, com $\{a, b, c, d\} \subset \mathbb{R}$, se, e somente se, suas partes reais forem iguais e suas partes imaginárias forem opostas.

Ou seja:

$$a + bi \text{ é conjugado de } c + di \Leftrightarrow \begin{cases} a = c \\ b = -d \end{cases}$$

Indicando por z um número complexo, o conjugado de z será indicado por $\bar{z}$.

Exemplos

a. O conjugado de $z = 8 + 4i$ é $\bar{z} = 8 - 4i$.

b. O conjugado de $z = 5 - 9i$ é $\bar{z} = 5 + 9i$.

c. O conjugado de $z = 10i$ é $\bar{z} = -10i$.

d. O conjugado de $z = 3$ é $\bar{z} = 3$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Faça os exercícios no caderno.

1. Classifique em verdadeira ou falsa cada uma das afirmações.

a. Todo número real é também número complexo. **1. a.** verdadeira

b. Todo número complexo é também número real. **1. b.** falsa

c. $\mathbb{C} \cap \mathbb{R} = \varnothing$ **1. c.** falsa

d. $\mathbb{C} - \mathbb{R} = \{z \mid z = a + bi, \text{ com } \{a, b\} \subset \mathbb{R} \text{ e } b \neq 0\}$ **1. d.** verdadeira

e. O conjugado do número $3 + 4i$ é $-3 - 4i$. **1. e.** falsa

f. O conjugado do número $3 + 4i$ é $3 - 4i$. **1. f.** verdadeira

g. Se $a + 3i = 6 + bi$, com $\{a, b\} \subset \mathbb{R}$, então $a + b = 9$. **1. g.** verdadeira

2. Determine os valores reais de x para que o número complexo $(x^2 - 9) + (x - 3)i$ seja:

a. real; **2. a.** $x = 3$

b. imaginário; **2. b.** $x \neq 3$

c. imaginário puro. **2. c.** $x = -3$

3. Dada a igualdade $2a + (a + 2)i = (b - a) + bi$, determine os números reais a e b. **3.** $a = 1$ e $b = 3$

4. Determine os números reais x e y tais que $x^2 - 1 - 3y^2i = y - 27i$. **4.** $x = 2$ e $y = 3$ ou $x = -2$ e $y = 3$

Para retomar os conteúdos estudados, resolva os exercícios complementares 1 e 2.

2. Operações elementares com números complexos

Antes de apresentar as operações elementares com números complexos, é importante ressaltar que elas foram definidas como extensões das operações em $\mathbb{R}$, de modo que fossem conservadas as propriedades dessas operações em $\mathbb{R}$.

Para a adição foram conservadas as propriedades associativa, comutativa, elemento neutro e elemento oposto, de modo que:

- o elemento neutro da adição é o número zero, ou seja, $0 + 0i$;
- o oposto de um número complexo qualquer $z = a + bi$, com a e b reais, é o número complexo $-z = -a - bi$.

Para a multiplicação foram conservadas as propriedades associativa, comutativa, elemento neutro e elemento inverso, de modo que:

- o elemento neutro da multiplicação é o número 1, ou seja, $1 + 0i$;
- o inverso de um número complexo não nulo $z = a + bi$ é o número complexo indicado por z^{-1}, tal que $z^{-1} = \dfrac{1}{a + bi}$

Foi conservada também a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição.

Esses princípios resultaram nas seguintes definições:

Para quaisquer números complexos $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$, em que a, b, c e d são números reais, temos:

- $z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i$
- $z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$
- $z_1 \cdot z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$
- $z_1 : z_2 = z_1 \cdot \dfrac{1}{z_2}$ (com $z_2 \neq 0$)

Nota:

Observe como as propriedades distributiva, associativa e comutativa, que se estendem para a adição e a multiplicação em $\mathbb{C}$, permitem a definição de multiplicação de números complexos como foi apresentada anteriormente:

$$z_1 \cdot z_2 = (a + bi) \cdot (c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 = ac + adi + bci + bd(-1)$$

$$\therefore z_1 \cdot z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

Para agilizar as operações elementares com números complexos, aplicamos as propriedades operatórias — associativa, comutativa, elemento neutro, elemento oposto, elemento inverso e distributiva — em vez das definições, conforme mostram os exemplos a seguir.

Exemplos

Sendo $z_1 = 3 + 2i$ e $z_2 = 4 - 5i$, vamos efetuar:

a. $z_1 + z_2 = 3 + 2i + 4 - 5i = (3 + 4) + (2 - 5)i = 7 - 3i$

b. $z_1 - z_2 = 3 + 2i - (4 - 5i) = 3 + 2i - 4 + 5i = -1 + 7i$

c. $z_1 \cdot z_2 = (3 + 2i) \cdot (4 - 5i) = 3 \cdot 4 + 3 \cdot (-5i) + 2i \cdot 4 + 2i \cdot (-5i) =$

$= 12 - 15i + 8i - 10i^2 = 12 - 15i + 8i + 10 = 22 - 7i$

d. $z_1 : z_2 = z_1 \cdot \dfrac{1}{z_2} = (3 + 2i) \cdot \dfrac{1}{4 - 5i} = \dfrac{3 + 2i}{4 - 5i}$

Para representar esse resultado na forma algébrica, $a + bi$, basta multiplicar o numerador e o denominador da fração pelo conjugado do denominador, isto é:

$$\frac{3 + 2i}{4 - 5i} = \frac{(3 + 2i) \cdot (4 + 5i)}{(4 - 5i) \cdot (4 + 5i)} = \frac{12 + 15i + 8i + 10i^2}{4^2 - (5i)^2} = \frac{2 + 23i}{41}$$

Assim, $z_1 : z_2 = \dfrac{2}{41} + \dfrac{23}{41}i$.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

4. Determine o número $z = x + yi$, com $\{x, y\} \subset \mathbb{R}$, tal que $zi + 2\bar{z} = 4 - i$.

Resolução

$$(x + yi)i + 2(x - yi) = 4 - i \Rightarrow xi + yi^2 + 2x - 2yi = 4 - i$$

$$\therefore (-y + 2x) + (x - 2y)i = 4 - i$$

Assim: $\begin{cases} -y + 2x = 4 \\ x - 2y = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2x - 4 & (1) \\ x - 2y = -1 & (2) \end{cases}$

Substituímos (1) em (2): $x - 2(2x - 4) = -1$

$$\therefore x - 4x + 8 = -1 \Rightarrow x = 3$$

Fazendo $x = 3$ em (1), temos: $y = 2 \cdot 3 - 4 \Rightarrow y = 2$

Logo: $z = 3 + 2i$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Faça os exercícios no caderno.

5. Dados os números complexos $z_1 = -4 + 2i$, $z_2 = 5 + i$, $z_3 = 6$ e $z_4 = -3i$, calcule:

a. $z_1 + z_2$ **5. a.** $1 + 3i$

b. $z_3 + \bar{z}_2 - z_4$ **5. b.** $11 + 2i$

6. Sendo $z_1 = 5 + 3i$, $z_2 = 6$, $z_3 = 2i$ e $z_4 = 2 - i$, calcule:

a. $z_1 \cdot z_2$ **6. a.** $30 + 18i$

b. $z_1 \cdot z_3$ **6. b.** $-6 + 10i$

c. $z_1 \cdot z_4$ **6. c.** $13 + i$

d. $z_2 \cdot \bar{z}_4$ **6. d.** $12 + 6i$

7. Considere os números complexos: $z_1 = 2 + 3i$, $z_2 = 2 - i$, $z_3 = 4i$ e $z_4 = 2$. Calcule:

a. $\frac{z_4}{z_1}$ **7. a.** $\frac{4}{13} - \frac{6i}{13}$

b. $\frac{z_3}{z_2}$ **7. b.** $-\frac{4}{5} + \frac{8i}{5}$

c. $(z_2)^{-1}$ **7. c.** $\frac{2}{5} + \frac{i}{5}$

d. $(z_3)^{-1}$ **7. d.** $-\frac{i}{4}$

8. Resolva cada uma das expressões.

a. $3 + 2i + (1 + 5i)(2 - i)$ **8. a.** $10 + 11i$

b. $\frac{2 + i}{1 - 2i} + 2i(1 - 3i)$ **8. b.** $6 + 3i$

9. Resolva as equações a seguir no universo $\mathbb{C}$.

a. $z + 4\bar{z} = 10 + 18i$ **9. a.** $S = \{2 - 6i\}$

b. $z \cdot \bar{z} + 2z = 16 + 2i$ **9. b.** $S = \{3 + i, -5 + i\}$

Sugestão: Em cada equação, substitua a variável z por $x + yi$, com $\{x, y\} \subset \mathbb{R}$.

10. Obtenha o valor real de a para que o número complexo $z = (a + 1)(a - 1 + i)$ seja imaginário puro. **10.** $a = 1$

11. Obtenham todos os números reais α de modo que o número $z = \frac{i + \text{sen } \alpha}{1 - i}$ seja real. **11.** $\alpha = \frac{3\pi}{2} + k \cdot 2\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$

Para retomar os conteúdos estudados, resolva os exercícios complementares 3 a 5.

Mentes brilhantes

A origem dos números complexos

Na primeira metade do século XVI, os matemáticos italianos Gerônimo Cardano, Niccolò Fontana (pseudônimo Tartaglia), Scipione Dal Ferro, Ludovico Ferrari e outros colaboradores ocasionais protagonizaram um importante episódio da história da Matemática ao resolverem uma equação polinomial do 3º grau. Inicialmente, deduziram a fórmula a seguir para resolver qualquer equação incompleta do tipo $x^3 + px = q$, com $\{p, q\} \subset \mathbb{R}$.

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

Algum tempo depois, apresentaram a resolução de uma equação polinomial do 3º grau completa.

Por exemplo, na equação $x^3 = 6x - 4$, que é equivalente a $x^3 - 6x = -4$, aplicando a fórmula anterior, obtemos:

$$x = \sqrt[3]{-2 + \sqrt{-4}} + \sqrt[3]{-2 - \sqrt{-4}}$$

Nesse momento poderíamos ser levados a concluir que a equação $x^3 - 6x = -4$ não possui raiz real, pois não existe no conjunto $\mathbb{R}$ o número $\sqrt{-4}$. Porém, essa conclusão é equivocada, uma vez que o número real 2 é raiz da equação, como se constata pela substituição de x por 2:

$$2^3 - 6 \cdot 2 = -4$$

Essa constatação, ao resolver uma equação desse tipo, fez com que Gerônimo Cardano passasse a admitir a existência da raiz quadrada de números negativos, fornecendo subsídios à construção de um novo conjunto numérico: o conjunto dos **números complexos**.

Nota: Neste texto, foram utilizadas notações modernas, que ainda não existiam na época de Cardano.

Elaborado com base em: CERRI, C.; MONTEIRO, M. S. **História dos números complexos**. Disponível em: https://www.ime.usp.br/~martha/caem/complexos.pdf. Acesso em: 3 ago. 2024.

3. Potências de números complexos com expoentes inteiros

Sendo w um número complexo qualquer, definimos:

- $w^0 = 1$, com $w \neq 0 + 0i$
- $w^1 = w$
- $w^n = \underbrace{w \cdot w \cdot w \cdot \ldots \cdot w}_{n \text{ fatores}}$, com $n \in \mathbb{N}$ e $n \geqslant 2$
- $w^{-n} = \frac{1}{w^n}$, com $w \neq 0$ e $n \in \mathbb{Z}$

Exemplos

a. $i^3 = i \cdot i \cdot i = (i \cdot i) \cdot i = i^2 \cdot i = (-1) \cdot i = -i$

b. $i^4 = i \cdot i \cdot i \cdot i = (i \cdot i) \cdot (i \cdot i) = i^2 \cdot i^2 = (-1) \cdot (-1) = 1$

c. $(2i)^{-4} = \dfrac{1}{(2i)^4} = \dfrac{1}{2i \cdot 2i \cdot 2i \cdot 2i} = \dfrac{1}{16i^4} = \dfrac{1}{16 \cdot 1} = \dfrac{1}{16}$

Observação

Não há unanimidade entre os matemáticos quanto à adoção do valor 1 para a potência 0^0, por isso excluímos a base zero da definição $w^0 = 1$.

Propriedades das potências

Com a definição de potência e com as propriedades da multiplicação, demonstra-se que, para quaisquer números complexos w e v, e quaisquer números inteiros m e n, valem as propriedades a seguir, considerando obedecidas as condições de existência:

P1. $w^n \cdot w^m = w^{n+m}$

P2. $w^n : w^m = w^{n-m}$

P3. $(w^n)^m = w^{nm}$

P4. $(wv)^n = w^n v^n$

P5. $\left(\dfrac{w}{v}\right)^n = \dfrac{w^n}{v^n}$

Defina potência de um número complexo com expoente inteiro e peça aos estudantes que calculem as potências a seguir, apresentando o resultado na forma algébrica.
- $(4 + i)^2$
(resposta: $15 + 8i$)
- $(4 + i)^3$
(resposta: $52 + 47i$)

Apresente as propriedades das potências, refazendo o **exercício resolvido 5** na lousa com a participação dos estudantes.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

5. Calcule o valor numérico de: $(2 + i)^4 \cdot (1 + 2i)^4$

Resolução

$$(2 + i)^4 \cdot (1 + 2i)^4 \overset{P4}{=} [(2 + i)(1 + 2i)]^4 = [2 + 4i + i + 2i^2]^4 =$$

$$= [2 + 4i + i - 2]^4 = [5i]^4 \overset{P4}{=} 5^4 \cdot i^4 \overset{P3}{=} 5^4 \cdot (i^2)^2 = 5^4 \cdot (-1)^2 = 625 \cdot 1 = 625$$

Potências de i

O cálculo das potências de números complexos com expoentes inteiros envolve, particularmente, potências de **i**. Para agilizar esse tipo de cálculo, é conveniente conhecer o teorema a seguir.

Existem quatro, e somente quatro, valores para potências de i com expoentes inteiros. São eles:

- $i^0 = 1$
- $i^1 = i$
- $i^2 = -1$
- $i^3 = -i$

Demonstração

Sendo n um número inteiro, vamos calcular o valor da potência i^n.

1º caso: $n \geqslant 0$

Dividindo o expoente n por 4, obtemos um quociente inteiro q e um resto inteiro r tal que $0 \leqslant r < 4$, isto é, $n = 4q + r$. Assim, aplicando as propriedades das potências, temos:

$$i^n = i^{4q+r} = i^{4q} \cdot i^r = (i^4)^q \cdot i^r = 1^q \cdot i^r = 1 \cdot i^r = i^r$$

Como r é inteiro e $0 \leqslant r < 4$, concluímos que i^r é um dos quatro valores i^0, i^1, i^2 ou i^3.

2º caso: $n < 0$

$$i^n = (i^{-1})^{-n}$$

Observando que $i^{-1} = \frac{1}{i}$, vamos multiplicar o numerador e o denominador de $\frac{1}{i}$ por $-i$:

$$i^{-1} = \frac{1}{i} = \frac{1 \cdot (-i)}{i \cdot (-i)} = \frac{-i}{-i^2} = -i$$

Assim, temos:

$$i^n = (-i)^{-n} = (-1)^{-n} \cdot i^{-n}$$

Como $n < 0$, temos $-n > 0$; portanto, pelo 1º caso, i^{-n} é um dos quatro valores i^0, i^1, i^2 ou i^3.

E, como $(-1)^{-n}$ é igual a 1 ou -1, concluímos que $(-1)^{-n} \cdot i^{-n}$ é um dos quatro valores i^0, i^1, i^2 ou i^3.

Consequência

Para o cálculo da potência i^n com n inteiro e $n \geqslant 4$, dividimos n por 4, obtendo um resto inteiro r. Temos, então, $i^n = i^r$.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

6. Calcule:

a. i^{14} **b.** i^{61} **c.** i^{100} **d.** i^{-25}

Resolução

a. Dividimos 14 por 4, obtendo resto 2. Logo: $i^{14} = i^2 = -1$

b. Dividimos 61 por 4, obtendo resto 1. Logo: $i^{61} = i^1 = i$

c. Dividimos 100 por 4, obtendo resto 0. Logo: $i^{100} = i^0 = 1$

d. $i^{-25} = \frac{1}{i^{25}}$

Dividimos 25 por 4, obtendo resto 1. Logo:

$$i^{-25} = \frac{1}{i^{25}} = \frac{1}{i^1} = \frac{1}{i} = \frac{1 \cdot (-i)}{i \cdot (-i)} = \frac{-i}{-i^2} = -i$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Faça os exercícios no caderno.

12. Calcule o valor de cada uma das potências:

a. i^{65} **12. a.** i
b. i^{36} **12. b.** 1
c. i^{22} **12. c.** -1
d. i^{51} **12. d.** $-i$
e. $(2i)^7$ **12. e.** $-128i$
f. $(3i)^3$ **12. f.** $-27i$
g. $(1 + i)^{16}$ **12. g.** 256
h. $(1 + i)^{17}$ **12. h.** $256 + 256i$

13. Um número complexo z é tal que $z^2 = 3 + 4i$ e $z^3 = 2 + 11i$. Aplicando as propriedades das potências, calcule:

a. z^5 **13. a.** $-38 + 41i$
b. z^6 **13. b.** $-117 + 44i$
c. z^{-1} **13. c.** $\frac{2}{5} - \frac{i}{5}$

14. Faça o que se pede.

a. Calcule $(1 - i)^2$. **14. a.** $-2i$

b. Observando o resultado obtido no item **a**, calcule $(1 - i)^{12}$. **14. b.** -64

c. Mostre que o número complexo $1 - i$ é raiz da equação $z^{13} + 32z^2 + 64 = 0$.
14. c. Resposta nas **Orientações específicas** deste capítulo.

15. Um número complexo w é uma raiz quadrada de um número complexo z se, e somente se, $w^2 = z$.

a. Mostrem que os números a seguir são raízes quadradas do número complexo $z = 4i$.

- $w_1 = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$;
- $w_2 = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}$.

15. a. Resposta nas **Orientações específicas** deste capítulo.

b. Determinem as raízes quadradas complexas de -36. **15. b.** $6i$ e $-6i$

c. Resolvam em $\mathbb{C}$ a equação $x^2 - 2x + 10 = 0$.
15. c. $S = \{1 + 3i, 1 - 3i\}$

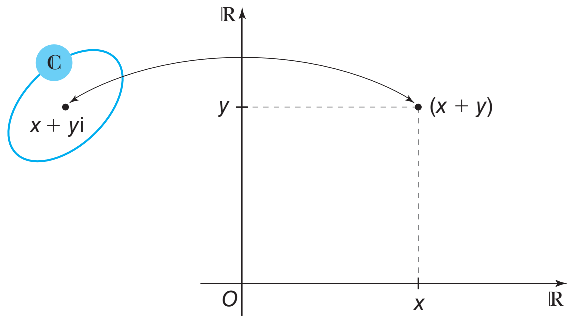
16. Elabore um problema envolvendo raízes quadradas de um número complexo. Em seguida, troque o problema elaborado com um colega para que um resolva o problema elaborado pelo outro. Por fim, analisem e discutam as resoluções. **16.** Resposta pessoal.

Para retomar os conteúdos estudados, resolva os exercícios complementares 6 e 7.

Esse assunto pode ser introduzido com base no texto a seguir a fim de evidenciar que os conhecimentos matemáticos são uma construção fruto do trabalho de diversas pessoas.
Quando você estudou o conjunto dos números reais, percebeu que é possível estabelecer uma relação biunívoca entre o conjunto ℝ e o conjunto dos pontos de uma reta. Assim, podemos representar, geometricamente, o conjunto ℝ pelo conjunto dos pontos de uma reta. Como representar, geometricamente, o conjunto dos números complexos?
No final do século XVIII, em 1799, o topógrafo norueguês Caspar Wessel (1745-1818) publicou um trabalho em que mostrava uma representação geométrica para os números complexos. Wessel raciocinou da seguinte maneira: o conjunto dos números do tipo, sendo *x* e *y* reais, pode ser relacionado, biunivocamente, ao conjunto dos pares ordenados de números reais (*x*, *y*), e o conjunto desses pares, por sua vez, pode ser relacionado, biunivocamente, ao conjunto dos pontos de um plano através de um sistema cartesiano de eixos. Desse modo, cada ponto (*x*, *y*) do plano cartesiano passa a representar o número complexo, e, portanto, a representação geométrica do conjunto ℂ é um plano.
Em 1806, o matemático Jean Robert Argand (1768-1822), sem conhecer o trabalho de Wessel, criou a mesma representação para os números complexos, e a glória dessa criação acabou ficando ligada ao nome de Argand. Partindo das ideias de Wessel e Argand, o matemático alemão Johann Carl Friedrich Gauss (1777--1855) complementou o estudo do plano complexo, também conhecido como plano de Argand-Gauss.
Com a participação dos estudantes, refaça os **exercícios resolvidos 7** e **8** e defina lugar geométrico.

4. Representação geométrica do conjunto dos números complexos

A cada número complexo $z = x + yi$, em que x e y são números reais, vamos associar o ponto do plano cartesiano determinado pelo par ordenado de números reais (x, y). Essa associação é biunívoca, isto é, cada número complexo está associado a um único ponto do plano cartesiano, e cada ponto desse plano está associado a um único número complexo.



Por meio dessa associação, representa-se geometricamente o conjunto ℂ pelo plano, que é chamado de **plano complexo** ou **plano de Argand-Gauss**, em homenagem aos seus criadores: o matemático alemão Carl Friedrich Gauss (1777-1855) e o guarda-livros suíço Jean Robert Argand (1768-1822).

No plano de Argand-Gauss, o eixo das abscissas, indicado por **Re**, é chamado de **eixo real**, e o eixo das ordenadas, indicado por **Im**, é chamado de **eixo imaginário**. Cada ponto $P(x, y)$ desse plano é a **imagem** ou **afixo** do número complexo $x + yi$.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

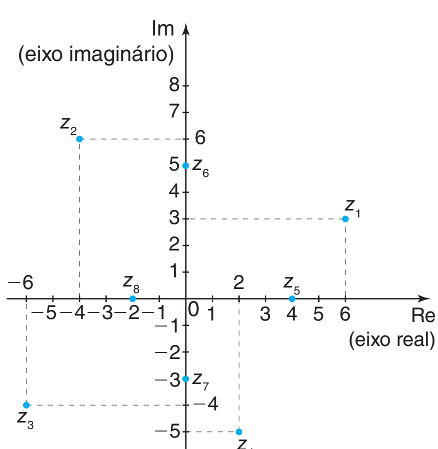
7. Represente no plano de Argand-Gauss a imagem de cada um dos números complexos a seguir.

a. $z_1 = 6 + 3i$
b. $z_2 = -4 + 6i$
c. $z_3 = -6 - 4i$
d. $z_4 = 2 - 5i$
e. $z_5 = 4$
f. $z_6 = 5i$
g. $z_7 = -3i$
h. $z_8 = -2$

Resolução

Aos números z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6, z_7 e z_8 associamos os pontos determinados pelos pares ordenados de números reais (6, 3), (−4, 6), (−6, −4), (2, −5), (4, 0), (0, 5), (0, −3) e (−2, 0), respectivamente.

Plano de Argand-Gauss



ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

No **exercício proposto 17**, sobre L. G., sugira aos estudantes que substituam a variável complexa *z* pela sua forma algébrica, ou seja, $x + yi$, com $\{x, y\} \subset \mathbb{R}$. Isso faz com que a equação do L. G. seja obtida na forma cartesiana, o que facilita sua identificação.
No **exercício proposto 18**, enfatize que um número complexo pode ser interpretado como um vetor. Mostre que a soma de dois vetores representados pelos números complexos *z* e *w* é o vetor representado pela soma $z + w$. Faça o mesmo para a diferença de vetores e para o produto de vetor por número real.

8. Represente no plano complexo o lugar geométrico (L.G.) das imagens dos números complexos z que satisfazem a equação $zi - \bar{z} = -3 + 3i$.

Resolução

Lugar geométrico é qualquer conjunto de pontos, podendo até mesmo ser o conjunto vazio. Desse modo, o enunciado dessa questão pede o conjunto de pontos do plano complexo que representam os números complexos z tais que: $zi - \bar{z} = -3 + 3i$

Indicamos o número complexo z por $x + yi$, com $\{x, y\} \subset \mathbb{R}$, obtendo:

$zi - \bar{z} = -3 + 3i \Rightarrow (x + yi)i - (x - yi) = -3 + 3i$

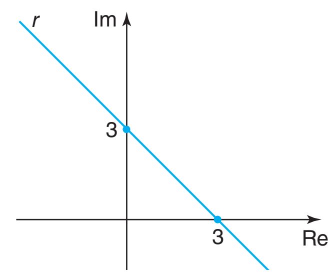
$\therefore xi - y - x + yi = -3 + 3i$

$\therefore -(x + y) + (x + y)i = -3 + 3i$

Pela definição de igualdade entre números complexos, temos:

$$\begin{cases} -(x + y) = -3 \\ x + y = 3 \end{cases} \Rightarrow x + y = 3$$

Logo, o L.G. das imagens dos números complexos $z = x + yi$ é a reta r de equação $x + y = 3$, cujo gráfico é:



EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Faça os exercícios no caderno.

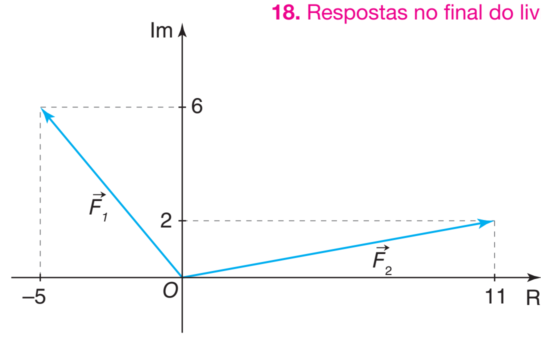
17. Represente no plano de Argand-Gauss o L.G. (lugar geométrico) das imagens dos números complexos z tais que $\bar{z} = \frac{16}{z}$.

17. Resposta nas **Orientações específicas** deste capítulo.

18. No estudo de grandezas vetoriais no plano, é comum adotar o plano complexo para a representação dos vetores, convencionando-se que cada número complexo $z = a + bi$, com $\{a, b\} \subset \mathbb{R}$, representa um vetor de origem no afixo do número $0 + 0i$ (origem do sistema de eixos) e extremidade no afixo de z. A vantagem dessa representação reside no fato de que as operações de adição de vetores e de multiplicação de um número real por um vetor podem ser efetuadas com os números complexos que os representam. Por exemplo, a soma dos vetores representados por $z = 4 + 4i$ e $w = 6 + 2i$ é o vetor representado por $z + w = 10 + 6i$, e o produto do número real 2 pelo vetor representado pelo número complexo $u = 4 + 3i$ é o vetor representado por $2u = 8 + 6i$.
De acordo com essas informações, façam o que se pede.

a. Considerem duas forças $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$ aplicadas simultaneamente a um ponto material localizado na origem O do sistema de eixos do plano complexo, conforme mostra o esquema a seguir. Representem a força $\vec{F}$ resultante das forças $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$ que atuam no ponto material.

18. Respostas no final do livro.



b. Mostrem que o vetor $\vec{F}$ representado no item **a** é diagonal de um paralelogramo do qual $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$ são lados consecutivos.

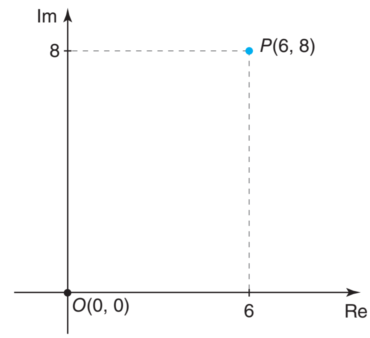
Para retomar os conteúdos estudados, resolva o exercício complementar 8.

5. Módulo de um número complexo

Vamos revisar a definição de módulo de um número real x. Para isso, consideramos no eixo real de origem O um ponto A de abscissa x e definimos o módulo de x como a distância entre O e A.

$|x| = OA$

Se estendermos essa definição para o plano complexo, teremos a definição de **módulo de um número complexo**. Por exemplo, consideremos a imagem P do número complexo $z = 6 + 8i$:

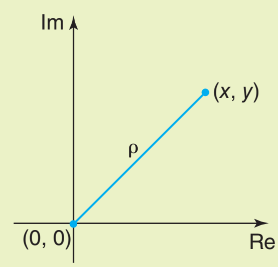


A distância entre a origem O e P é chamada de **módulo** do número complexo $z = 6 + 8i$.

$$|z| = OP = \sqrt{(6-0)^2 + (8-0)^2} = \sqrt{100} = 10$$

$$\therefore |z| = |6 + 8i| = 10$$

O **módulo ρ** de um número complexo $z = x + yi$, com $\{x, y\} \subset \mathbb{R}$, é a distância do ponto (x, y) à origem $(0, 0)$ do sistema de eixos do plano de Argand-Gauss.



$$\rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Observação

Adotaremos a letra grega ρ (rô) para indicar o módulo do complexo z.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

9. Calcule o módulo de cada um dos seguintes números complexos:

a. $z_1 = 12 + 5i$

b. $z_2 = 2 - 4i$

c. $z_3 = 6i$

d. $z_4 = -4$

Resolução

a. $|z_1| = \sqrt{12^2 + 5^2} = \sqrt{169} = 13$

b. $|z_2| = \sqrt{2^2 + (-4)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

c. $|z_3| = \sqrt{0^2 + 6^2} = \sqrt{36} = 6$

d. $|z_4| = \sqrt{(-4)^2 + 0^2} = \sqrt{16} = 4$

10. Represente no plano complexo o L.G. das imagens dos números complexos z tais que $|z - 5| = 4$.

Resolução

Indicando o número complexo z por $x + yi$, com $\{x, y\} \subset \mathbb{R}$, temos:

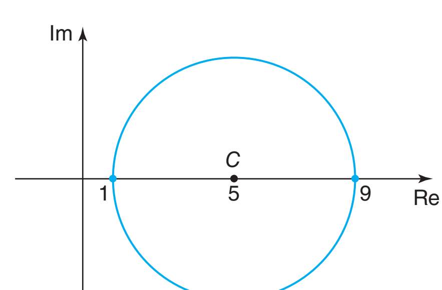
$$|z - 5| = 4 \Rightarrow |x + yi - 5| = 4$$

$$\therefore |(x - 5) + yi| = 4$$

Aplicando a definição de módulo de um número complexo, obtemos:

$$\sqrt{(x-5)^2 + y^2} = 4 \Rightarrow (x-5)^2 + y^2 = 16$$

Logo, o L.G. das imagens dos números complexos $z = x + yi$ é a circunferência de equação $(x - 5)^2 + y^2 = 16$, de centro $(5, 0)$ e raio 4, cujo gráfico é:



Reflexão

A equação $|x| = 6$ tem quantas raízes reais? E quantas raízes complexas?

Reflexão. Na reta real existem apenas dois pontos que distam 6 unidades da origem O; logo, a equação $|x| = 6$ possui apenas duas raízes reais: 6 e -6.
No plano complexo existem infinitos pontos que distam 6 unidades da origem O; logo, a equação $|x| = 6$ possui infinitas raízes complexas, que são os números cujos afixos formam a circunferência de centro O e raio 6.

ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

Propriedades do módulo de um número complexo

Sendo z, z_1 e z_2 números complexos quaisquer e n um número inteiro, temos:

M1. $|z| \geqslant 0$

M2. $z \cdot \bar{z} = |z|^2$

M3. $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

M4. $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$, com $z_2 \neq 0$

M5. $|z^n| = |z|^n$, para todo n se $z \neq 0$ ou para $n > 0$ se $z = 0$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

11. Calcule:

a. $|(6 + 8i)(4 - 3i)|$ **b.** $\left|\frac{4 + 2i}{15 - 8i}\right|$ **c.** $|(3 - i)^6|$

Resolução

a. Aplicando a propriedade M3 dos módulos, temos:

$$|(6 + 8i)(4 - 3i)| = |(6 + 8i)| \cdot |(4 - 3i)| =$$

$$= \sqrt{6^2 + 8^2} \cdot \sqrt{4^2 + (-3)^2} = \sqrt{100} \cdot \sqrt{25} = 10 \cdot 5 = 50$$

b. Pela propriedade M4 dos módulos, temos:

$$\left|\frac{4 + 2i}{15 - 8i}\right| = \frac{|4 + 2i|}{|15 - 8i|} = \frac{\sqrt{4^2 + 2^2}}{\sqrt{15^2 + (-8)^2}} = \frac{\sqrt{20}}{\sqrt{289}} = \frac{2\sqrt{5}}{17}$$

c. Aplicando a propriedade M5 dos módulos, temos:

$$|(3 - i)^6| = |3 - i|^6 = \left(\sqrt{3^2 + (-1)^2}\right)^6 = (\sqrt{10})^6 = 10^3 = 1.000$$

12. Um número complexo é igual ao inverso do seu conjugado. Calcule o módulo desse número complexo.

Resolução

Indicando por z esse número complexo, temos: $z = \frac{1}{\bar{z}} \Rightarrow z \cdot \bar{z} = 1$

Pela propriedade M2, $z \cdot \bar{z} = |z|^2$. Assim: $|z|^2 = 1$ e, portanto, $|z| = 1$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Faça os exercícios no caderno.

19. Calcule:

a. $|4 + 3i|$ **19. a.** 5

b. $|12 - 5i|$ **19. b.** 13

c. $|4i|$ **19. c.** 4

d. $|-7i|$ **19. d.** 7

e. $|9|$ **19. e.** 9

f. $|-6|$ **19. f.** 6

20. Represente no plano de Argand-Gauss o L.G. das imagens dos números complexos z em cada um dos casos.

a. $|z - 3| = 6$ **b.** $|z - 2 + 5i| = 4$

20. Respostas no final do livro.

21. Faça o que se pede.

a. Dentre os números complexos z, tais que $|z - 3i| = 5$, determine o de maior módulo. **21. a.** $z = 8i$

b. Dentre os números complexos w, tais que $|w - (1 + i)| = 2\sqrt{2}$, determine o de menor módulo. **21. b.** $w = -1 - i$

22. Represente no plano de Argand-Gauss o L.G. das imagens dos números complexos z em cada um dos casos. **22.** Respostas no final do livro.

a. $|z| + |3z| = 4$ **b.** $z \cdot \bar{z} = |4z|$

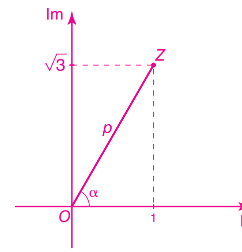
23. Represente no plano de Argand-Gauss o lugar geométrico das imagens dos números complexos z nos seguintes casos. **23.** Respostas no final do livro.

a. $|z|^2 + |z + \bar{z}|^2 = 1$ **b.** $z \cdot \bar{z} - |z| + 1 = 0$

24. Elabore um problema envolvendo lugar geométrico no plano complexo. Em seguida, troque o problema elaborado com um colega para que um resolva o problema elaborado pelo outro. Por fim, analisem e discutam as resoluções. **24.** Resposta pessoal.

Para retomar os conteúdos estudados, resolva os exercícios complementares 9 e 10.

Com o intuito de estimular a iniciativa dos estudantes, proponha o exercício a seguir, antes do estudo do tópico 6.
Considerando o número complexo *z* representado no plano de Argand-Gauss a seguir, faça o que se pede.

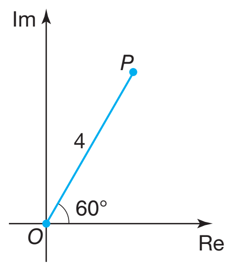


FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

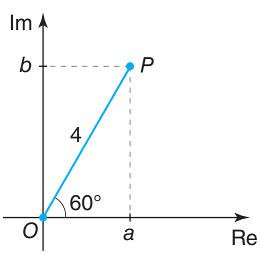
a) Determine a distância *r*, que representa $|z|$. (2)
b) Determine cos α e sen α. ($\cos \alpha = \frac{1}{2}$ e $\text{sen}\ \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$)
c) Determine a medida angular α, com $0° \leq \alpha < 360°$. ($\alpha = 60°$)
Após essa discussão, defina argumento de um número complexo e apresente a forma trigonométrica.
Peça aos estudantes que representem, na forma trigonométrica, o número complexo *z* do gráfico anterior.
($z = 2\,(\cos 60° + \text{i sen } 60°)$).

6. Coordenadas polares no plano complexo

A imagem de um número complexo não nulo no plano de Argand-Gauss pode ser determinada também por meio de uma distância e de um ângulo. Por exemplo, existe um único número complexo *z* cuja imagem *P* dista 4 unidades da origem *O* do sistema de modo que a semirreta $\overrightarrow{OP}$ forma com o semieixo positivo *Ox* um ângulo de 60°, medido no sentido anti-horário, a partir desse semieixo.



As medidas 4 e 60° são chamadas de **coordenadas polares** da imagem do número complexo *z*. Com essas coordenadas podemos determinar a parte real *a* e a parte imaginária *b* do número *z*.



$$\begin{cases} \cos 60° = \dfrac{a}{4} \\ \text{sen } 60° = \dfrac{b}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{2} = \dfrac{a}{4} \\ \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{b}{4} \end{cases}$$

$$\therefore a = 2 \text{ e } b = 2\sqrt{3}$$

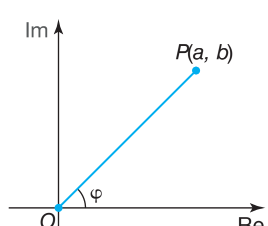
Logo, a forma algébrica do número *z* é:

$$z = 2 + 2\sqrt{3}\text{i}$$

Reciprocamente, a partir da forma algébrica podemos determinar as coordenadas polares de um número complexo não nulo, conforme apresentaremos a seguir.

Argumento de um número complexo

Dado um número complexo não nulo $z = a + b\text{i}$, com *a* e *b* reais, consideremos no plano complexo os pontos $O(0, 0)$, $P(a, b)$ e o ângulo de medida φ (lemos: "fi") cujos lados são o semieixo positivo *Ox* e a semirreta $\overrightarrow{OP}$, conforme a figura a seguir.



A medida φ, obtida no sentido anti-horário a partir do semieixo positivo *Ox*, com $0 \leqslant \varphi < 2\pi$ ou $0° \leqslant \varphi < 360°$, é chamada de **argumento** do número complexo *z*.

Observação

O único número complexo para o qual **não se define** argumento é o número $z = 0$. Assim, um número complexo possui argumento se, e somente se, é diferente de zero.

ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

EXERCÍCIO RESOLVIDO

13. Obtenha o argumento de cada um dos números complexos a seguir.

a. $z_1 = 4i$

b. $z_2 = -5i$

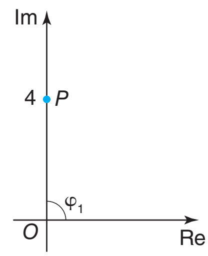
c. $z_3 = 6$

d. $z_4 = -3$

Resolução

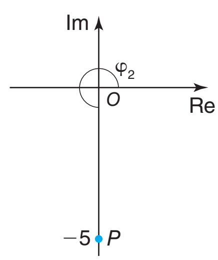
Quando a imagem *P* de um número complexo não nulo pertence a um dos eixos coordenados, o argumento desse número é facilmente obtido pelo gráfico.

a.



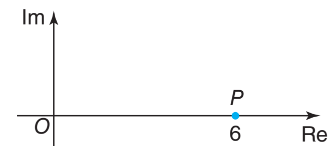
$\varphi_1 = 90°$ ou $\varphi_1 = \dfrac{\pi}{2}$ rad

b.



$\varphi_2 = 270°$ ou $\varphi_2 = \dfrac{3\pi}{2}$ rad

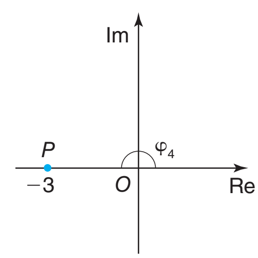
c.



Como a semirreta $\overrightarrow{OP}$ coincide com o semieixo positivo *Ox* e como $0 \leqslant \varphi < 2\pi$ ou $0° \leqslant \varphi < 360°$, temos:

$\varphi_3 = 0°$ ou $\varphi_3 = 0$ rad

d.



$\varphi_4 = 180°$ ou $\varphi_4 = \pi$ rad

Cálculo do argumento de um número complexo

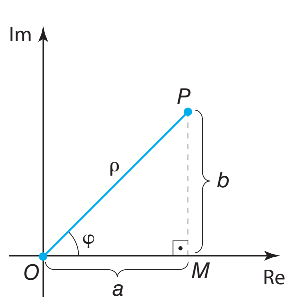
Observação

Em Engenharia elétrica, na análise de circuitos de corrente alternada, os fasores são usados para representar tensões e correntes. O argumento do fasor indica a fase da senoide correspondente.

No exercício resolvido anterior, foi apresentado que, se a imagem do número complexo não nulo pertence a um dos eixos coordenados, então é muito simples a determinação do argumento. Vamos estudar agora o cálculo do argumento quando a imagem do número complexo não pertence a nenhum dos eixos coordenados.

Demonstraremos apenas para $a > 0$ e $b > 0$; porém, o resultado obtido vale também para os demais casos ($a < 0$ e $b > 0$, $a < 0$ e $b < 0$, $a > 0$ e $b < 0$).

Seja $z = a + bi$, com $a > 0$ e $b > 0$. A imagem $P(a, b)$ de z é um ponto do 1º quadrante:



A distância $OP = \rho$ é o módulo de z, isto é:

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad (1)$$

No triângulo *OMP*, temos:
$$\begin{cases} \cos \varphi = \dfrac{a}{\rho} & (2) \\ \operatorname{sen} \varphi = \dfrac{b}{\rho} & (3) \end{cases}$$

As igualdades (1), (2) e (3) determinam o argumento de z.

Nota:

As igualdades (1), (2) e (3), obtidas nos quatro casos, são válidas também quando a imagem $P(a, b)$ do número complexo não nulo $z = a + bi$ pertence a um dos eixos coordenados.

Os quatro casos e a nota anterior nos permitem enunciar:

Se $z = a + bi$, com $\{a, b\} \subset \mathbb{R}$, é um número complexo não nulo, de módulo ρ e argumento φ, então:

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2} \text{ e } \begin{cases} \cos \varphi = \dfrac{a}{\rho} \\ \text{sen } \varphi = \dfrac{b}{\rho} \end{cases}$$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

14. Calcule o módulo e o argumento de cada um dos números complexos a seguir.

a. $z = 2\sqrt{3} + 2i$

b. $w = 4 - 4i$

Resolução

a. $z = 2\sqrt{3} + 2i \begin{cases} \text{parte real: } a = 2\sqrt{3} \\ \text{parte imaginária: } b = 2 \end{cases}$

O módulo ρ e o argumento φ do número z são dados por:

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2} \Rightarrow \rho = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + 2^2} = \sqrt{16} = 4$$

$$\begin{cases} \cos \varphi = \dfrac{a}{\rho} \\ \text{sen } \varphi = \dfrac{b}{\rho} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos \varphi = \dfrac{2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \text{sen } \varphi = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2} \end{cases} \therefore \varphi = 30°$$

Concluímos, então, que o número complexo z tem módulo 4 e argumento $30° \left(\text{ou } \frac{\pi}{6} \text{ rad}\right)$.

b. $w = 4 - 4i \begin{cases} \text{parte real: } a = 4 \\ \text{parte imaginária: } b = -4 \end{cases}$

O módulo ρ e o argumento φ do número w são dados por:

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2} \Rightarrow \rho = \sqrt{4^2 + (-4)^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

$$\begin{cases} \cos \varphi = \dfrac{a}{\rho} \\ \text{sen } \varphi = \dfrac{b}{\rho} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos \varphi = \dfrac{4}{4\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \text{sen } \varphi = -\dfrac{4}{4\sqrt{2}} = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \therefore \varphi = 315°$$

Concluímos, então, que o número complexo w tem módulo $4\sqrt{2}$ e argumento $315° \left(\text{ou } \frac{7\pi}{4} \text{ rad}\right)$.

Forma trigonométrica de um número complexo

Para todo número complexo não nulo $z = a + bi$, com $\{a, b\} \subset \mathbb{R}$, de módulo ρ e argumento φ, temos:

$$\begin{cases} \cos \varphi = \dfrac{a}{\rho} \\ \text{sen } \varphi = \dfrac{b}{\rho} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \rho \cos \varphi \\ b = \rho \text{ sen } \varphi \end{cases}$$

Observação

A forma trigonométrica de um número complexo facilita operações com esses números, como a multiplicação e divisão ou a potenciação.

Observação

Embora não se defina o argumento do número complexo $z = 0$, pode-se representar $z = 0$ sob a forma trigonométrica $z = 0\,(\cos\varphi + i\,\text{sen}\,\varphi)$, para qualquer valor de φ.

Assim, podemos representar o número $z = a + bi$ sob a forma $z = \rho\cos\varphi + (\rho\,\text{sen}\,\varphi)i$ ou, ainda:

$$\boxed{z = \rho(\cos\varphi + i\,\text{sen}\,\varphi)}$$

Essa forma é chamada de **forma trigonométrica** ou **forma polar** do número complexo z.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

15. Represente na forma trigonométrica cada um dos números complexos a seguir.

a. $z_1 = 2 + 2i$ **b.** $z_2 = -5 + 5\sqrt{3}i$ **c.** $z_3 = -4i$

Resolução

a. $z_1 = 2 + 2i \begin{cases} \text{parte real: } a = 2 \\ \text{parte imaginária: } b = 2 \end{cases}$

O módulo ρ e o argumento φ do número z_1 são dados por:

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2} \Rightarrow \rho = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{a}{\rho} \\ \text{sen}\,\varphi = \dfrac{b}{\rho} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{2}{2\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \text{sen}\,\varphi = \dfrac{2}{2\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$$\therefore \varphi = 45°$$

Logo, a forma trigonométrica de z_1 é:

$$z_1 = 2\sqrt{2}(\cos 45° + i\,\text{sen}\,45°) \text{ ou } z_1 = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\,\text{sen}\frac{\pi}{4}\right)$$

b. $z_2 = -5 + 5\sqrt{3}\,i \begin{cases} \text{parte real: } a = -5 \\ \text{parte imaginária: } b = 5\sqrt{3} \end{cases}$

O módulo ρ e o argumento φ do número z_2 são dados por:

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2} \Rightarrow \rho = \sqrt{(-5)^2 + (5\sqrt{3})^2} = \sqrt{100} = 10$$

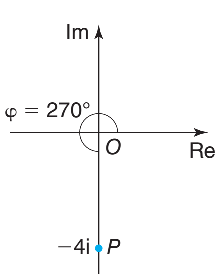
$$\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{a}{\rho} \\ \text{sen}\,\varphi = \dfrac{b}{\rho} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos\varphi = -\dfrac{5}{10} = -\dfrac{1}{2} \\ \text{sen}\,\varphi = \dfrac{5\sqrt{3}}{10} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \therefore \varphi = 120°$$

Logo, a forma trigonométrica de z_2 é:

$$z_2 = 10(\cos 120° + i\,\text{sen}\,120°) \text{ ou } z_2 = 10\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\,\text{sen}\,\frac{2\pi}{3}\right)$$

c. $z_3 = -4i$

Como z_3 é um imaginário puro, sua imagem pertence ao eixo imaginário e, nesse caso, podemos obter graficamente o módulo e o argumento de z_3, sendo desnecessárias as fórmulas.



FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

O módulo de $z_3 = -4i$ é a distância ρ do ponto P à origem O do sistema, isto é, $\rho = 4$.

Logo, a forma trigonométrica de z_3 é:

$$z_3 = 4(\cos 270° + i\,\text{sen}\,270°) \text{ ou}$$

$$z_3 = 4\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\,\text{sen}\frac{3\pi}{2}\right)$$

Nota:

Pode-se representar um número complexo não nulo z também na seguinte forma:

$$z = \rho(\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi), \text{ com } \varphi \notin [0, 2\pi[\text{ e } \varphi \notin [0°, 360°[$$

Por exemplo, $z = 8(\cos 390° + i \operatorname{sen} 390°)$.

Essa forma de representação é denominada **forma trigonométrica secundária**, e a medida φ é chamada de **argumento secundário** de z.

Note que z é igual a: $8(\cos 30° + i \operatorname{sen} 30°)$.

Para que não haja confusão de linguagem, convencionamos que:

- ao usar a expressão "argumento de um número complexo", estamos nos referindo à medida φ no intervalo $[0, 2\pi[$ ou $[0°, 360°[$ (alguns autores chamam esse argumento de argumento principal);
- ao usar a expressão "forma trigonométrica de um número complexo", estamos nos referindo à forma $z = \rho(\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi)$, com $0° \leqslant \varphi < 360°$ ou $0 \leqslant \varphi < 2\pi$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Faça os exercícios no caderno.

25. Represente no plano complexo os números $z_1 = 4i$, $z_2 = -5$, $z_3 = -6i$ e $z_4 = 3$, e determine o módulo e o argumento de cada um deles.

25. Resposta no final do livro.

26. Sabendo que o argumento de um número complexo z é $\frac{\pi}{7}$ rad, determine o argumento de cada um dos seguintes números:

a. $\bar{z}$ **26. a.** $\frac{13\pi}{7}$

b. $-z$ **26. b.** $\frac{8\pi}{7}$

c. $-\bar{z}$ **26. c.** $\frac{6\pi}{7}$

27. Calcule o módulo e o argumento de cada um dos números complexos a seguir.

a. $z_1 = 1 + i$ **27. a.** $\sqrt{2}$; 45°

b. $z_2 = 1 - \sqrt{3}\,i$ **27. b.** 2; 300°

c. $z_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}\,i}{2}$ **27. c.** 1; 135°

d. $z_4 = -5\sqrt{3} - 5i$ **27. d.** 10; 210°

28. Represente na forma trigonométrica cada um dos números complexos.

a. $z_1 = 1 + \sqrt{3}\,i$

b. $z_2 = 1 - i$

c. $z_3 = -\sqrt{3} + i$

29. Represente na forma algébrica cada um dos números complexos a seguir.

a. $z_1 = 2(\cos 90° + i \operatorname{sen} 90°)$ **29. a.** $2i$

b. $z_2 = 6(\cos 30° + i \operatorname{sen} 30°)$ **29. b.** $3\sqrt{3} + 3i$

c. $z_3 = \cos \frac{5\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{5\pi}{4}$ **29. c.** $-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$

30. Demonstra-se que a distância d entre as imagens de dois números complexos z_1 e z_2 no plano de Argand-Gauss é dada por $d = |z_1 - z_2|$. De acordo com essa propriedade, resolva a questão a seguir.

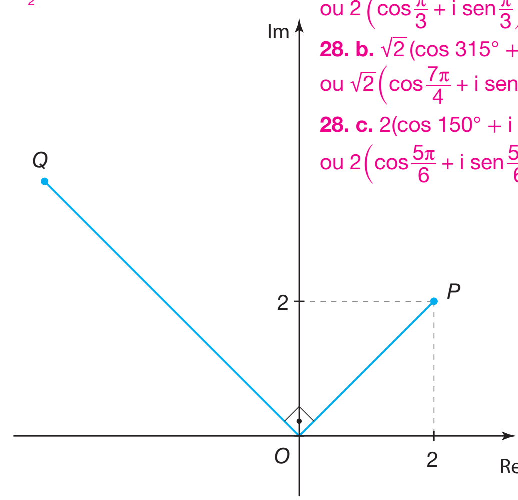
No plano de Argand-Gauss a seguir, os pontos P e Q são imagens dos números complexos z_1 e z_2, respectivamente, com $|z_1 - z_2| = 6$. Determine a forma algébrica de z_2.

30. $z_2 = -\sqrt{14} + \sqrt{14}\,i$

28. a. $2(\cos 60° + i \operatorname{sen} 60°)$ ou $2\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{3}\right)$

28. b. $\sqrt{2}(\cos 315° + i \operatorname{sen} 315°)$ ou $\sqrt{2}\left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{7\pi}{4}\right)$

28. c. $2(\cos 150° + i \operatorname{sen} 150°)$ ou $2\left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \operatorname{sen} \frac{5\pi}{6}\right)$



ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

31. Elabore um problema envolvendo forma trigonométrica de um número complexo. Em seguida, troque o problema elaborado com um colega para que um resolva o problema elaborado pelo outro. Por fim, analisem e discutam as resoluções.

31. Resposta pessoal.

Para retomar os conteúdos estudados, resolva os exercícios complementares 11 e 12.

Demonstre as fórmulas que resultam da multiplicação e da divisão de números complexos na forma trigonométrica. A seguir, apresentamos a multiplicação. A divisão é análoga.
$z \cdot w = \rho(\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha) \cdot \lambda(\cos\beta + i\operatorname{sen}\beta) = \rho\lambda(\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha)(\cos\beta + i\operatorname{sen}\beta) = \rho\lambda(\cos\alpha\cdot\cos\beta + i\cos\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta + i\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\beta + i^2\operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta) = \rho\lambda[\cos\alpha\cdot\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta + i(\cos\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta + \operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\beta)]$
$\therefore z \cdot w = \rho\lambda[\cos(\alpha+\beta) + i(\operatorname{sen}(\alpha+\beta))]$
Com a participação dos estudantes, refaça os **exercícios resolvidos 16** e **17**.

7. Operação com números complexos na forma trigonométrica

Multiplicação

Sejam os números complexos $z = 3(\cos 30° + i\operatorname{sen} 30°)$ e $w = \sqrt{2}\,(\cos 240° + i\operatorname{sen} 240°)$. Efetuando a multiplicação $z \cdot w$, temos:

$$z \cdot w = 3(\cos 30° + i\operatorname{sen} 30°) \cdot \sqrt{2}\,(\cos 240° + i\operatorname{sen} 240°) =$$
$$= 3\sqrt{2}\,(\cos 30° + i\operatorname{sen} 30°)(\cos 240° + i\operatorname{sen} 240°)$$

Aplicando a propriedade distributiva, temos:

$$z \cdot w = 3\sqrt{2}\,(\cos 30°\cos 240° + i\cos 30°\operatorname{sen} 240° + i\operatorname{sen} 30°\cos 240° + i^2\operatorname{sen} 240°\operatorname{sen} 30°) =$$
$$= 3\sqrt{2}\,(\cos 30°\cos 240° + i\cos 30°\operatorname{sen} 240° + i\operatorname{sen} 30°\cos 240° - \operatorname{sen} 240°\operatorname{sen} 30°) =$$
$$= 3\sqrt{2}\,[(\cos 30°\cos 240° - \operatorname{sen} 240°\operatorname{sen} 30°) + i\,(\cos 30°\operatorname{sen} 240° + \operatorname{sen} 30°\cos 240°)] =$$
$$= 3\sqrt{2}\,[\cos(30° + 240°) + i\operatorname{sen}(30° + 240°)]$$

Generalizando esse resultado, temos:

> Se $z = \rho(\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha)$ e $w = \lambda(\cos\beta + i\operatorname{sen}\beta)$ são as formas trigonométricas dos números complexos z e w, então: $z \cdot w = \rho\lambda[\cos(\alpha + \beta) + i\operatorname{sen}(\alpha + \beta)]$.

Nota:
A propriedade associativa da multiplicação de números complexos permite a extensão dessa fórmula para o produto de mais de dois números da seguinte maneira: sendo $z_1, z_2, z_3, \ldots, z_n$, com $n \geqslant 2$, cujas formas trigonométricas são $\rho_1(\cos\alpha_1 + i\operatorname{sen}\alpha_1)$, $\rho_2(\cos\alpha_2 + i\operatorname{sen}\alpha_2)$, $\rho_3(\cos\alpha_3 + i\operatorname{sen}\alpha_3)$, … e $\rho_n(\cos\alpha_n + i\operatorname{sen}\alpha_n)$, respectivamente, tem-se:

$$z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 \cdot \ldots \cdot z_n =$$
$$= \rho_1(\cos\alpha_1 + i\operatorname{sen}\alpha_1) \cdot \rho_2(\cos\alpha_2 + i\operatorname{sen}\alpha_2) \cdot \rho_3(\cos\alpha_3 + i\operatorname{sen}\alpha_3) \cdot \ldots \cdot \rho_n(\cos\alpha_n + i\operatorname{sen}\alpha_n) =$$
$$= \rho_1 \cdot \rho_2 \cdot \rho_3 \cdot \ldots \cdot \rho_n \cdot [\cos(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_n) + i\operatorname{sen}(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_n)]$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

16. Sendo $z_1 = 3(\cos 20° + i\operatorname{sen} 20°)$, $z_2 = 2(\cos 25° + i\operatorname{sen} 25°)$ e $z_3 = 5(\cos 90° + i\operatorname{sen} 90°)$, calcule:

a. $z_1 \cdot z_2$

b. $z_1 \cdot z_2 \cdot z_3$

Resolução

a. $z_1 \cdot z_2 = 3(\cos 20° + i\operatorname{sen} 20°) \cdot 2(\cos 25° + i\operatorname{sen} 25°) = 3 \cdot 2 \cdot [\cos(20° + 25°) + i\operatorname{sen}(20° + 25°)] =$

$= 6[\cos 45° + i\operatorname{sen} 45°] \Rightarrow z_1 \cdot z_2 = 6\left[\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}\,i}{2}\right] \therefore z_1 \cdot z_2 = 3\sqrt{2} + 3\sqrt{2}\,i$

b. $z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 = 3(\cos 20° + i\operatorname{sen} 20°) \cdot 2(\cos 25° + i\operatorname{sen} 25°) \cdot 5(\cos 90° + i\operatorname{sen} 90°) =$

$= 3 \cdot 2 \cdot 5 \cdot [\cos(20° + 25° + 90°) + i\operatorname{sen}(20° + 25° + 90°)] = 30[\cos 135° + i\operatorname{sen} 135°] \Rightarrow$

$\Rightarrow z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 = 30\left[-\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}\,i}{2}\right]$

$\therefore z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 = -15\sqrt{2} + 15\sqrt{2}\,i$

17. Sendo $z = \rho(\cos\varphi + i\operatorname{sen}\varphi)$ a forma trigonométrica do número complexo z, calcule:

a. z^2

b. z^3

Resolução

a. $z^2 = z \cdot z = \rho(\cos\varphi + i\,\text{sen}\,\varphi) \cdot \rho(\cos\varphi + i\,\text{sen}\,\varphi) = \rho \cdot \rho \cdot [\cos(\varphi + \varphi) + i\,\text{sen}\,(\varphi + \varphi)] \Rightarrow$

$\Rightarrow z^2 = \rho^2[\cos 2\varphi + i\,\text{sen}\,2\varphi]$

b. $z^3 = z \cdot z \cdot z = \rho(\cos\varphi + i\,\text{sen}\,\varphi) \cdot \rho(\cos\varphi + i\,\text{sen}\,\varphi) \cdot \rho(\cos\varphi + i\,\text{sen}\,\varphi) =$

$= \rho \cdot \rho \cdot \rho \cdot [\cos(\varphi + \varphi + \varphi) + i\,\text{sen}\,(\varphi + \varphi + \varphi)] \Rightarrow z^3 = \rho^3[\cos 3\varphi + i\,\text{sen}\,3\varphi]$

Divisão

Do mesmo modo que fizemos para a multiplicação, podemos generalizar o resultado para a divisão de números complexos na forma trigonométrica.

Assim:

Se $z = \rho(\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha)$ e $w = \lambda(\cos\beta + i\,\text{sen}\,\beta)$ são as formas trigonométricas dos complexos z e w, com $w \neq 0$, então:

$$\frac{z}{w} = \frac{\rho}{\lambda}[\cos(\alpha - \beta) + i\,\text{sen}\,(\alpha - \beta)]$$

Demonstração

$$\frac{z}{w} = \frac{z \cdot \overline{w}}{w \cdot \overline{w}} = \frac{\rho(\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha) \cdot \lambda(\cos\beta - i\,\text{sen}\,\beta)}{|w|^2} =$$

$$= \frac{\rho\lambda(\cos\alpha\ \cos\beta - i\,\text{sen}\,\beta\ \cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha\ \cos\beta + \text{sen}\,\alpha\ \text{sen}\,\beta)}{\lambda^2}$$

$$\therefore \frac{z}{w} = \frac{\rho\lambda}{\lambda^2}[\cos(\alpha - \beta) + i\,\text{sen}\,(\alpha - \beta)] = \frac{\rho}{\lambda}[\cos(\alpha - \beta) + i\,\text{sen}\,(\alpha - \beta)]$$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

18. Sendo $z_1 = 8(\cos 70° + i\,\text{sen}\,70°)$ e $z_2 = 2(\cos 40° + i\,\text{sen}\,40°)$, calcule $\frac{z_1}{z_2}$.

Resolução

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{8}{2} \cdot [\cos(70° - 40°) + i\,\text{sen}\,(70° - 40°)] =$$

$$= 4[\cos 30° + i\,\text{sen}\,30°] = 4\left[\frac{\sqrt{3}}{2} + i \cdot \frac{1}{2}\right] = 2\sqrt{3} + 2i$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Faça os exercícios no caderno.

32. Considere os números complexos:

- $z = 2(\cos 45° + i\,\text{sen}\,45°)$
- $u = 8(\cos 255° + i\,\text{sen}\,255°)$
- $w = \cos 120° + i\,\text{sen}\,120°$

Dê a forma algébrica do resultado de cada uma das expressões.

a. $z \cdot u$ — **32. a.** $8 - 8\sqrt{3}i$

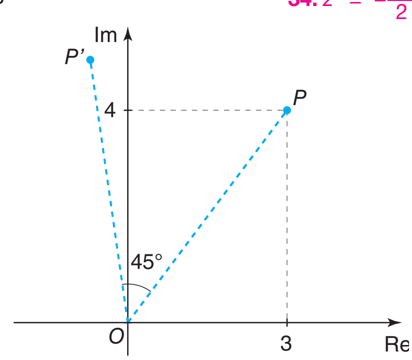
b. $\frac{u}{z}$ — **32. c.** $-\frac{\sqrt{3}}{8} + \frac{1}{8}i$

c. $\frac{z}{u}$ — **32. b.** $-2\sqrt{3} - 2i$

d. $\frac{uz}{w}$ — **32. d.** -16

33. Seja $z = \rho(\cos\varphi + i\,\text{sen}\,\varphi)$ a forma trigonométrica do número complexo z, e seja $w = 7(\cos 18° + i\,\text{sen}\,18°)$. Determine ρ e φ de modo que $\frac{z}{w} = \sqrt{3} + i$. **33.** 14; 48°

34. No plano complexo a seguir, o ponto P' é obtido por uma rotação de 45° de P em torno da origem O, no sentido anti-horário. Determine o número complexo z' cuja imagem é P'. **34.** $z' = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{7\sqrt{2}}{2}i$



ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

Para retomar os conteúdos estudados, resolva os exercícios complementares 13 e 14.

Potências de números complexos na forma trigonométrica

Sendo $z = \rho(\cos\varphi + i\,\text{sen}\,\varphi)$ a forma trigonométrica do número complexo não nulo z, temos:

- $z^0 = 1 = 1(\cos 0 + i\,\text{sen}\,0) = \rho^0(\cos 0\varphi + i\,\text{sen}\,0\varphi)$
- $z^1 = \rho(\cos\varphi + i\,\text{sen}\,\varphi) = \rho^1(\cos 1\varphi + i\,\text{sen}\,1\varphi)$
- $z^2 = \rho^2(\cos 2\varphi + i\,\text{sen}\,2\varphi)$
- $z^3 = \rho^3(\cos 3\varphi + i\,\text{sen}\,3\varphi)$

Observação

Obtivemos z^2 e z^3 no exercício resolvido 17.

Observe que cada resultado apresenta o módulo ρ elevado ao expoente de z e o argumento φ multiplicado por esse expoente. Essas constatações podem ser generalizadas por meio do teorema a seguir, demonstrado pelo matemático francês Abraham De Moivre (1667-1754).

Teorema de De Moivre

Se $z = \rho(\cos\varphi + i\,\text{sen}\,\varphi)$ é a forma trigonométrica do número complexo não nulo z e n é um número inteiro qualquer, então: $z^n = \rho^n(\cos n\varphi + i\,\text{sen}\,n\varphi)$

Peça aos estudantes que respondam às questões seguintes, acerca do teorema de De Moivre.
1. Considerando o número complexo
$z = 2(\cos 60° + i\,\text{sen}\,60°)$, calcule as potências seguintes, com base na multiplicação de números complexos na forma trigonométrica.
a. z^1
b. z^2
c. z^3
d. z^4
Respostas:
a. $z^1 = 2(\cos 60° + i\,\text{sen}\,60°)$
b. $z^2 = 4(\cos 120° + i\,\text{sen}\,120°)$
c. $z^3 = 8(\cos 180° + i\,\text{sen}\,180°)$
d. $z^4 = 16(\cos 240° + i\,\text{sen}\,240°)$
2. Usando o que você aprendeu até o momento, qual seria o resultado de z^n, com $n \in \mathbb{N}$?
Resposta: $z^n = 2^n(\cos (n \cdot 60°) + i\,\text{sen}\,(n \cdot 60°))$
Refaça, com a participação dos estudantes, os **exercícios resolvidos 19** e **20**.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

19. Sendo $z = 2\left(\cos\frac{\pi}{15} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{15}\right)$, calcular z^5.

Resolução

Pela fórmula de De Moivre, temos:

$$z^5 = 2^5\left(\cos\frac{5\pi}{15} + i\,\text{sen}\,\frac{5\pi}{15}\right) \Rightarrow z^5 = 32\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\therefore\ z^5 = 32\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}\,i}{2}\right) = 16 + 16\sqrt{3}\,i$$

20. Calcule: $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}\,i}{2}\right)^{10}$

Resolução

Inicialmente, vamos representar na forma trigonométrica a base z dessa potência. Para isso, determinamos seu módulo ρ e seu argumento φ:

$$z = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}\,i}{2}\begin{cases}\text{parte real: } a = \frac{\sqrt{2}}{2}\\ \text{parte imaginária: } b = -\frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$$

Assim:

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}$$

$$\therefore\ \rho = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = \sqrt{1} = 1\begin{cases}\cos\varphi = \frac{a}{\rho}\\ \text{sen}\,\varphi = \frac{b}{\rho}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\cos\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}\\ \text{sen}\,\varphi = -\frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$$

$$\therefore \varphi = 315°$$

Logo, a forma trigonométrica de z é dada por:

$$z = 1(\cos 315° + i \operatorname{sen} 315°)$$

Pela fórmula de De Moivre, temos:

$$z^{10} = 1^{10}(\cos 10 \cdot 315° + i \operatorname{sen} 10 \cdot 315°) = \cos 3.150° + i \operatorname{sen} 3.150°$$

Reduzindo 3.150° à primeira volta positiva, obtemos 270°. Assim, concluímos:

$$z^{10} = \cos 270° + i \operatorname{sen} 270° = 0 - i = -i$$

35. a. $256\left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{2\pi}{3}\right)$ ou $256 \ \cos 120° + i \operatorname{sen} 120°)$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Faça os exercícios no caderno.

35. Dado o número complexo

$z = 2\left(\cos \frac{\pi}{12} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{12}\right)$, determine:

a. a forma trigonométrica de z^8;

b. o menor valor inteiro positivo n de modo que z^n seja um número real; **35. b.** 12

c. o menor valor inteiro positivo n de modo que z^n seja um número imaginário puro. **35. c.** 6

36. Calcule:

a. $(1 + \sqrt{3}i)^8$

b. $(-\sqrt{3} + i)^{10}$

36. a. $-128 + 128\sqrt{3}i$

36. b. $512 + 512\sqrt{3}i$

37. Sendo $z = \sqrt{3} + 3i$, determine o menor valor inteiro positivo n de modo que z^n seja um número real. **37.** 3

38. Pesquise na internet sobre a radiciação no conjunto dos números complexos. Escreva um breve texto sobre a sua pesquisa, acompanhado de exemplos.

38. Resposta pessoal.

Para retomar os conteúdos estudados, resolva o exercício complementar 15.

Assista aos vídeos **Um sonho complexo** e **O sonho continua**, disponíveis em: https://m3.ime.unicamp.br/recursos/1187 e https://m3.ime.unicamp.br/recursos/1141, respectivamente. Acessos em: 4 ago. 2024.

Para abordar o **Trabalho e juventudes**, retome o uso prático dos números complexos em diferentes áreas, como na Engenharia elétrica e na Física. Incentive os estudantes a pesquisarem a respeito de físicos brasileiros e a comporem um breve relatório sobre a trajetória de vida deles.

TRABALHO E JUVENTUDES

Os números complexos são bastante aplicados em áreas da Física como eletromagnetismo ou Física Quântica. No Brasil, o dia 19 de maio celebra o dia do Físico, uma profissão ainda de pouca popularidade, mas que tem se impulsionado com a ciência de dados e a inteligência artificial.

A carreira que, até então, era mais restrita à academia com atuação no ensino ou nas pesquisas, agora tem o mercado de trabalho ampliado.

No entanto, para Sônia Guimarães, a primeira mulher negra a ser doutora em Física no Brasil, ainda existe uma dificuldade para pessoas pretas ingressarem na Ciência, devido ao racismo estrutural. Ela comenta que:

> [...] "Não há estímulo para o ingresso na área de exatas. Por isso, muitos desistem quando levam bomba em cálculo. Além disso, ainda há professor universitário que se certifica se o aluno negro está na sala correta. Como aguentar isso por cinco anos?" [...].

SETUBAL, Y. Conheça Sonia Guimarães, a primeira mulher negra doutora em Física no Brasil: 'é tudo ainda muito branco e masculino'. **O Globo**, 12 mar. 2024. Disponível em: https://oglobo.globo.com/ela/noticia/2024/03/12/conheca-sonia-guimaraes-a-primeira-mulher-negra-doutora-em-fisica-no-brasil-e-tudo-ainda-muito-branco-e-masculino.ghtml. Acesso em: 16 out. 2024.

MARIA ISABEL OLIVEIRA/AGÊNCIA O GLOBO

A física Sônia Guimarães, em foto de 2024.

Você conhece outras pessoas brasileiras que atuam na Física? Sabe quais os cursos técnicos, tecnólogos ou de graduação nessa área que existem na região que você mora? Caso se interesse, faça uma pesquisa e compartilhe os resultados com os colegas.

Análise da resolução: O estudante não percebeu que certos valores distintos de n determinam números complexos iguais; por exemplo, para $n = 0$ ou $n = 5$, obtemos os números complexos iguais a $z^0 = \cos 0 + i \text{ sen } 0$ e $z^5 = \cos 2\pi + i \text{ sen } 2\pi$. Assim, a quantidade de números complexos representados pela expressão $\left(\cos \frac{2\pi}{5} + i \text{ sen } \frac{2\pi}{5}\right)^n$ é menor que 11.

Resolução correta: Pelo teorema de De Moivre, temos: $z^n = \cos \frac{2\pi n}{5} + \text{sen } \frac{2\pi n}{5}$

Os números complexos da forma z^n serão distintos se, e somente se: $0 \leq \frac{2\pi n}{5} < 2\pi \Rightarrow$ $\Rightarrow 0 \leq n < 5$

Assim, temos números complexos distintos para: $n = 0$, $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$ e $n = 4$

Logo, a expressão $\left(\cos \frac{2\pi}{5} + i \text{ sen } \frac{2\pi}{5}\right)^n$, com $n \in \mathbb{N}$ e $n \leqslant 10$ representa apenas cinco números complexos distintos.

Aproveite os **Exercícios complementares** a fim de compor uma avaliação no decorrer do estudo deste capítulo. Em duplas ou trios, os estudantes podem resolver esses exercícios conforme indicado ao final de cada seção **Exercícios propostos** e comparar as estratégias de resolução. Depois, ao final do capítulo, podem retomar e resolver individualmente alguns desses exercícios novamente ou compartilhar a resolução deles com os demais colegas.

ANÁLISE DA RESOLUÇÃO

Um estudante resolveu o exercício conforme a reprodução a seguir. Um erro foi cometido. Apontem o erro e refaçam a resolução no caderno, corrigindo-a.

Exercício

Quantos números complexos distintos são representados pela expressão

$$\left(\cos \frac{2\pi}{5} + i \text{ sen } \frac{2\pi}{5}\right)^n, \text{ com } n \in \mathbb{N} \text{ e } n \leq 10?$$

Resolução

Aplicando o teorema de De Moivre: $z^n = \cos \frac{2\pi n}{5} + i \text{ sen } \frac{2\pi n}{5}$

• Para $n = 0$:

$z^0 = \cos \frac{2\pi \cdot 0}{5} + i \text{ sen } \frac{2\pi \cdot 0}{5} \Rightarrow z^0 = \cos 0 + i \text{ sen } 0$

• Para $n = 1$:

$z^1 = \cos \frac{2\pi \cdot 1}{5} + i \text{ sen } \frac{2\pi \cdot 1}{5} \Rightarrow z^1 = \cos \frac{2\pi}{5} + i \text{ sen } \frac{2\pi}{5}$

• Para $n = 2$:

$z^2 = \cos \frac{2\pi \cdot 2}{5} + i \text{ sen } \frac{2\pi \cdot 2}{5} \Rightarrow z^2 = \cos \frac{4\pi}{5} + i \text{ sen } \frac{4\pi}{5}$

• Para $n = 3$:

$z^3 = \cos \frac{2\pi \cdot 3}{5} + i \text{ sen } \frac{2\pi \cdot 3}{5} \Rightarrow z^3 = \cos \frac{6\pi}{5} + i \text{ sen } \frac{6\pi}{5}$

• Para $n = 4$:

$z^4 = \cos \frac{2\pi \cdot 4}{5} + i \text{ sen } \frac{2\pi \cdot 4}{5} \Rightarrow z^4 = \cos \frac{8\pi}{5} + i \text{ sen } \frac{8\pi}{5}$

Etc.

• Para $n = 10$:

$z^{10} = \cos \frac{2\pi \cdot 10}{5} + i \text{ sen } \frac{2\pi \cdot 10}{5} \Rightarrow z^{10} = \cos \frac{20\pi}{5} + i \text{ sen } \frac{20\pi}{5}$

Assim, a expressão $\left(\cos \frac{2\pi}{5} + i \text{ sen } \frac{2\pi}{5}\right)^n$, com $n \in \mathbb{N}$ e $n \leq 10$, representa 11 números complexos distintos.

ELISA NIEVAS/ARQUIVO DA EDITORA

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

Faça os exercícios no caderno.

1. Para que valores reais de x o número complexo $(3x - 12) + (x^2 - 16)i$ é real? **1.** $x = 4$ ou $x = -4$

2. Dados os números complexos $z = x^2 + (2 + 3y)i$ e $w = x + (x - y)i$, determine os números reais x e y de modo que $z = \overline{w}$. **2.** ($x = 0$ e $y = -1$) ou $\left(x = 1 \text{ e } y = -\frac{3}{2}\right)$

3. Dados os números complexos $z = 3 - 2i$ e $w = 4 - 3i$, determine o número complexo $zw - 3iz + w^2$. **3.** $7 - 50i$

4. Resolva as equações a seguir no universo $\mathbb{C}$.

a. $2z - 4\overline{z} = 8 + 12i$ **4. a.** $S = \{-4 + 2i\}$

b. $\frac{z}{z - 2i} = \frac{\overline{z}}{i}$ **4. b.** $S = \{0, i\}$

5. (UFPA) Qual o valor de m, real, para que o produto $(2 + mi) \cdot (3 + i)$ seja um imaginário puro?

a. 5
b. 6
c. 7
d. 8
e. 10

5. alternativa **b**

6. Sendo $z = \left(\frac{i^{13} + i^9}{2}\right)^{39}$ e $w = \frac{1}{2 + i^{23}}$, em que i é a unidade imaginária, calcule o produto zw. **6.** $\frac{1}{5} - \frac{2i}{5}$

7. (Uepa) O número complexo $(1 + i)^9 + (1 - i)^4$ é igual a:

a. $6i$
b. $4 - 8i$
c. $-4 - 8i$
d. $2 - 12i$
e. $12 + 16i$

7. alternativa **e**

As respostas dos **exercícios propostos 8**, **9** e **11** estão no final do livro.

8. Um filme mostra o deslocamento dos estilhaços de uma granada a partir do momento da explosão. Para um estudo cinemático e dinâmico desses deslocamentos, associou-se ao plano da tela de projeção um sistema de eixos, real e imaginário, divididos em uma unidade conveniente. Em relação a esse sistema, observou-se que as posições de um dos estilhaços podiam ser descritas, em função do tempo t, em segundo, pelos números complexos da forma: $z = t + (1 - t^2)i$, em que $t = 0$ corresponde ao instante da explosão.

Represente no plano de Argand-Gauss adotado como referência:

a. O número complexo que representa a posição P desse estilhaço, 1 s após a explosão.

b. O número complexo que representa a posição Q desse estilhaço, 2 s após a explosão.

c. Todos os números complexos que descrevem a posição desse estilhaço para $0 \leqslant t \leqslant 2$.

9. Represente no plano de Argand-Gauss o lugar geométrico das imagens dos números complexos z em cada um dos casos a seguir.

a. $|z - 3i| = 5$ **c.** $|\bar{z} + z|^2 - 3 \cdot z \cdot \bar{z} = 1$

b. $|z + 4 - 2i| = 3$

10. As trajetórias de duas partículas, A e B, são estudadas no plano de Argand-Gauss. Enquanto a partícula A descreve a trajetória representada pelos números complexos z, com $|z - 5 - 5i| = 3$, a partícula B, partindo da origem O do sistema de eixos, é lançada em linha reta a fim de atingir a partícula A quando ela estiver o mais próximo possível de O. A trajetória da partícula B é formada por imagens dos números complexos $w = x + yi$, com $\{x, y\} \subset \mathbb{R}$, tais que:

a. $x + 2y - 1 = 0$ **d.** $x - 2y = 0$

b. $x = y$ **e.** $x = -4y$

c. $x + 2y = 0$ **10.** alternativa **b**

11. Represente na forma trigonométrica cada um dos números complexos a seguir.

a. $z_1 = -2 - 2i$ **c.** $z_3 = -2\sqrt{3} - 2i$

b. $z_2 = \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{i}{2}$

12. (Unicamp-SP) Um triângulo equilátero, inscrito em uma circunferência de centro na origem, tem como um de seus vértices o ponto do plano associado ao número complexo $\sqrt{3} + i$.

a. Que números complexos estão associados aos outros dois vértices do mesmo triângulo? Faça a figura desse triângulo.

b. Qual a medida do lado desse triângulo? **12. b.** $2\sqrt{3}$

12. a. $-\sqrt{3} + i$ e $-2i$; figura indicada no final do livro.

13. Sejam:

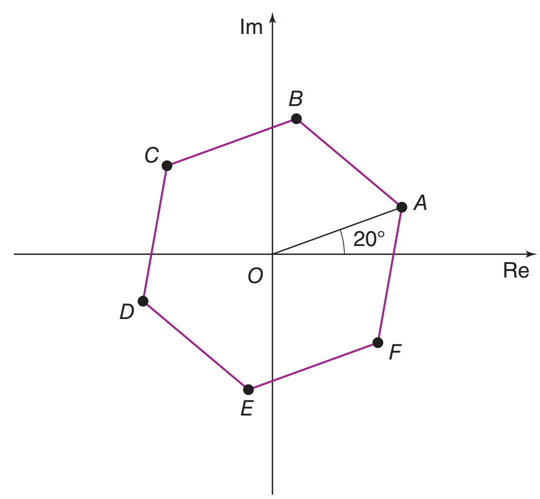
- $z = 20\left(\cos\dfrac{5\pi}{3} + i \operatorname{sen}\dfrac{5\pi}{3}\right)$
- $w = 5\left(\cos\dfrac{7\pi}{6} + i \operatorname{sen}\dfrac{7\pi}{6}\right)$
- $u = \cos\dfrac{\pi}{6} + i \operatorname{sen}\dfrac{\pi}{6}$

Considerando esses números complexos, dê a forma algébrica dos seguintes números:

a. $\dfrac{z}{w}$ **13. a.** $4i$ **c.** $\dfrac{wu}{z}$ **13. c.** $\dfrac{1}{8} - \dfrac{\sqrt{3}i}{8}$

b. $\dfrac{w}{u}$ **13. b.** -5 **d.** $\dfrac{1}{u}$ **13. d.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{i}{2}$

14. A figura a seguir mostra um hexágono regular cujo centro é a origem O do sistema de eixos e a medida do lado é 3 unidades (a unidade de comprimento do lado do hexágono é a mesma adotada nos eixos coordenados).



ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

14. a. $z_A = 3(\cos 10^\circ + i \operatorname{sen} 10^\circ)$

Indicando por z_A o número complexo cujo afixo é o ponto A, responda aos itens seguintes.

a. Determine a forma trigonométrica de z_A.

b. Determine a forma trigonométrica do número complexo w que multiplicado por z_A resulta no número complexo z_B cujo afixo é o ponto B. **14. b.** $w = 1(\cos 60^\circ + i\operatorname{sen} 60^\circ)$

c. Determine a forma trigonométrica do número complexo k que multiplicado por z_A resulta no número complexo cujo afixo é obtido pela rotação de 240° do ponto A, em torno da origem O, no sentido anti-horário. **14. c.** $k = 1(\cos 240^\circ + i\operatorname{sen} 240^\circ)$

d. Se P é o afixo de um número complexo $z_P = \rho(\cos\beta + i\operatorname{sen}\beta)$, obtenha um número complexo z que multiplicado por z_P tem como resultado o número $z_{P'}$ cujo afixo é o ponto P', obtido por uma rotação α do ponto P, em torno da origem O do sistema de eixos do plano complexo. (α é a medida algébrica de um arco de circunferência ou de um ângulo, em grau ou radiano). **14. d.** $z = 1(\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha)$

15. Calcule: **15. a.** -1 **15. b.** -4.096

a. $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}\,i}{2}\right)^{100}$ **b.** $(2\sqrt{3} + i - i^{43})^6$

Aborde o tema da seção **Educação midiática** incentivando os estudantes a pesquisarem o que são bolhas informacionais. Associado à área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas e ao **TCT Vida familiar e social**, pode-se desenvolver um trabalho interdisciplinar que possibilite o desenvolvimento das **competências gerais 4**, **6**, **7** e **9**.

EDUCAÇÃO MIDIÁTICA

As atividades podem ser propostas a fim de evidenciar como a inteligência artificial e os algoritmos estão sendo utilizados por grandes empresas ou pessoas para veicular informações nas redes sociais. Eles podem comentar sobre: os riscos e benefícios desses algoritmos; como eles podem ser associados à pós-verdade, às notícias falsas (*fake news*) e ao reducionismo e anticientificismo; e a capacidade de modelarem a opinião pública por meio de apelos emocionais e crenças pessoais em negligência a fatos, a dados objetivos e ao pluralismo de ideias, por exemplo.

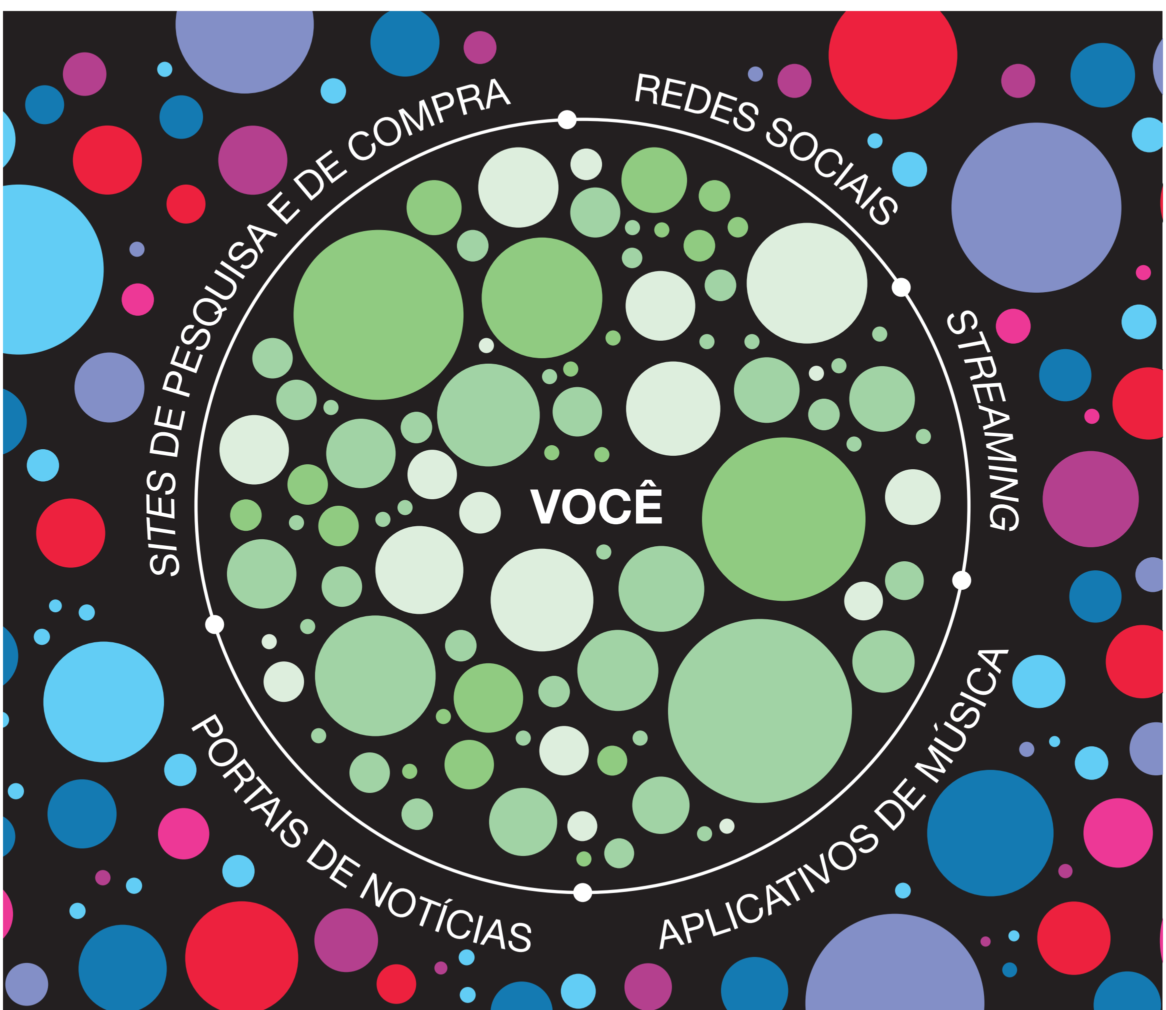
Bolhas informacionais

Se você usa redes sociais, aplicativos de música ou segue canais de vídeo *online*, já deve ter notado que as plataformas digitais fazem muitas recomendações: uma nova música, um vídeo sobre um tema que você já pesquisou antes, ou fotos de pessoas que você tem interesse em acompanhar. Em dias cansativos, é reconfortante ter esses conteúdos agradáveis ao seu alcance. As plataformas digitais conseguem criar um conteúdo personalizado para você por meio de uma verdadeira "curadoria" de informações. Esse fenômeno é conhecido como **bolha informacional**.

Bolha informacional/bolha de informação

Ambiente, especialmente online, em que as pessoas são expostas apenas a informações e opiniões que confirmam aquilo em que já acreditavam. A bolha informacional é um viés construído pelos algoritmos a partir de nossos hábitos e pesquisas na internet.

BOLHA informacional/bolha de informação. *In*: GLOSSÁRIO. [*S. l.*]: **Educamídia**. Disponível em: https://educamidia.org.br/glossario. Acesso em: 15 fev. 2024.



ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

Esquema representando o fenômeno da bolha informacional.

As plataformas digitais utilizam algoritmos para recomendar conteúdos semelhantes aos que você costuma acessar ou interagir na internet. Um algoritmo é uma sequência de instruções claras e bem definidas. Essas plataformas são programadas para entender suas preferências através das curtidas, das buscas realizadas e do tempo que você dedica a determinado conteúdo. Com essas informações, elas sugerem conteúdos similares, mantendo sua atenção por mais tempo e, assim, gerando retorno financeiro para elas.

OBJETO DIGITAL
***Podcast*: Algoritmos das redes sociais**

Sair da bolha não é assim tão simples

[...] "A internet dos algoritmos vem mudando o modo como a sociedade consome informação e a sua percepção do mundo. Isso tem um papel positivo e prático em tempos de abundância informativa na rede, mas seus efeitos também preocupam", explica.

"Ao criar algoritmos que selecionam, refinam e personalizam buscas de acordo com seu histórico de navegação, no caso do Google, ou que escolhem o conteúdo que deve ser mostrado ou não na sua *timeline*, a exemplo do Facebook, essas plataformas orientam e mediam o fluxo informativo na rede".

Os algoritmos melhoram a experiência do usuário, mas é preciso manter em mente que seu principal objetivo é econômico, como coloca Fernanda. "Vale a máxima 'Se você não está pagando por um produto, então o produto é você'. O algoritmo do Facebook prioriza o *feed* de notícias de familiares e amigos nas *timelines*. Marcas e veículos de comunicação precisam pagar mais para entregar conteúdo ao seu público-alvo. É um modelo de negócio, e não há problemas nisso. Mas é essencial que esse jogo de forças esteja muito claro para o usuário". [...]

MELO, A. Sair da bolha não é assim tão simples. **Jornal do Campus**, São Paulo, 13 set. 2017. Disponível em: https://www.jornaldocampus.usp.br/index.php/2017/09/sair-da-bolha-nao-e-assim-tao-simples/. Acesso em: 15 fev. 2024.

Pergunte aos estudantes se já tiveram a impressão de que, após comentar determinado assunto com um amigo nas redes sociais, ou ter feito alguma pesquisa sobre um tema ou produto, ao utilizar a internet as propagandas e os resultados de conteúdos ficaram mais direcionados a tal assunto ou produto. Deixe-os compartilhar as experiências e incentive-os a argumentar sobre o porquê de isso ocorrer. O tema abordado faz parte da cultura juvenil deles, aproveite a conversa e apresente o ***Podcast:* Algoritmos das redes sociais** e verifique se eles compreendem que, apesar de certas vantagens do uso de algoritmos, esses programas também podem acabar identificando outros tipos de dados. Nesse sentido, explique, por exemplo, a importância de ler os contratos de prestadoras de serviços digitais, como plataformas de vídeos e de redes sociais, a fim de entender como elas coletam nossos dados pessoais.

O livro **Como Sair das Bolhas**, de Pollyana Ferreira, trata de como as pessoas parecem, cada vez mais, se acomodarem em conviver, mesmo que virtualmente, apenas com quem pensa igual a elas. Essa tendência, segundo a autora do livro, facilita o compartilhamento de notícias falsas.

Atividades

Faça as atividades no caderno.

1. Uma pesquisa realizada em 2024 pelo Instituto Locomotiva ouviu 1.032 pessoas; delas, 65% acreditam que as notícias falsas são distribuídas por meio de robôs e inteligência artificial e quase 90% disseram já ter acreditado em notícias falsas. Com base no texto e na sua pesquisa, como o conceito de bolha informacional pode estar associado a isso? **1.** Resposta pessoal.
2. Pesquise mais sobre bolhas informacionais e converse com os colegas a respeito de como os algoritmos que gerenciam as plataformas de comunicação digital podem influenciar a opinião das pessoas. **2.** Resposta pessoal.
3. Na opinião de vocês, o que é preciso fazer para sair de uma bolha informacional? Qual é a importância de conviver com pessoas que pensam de maneira diferente sobre um assunto? **3.** Resposta pessoal.

VERIFIQUE O QUE APRENDEU NO CAPÍTULO 9

Para aperfeiçoar os estudos, você pode retomar os exercícios propostos no decorrer deste capítulo, rever suas resoluções ou utilizar os exercícios complementares para estudar com os colegas. Você também pode utilizar as questões propostas a seguir para verificar sua aprendizagem.

1. Resolva em $\mathbb{C}$ cada uma das equações.

a. $x^2 - 2x + 26 = 0$ **1. a.** $S = \{1 + 5i, 1 - 5i\}$

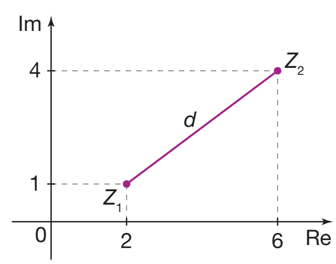
b. $x^2 + ix + 2 = 0$ **1. b.** $S = \{i, -2i\}$

c. $x^2 - 4x + 5 = 0$ **1. c.** $S = \{2 + i, 2 - i\}$

d. $x^3 - 8 = 0$ **1. d.** $S = \{2, -1 + i\sqrt{3}, -1 - i\sqrt{3}\}$

[Sugestão para o item **d**: Fatore a diferença de cubos $x^3 - 2^3$, usando a identidade $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$.]

2. No plano complexo a seguir estão representadas as imagens dos números complexos $z_1 = 2 + i$ e $z_2 = 6 + 4i$ e o segmento que indica a distância d entre eles.



ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

A distância d entre os pontos (2, 1) e (6, 4) é dada por:

$$d = \sqrt{(6-2)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{25} = 5$$

Observe que essa distância é exatamente o módulo da diferença entre os complexos z_2 e z_1, isto é:

$$d = |z_2 - z_1| = |6 + 4i - (2 + i)| =$$

$$= |(6 - 2) + (4 - 1)i| = \sqrt{(6-2)^2 + (4-1)^2}$$

Essa observação pode ser generalizada, isto é: a distância d entre as imagens de dois números complexos quaisquer z_1 e z_2 é dada por $d = |z_2 - z_1|$ ou, de maneira equivalente, $d = |z_1 - z_2|$.

De acordo com essa ideia, calcule a distância entre as imagens dos complexos z_1 e z_2, em cada um dos casos:

a. $z_1 = 2 + 3i$ e $z_2 = 7 + 15i$ **2. a.** 13

b. $z_1 = 4 + i$ e $z_2 = 2 - i$ **2. b.** $2\sqrt{2}$

3. Mostre que o número complexo $\cos\frac{\pi}{24} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{24}$ é raiz da equação $z^{36} - z^{12} + 2i = 0$.

3. Resposta nas **Orientações específicas** deste capítulo.

Ferramenta de estudo

O mapa conceitual é uma ferramenta que representa de forma gráfica as relações entre conceitos, ou entre palavras que usamos para representar conceitos.

A seguir, apresentamos uma sugestão de elaboração de um mapa conceitual.

1. Retome os tópicos deste capítulo e faça um levantamento de informações relevantes para a elaboração do mapa. Por exemplo: conceitos, palavras-chave, situações-problema etc.

2. Escolha uma estrutura para o mapa e defina quais serão os recursos visuais que serão utilizados. Por exemplo: caixas, linhas, setas, cores, imagens, entre outros.

3. Organize a sequência das informações compondo ramificações que relacionem os conteúdos.

Agora, construa um mapa conceitual utilizando o que você aprendeu neste capítulo.

Se teve dificuldades em construir o mapa conceitual ou não resolveu algum exercício, retome os conteúdos abordados no capítulo. Após algumas tentativas, anote as dúvidas e converse com um colega que possa ajudá-lo. Se mesmo assim a dúvida persistir, pergunte ao professor na aula seguinte. Gerencie bem seu tempo de estudo em casa e estabeleça metas diárias alcançáveis, planejando seus estudos passo a passo.

CAPÍTULO 10

Polinômios e equações polinomiais

Na **abertura**, apresentamos uma situação que envolve o lançamento de foguetes, cuja trajetória pode ser modelada por equações polinomiais. Comece perguntando aos estudantes se eles já viram ou ouviram falar sobre o lançamento de um foguete e o que pensam sobre a trajetória que ele faz. Aproveite para incentivar a discussão, perguntando se eles acham que o foguete sobe em linha reta, em curva ou de outra maneira, e como imaginam que a Matemática pode ajudar a descrever esse movimento.

Embora não existam registros precisos sobre o início da existência dos foguetes, sabe-se que o primeiro uso documentado ocorreu na China em 1232, quando foram utilizados em fogos de artifício. No entanto, os foguetes como máquinas sofisticadas, projetadas especificamente para exploração espacial, surgiram apenas no século XX. Desde então, a tecnologia evoluiu continuamente, aprimorando-se com o principal objetivo de explorar o espaço. Utilizando equações polinomiais, é possível, por exemplo, determinar a trajetória de um foguete.

MIGUEL J. RODRIGUEZ CARRILLO/AFP/GETTY IMAGES

Lançamento de um foguete no Kennedy Space Center da NASA, na Flórida, Estados Unidos. Foto de 2024.

Além da teoria

1. Você já assistiu na televisão ou em filmes a decolagem de um foguete? Se sim, comente com os colegas sobre isso. **Além da teoria: 1.** Resposta pessoal.
2. A altitude atingida pelo foguete, em metros, em relação ao solo, pode ser modelada por meio da função $h(t) = 30t - 5t^2$, em que t é o tempo, em segundo, após o lançamento. Desconsiderando a resistência do ar, a que altitude o foguete estará 3 s após o lançamento? **2.** 45 m

1. Polinômios! Para quê?

DANIEL ALLAN/PHOTODISC/GETTY IMAGES

Cientista utilizando um microscópio.

Ao estudar a ação de certo medicamento em um tumor maligno, uma cientista estimou, periodicamente, o número de células cancerosas em uma amostra de tecido desse tumor, registrando esses valores em uma tabela. Se essa cientista necessitar de um valor não tabelado, ocorrido durante o estudo, ela poderá recorrer à teoria dos polinômios, estimando esse valor por meio de um método conhecido por interpolação polinomial.

A interpolação polinomial permite fazer, em pequenos intervalos, a reconstituição aproximada de uma função f, a partir de alguns valores conhecidos de f. Assim, podem-se obter valores aproximados da função em pontos distintos dos que propiciaram a reconstituição.

Esse é apenas um exemplo das inúmeras aplicações práticas dos polinômios, assunto abordado no estudo das funções polinomiais do 1º e do 2º graus do tipo $f(x) = ax + b$ e $g(x) = ax^2 + bx + c$, e que ampliaremos a partir de agora.

ODS 3

Sob uma visão geral, as funções polinomiais têm grande aplicação prática quando se pretende obter resultados numéricos, pois os cálculos efetuados com esse tipo de função envolvem apenas adições e multiplicações. Muitos matemáticos dedicaram boa parte de sua vida à busca de funções polinomiais que se aproximassem o máximo possível de funções não polinomiais, como as exponenciais e as trigonométricas.

A importância teórica e prática dos polinômios motiva-nos a dedicar este capítulo ao seu estudo. Oriente os estudantes a consultar as páginas 6 e 7 para saber mais sobre este e os demais Objetivos de Desenvolvimento Sustentável.

Mentes brilhantes

OBJETO DIGITAL Carrossel de imagens: Mulheres e as viagens espaciais

Katherine Johnson: a matemática que levou o homem à Lua

NASA

Katherine Johnson, em Hampton, Estados Unidos. Foto tirada por volta de 1960.

O dia 20 de julho ficou marcado por um dos maiores acontecimentos da ciência espacial: a chegada do primeiro homem na Lua, em 1969. Embora o nome de Neil Armstrong seja o mais famoso dessa história, fato é que a conquista envolveu o trabalho de uma equipe grande. E uma das grandes contribuições veio de Katherine Johnson (1918-2020), matemática responsável por nada menos que os cálculos que garantiram o sucesso da viagem.

“O senhor me diz quando e onde quer que aterrisse [a nave], e eu lhe direi onde, quando e como lançá-la.” A famosa frase de Katherine ilustra a relevância do seu trabalho e também a confiança que muitos colegas depositavam nela. Antes do Apollo 11, a cientista já havia contribuído com os voos dos astronautas Alan B. Shepard Jr. e John Glenn, no início dos anos 1960. Glenn, inclusive, chegou a declarar sobre os cálculos dos computadores da NASA que Katherine verificou: “Se ela diz que são bons, então estou pronto para ir”.

Hoje pode parecer inimaginável uma agência espacial sem computadores, mas naquela época “os computadores usavam saias”, costumava dizer Katherine referindo-se ao seu trabalho e o de suas colegas, como mostrou o filme “Estrelas além do tempo”, que recordou a trajetória de Katherine, Dorothy Vaughan e Mary Jackson. O trio fazia parte da equipe feminina e afro-americana da NASA.

Antes da era da computação na agência, papel, lápis e régua eram os instrumentos de trabalho utilizados para calcular as viagens para fora da Terra com precisão. E cérebros matemáticos, como os das cientistas retratadas no filme, davam conta de tudo isso.

[...] Para saber mais sobre a participação de outras mulheres nas viagens espaciais, proponha aos estudantes que acessem o **Carrossel de imagens: Mulheres e as viagens espaciais**.

Katherine Johnson se graduou em Matemática em 1937, pela Universidade Estadual de West Virginia. Na época com 18 anos, ela gostaria de ser uma pesquisadora. Mas começou sua carreira como professora, em uma escola pública para negros (a segregação racial ainda predominava nos Estados Unidos).

O seu ingresso na NASA se deu em 1953, período em que a agência ainda se chamava NACA. Ela atuava no Laboratório Langley, sob a direção de Dorothy Vaughan, responsável pela seção de computação da área ocidental para negros. A matemática atuou na agência até 1986.

[...]

Tanto pioneirismo rendeu a Katherine Johnson diversas homenagens. Em 2015, ela recebeu do então presidente Barack Obama a Medalha da Liberdade, a maior condecoração civil dos Estados Unidos. Dois anos depois, a NASA batizou um dos seus edifícios com o seu nome.

A própria agência chegou a afirmar que os grandes feitos espaciais que marcaram sua história não teriam sido possíveis "sem Katherine Johnson e seu amor pela matemática". Curiosa, confiante e empenhada, a cientista conquistou o mundo — e o espaço — com o seu trabalho.

Katherine Johnson: a matemática que levou o homem à Lua. **Mentalidades matemáticas**. Disponível em: https://mentalidadesmatematicas.org.br/katherine-johnson-matematica/. Acesso em: 10 ago. 2024.

2. Polinômio com uma variável

Polinômio complexo de variável complexa x é toda expressão $P(x)$ que pode ser apresentada sob a forma:

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \dots + a_1x + a_0,$$

em que $\{a_0, a_1, a_2, \dots, a_n\} \subset \mathbb{C}$, $\{n, n-1, n-2, \dots, 1, 0\} \subset \mathbb{N}$ e a variável x pode assumir qualquer valor complexo.

- Para indicar que $P(x)$ representa a expressão

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \dots + a_1x + a_0,$$

escrevemos:

$$P(x) \equiv a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \dots + a_1x + a_0 \quad \text{ou}$$

$$P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \dots + a_1x + a_0$$

- Cada uma das parcelas a_nx^n, $a_{n-1}x^{n-1}$, $a_{n-2}x^{n-2}$, ..., a_1x e a_0 é um **termo** ou **monômio** do polinômio, sendo a_0 o **termo independente da variável** x.
- Os números a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, ..., a_1 e a_0 são os **coeficientes** do polinômio. Se todos esses coeficientes são iguais a zero, o polinômio é chamado de **identicamente nulo**. Indica-se que um polinômio $P(x)$ é identicamente nulo por $P(x) \equiv 0$.
- O **grau** de um polinômio não identicamente nulo é o maior expoente da variável entre os termos de coeficientes não nulos. Indicaremos o grau de um polinômio P pelo símbolo $\text{gr}(P)$.
- Não se define grau de um polinômio identicamente nulo, pois todos os seus coeficientes são nulos.

Observação

O símbolo $\equiv$ deve ser lido: "é idêntico a".

- O coeficiente não nulo da variável de maior expoente é o **coeficiente dominante** do polinômio, ou seja, o coeficiente dominante é o do termo que determina o grau do polinômio. Não se define coeficiente dominante para o polinômio identicamente nulo.
- Atribuindo um valor complexo α à variável x, obtemos a expressão

$$a_n\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + a_{n-2}\alpha^{n-2} + \dots + a_1\alpha + a_0,$$

cujo resultado é chamado de **valor numérico** do polinômio para $x = \alpha$. Indica-se esse valor numérico por $P(\alpha)$.
- Chamamos **raiz** do polinômio $P(x)$ todo número complexo α tal que $P(\alpha) = 0$. A raiz também é chamada de **zero** do polinômio.

Exemplos

a. A expressão $6x^4 + 2x^3 + x^2 - 7x + 9$ é um polinômio de grau 4 em que:
- 6, 2, 1, -7 e 9 são seus coeficientes;
- x é sua variável;
- $6x^4$, $2x^3$, x^2, $-7x$ e 9 são seus termos ou seus monômios;
- 9 é seu termo independente;
- 6 é seu coeficiente dominante.

b. A expressão $7t^5 + 6it^3 - 10t$, que pode ser representada sob a forma $7t^5 + 0t^4 + 6it^3 + 0t^2 - 10t + 0$, é um polinômio de grau 5 em que:
- 7, 0, 6i, 0, -10 e 0 são seus coeficientes;
- t é sua variável;
- $7t^5$, $0t^4$, $6it^3$, $0t^2$, $-10t$ e 0 são seus termos ou seus monômios;
- 0 é seu termo independente;
- 7 é seu coeficiente dominante.

c. O número 3 é um polinômio de grau zero, pois pode ser representado na forma $3x^0$. Todo número complexo não nulo é um polinômio de grau zero.

Todo número complexo é chamado de **polinômio constante**, inclusive o número zero (do qual não se define grau).

d. As expressões $5x^{-3} + 6x^2 + 4x^{-1} + 7$ e $3t^{\frac{1}{2}} + 4t^3 + 5t - 2$ não são polinômios, pois em cada uma delas há pelo menos um termo não nulo cujo expoente da variável **não é número natural**.

e. O número 2 é a raiz do polinômio $P(x) \equiv x^3 - 5x^2 + 3x + 6$, pois:

$$P(2) = 2^3 - 5 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + 6 = 0$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

2. b. $k \neq 2$ e $k \neq -2 \Rightarrow gr(Q) = 5$
$k = 2 \Rightarrow gr(Q) = 3$
$k = -2 \Rightarrow gr(Q) = 4$

Faça os exercícios no caderno.

1. Determine os números complexos a e b de modo que o polinômio $P(x) \equiv (2a + 3b)x^4 - (a - b + 5)x^2$ seja identicamente nulo. **1.** $a = -3$; $b = 2$

2. Responda aos itens seguintes.

a. Determine os valores complexos do parâmetro m para que o polinômio $P(x) \equiv (3m - 12)x^3 + 5x^2 + 3x - 5$ seja do 2º grau. **2. a.** $m = 4$

b. Faça a discussão sobre o grau do polinômio $Q(x) \equiv (k^2 - 4)x^5 + (k - 2)x^4 + 5x^3 - 3x - 2$, em função do parâmetro complexo k. (Discutir o grau desse polinômio em função de k significa determinar o grau de $Q(x)$ para cada valor complexo assumido pelo parâmetro k.)

3. O polinômio $P(x) \equiv x^3 + (a + 4)x^2 + 1$, com $a \in \mathbb{C}$, é tal que $P(-2) = 5$. Determine o número complexo a. **3.** $a = -1$

4. Determine o polinômio $P(x)$ do 2º grau tal que $P(0) = 2$, $P(1) = 3$ e $P(2) = 8$.

Sugestão: Indique o polinômio por $P(x) \equiv ax^2 + bx + c$, com $\{a, b, c\} \subset \mathbb{C}$ e $a \neq 0$. **4.** $P(x) \equiv 2x^2 - x + 2$

5. Determine as raízes complexas de cada um dos polinômios a seguir.

a. $P(x) \equiv 2x^2 - x - 1$ **5. a.** $1, -\frac{1}{2}$

b. $Q(x) \equiv x^3 + 1$ **5. b.** $-1, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2}, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}i}{2}$

c. $T(x) \equiv x^3 - 4x^2 + x - 4$ **5. c.** 4, i, $-$i

Sugestão: Fatore o polinômio $T(x)$.

6. $a = 0$; $b = -\frac{1}{2}$

6. Determine os números complexos a e b sabendo que 1 e -1 são raízes do polinômio:

$$P(x) \equiv (2a - b)x^4 + ax^3 + (3b - 2a)x^2 + 1$$

7. Junte-se a um colega para resolver este exercício. Uma máquina pode ser programada em três velocidades diferentes. Na maior velocidade, ela produz x^3 metros de fio elétrico por minuto; na velocidade intermediária, ela fabrica $3x^2$ metros de fio por minuto; e na menor velocidade, produz $(x + 26)$ metros de fio por minuto, em que x é um número real positivo.

a. Em 3 minutos consecutivos, a máquina foi programada por 1 minuto em cada uma das 3 velocidades. Qual é o polinômio $P(x)$ que expressa a produção da máquina nesses 3 minutos?

7. a. $P(x) \equiv x^3 + 3x^2 + x + 26$

b. Se a menor velocidade de produção da máquina é de 30 metros de fio por minuto, qual foi a produção da máquina, nos 3 minutos considerados no item **a**?

7. b. 142 m

Para retomar os conteúdos estudados, resolva o exercício complementar 1.

Identidade de polinômios

Inicie o tópico **Identidade de polinômios** perguntando: "Para que valores reais de x a igualdade $3x + 5 = 11$ torna-se verdadeira?" ($x = 2$); "Para que valores reais de x a igualdade $(x+3)^2 = x^2 + 6x + 9$ torna-se verdadeira?" (Para todos os valores reais.). Peça um exemplo, diferente do anterior, de uma igualdade na variável x que se torna verdadeira para todo valor real de x. Escreva na lousa alguns exemplos sugeridos pelos estudantes e discuta cada um.

Considere os polinômios $P(x) \equiv 2x^2 + 4x + 3$ e $Q(x) \equiv ax^2 + bx + c$, em que a, b e c são constantes complexas. Dizemos que $P(x)$ e $Q(x)$ são polinômios idênticos se, e somente se, $P(\alpha) = Q(\alpha)$ para qualquer $\alpha \in \mathbb{C}$.

Assim, para determinar as constantes a, b e c, podemos atribuir a x três valores distintos quaisquer e formar um sistema de três equações e três incógnitas. Por exemplo:

$$\begin{cases} P(0) = Q(0) \\ P(1) = Q(1) \\ P(-1) = Q(-1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 \cdot 0^2 + 4 \cdot 0 + 3 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c \\ 2 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 + 3 = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c \\ 2 \cdot (-1)^2 + 4 \cdot (-1) + 3 = a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + c \end{cases}$$

Ou seja: $\begin{cases} c = 3 \\ a + b + c = 9 \\ a - b + c = 1 \end{cases} \quad \therefore a = 2,\ b = 4 \text{ e } c = 3$

Assim, concluímos que os polinômios $P(x)$ e $Q(x)$ são idênticos se, e somente se, os coeficientes de termos de mesmo grau são iguais. De modo geral, podemos definir que:

Os polinômios, na variável x complexa, $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0$ e $b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \ldots + b_1 x + b_0$ são **idênticos** se, e somente se, os coeficientes a_j e b_j obedecem à condição:

$$a_j = b_j, \text{ para todo número natural } j, \text{ com } 0 \leqslant j \leqslant n$$

Indicamos que dois polinômios $P(x)$ e $Q(x)$ são idênticos por $P(x) \equiv Q(x)$; caso não sejam idênticos, indicamos por $P(x) \not\equiv Q(x)$.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

1. Determine os valores complexos de a e b para que os polinômios $P(x) \equiv (a^2 - 4)x^3 + 2x + 6$ e $Q(x) \equiv 5x^3 + (a - 3)x^2 + (a - b)x + 6$ sejam idênticos.

Resolução

Temos $P(x) \equiv Q(x)$ se, e somente se:

$$\begin{cases} a^2 - 4 = 5 \\ a - 3 = 0 \\ a - b = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \pm 3 \\ a = 3 \\ a - b = 2 \end{cases} \quad \therefore\ a = 3 \text{ e } b = 1$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Faça os exercícios no caderno.

8. Sendo $P(x) \equiv (k^2 - 1)x^4 + (k - 3)x^3 - x + 5$ e $Q(x) \equiv 8x^4 - x + 5$, determine o número complexo k de modo que $P(x) \equiv Q(x)$. **8.** $k = 3$

9. Obtenha os valores de a, b e c para que os polinômios $P(x) \equiv (2 + c)x^3 - 2ax^2 - 7$ e $Q(x) \equiv (a + b)x^3 - (b + 5)x^2 + (a - 4)x - 7$ sejam idênticos. **9.** $a = 4$, $b = 3$ e $c = 5$

Operações com polinômios

Observação

Valem, para a adição de polinômios, as propriedades:
- associativa;
- comutativa;
- elemento neutro (que é o polinômio identicamente nulo); e
- elemento oposto (o oposto de um polinômio $P(x)$ é o polinômio simbolizado por $-P(x)$, obtido com a troca dos sinais de todos os monômios de $P(x)$).

Adição de polinômios

A soma dos polinômios $P(x)$ e $Q(x)$, que se indica por $P(x) + Q(x)$, é o polinômio obtido ao se adicionarem os termos de $P(x)$ com os termos de $Q(x)$ que têm, respectivamente, o mesmo expoente na variável (caso não conste um termo com determinado expoente na variável, considera-se que seu coeficiente é zero).

Exemplo

Para adicionar os polinômios $P(x) \equiv 12x^4 + 6x^2 + 2x + 7$ e $Q(x) \equiv 4x^3 + 9x^2 - x - 8$, que devem ser entendidos como:

$$P(x) \equiv 12x^4 + 0x^3 + 6x^2 + 2x + 7 \text{ e } Q(x) \equiv 0x^4 + 4x^3 + 9x^2 - x - 8$$

Adicionamos os coeficientes dos termos de $P(x)$ com os coeficientes dos termos de $Q(x)$ que têm, respectivamente, o mesmo expoente na variável, isto é:

$$P(x) + Q(x) \equiv (12 + 0)x^4 + (0 + 4)x^3 + (6 + 9)x^2 + (2 - 1)x + 7 - 8$$

$$\therefore P(x) + Q(x) \equiv 12x^4 + 4x^3 + 15x^2 + x - 1$$

Subtração de polinômios

A diferença entre os polinômios $P(x)$ e $Q(x)$, nessa ordem, que se indica por $P(x) - Q(x)$, é definida como a adição de $P(x)$ com o oposto de $Q(x)$, isto é:

$$P(x) - Q(x) = P(x) + [-Q(x)]$$

Exemplo

Sejam $P(x) \equiv x^5 + 8x^3 + 7x^2 + 3$ e $Q(x) \equiv 4x^5 + 6x^4 - 2x^3 - 2$, que devem ser entendidos como:

$$P(x) \equiv x^5 + 0x^4 + 8x^3 + 7x^2 + 0x + 3 \text{ e } Q(x) \equiv 4x^5 + 6x^4 - 2x^3 + 0x^2 + 0x - 2$$

Para obter $P(x) - Q(x)$, subtraímos os coeficientes dos termos que têm o mesmo expoente na variável, isto é:

$$P(x) - Q(x) \equiv (1 - 4)x^5 + (0 - 6)x^4 + [8 - (-2)]x^3 + (7 - 0)x^2 + (0 - 0)x + 3 - (-2)$$

$$\therefore P(x) - Q(x) \equiv -3x^5 - 6x^4 + 10x^3 + 7x^2 + 5$$

Multiplicação de polinômios

O produto dos polinômios $P(x)$ e $Q(x)$, que se indica por $P(x) \cdot Q(x)$, é o polinômio obtido pela adição dos produtos de cada monômio de $P(x)$ por todos os monômios de $Q(x)$.

Valem para a multiplicação as propriedades associativa, comutativa e elemento neutro, além das distributivas em relação à adição e à subtração.

Exemplos

a. Sendo $P(x) \equiv 5x^2 - 3x + 2$, temos: $3P(x) \equiv 3(5x^2 - 3x + 2) \equiv 15x^2 - 9x + 6$

b. Sendo $H(x) \equiv 5x^3 + 2x$ e $G(x) \equiv 2x^2 + 4x - 1$, temos:

$$H(x) \cdot G(x) \equiv (5x^3 + 2x)(2x^2 + 4x - 1) \equiv 10x^5 + 20x^4 - 5x^3 + 4x^3 + 8x^2 - 2x$$

$$\therefore H(x) \cdot G(x) \equiv 10x^5 + 20x^4 - x^3 + 8x^2 - 2x$$

Uma das utilidades dos polinômios é generalizar um resultado para qualquer valor de uma variável. Acompanhe um exemplo, assistindo ao vídeo **Embalagens**. Disponível em: https://m3.ime.unicamp.br/recursos/1094. Acesso em: 7 ago. 2024.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Faça os exercícios no caderno.

10. Dados os polinômios $P(x) \equiv 3x^3 + 2x^2 - 4x$, $Q(x) \equiv x^2 + 3x - 1$ e $T(x) \equiv 4x - 2$, calcule:

a. $P(x) + Q(x)$ **10. a.** $3x^3 + 3x^2 - x - 1$

b. $P(x) - Q(x)$ **10. b.** $3x^3 + x^2 - 7x + 1$

c. $4P(x)$ **10. c.** $12x^3 + 8x^2 - 16x$

d. $2P(x) - 5Q(x)$ **10. d.** $6x^3 - x^2 - 23x + 5$

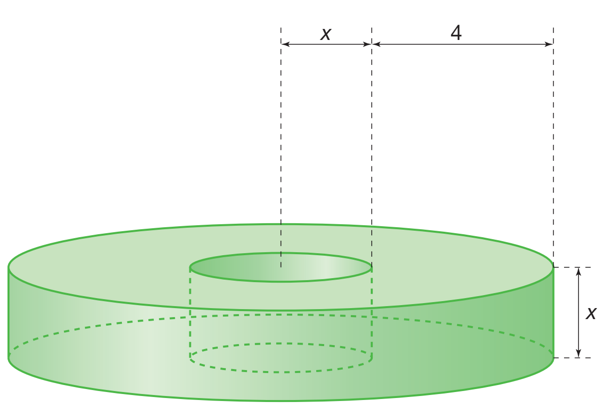
e. $Q(x) \cdot T(x) + P(x)$ **10. e.** $7x^3 + 12x^2 - 14x + 2$

f. $[Q(x)]^2$ **10. f.** $x^4 + 6x^3 + 7x^2 - 6x + 1$

11. Dados os polinômios $Q(x) \equiv 2x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 1$ e $T(x) \equiv x^3 + 2x + 4$, determine o polinômio $P(x)$ tal que $P(x) + 3Q(x) \equiv 2T(x)$. **11.** $P(x) \equiv -6x^4 + 14x^3 - 9x^2 + 4x + 11$

12. Obtenha os valores das constantes a e b na identidade:
$(x^3 + x + 1)(ax + b) + 4x^2 - 3x - 1 \equiv 2x^4 + x^3 + 6x^2$ **12.** $a = 2$; $b = 1$

13. O filtro de ar do motor de um automóvel tem o formato de um cilindro circular reto atravessado por um furo central também cilíndrico circular reto. O raio do furo central tem a mesma medida, em centímetro, da altura do filtro e 4 cm a menos que o raio da base do filtro. Indicando por x a medida, em centímetro, do raio do furo central, conforme mostra a figura, represente por um polinômio, na variável x, o volume desse filtro em centímetro cúbico. **13.** $V = 8\pi x^2 + 16\pi x$



ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

14. Elabore um problema sobre cálculo de área ou volume envolvendo polinômio e troque com um colega para resolver. Ao final, confiram se vocês resolveram corretamente.
14. Resposta pessoal.

Para retomar os conteúdos estudados, resolva o exercício complementar 2.

Divisão de polinômios

Dividir o polinômio $E(x)$ pelo polinômio não nulo $D(x)$ significa obter os polinômios $Q(x)$ e $R(x)$ tais que:

$$Q(x) \cdot D(x) + R(x) \equiv E(x) \text{ e } \operatorname{gr}(R) < \operatorname{gr}(D) \text{ ou } R(x) \equiv 0$$

- Os polinômios $E(x)$, $D(x)$, $Q(x)$ e $R(x)$ são chamados, respectivamente, de dividendo, divisor, quociente e resto da divisão.
- Demonstra-se que existe um único quociente $Q(x)$ e um único resto $R(x)$ na divisão de $E(x)$ por $D(x)$.
- Quando $R(x) \equiv 0$, dizemos que a divisão de $E(x)$ por $D(x)$ é **exata**, ou, ainda, que $E(x)$ é **divisível** por $D(x)$.

Exemplos

a. Na identidade

$$\underbrace{(3x + 5)}_{Q(x)}\ \underbrace{(x^4 + 2x)}_{D(x)} + \underbrace{10x^3}_{R(x)} \equiv \underbrace{3x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 6x^2 + 10x}_{E(x)}$$

temos $\operatorname{gr}(R) < \operatorname{gr}(D)$. Portanto, devido à unicidade do quociente e do resto, concluímos que $Q(x)$ e $R(x)$ são, respectivamente, o quociente e o resto da divisão de $E(x)$ por $D(x)$.

b. Na identidade

$$\underbrace{(x + 3)}_{Q(x)}\underbrace{(x - 3)}_{D(x)} + \underbrace{0}_{R(x)} \equiv \underbrace{x^2 - 9}_{E(x)}$$

temos $R(x) \equiv 0$. Por isso, dizemos que $Q(x)$ é o quociente exato da divisão de $E(x)$ por $D(x)$. Dizemos, também, que $E(x)$ é divisível por $D(x)$.

Método da chave para a divisão de polinômios

O método da chave utilizado na divisão de números pode ser estendido para a divisão de polinômios. Por exemplo, para dividir o polinômio $E(x) \equiv 3x^5 + 16x^3 + x^2 - 10x + 9$ pelo polinômio $D(x) \equiv x^2 + 6$:

(1) Dispomos $E(x)$ e $D(x)$ sob a forma:

$$\begin{array}{l|l} 3x^5 + 0x^4 + 16x^3 + x^2 - 10x + 9 & x^2 + 6 \\ \hline \end{array}$$

(2) Dividimos o monômio de mais alto grau de $E(x)$ pelo monômio de mais alto grau de $D(x)$ e escrevemos o resultado abaixo da chave. Nesse caso, temos: $3x^5 : x^2 = 3x^3$

$$\begin{array}{l|l} 3x^5 + 0x^4 + 16x^3 + x^2 - 10x + 9 & x^2 + 6 \\ \cline{2-2} & 3x^3 \end{array}$$

(3) Subtraímos do dividendo o produto do divisor $D(x)$ pelo quociente obtido em (2), determinando, assim, o primeiro resto parcial.

$$\begin{array}{r|l} 3x^5 + 0x^4 + 16x^3 + x^2 - 10x + 9 & x^2 + 6 \\ \cline{2-2} \ominus\ 3x^5 \qquad\quad + 18x^3 \qquad\qquad\qquad & 3x^3 \\ \cline{1-1} \underbrace{-2x^3 + x^2 - 10x + 9}_{1^{\text{º}} \text{ resto parcial}} & \end{array}$$

(4) Dividimos o monômio de mais alto grau do primeiro resto parcial pelo monômio de mais alto grau de $D(x)$. Nesse caso, temos: $-2x^3 : x^2 = -2x$

$$\begin{array}{r|l} 3x^5 + 0x^4 + 16x^3 + x^2 - 10x + 9 & x^2 + 6 \\ \cline{2-2} \ominus\ 3x^5 \qquad\quad + 18x^3 \qquad\qquad\qquad & 3x^3 - 2x \\ \cline{1-1} -2x^3 + x^2 - 10x + 9 & \end{array}$$

(5) Subtraímos do primeiro resto parcial o produto do divisor $D(x)$ pelo quociente obtido em (4), determinando, assim, o segundo resto parcial.
E assim sucessivamente, até obter o resto final $R(x)$, que deve obedecer a uma das condições: $gr(R) < gr(D)$ ou $R(x) \equiv 0$.
Acompanhe:

$$
\begin{array}{r|l}
3x^5 + 0x^4 + 16x^3 + x^2 - 10x + 9 & x^2 + 6 \\ \cline{2-2}
3x^5 \qquad\quad + 18x^3 \qquad\qquad\qquad\quad & \underbrace{3x^3 - 2x + 1}_{\text{quociente}} \\ \cline{1-1}
-2x^3 + x^2 - 10x + 9 & \\
-2x^3 \qquad\quad - 12x \qquad & \\ \cline{1-1}
x^2 + \ \ 2x + 9 & \\
x^2 \qquad\qquad + 6 & \\ \cline{1-1}
\underbrace{2x + 3}_{\text{resto}} &
\end{array}
$$

Observação

Note que o grau do polinômio quociente é igual à diferença entre os graus do dividendo e do divisor.

Concluímos, então, que o quociente $Q(x)$ e o resto $R(x)$ são dados por:

$$Q(x) \equiv 3x^3 - 2x + 1 \text{ e } R(x) \equiv 2x + 3$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

2. Dividindo um polinômio $P(x)$ por $2x^3 - 1$, obtendo o quociente $4x + 2$ e o resto $x^2 + 3$. Determine $P(x)$.

Resolução

Multiplicando o quociente pelo divisor e adicionando ao resultado o resto da divisão, obtemos o dividendo. Assim, temos:

$$P(x) \equiv (4x + 2)(2x^3 - 1) + (x^2 + 3) \Rightarrow P(x) \equiv 8x^4 - 4x + 4x^3 - 2 + x^2 + 3$$

$$\therefore P(x) \equiv 8x^4 + 4x^3 + x^2 - 4x + 1$$

3. Dividindo o polinômio $P(x) \equiv 6x^3 + 4x^2 + 2x - 1$ pelo polinômio $D(x)$, obtendo o quociente $Q(x) \equiv 3x + 2$ e o resto $R(x) \equiv 11x + 5$. Determine $D(x)$.

Resolução

O grau do polinômio quociente é a diferença entre os graus dos polinômios dividendo e divisor. Assim, temos: $3 - gr(D) = 1 \Rightarrow gr(D) = 2$

Sabendo que o grau de $D(x)$ é 2, podemos escrever $D(x) \equiv ax^2 + bx + c$, com $\{a, b, c\} \subset \mathbb{C}$ e $a \neq 0$.

Multiplicando o quociente pelo divisor e adicionando ao resultado o resto da divisão, obtém-se o polinômio dividendo, isto é:

$$\begin{array}{r|l} P(x) & D(x) \\ \cline{2-2} R(x) & Q(x) \end{array} \Rightarrow P(x) \equiv Q(x) \cdot D(x) + R(x)$$

Então, temos:

$$6x^3 + 4x^2 + 2x - 1 \equiv (3x + 2)(ax^2 + bx + c) + 11x + 5$$

$$\therefore 6x^3 + 4x^2 + 2x - 1 \equiv 3ax^3 + 3bx^2 + 3cx + 2ax^2 + 2bx + 2c + 11x + 5$$

$$\therefore 6x^3 + 4x^2 + 2x - 1 \equiv 3ax^3 + (3b + 2a)x^2 + (3c + 2b + 11)x + 2c + 5$$

$$\text{Logo: } \begin{cases} 3a = 6 \\ 3b + 2a = 4 \\ 3c + 2b + 11 = 2 \\ 2c + 5 = -1 \end{cases} \Rightarrow a = 2,\ b = 0 \text{ e } c = -3$$

Finalmente, temos: $D(x) \equiv 2x^2 + 0x - 3$, ou seja, $D(x) \equiv 2x^2 - 3$.

Reflexão

É possível solucionar o exercício resolvido **3** sem recorrer ao sistema linear nas incógnitas a, b e c?

Sim, usando:
$P(x) \equiv Q(x) \cdot D(x) + R(x)$
$P(x) - R(x) \equiv Q(x) \cdot D(x)$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Faça os exercícios no caderno.

15. a. $Q(x) \equiv 4x^2 + 2x - 1$ e $R(x) \equiv 8x + 2$

15. Aplicando o método da chave, obtenha o quociente $Q(x)$ e o resto $R(x)$ da divisão de $E(x)$ por $D(x)$.

a. $E(x) \equiv 8x^4 + 4x^3 + 10x^2 + 14x - 1$ e $D(x) \equiv 2x^2 + 3$

b. $E(x) \equiv x^5 + x^4 + 3x^3 + x^2 + 4x + 2$ e $D(x) \equiv x^3 + 2x - 1$

15. b. $Q(x) \equiv x^2 + x + 1$ e $R(x) \equiv 3x + 3$

c. $E(x) \equiv x^4 - 1$ e $D(x) \equiv x - 1$

15. c. $Q(x) \equiv x^3 + x^2 + x + 1$ e $R(x) \equiv 0$

16. Dividindo o polinômio $E(x) \equiv 2x^4 + 6x^3 - x^2 - 3x + 5$ pelo polinômio $D(x)$, obtemos o quociente $Q(x) \equiv$ $\equiv 2x^2 - 1$ e o resto $R(x) \equiv 5$. Determine $D(x)$.
Resolva este exercício de duas maneiras diferentes.

16. $D(x) \equiv x^2 + 3x$

17. Uma caixa-d'água tem, internamente, o formato de um paralelepípedo reto-retângulo cujo volume V, em metro cúbico, pode ser expresso pelo polinômio $V(x) \equiv x^3 + 10x^2 + 31x + 30$. Se a medida H, em metro, da altura interna da caixa pode ser expressa pelo polinômio $H(x) \equiv x + 5$, obtenha:

a. o polinômio $B(x)$ que expressa a área da base interna dessa caixa;

17. a. $B(x) \equiv x^2 + 5x + 6$

b. o polinômio $U(x)$ que expressa a capacidade, em litro, dessa caixa.

17. b. $U(x) \equiv 1.000x^3 + 10.000x^2 + 31.000x + 30.000$

Para retomar os conteúdos estudados, resolva o exercício complementar 3.

3. Divisão de polinômios por binômios do 1º grau

Consideremos os polinômios $P(x) \equiv x^3 - 5x^2 - 9x + 45$ e $D(x) \equiv x^2 - 9$. Observando que $D(x) \equiv (x + 3)(x - 3)$, podemos efetuar a divisão de $P(x)$ por $D(x)$, dividindo $P(x)$ por $x + 3$, e o resultado obtido dividir por $x - 3$. Assim, o quociente $Q(x)$ dessa última divisão é o resultado da divisão de $P(x)$ por $D(x)$, como mostra o esquema a seguir.

fatores de $x^2 - 9$

$$\begin{array}{r|l}
x^3 - 5x^2 - 9x + 45 & x + 3 \\ \hline
x^3 + 3x^2 \qquad\qquad & x^2 - 8x + 15 \\
-8x^2 - 9x + 45 & \\
-8x^2 - 24x \qquad & \\
15x + 45 & \\
15x + 45 & \\
0 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
x^2 - 8x + 15 & x - 3 \\ \hline
x^2 - 3x \qquad & x - 5 \\
-5x + 15 & \\
-5x + 15 & \\
0 &
\end{array}$$

$Q(x)$

Mesmo que a divisão não fosse exata (resto zero), seria possível obter o quociente de $P(x)$ por $D(x)$ por meio de divisões sucessivas por binômios do 1º grau; e, relacionando de maneira conveniente os restos dessas divisões, seria possível obter o resto da divisão de $P(x)$ por $D(x)$.

Generalizando, o quociente e o resto da divisão de polinômios podem ser obtidos por meio de divisões sucessivas por binômios do 1º grau, o que justifica um estudo particular da divisão por esse tipo de binômio.

Teorema do resto

Sendo a uma constante complexa qualquer, o resto da divisão de um polinômio $P(x)$ por $x - a$ é igual a $P(a)$.

Reflexão

Efetuando a divisão de $P(x) \equiv x^3 - 6x + 17$ por $D(x) \equiv x^2 - 6x + 8$, obtém-se o quociente $Q(x) \equiv x + 6$ e o resto $R(x) \equiv 22x - 31$; portanto, a divisão não é exata. Como podemos obter $Q(x)$ e $R(x)$ por meio de divisões sucessivas por binômios do 1º grau?

Reflexão: Resposta nas **Orientações específicas** deste capítulo.

Demonstração

Sejam, respectivamente, $Q(x)$ e $R(x)$ o quociente e o resto da divisão de $P(x)$ por $x - a$. Ou seja:

$$P(x) \equiv Q(x) \cdot (x - a) + R(x) \quad (1)$$

Como $gr(R) = 0$ ou $R(x) \equiv 0$, podemos indicar $R(x)$ por uma constante R. Assim, a sentença (1) pode ser representada sob a forma:

$$P(x) \equiv Q(x) \cdot (x - a) + R$$

Calculando $P(a)$, obtemos:

$$P(a) = Q(a) \cdot (a - a) + R \Rightarrow P(a) = R$$

Logo, o resto R da divisão é igual a $P(a)$.

Exemplos

a. O resto R da divisão do polinômio $P(x) \equiv 4x^3 + x^2 - 3$ pelo binômio $x - 2$ é igual a $P(2)$, isto é: $R = P(2) = 4 \cdot 2^3 + 2^2 - 3 = 33$

b. Para obter o resto R da divisão do polinômio $P(x) \equiv x^5 + 5x^3 - x + 6$ pelo binômio $x + 1$, observamos que esse binômio pode ser representado na forma $x - (-1)$ e, portanto, pelo teorema do resto, temos:

$$R = P(-1) = (-1)^5 + 5 \cdot (-1)^3 - (-1) + 6 = 1$$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

4. Determine o polinômio $P(x)$ do 2º grau que, dividido por $x - 1$, $x - 2$ e $x - 3$, apresenta restos iguais a 4, 7 e 14, respectivamente.

Resolução

Sendo $P(x) \equiv ax^2 + bx + c$, com $\{a, b, c\} \subset \mathbb{C}$, pelo teorema do resto, temos:

$$P(1) = 4 \Rightarrow a + b + c = 4$$

$$P(2) = 7 \Rightarrow 4a + 2b + c = 7$$

$$P(3) = 14 \Rightarrow 9a + 3b + c = 14$$

Resolvendo o sistema $\begin{cases} a + b + c = 4 \\ 4a + 2b + c = 7 \\ 9a + 3b + c = 14 \end{cases}$, obtemos: $a = 2$, $b = -3$ e $c = 5$.

Logo: $P(x) \equiv 2x^2 - 3x + 5$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Faça os exercícios no caderno.

18. Calcule o resto da divisão de $P(x)$ por $D(x)$ nos seguintes casos:

a. $P(x) \equiv 3x^4 - 2x^3 + 1$ e $D(x) \equiv x - 2$ **18. a.** 33

b. $P(x) \equiv x^3 + 6x^2 - 5x - 10$ e $D(x) \equiv x + 1$ **18. b.** 0

c. $P(x) \equiv 32x^4 - 8x^3 + x^2 - 1$ e $D(x) \equiv x - \frac{1}{2}$

18. c. $\frac{1}{4}$

19. Dividindo o polinômio $P(x) \equiv x^4 + (m + 3)x^2 + mx - 4$ por $x - 2$, obtém-se resto 6. Determine a constante m. **19.** $m = -3$

20. Dividindo o polinômio $P(x)$ por $x^2 + 2x + k$, obtém-se o quociente $3x^2 - 1$ e o resto $-4x$. Sabendo que o resto da divisão de $P(x)$ por $x - 2$ é 91, determine a constante k.

20. $k = 1$

21. Dividindo o polinômio $P(x) \equiv x^4 + ax^2 - 3x + b$ por $x + 2$, obtém-se resto 32; e dividindo $P(x)$ por $x - 1$ obtém-se resto -4. Determine os valores de a e b.

21. $a = 4$; $b = -6$

22. Qual é o polinômio do 2º grau que, dividido por $x - 2$, $x - 3$ e $x - 4$, apresenta restos 3, 10 e 21, respectivamente? **22.** $2x^2 - 3x + 1$

Para retomar os conteúdos estudados, resolva o exercício complementar 4.

W. HOPWOOD - COLEÇÃO WELLCOME, LONDRES

Jean le Rond d'Alembert. Gravura pontilhada por M. Quentin de la Tour, século XIX.

Teorema de D'Alembert

Antes de iniciar o tópico **Teorema de D'Alembert**, pergunte: "Se um polinômio $P(x)$ é divisível por $x - a$, qual é o valor numérico de $P(a)$?" (Zero.). Após essa discussão, demonstre o teorema de D'Alembert.

Jean le Rond D'Alembert (1717-1783), matemático, filósofo e físico francês, considerado o cientista mais influente da França em sua época, participou ativamente do movimento que abriu caminho para a Revolução Francesa.

Vários teoremas levam o nome desse importante matemático francês; no estudo dos polinômios, é de D'Alembert o teorema:

> Sendo a uma constante complexa qualquer, um polinômio $P(x)$ é divisível por $x - a$ se, e somente se, a é raiz de $P(x)$.

Demonstração

Por definição de raiz de um polinômio, temos que a é raiz de $P(x)$ se, e somente se, $P(a) = 0$. Mas, pelo teorema do resto, $P(a)$ é o resto R da divisão de $P(x)$ por $x - a$. Concluímos, assim, que:

$$a \text{ é raiz de } P(x) \Leftrightarrow R = 32 - 24 + 12 - 8 - 12 = 44 - 44 = 0$$

Ou seja, afirmar que o número a é raiz de $P(x)$ equivale a afirmar que $P(x)$ é divisível por $x - a$.

Exemplo

O polinômio $P(x) \equiv x^5 - 3x^3 + 3x^2 - 4x - 12$ é divisível pelo binômio $x - 2$, pois $P(2) = 0$. Acompanhe:

$$P(2) = 2^5 - 3 \cdot 2^3 + 3 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 - 12 = 32 - 24 + 12 - 8 - 12 = 44 - 44 = 0$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Faça os exercícios no caderno.

23. Considerando o polinômio $P(x) \equiv 2x^4 + x^3 + 7x^2 + 4x - 4$, classifique em verdadeira ou falsa cada uma das afirmações a seguir.

a. $P(x)$ é divisível por $x - \frac{1}{2}$. **23. a.** verdadeira

b. $P(x)$ é divisível por $x + 1$. **23. b.** verdadeira

c. $P(x)$ é divisível por $x - 3$. **23. c.** falsa

d. $P(x)$ é divisível por $x - 2i$. **23. d.** verdadeira

24. Determine os possíveis valores complexos de a para que o polinômio $P(x) \equiv x^3 - ix^2 + a^2x - ai$ seja divisível por $x - i$, em que i é a unidade imaginária.

24. $a = 0$ ou $a = 1$

25. (UFMA) Quais os valores de a e b para que o polinômio $p(x) = x^3 + 5x^2 + ax + b$ seja divisível por $x - 1$ e por $x - 3$? **25.** $a = -33$; $b = 27$

Reflexão: Resposta nas **Orientações específicas** deste capítulo.

Reflexão

Se um polinômio $P(x)$ é divisível pelo produto $(x - a) \cdot (x - b)$, pode-se concluir que $P(x)$ é divisível por $x - a$ e por $x - b$ para quaisquer números complexos a e b?

26. Faça o que se pede.

a. Prove que, se um polinômio $P(x)$ é divisível pelo produto $(x - 2)(x - 3)$, então $P(x)$ é divisível por cada um dos fatores $x - 2$ e $x - 3$. **26. a.** Resposta no final do livro.

b. Determine as constantes a e b para que o polinômio $Q(x) \equiv 2x^4 - x^2 + ax + b$ seja divisível pelo produto $(x - 1)(x + 2)$. **26. b.** $a = 9$ e $b = -10$

27. Para que valores de n, com n natural não nulo, o polinômio $P(x) \equiv x^n - 1$ é divisível por $x + 1$? **27.** Para qualquer número n natural par, não nulo.

Dispositivo prático de Briot-Ruffini

Comente, ao iniciar o tópico **Dispositivo prático de Briot-Ruffini**, que, devido à importância da divisão de um polinômio por binômios do 1º grau, vamos apresentar um algoritmo para esse tipo de divisão.

Para efetuar a divisão de um polinômio $E(x)$ por um binômio da forma $x - a$, em que a é uma constante qualquer, podemos aplicar o método da chave. Porém, com o objetivo de facilitar essa operação, apresentaremos um dispositivo prático conhecido como **dispositivo prático de Briot-Ruffini**, em homenagem aos matemáticos que o criaram, Charles Auguste Briot (1817-1882) e Paolo Ruffini (1765-1822).

Vamos descrever esse dispositivo por meio dos exercícios resolvidos a seguir.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

5. Aplique o dispositivo prático de Briot-Ruffini para obter o quociente $Q(x)$ e o resto R da divisão de $E(x) \equiv 2x^5 + 3x^4 - 17x^3 - 70x + 6$ por $x - 3$.

Resolução

Observando que o polinômio $E(x)$ pode ser escrito na forma $E(x) \equiv 2x^5 + 3x^4 - 17x^3 + 0x^2 - 70x + 6$, seguimos os procedimentos a seguir.

(1) Montamos o dispositivo do seguinte modo:

raiz do divisor

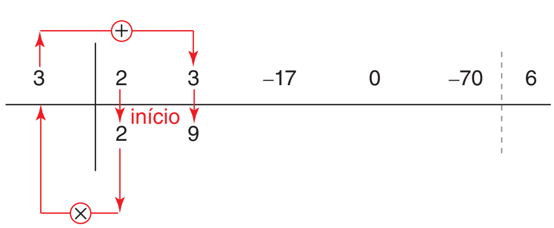
coeficientes de $E(x)$

3	2	3	−17	0	−70	6

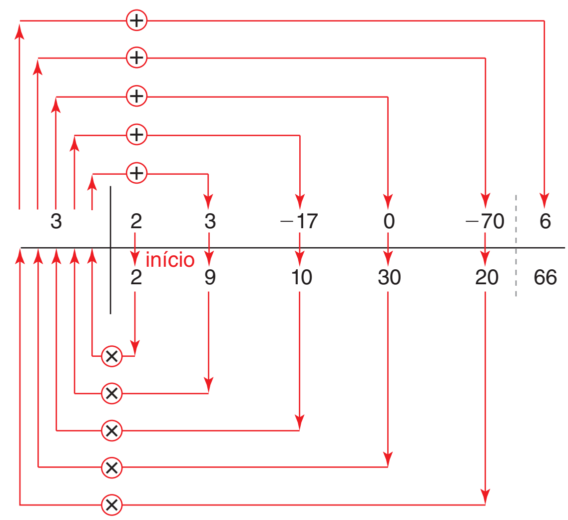
(2) Repetimos o primeiro coeficiente na linha de baixo:

3	2	3	−17	0	−70	6
	início 2					

(3) Em seguida, multiplicamos o coeficiente da linha inferior (2) pela raiz do divisor (3) e adicionamos esse produto ao próximo coeficiente da linha superior (3). Escrevemos o resultado na linha inferior, conforme indicado no esquema a seguir.



(4) Repetimos o procedimento anterior para cada um dos próximos coeficientes de $E(x)$, conforme o esquema a seguir.



ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

(5) Finalmente, pelos coeficientes do esquema, obtemos o quociente e o resto:

3	2	3	−17	0	−70	6
	2	9	10	30	20	66

coeficientes de $Q(x)$

resto

Assim, concluímos:

$$Q(x) \equiv 2x^4 + 9x^3 + 10x^2 + 30x + 20 \text{ e } R = 66$$

6. Obtenha o quociente $Q(x)$ e o resto R da divisão do polinômio $E(x) \equiv 4x^6 + 6x^5 + 5x^3 - 4x^2 - 8$ por $x + 2$.

Resolução

Aplicando o dispositivo prático de Briot-Ruffini, temos:

−2	4	6	0	5	−4	0	−8
	4	−2	4	−3	2	−4	0

Concluímos, então, que:

$$Q(x) \equiv 4x^5 - 2x^4 + 4x^3 - 3x^2 + 2x - 4 \text{ e } R = 0$$

Divisão de um polinômio $P(x)$ por $kx - a$

Sendo, respectivamente, $Q(x)$ e R o quociente e o resto da divisão de um polinômio $P(x)$ por $kx - a$, em que k e a são constantes, com $k \neq 0$, temos a identidade:

$$P(x) \equiv (kx - a) \cdot Q(x) + R$$

que é equivalente a:

$$P(x) \equiv \left(x - \frac{a}{k}\right) \cdot k \cdot Q(x) + R$$

Assim, observamos que o quociente e o resto da divisão de $P(x)$ por $x - \frac{a}{k}$ são, respectivamente, $k \cdot Q(x)$ e R. Logo, podemos estabelecer os seguintes procedimentos.

> Para a obtenção do quociente $Q(x)$ e do resto R da divisão de um polinômio $P(x)$ por $kx - a$:
> - inicialmente, dividimos $P(x)$ por $x - \frac{a}{k}$ obtendo o quociente $Q_1(x) \equiv k \cdot Q(x)$ e o resto R;
> - depois, dividimos $Q_1(x)$ por k, obtendo, assim: $\frac{Q_1(x)}{k} = Q(x)$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

7. Efetue a divisão do polinômio $P(x) \equiv 8x^5 + 2x^4 - 6x^3 + 4x + 2$ por $4x - 3$.

Resolução

Temos: $4x - 3 \equiv 4\left(x - \frac{3}{4}\right)$

Inicialmente, dividimos $P(x)$ por $x - \frac{3}{4}$ e, a seguir, dividimos o quociente obtido por 4.

Aplicando o dispositivo de Briot-Ruffini na divisão de $P(x)$ por $x - \frac{3}{4}$, temos:

$\frac{3}{4}$	8	2	−6	0	4	2
	8	8	0	0	4	5

Assim, o quociente $Q_1(x)$ e o resto R_1 da divisão de $P(x)$ por $x - \frac{3}{4}$ são:

$$Q_1(x) \equiv 8x^4 + 8x^3 + 4 \text{ e } R_1 = 5$$

Logo, o quociente $Q(x)$ e o resto R da divisão de $P(x)$ por $4x - 3$ são:

$$Q(x) \equiv \frac{Q_1(x)}{4} \equiv 2x^4 + 2x^3 + 1 \text{ e } R = R_1 = 5$$

8. Divida o polinômio $E(x) \equiv -3x^5 + 12x^4 - x^3 + 5x^2 - 5x + 4$ por $4 - x$.

Resolução

Como $4 - x \equiv -(x - 4)$, podemos dividir $E(x)$ por $x - 4$ e, em seguida, dividir o quociente obtido por -1.

Aplicando o dispositivo de Briot-Ruffini na divisão de $E(x)$ por $x - 4$, temos:

4	−3	12	−1	5	−5	4
	−3	0	−1	1	−1	0

Assim, o quociente $Q_1(x)$ e o resto R_1 da divisão de $E(x)$ por $x - 4$ são:

$$Q_1(x) \equiv -3x^4 - x^2 + x - 1 \text{ e } R_1 = 0$$

Logo, o quociente $Q(x)$ e o resto R da divisão de $E(x)$ por $4 - x$ são:

$$Q(x) \equiv \frac{Q_1(x)}{-1} \equiv 3x^4 + x^2 - x + 1 \text{ e}$$

$$R = R_1 = 0$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Faça os exercícios no caderno.

28. Por meio do dispositivo de Briot-Ruffini, obtenha o quociente $Q(x)$ e o resto R da divisão de $E(x)$ por $D(x)$ nos seguintes casos:

a. $E(x) \equiv 6x^4 - x^3 + 3x^2 + x - 2$ e $D(x) \equiv x - 2$ **28. a.** $Q(x) \equiv 6x^3 + 11x^2 + 25x + 51$ e $R = 100$

b. $E(x) \equiv 2x^5 + x^3 - 3x + 1$ e $D(x) \equiv x + 1$ **28. b.** $Q(x) \equiv 2x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 3x$ e $R = 1$

c. $E(x) \equiv x^4 - 81$ e $D(x) \equiv x - 3$ **28. c.** $Q(x) \equiv x^3 + 3x^2 + 9x + 27$ e $R = 0$

29. Transforme o polinômio $P(x) \equiv x^5 - 1$ em um produto de dois polinômios, sendo um deles do 1º grau.

Sugestão: Note que $P(1) = 0$ e, portanto, $P(x)$ é divisível por $x - 1$.

29. $P(x) \equiv (x - 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$

30. Dado o polinômio $P(x) \equiv x^7 + 1$, transforme-o em um produto de dois polinômios, sendo um deles do 6º grau. **30.** $P(x) \equiv (x + 1)(x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + 1)$

31. Utilizando o dispositivo prático de Briot-Ruffini, obtenha o quociente $Q(x)$ e o resto R da divisão de $E(x)$ por $D(x)$ nos seguintes casos:

a. $E(x) \equiv x^5 - 3x^3 + x^2 - 1$ e $D(x) \equiv 3x - 3$ **31. a.** $Q(x) \equiv \frac{x^4}{3} + \frac{x^3}{3} - \frac{2x^2}{3} - \frac{x}{3} - \frac{1}{3}$ e $R = -2$

b. $E(x) \equiv 6x^3 + 2x + 2$ e $D(x) \equiv 2x - 1$ **31. b.** $Q(x) \equiv 3x^2 + \frac{3x}{2} + \frac{7}{4}$ e $R = \frac{15}{4}$

c. $E(x) \equiv x^6 - 1$ e $D(x) \equiv 2 - x$ **31. c.** $Q(x) \equiv -x^5 - 2x^4 - 4x^3 - 8x^2 - 16x - 32$ e $R = 63$

Para retomar os conteúdos estudados, resolva o exercício complementar 5.

Extensão do teorema do resto

Sendo k e a constantes complexas quaisquer, com $k \neq 0$, o resto da divisão de um polinômio $P(x)$ por $kx - a$ é igual a $P\left(\frac{a}{k}\right)$.

Demonstração

Sejam, respectivamente, $Q(x)$ e $R(x)$ o quociente e o resto da divisão de $P(x)$ por $kx - a$, ou seja:

$$P(x) \equiv Q(x) \cdot (kx - a) + R(x) \quad (1)$$

Como $gr(R) = 0$ ou $R(x) \equiv 0$, podemos indicar $R(x)$ por uma constante R. Assim, a sentença (1) pode ser representada na forma:

$$P(x) \equiv Q(x) \cdot (kx - a) + R$$

Calculando $P\left(\frac{a}{k}\right)$, obtemos: $P\left(\frac{a}{k}\right) = Q\left(\frac{a}{k}\right) \cdot \left(k \cdot \frac{a}{k} - a\right) + R \Rightarrow P\left(\frac{a}{k}\right) = R$

Logo, o resto R da divisão é igual a $P\left(\frac{a}{k}\right)$.

Exemplos

a. O resto R da divisão do polinômio $P(x) \equiv 5x^3 + 3x^2 - 3$ pelo binômio $2x - 1$ é o valor numérico do polinômio $P(x)$, quando x é substituído pela raiz do binômio, isto é:

$$R = P\left(\frac{1}{2}\right) = 5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 + 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 3 = \frac{5}{8} + \frac{3}{4} - 3 = -\frac{13}{8}$$

b. O resto R da divisão do polinômio $P(x) \equiv 2x^5 + 7x^4 - 2x - 9$ por $9x$ é o valor numérico do polinômio $P(x)$, quando x é substituído pela raiz do binômio $9x - 0$, isto é:

$$R = P(0) = 2 \cdot 0^5 + 7 \cdot 0^4 - 2 \cdot 0 - 9 = -9$$

Extensão do teorema de D'Alembert

Sendo k e a constantes complexas quaisquer, com $k \neq 0$, um polinômio $P(x)$ é divisível por $kx - a$ se, e somente se, $P\left(\frac{a}{k}\right) = 0$.

Demonstração

Pela definição de raiz de um polinômio, o número $\frac{a}{k}$ é raiz de $P(x)$ se, e somente se, $P\left(\frac{a}{k}\right) = 0$. Mas, pela extensão do teorema do resto, $P\left(\frac{a}{k}\right)$ é o resto R da divisão de $P(x)$ por $kx - a$. Concluímos, assim, que:

$$\frac{a}{k} \text{ é raiz de } P(x) \Leftrightarrow R = 0$$

Ou seja, afirmar que o número $\frac{a}{k}$ é raiz de $P(x)$ equivale a afirmar que $P(x)$ é divisível por $kx - a$.

Exemplo

O polinômio $P(x) \equiv 3x^3 - 4x^2 + 4x - 1$ é divisível pelo binômio $3x - 1$, pois a raiz do binômio também é raiz do polinômio $P(x)$, isto é:

$$P\left(\frac{1}{3}\right) = 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 - 4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 4 \cdot \frac{1}{3} - 1 = 0$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Faça os exercícios no caderno.

32. Determine o resto da divisão de $P(x)$ por $D(x)$ nos seguintes casos:

a. $P(x) \equiv 9x^3 - 3x^2 + 1$ e $D(x) \equiv 3x - 1$ **32. a.** 1

b. $P(x) \equiv 16x^4 - 2x - 3$ e $D(x) \equiv 2x + 1$ **32. b.** -1

c. $P(x) \equiv 2x^5 - 3x^4 + 1$ e $D(x) \equiv 2x - 2i$ **32. c.** $-2 + 2i$

33. O resto da divisão de $P(x) \equiv x^2 + kx + 3$ por $4x - 1$ é $\frac{45}{16}$. Determine a constante k. **33.** $k = -1$

34. Obtenha o valor da constante k, sabendo que o polinômio $P(x) \equiv x^5 + 4x^3 - 3x + k$ é divisível por $2x - 4$. **34.** $k = -58$

35. Em uma indústria, um reservatório contendo desinfetante líquido tem, internamente, o formato de um paralelepípedo reto-retângulo cuja área $A(x)$ da base, em decímetro quadrado, e a altura $H(x)$, em decímetro, podem ser expressas pelos polinômios $A(x) \equiv x^2 + 3kx + k$ e $H(x) \equiv 2x$. Quando esse reservatório está completamente cheio de desinfetante, seu conteúdo pode ser envazado em um número inteiro de recipientes de mesma capacidade $C(x)$, em decímetro cúbico, expressa pelo polinômio $C(x) \equiv \frac{x}{5} - \frac{1}{5}$. Dado que a quantidade desses recipientes envazados pode ser expressa por um polinômio $Q(x)$, responda aos itens seguintes.

a. Determine a constante k. **35. a.** $k = -\frac{1}{4}$

b. Para o valor de k obtido no item **a**, calcule a capacidade do reservatório, em litro, se a capacidade de cada recipiente envazado for 5,8 L. **35. b.** 52.635 L

36. Elabore um exercício sobre divisão de polinômios e troque-o com um colega para resolver. Ao final, confiram se vocês resolveram corretamente. **36.** Resposta pessoal.

4. Equações polinomiais

Neste tópico, trataremos de um tipo particular de equação, aquela que pode ser representada na forma de um polinômio igualado a zero. Um dos trabalhos pioneiros sobre esse tipo de equação é a obra *Livro da Restauração e do Balanceamento* (*Al-jabr wa'l muqabalah*), escrita no século IX pelo matemático árabe Mohammed ibu-Musa al-Khwarizmi, na qual são estudadas as equações polinomiais do 1º e do 2º grau.

Essa obra inspirou os tratados posteriores até o Renascimento, quando os matemáticos buscavam uma fórmula resolutiva para equações polinomiais de qualquer grau (já haviam conseguido até o 4º grau). Os matemáticos Niels Henrik Abel e Évariste Galois encerraram essa busca, demonstrando que equações polinomiais de grau superior a 4 não podem ser resolvidas por radicais e combinações de coeficientes, isto é, não existe fórmula geral que resolva equações polinomiais de grau maior que 4.

Estudaremos, a seguir, importantes teoremas que surgiram nesse fecundo período da História da Matemática.

JOHAN GØRBITZ - ARQUIVO MUNICIPAL DE TRONDHEIM, TRONDHEIM

Niels Henrik Abel (1802-1829). Litografia após desenho de Johan Gørbitz. Publicado em 1913.

Equação polinomial na incógnita x é toda equação que pode ser representada sob a forma:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0,$$

com $\{a_0, a_1, \ldots, a_n\} \subset \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$ e $n \geqslant 1$.

- Uma equação polinomial também é chamada de **equação algébrica**.
- O grau de uma equação polinomial $P(x) = 0$ é o grau do polinômio $P(x)$.
- As raízes de uma equação polinomial $P(x) = 0$ são as raízes do polinômio $P(x)$.
- No universo dos números complexos, o conjunto formado por todas as raízes da equação polinomial $P(x) = 0$ é chamado de **conjunto solução** (**S**) ou **conjunto verdade** (**V**) da equação.

BETTMANN/GETTY IMAGES - COLEÇÃO PARTICULAR

Retrato de Évariste Galois (1811-1832), matemático francês. Ilustração sem data. Autoria desconhecida.

Exemplos

a. $4x - 8 = 0$ é uma equação polinomial do 1º grau na incógnita x, cuja raiz é 2. O conjunto solução dessa equação é $S = \{2\}$.

b. A equação $3x^2 - 4x = 2x^2 + 3x - 12$ pode ser apresentada sob a forma $x^2 - 7x + 12 = 0$; logo, é uma equação polinomial do 2º grau na incógnita x. Suas raízes são 3 e 4, e, por isso, seu conjunto solução é $S = \{3, 4\}$.

c. $x^3 - 3x^2 + 4x - 12 = 0$ é uma equação polinomial do 3º grau na incógnita x. Para determinar suas raízes complexas, podemos fatorar o primeiro membro:

$$x^3 - 3x^2 + 4x - 12 = 0 \Rightarrow x^2(x - 3) + 4(x - 3) = 0$$
$$\therefore (x - 3)(x^2 + 4) = 0$$

Pela propriedade do produto nulo, obtemos: $x - 3 = 0$ ou $x^2 + 4 = 0$

Portanto: $x = 3$ ou $x = 2\text{i}$ ou $x = -2\text{i}$

Assim, o conjunto solução da equação é $S = \{3, 2\text{i}, -2\text{i}\}$.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

9. Sabendo que uma das raízes da equação $x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = 0$ é o número 2, determine as outras raízes complexas dessa equação.

Resolução

Como 2 é raiz do polinômio $P(x) \equiv x^3 - 3x^2 - 10x + 24$, temos, pelo teorema de D'Alembert, que $P(x)$ é divisível por $x - 2$. Logo, $P(x)$ pode ser representado como o produto de $x - 2$ por um polinômio do 2º grau $Q(x)$, isto é:

$$P(x) \equiv (x - 2) \cdot Q(x)$$

Para obter $Q(x)$, basta dividir $P(x)$ por $x - 2$. Por Briot-Ruffini, temos:

2	1	−3	−10	24
	1	−1	−12	0

Logo, $Q(x) \equiv x^2 - x - 12$ e, portanto, $P(x) \equiv (x - 2)(x^2 - x - 12)$.

Assim, a equação $x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = 0$ é equivalente a $(x - 2)(x^2 - x - 12) = 0$.

Pela propriedade do produto nulo, obtemos: $x - 2 = 0$ ou $x^2 - x - 12 = 0$; portanto, $x = 2$ ou $x = -3$ ou $x = 4$.

Concluímos, assim, que, além da raiz 2, a equação tem como raízes os números −3 e 4.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Faça os exercícios no caderno.

37. Nesta atividade, forme equações polinomiais a partir de suas raízes.

a. Substitua por números as letras *a*, *b* e *c* de modo que as raízes da equação na incógnita *x*, representada a seguir, sejam 1, 2 e 4.

$$(x - a)(x - b)(x - c) = 0$$

Em seguida, elimine os parênteses do primeiro membro, aplicando a propriedade distributiva.

37. a. $(x - 1)(x - 2)(x - 4) = 0 \Rightarrow x^3 - 7x^2 + 14x - 8 = 0$

b. Forme uma equação do 3º grau que tenha uma raiz igual a 5 e duas raízes iguais a 1.

37. b. $x^3 - 7x^2 + 11x - 5 = 0$

c. Forme a equação do 4º grau $P(x) = 0$ que tenha todas as raízes iguais a 2, de modo que o coeficiente dominante de $P(x)$ seja igual a 3.

37. c. $3x^4 - 24x^3 + 72x^2 - 96x + 48 = 0$

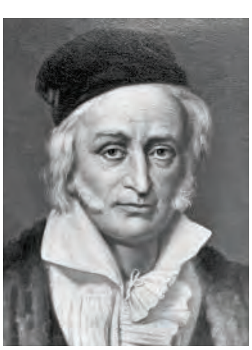
38. Considerando o universo dos números complexos, resolva a equação $x^3 - 7x^2 + 12x - 10 = 0$, sabendo que uma das raízes é o número 5. **38.** $S = \{5, 1 + i, 1 - i\}$

39. Os números -2 e 3 são duas raízes da equação polinomial $2x^4 - 2x^3 - 13x^2 + x + 6 = 0$.
Determine o conjunto solução dessa equação no universo $\mathbb{C}$. **39.** $S = \left\{-2, 3, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$

40. Em dias úteis, o período de *rush* no centro de uma cidade vai das 16 h às 20 h. Nesse período, o departamento de trânsito estima a velocidade média *v* do tráfego, por meio da função $v(t)$ dada por $v(t) = -t^3 + 6t^2 - 9t + 20$, em que *v* é medida em quilômetro por hora, e *t* é o tempo, em hora, decorrido a partir do início do período de *rush*. Em quais horários desse período a velocidade média *v* é de 20 km/h? **40.** Às 16 h e às 19 h.

Para retomar os conteúdos estudados, resolva os exercícios complementares 6 e 7.

Sugerimos a leitura do livro de Ian Stewart, **Desbravadores da Matemática: da alavanca de Arquimedes aos fractais de Mandelbrot**, no qual o autor apresenta um pouco da história de difeentes personagem que contribuíram para o desenvolvimento da Matemática, como Carl Friedrich Gauss e Évariste Galois.



BETTMANN/GETTY IMAGES - COLEÇÃO PARTICULAR

Retrato artístico de Carl Friedrich Gauss (1777-1855), matemático alemão, cujo talento revelou-se precocemente. Doutorou-se aos 21 anos de idade.

5. Teorema fundamental da Álgebra

Antes de enunciar o teorema fundamental da Álgebra, vamos pensar nas seguintes questões:

Existe alguma equação polinomial do 1º grau que não possua raiz complexa? E do 2º grau?

Para responder à primeira pergunta, basta observar que toda equação polinomial do 1º grau pode ser representada sob a forma $ax + b = 0$, com $\{a, b\} \subset \mathbb{C}$ e $a \neq 0$. Logo, o número $-\frac{b}{a}$ é raiz dessa equação para quaisquer valores complexos de *a* e *b*, com $a \neq 0$. Concluímos, então, que toda equação do 1º grau tem raiz complexa.

Para responder à segunda pergunta, destacamos que toda equação do 2º grau pode ser representada sob a forma $ax^2 + bx + c = 0$, com $\{a, b, c\} \subset \mathbb{C}$ e $a \neq 0$. Para qualquer valor do discriminante dessa equação, $\Delta = b^2 - 4ac$, existem duas raízes quadradas complexas de Δ, w_1 e w_2; portanto, existem, em $\mathbb{C}$, os números $\frac{-b + w_1}{2a}$ e $\frac{-b + w_2}{2a}$, que são raízes da equação do 2º grau.

Concluímos, então, que toda equação do 2º grau apresenta raiz complexa.

Uma nova questão que surge naturalmente neste momento é: existe alguma equação polinomial, de determinado grau, que não possua raiz complexa?

A resposta a essa pergunta é dada pelo **teorema fundamental da Álgebra**, cujo enunciado é:

> Toda equação polinomial admite pelo menos uma raiz complexa.

A demonstração desse teorema foi a tese de doutorado, na universidade de Helmstädt, do matemático alemão Carl Friedrich Gauss, publicada no ano de 1799. Embora outros matemáticos já tivessem tentado fazer essa demonstração, Gauss foi o primeiro a realizá-la com perfeição.

Gauss deu quatro demonstrações diferentes para o teorema fundamental da Álgebra, a última foi em 1850. Como todas elas exigem conhecimentos de Matemática superior, não faremos a demonstração desse teorema nesta obra.

6. Teorema da decomposição

Uma consequência imediata do teorema fundamental da Álgebra é o **teorema da decomposição**, apresentado a seguir.

> Todo polinômio de grau n, com $n \geqslant 1$,
> $P(x) \equiv a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0$ pode ser fatorado sob a forma $P(x) \equiv a_n(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3) \cdot \dots \cdot (x - r_n)$, em que $r_1, r_2, r_3, \dots, r_n$ são todas as raízes de $P(x)$.

Demonstração

Seja $P(x) \equiv a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0$ um polinômio de grau n, com $n \geqslant 1$.

Pelo teorema fundamental da Álgebra, $P(x)$ admite uma raiz complexa r_1. Logo, $P(x)$ é divisível por $x - r_1$ e, portanto:

$$P(x) \equiv (x - r_1) \cdot Q_1(x) \qquad (1)$$

em que $Q_1(x)$ é um polinômio de grau $n - 1$.

Se $n - 1 \geqslant 1$ temos, novamente pelo teorema fundamental da Álgebra, que $Q_1(x)$ tem uma raiz complexa r_2 e, portanto:

$$Q_1(x) \equiv (x - r_2) \cdot Q_2(x) \qquad (2)$$

em que $Q_2(x)$ é um polinômio de grau $n - 2$.

Substituindo (2) em (1), obtemos:

$$P(x) \equiv (x - r_1)(x - r_2) \cdot Q_2(x)$$

Aplicando n vezes esse procedimento, obtemos:

$$P(x) \equiv (x - r_1)(x - r_2)(x - r_3) \cdot \dots \cdot (x - r_n) \cdot Q_n(x)$$

Pela definição de identidade de polinômios, deduzimos que o coeficiente dominante a_n de $P(x)$ deve ser igual a $Q_n(x)$. Logo:

$$P(x) \equiv a_n(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3) \cdot \dots \cdot (x - r_n)$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

10. Decomponha o polinômio $P(x) \equiv 2x^2 + 7x - 15$ em um produto de uma constante por polinômios do 1º grau.

Resolução

As raízes de $P(x)$ são as mesmas da equação $2x^2 + 7x - 15 = 0$.

Temos:

$\Delta = 7^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-15) = 169$ e, portanto:

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{169}}{2 \cdot 2} = \frac{-7 \pm 13}{4}$$

Logo, $x = \frac{3}{2}$ ou $x = -5$.

Aplicando o teorema da decomposição, concluímos que:

$$P(x) \equiv 2\left(x - \frac{3}{2}\right)(x + 5)$$

11. O número 1 é uma das raízes do polinômio $P(x) \equiv 4x^3 - 11x^2 + 5x + 2$. Fatore esse polinômio em um produto de uma constante por polinômios do 1º grau.

Resolução

Como 1 é raiz de $P(x)$, temos, pelo teorema de D'Alembert, que $P(x)$ é divisível por $x - 1$. Portanto, $P(x)$ pode ser representado por:

$$P(x) \equiv (x - 1) \cdot Q(x)$$

Dividindo $P(x)$ por $x - 1$, obtemos $Q(x)$:

1	4	−11	5	2
	4	−7	−2	0

Logo, $Q(x) \equiv 4x^2 - 7x - 2$.

As raízes de $Q(x)$ são as mesmas da equação $4x^2 - 7x - 2 = 0$. Temos:

$$\Delta = (-7)^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-2) = 81$$

$$x = \frac{-(-7) \pm \sqrt{81}}{2 \cdot 4} = \frac{7 \pm 9}{8}$$

Logo, $x = 2$ ou $x = -\frac{1}{4}$

Como as raízes de $Q(x)$ também são raízes de $P(x)$, concluímos, pelo teorema da decomposição, que:

$$P(x) \equiv 4(x - 1)(x - 2)\left(x + \frac{1}{4}\right)$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Faça os exercícios no caderno.

41. Decomponha $P(x)$ como o produto de uma constante por polinômios de 1º grau, em cada um dos casos apresentados a seguir.

a. $P(x) \equiv 4x^2 - x - 3$ **41. a.** $P(x) \equiv 4(x - 1)\left(x + \frac{3}{4}\right)$

b. $P(x) \equiv x^3 - 8x^2 + 12x$ **41. b.** $P(x) \equiv x(x - 2)(x - 6)$

c. $P(x) \equiv 3x^3 - 6x^2 + 3x - 6$, sabendo que $P(2) = 0$ **41. c.** $P(x) \equiv 3(x - 2)(x - i)(x + i)$

42. Sabendo que o polinômio $P(x) \equiv 3x^4 - 25x^3 + 59x^2 - 47x + 10$ satisfaz a condição $P(1) = P(2) = 0$, represente $P(x)$ como o produto de uma constante por polinômios do 1º grau.

42. $P(x) \equiv 3\left(x - \frac{1}{3}\right)(x - 1)(x - 2)(x - 5)$

43. Sendo $P(x) \equiv x^3 - 5x^2 - x + 5$, faça o que se pede:

a. Resolva em $\mathbb{R}$ a equação $P(x) = 0$ **43. a.** $S = \{5, 1, -1\}$

b. Resolva em $\mathbb{R}$ a inequação $P(x) > 0$

43. b. $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 1 \text{ ou } x > 5\}$

Para retomar os conteúdos estudados, resolva o exercício complementar 8.

Apresentando as equações no universo $\mathbb{C}$: **(1)** $(x - 3) \cdot (x - 1) \cdot (x + 4) = 0$; e **(2)** $(x - 2)^3 \cdot (x + 3)^2 \cdot (x - i) \cdot (x + i) = 0$
Pergunte: "Qual é o grau da equação (1)?" (3º grau.); "Quantas raízes complexas possui a equação (1)?" (Três.); "Qual é o grau da equação (2)?" (7º grau.); "Observando que a equação (2) é equivalente a: $(x - 2) \cdot (x - 2) \cdot (x - 2) \cdot (x + 3) \cdot (x + 3) \cdot (x - i) \cdot (x + i) = 0$, quantas raízes complexas possui essa equação?" (Sete.). Após essa discussão, enuncie o teorema: "Qualquer equação polinomial de grau n, com $n \geq 1$, admite exatamente n raízes complexas, não necessariamente distintas entre si".

Número de raízes de uma equação polinomial

Consideremos a seguinte equação polinomial de grau n, com $n \geqslant 1$, na variável x:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$$

Pelo teorema da decomposição, essa equação pode ser apresentada na forma:

$$a_n(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3) \cdot \ldots \cdot (x - r_n) = 0,$$

em que $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_n$ são todas as raízes da equação.

Assim, uma consequência imediata do teorema da decomposição é que:

> Qualquer equação polinomial de grau n, com $n \geqslant 1$, admite exatamente n raízes complexas, não necessariamente distintas entre si.

Exemplos

a. A equação $3x^5 + 2x^4 - 2x - 1 = 0$ é do 5º grau e, portanto, tem exatamente cinco raízes complexas.

b. A equação polinomial $(x - 7)^3(x - 4)^2(x - 5) = 0$ é do 6º grau e, portanto, tem seis raízes complexas.

Para visualizar as seis raízes, podemos representar a equação sob a forma:

$$(x - 7)(x - 7)(x - 7)(x - 4)(x - 4)(x - 5) = 0$$

Assim, pela propriedade do produto nulo, temos:

$$\underbrace{x = 7 \text{ ou } x = 7 \text{ ou } x = 7}_{\text{três raízes iguais a 7}} \text{ ou } \underbrace{x = 4 \text{ ou } x = 4}_{\text{duas raízes iguais a 4}} \text{ ou } \underbrace{x = 5}_{\text{uma raiz igual a 5}}$$

Multiplicidade de uma raiz

No item **b** dos exemplos anteriores, observamos que na equação:

$$(x - 7)(x - 7)(x - 7)(x - 4)(x - 4)(x - 5) = 0$$

- o número 7 aparece exatamente três vezes como raiz da equação; por isso, dizemos que 7 é uma raiz tripla ou que é uma raiz de multiplicidade 3 da equação;
- o número 4 aparece exatamente duas vezes como raiz da equação; por isso, dizemos que 4 é uma raiz dupla ou que é uma raiz de multiplicidade 2 da equação;
- o número 5 aparece uma única vez como raiz da equação; por isso, dizemos que 5 é uma raiz simples ou que é uma raiz de multiplicidade 1 da equação. (Embora estranha, a expressão "multiplicidade 1" é adotada na definição do conceito de multiplicidade.)

Generalizando, seja a seguinte equação polinomial de grau n, variável x e raízes $r_1, r_2, r_3, \dots, r_n$:

$$a_n(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3) \cdot \dots \cdot (x - r_n) = 0$$

Se uma raiz r_j comparece exatamente k vezes (com $k \geqslant 1$) entre os fatores do primeiro membro, então r_j é chamada de **raiz de multiplicidade k** da equação.

Exemplo

A equação $(x - 1)^4(x - 9)(x - 6)^5 = 0$ pode ser escrita como:

$$(x - 1)(x - 1)(x - 1)(x - 1)(x - 9)(x - 6)(x - 6)(x - 6)(x - 6)(x - 6) = 0$$

Assim, observamos que:

- a raiz 1 tem multiplicidade 4, ou podemos dizer que 1 é raiz quádrupla;
- a raiz 9 tem multiplicidade 1, ou podemos dizer que 9 é raiz simples da equação;
- a raiz 6 tem multiplicidade 5, ou podemos dizer que 6 é raiz quíntupla.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

12. Dado que o número 1 é raiz dupla da equação $x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1 = 0$, determine as outras raízes dessa equação.

Resolução

Pelo teorema da decomposição, essa equação pode ser representada sob a forma:

$$(x - 1)\underbrace{(x - 1)\overbrace{(x - r_1)(x - r_2)}^{Q_2(x)}}_{Q_1(x)} = 0$$

em que r_1 e r_2 são as outras raízes, além da raiz 1.

Dividindo o polinômio $P(x) \equiv x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1$ por $x - 1$, obtemos $Q_1(x)$; dividindo $Q_1(x)$ por $x - 1$, obtemos $Q_2(x)$.

Por Briot-Ruffini, vamos dividir $P(x)$ por $x - 1$, obtendo $Q_1(x)$:

1	1	−2	2	−2	1
	1	−1	1	−1	0

Logo, $Q_1(x) \equiv x^3 - x^2 + x - 1$.

Aplicando novamente Briot-Ruffini, vamos dividir $Q_1(x)$ por $x - 1$, obtendo $Q_2(x)$:

1	1	−1	1	−1
	1	0	1	0

Logo, $Q_2(x) \equiv x^2 + 1$.

Assim, a equação $P(x) = 0$ pode ser escrita como:

$$(x - 1)(x - 1)(x^2 + 1) = 0$$

Pela propriedade do produto nulo, obtemos:

$$x - 1 = 0 \text{ ou } x - 1 = 0 \text{ ou } x^2 + 1 = 0$$

e, portanto: $x = 1$ ou $x = 1$ ou $x = \mathrm{i}$ ou $x = -\mathrm{i}$

Concluímos, então, que, além da raiz dupla 1, a equação tem as raízes simples i e −i.

13. Mostre que o número 2 é raiz tripla da equação $x^5 - 7x^4 + 12x^3 + 16x^2 - 64x + 48 = 0$.

Resolução

Para que 2 seja raiz tripla da equação proposta, temos, pelo teorema da decomposição, que essa equação deve ser equivalente a:

$$\underbrace{(x - 2)(x - 2)\overbrace{(x - 2)\overbrace{(x - r_1)(x - r_2)}^{Q_3(x)}}^{Q_2(x)}}_{Q_1(x)} = 0$$

em que r_1 e r_2 são raízes da equação, distintas de 2.

Assim, devemos ter:

(1) o polinômio $P(x) \equiv x^5 - 7x^4 + 12x^3 + 16x^2 - 64x + 48$ é divisível por $x - 2$, sendo $Q_1(x)$ o quociente dessa divisão;

(2) $Q_1(x)$ é divisível por $x - 2$, sendo $Q_2(x)$ o quociente dessa divisão;

(3) $Q_2(x)$ é divisível por $x - 2$, sendo $Q_3(x)$ o quociente dessa divisão;

(4) $Q_3(x)$ **não** é divisível por $x - 2$.

Vamos às constatações:

(1) Aplicando Briot-Ruffini, dividimos $P(x)$ por $x - 2$:

2	1	−7	12	16	−64	48
	1	−5	2	20	−24	0

Logo, $P(x)$ é divisível por $x - 2$ e o resultado dessa divisão é $Q_1(x) \equiv x^4 - 5x^3 + 2x^2 + 20x - 24$.

(2) Aplicando Briot-Ruffini, dividimos $Q_1(x)$ por $x - 2$:

2	1	−5	2	20	−24
	1	−3	−4	12	0

Logo, $Q_1(x)$ é divisível por $x - 2$ e o resultado dessa divisão é $Q_2(x) \equiv x^3 - 3x^2 - 4x + 12$.

(3) Aplicando Briot-Ruffini, dividimos $Q_2(x)$ por $x - 2$:

2	1	−3	−4	12
	1	−1	−6	0

Logo, $Q_2(x)$ é divisível por $x - 2$ e o resultado dessa divisão é $Q_3(x) \equiv x^2 - x - 6$.

(4) Aplicando Briot-Ruffini, dividimos $Q_3(x)$ por $x - 2$:

2	1	−1	−6
	1	1	−4

Logo, $Q_3(x)$ **não** é divisível por $x - 2$, pois o resto da divisão (−4) é diferente de zero.

Assim, o polinômio $P(x)$ é tal que:

$$P(x) \equiv (x - 2)^3(x^2 - x - 6)$$

em que $x^2 - x - 6$ **não** é divisível por $x - 2$ e, portanto, concluímos que 2 é raiz tripla da equação $P(x) = 0$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Faça os exercícios no caderno.

44. Considerando a equação: $(x - 2)^3 \cdot (x - 5)^4 \cdot (x + 7) = 0$, determine:

a. seu conjunto solução; **44. a.** $S = \{2, 5, -7\}$

b. a multiplicidade de cada raiz; **44. b.** 2 é a raiz tripla; 5 é a raiz quádrupla; −7 é a raiz simples.

c. o grau da equação. **44. c.** 8º grau

45. Construa a equação polinomial $P(x) = 0$ cujo conjunto solução é $S = \{1, -2, 3\}$ tal que o número 1 seja raiz dupla, −2 seja raiz tripla, 3 seja raiz simples e $P(x)$ tenha coeficiente dominante igual a 6.
Sugestão: Deixe $P(x)$ na forma fatorada. **45.** $6(x - 1)^2(x + 2)^3(x - 3) = 0$

46. No universo dos números complexos, o conjunto solução da equação $x^5 - 4x^4 + x^3 + 10x^2 - 4x - 8 = 0$ é $S = \{-1, 2\}$.
Determine a multiplicidade de cada raiz dessa equação.
46. A raiz −1 tem multiplicidade 2, e a raiz 2 tem multiplicidade 3.

47. Em $\mathbb{C}$, o conjunto solução da equação $x^4 + 9x^3 + 30x^2 + 44x + 24 = 0$ é $S = \{-2, r\}$. Determine o número r. **47.** $r = -3$

48. Determine as constantes complexas a e b, sabendo que −1 é raiz dupla da equação $2x^3 + 3x^2 + ax + b = 0$. **48.** $a = 0$; $b = -1$

49. Junte-se a um colega e respondam aos itens seguintes.

a. Mostrem que o número complexo i é raiz tripla da equação: $x^5 - 4ix^4 - 14ix^2 - 17x + 6i = 0$
49. a. Resposta no final do livro.

b. Deem o conjunto solução da equação do item **a**, no universo $\mathbb{C}$. **49. b.** $S = \{i, 3i, -2i\}$

50. Elabore um exercício sobre multiplicidade de raízes de uma equação algébrica e troque-o com um colega para resolver. Ao final, confiram se vocês resolveram corretamente.
50. Resposta pessoal.

Para retomar os conteúdos estudados, resolva os exercícios complementares 9 e 10.

7. Teorema das raízes imaginárias

Estudaremos agora um importante teorema que diz respeito às raízes imaginárias de uma equação polinomial. Lembre-se de que **número imaginário** é todo número complexo **não real**, isto é, todo número da forma $z = a + bi$, com $\{a, b\} \subset \mathbb{R}$ e $b \neq 0$.

O enunciado desse teorema, chamado de teorema das raízes imaginárias, é:

> Se um número imaginário é raiz de uma equação polinomial **com coeficientes reais**, então seu conjugado também é raiz dessa equação.

Consequências

- Se um número imaginário z é raiz de multiplicidade k de uma equação polinomial de coeficientes reais, então o conjugado de z também é raiz de multiplicidade k dessa equação.
- O número de raízes imaginárias de uma equação polinomial de coeficientes reais é necessariamente par.
- Se uma equação polinomial de coeficientes reais tem grau ímpar, então essa equação possui pelo menos uma raiz real.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

14. Qual é o menor grau possível de uma equação polinomial $P(x) = 0$ de coeficientes reais que possui como raízes simples os números 4, $6 + 3i$ e $-5i$?

Resolução

Pelo teorema das raízes imaginárias, como $P(x) = 0$ é uma equação polinomial de coeficientes reais e os números imaginários $6 + 3i$ e $-5i$ são raízes simples dessa equação, temos que seus conjugados, $6 - 3i$ e $5i$, também são raízes simples dessa equação. Assim, a equação $P(x) = 0$ tem pelo menos cinco raízes e, portanto, o menor grau possível dessa equação é 5.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Faça os exercícios no caderno.

51. No universo dos números complexos, uma equação polinomial do 4º grau com coeficientes reais possui uma raiz dupla igual a 5 e uma raiz simples igual a $3 + 2i$. Qual é o conjunto solução dessa equação? **51.** $S = \{5, 3 + 2i, 3 - 2i\}$

52. Qual é o menor grau possível de uma equação polinomial de coeficientes reais que tem uma raiz simples igual a -1, uma raiz simples igual a $3i$ e uma raiz dupla igual a $4 + i$? **52.** 7

53. Forme uma equação polinomial de coeficientes reais e de menor grau possível que possua uma raiz simples igual a $3i$ e uma raiz dupla igual a 1. **53.** Resposta possível: $x^4 - 2x^3 + 10x^2 - 18x + 9 = 0$

54. Uma das raízes da equação $x^4 - 3x^3 - 12x - 16 = 0$ é o número complexo $-2i$. Obtenha o conjunto solução dessa equação, no universo $\mathbb{C}$. **54.** $S = \{-2i, 2i, -1, 4\}$

55. Faça o que se pede.

a. Resolva em $\mathbb{C}$ a equação $x^5 - 2x^4 + 15x^3 - 30x^2 - 16x + 32 = 0$, sabendo que duas de suas raízes são 2 e $4i$. **55. a.** $S = \{2, 4i, -4i, 1, -1\}$

b. Sabendo que i é uma raiz dupla da equação $x^6 + 6x^4 + 9x^2 + 4 = 0$, determine, no universo $\mathbb{C}$, o conjunto solução dessa equação. **55. b.** $S = \{i, -i, 2i, -2i\}$

Reflexão

Uma equação polinomial do 3º grau pode ter as três raízes imaginárias?

Reflexão: Resposta no final do livro.

Para retomar os conteúdos estudados, resolva os exercícios complementares 11 e 12.

8. Teorema das raízes racionais

Nem toda equação polinomial admite raiz racional; por exemplo, a equação $x^2 - 2 = 0$ admite apenas as raízes irracionais $\sqrt{2}$ e $-\sqrt{2}$. O teorema enunciado a seguir permite descobrir se uma equação polinomial de **coeficientes inteiros** admite, ou não, raízes racionais.

Observação

Dizer que p e q são inteiros primos entre si na fração $\frac{p}{q}$ significa dizer que a fração é irredutível, isto é, $\text{mdc}(p, q) = 1$.

Comente com os estudantes que esse teorema não fornece as raízes racionais da equação, mas fornece os números "candidatos" a raízes, o que já ajuda muito na procura delas.

> Seja $\frac{p}{q}$ com p e q inteiros primos entre si e $q \neq 0$. Se $\frac{p}{q}$ é raiz da equação polinomial $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \dots + a_0 = 0$, na variável x e coeficientes inteiros, então p é divisor de a_0 e q é divisor de a_n.

Consequência

Se a equação polinomial de coeficientes inteiros $P(x) = 0$ tem o coeficiente dominante de $P(x)$ igual a 1 e admite raiz racional, então toda raiz racional dessa equação é necessariamente inteira. Por exemplo, se $\frac{p}{q}$, com p e q inteiros primos entre si e $q \neq 0$, é raiz da equação $x^2 - 6x + 8 = 0$, então p é divisor de 8 e q é divisor de 1, ou seja, $p \in \{\pm1, \pm2, \pm4, \pm8\}$ e $q \in \{\pm1\}$; logo, $\frac{p}{q} \in \{\pm1, \pm2, \pm4, \pm8\}$.

Nos exercícios resolvidos a seguir, vamos aprender como usar esse teorema na resolução de equações polinomiais de coeficientes inteiros.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

15. Determine, se existirem, as raízes racionais da equação $2x^3 - x^2 - 6x + 3 = 0$.

Resolução

Como a equação tem os coeficientes inteiros, podemos aplicar o teorema das raízes racionais. Assim, se essa equação admite uma raiz do tipo $\frac{p}{q}$, com p e q inteiros primos entre si e $q \neq 0$, então p é divisor de 3 e q é divisor de 2, isto é:

$p \in \{\pm1, \pm3\}$ e $q \in \{\pm1, \pm2\}$ e, portanto:

$$\frac{p}{q} \in \left\{\pm1,\ \pm3,\ \pm\frac{1}{2},\ \pm\frac{3}{2}\right\}$$

Testando cada uma das "candidatas" à raiz racional do polinômio $P(x) \equiv 2x^3 - x^2 - 6x + 3$, temos:

$P(1) = 2 \cdot 1^3 - 1^2 - 6 \cdot 1 + 3 = -2$

$P(-1) = 2 \cdot (-1)^3 - (-1)^2 - 6 \cdot (-1) + 3 = 6$

$P(3) = 2 \cdot 3^3 - 3^2 - 6 \cdot 3 + 3 = 30$

$P(-3) = 2 \cdot (-3)^3 - (-3)^2 - 6 \cdot (-3) + 3 = -42$

$P\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) + 3 = 0$

$P\left(-\frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^3 - \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 6 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 3 = \frac{11}{2}$

$P\left(\frac{3}{2}\right) = 2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^3 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 6 \cdot \left(\frac{3}{2}\right) + 3 = -\frac{3}{2}$

$P\left(-\frac{3}{2}\right) = 2 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)^3 - \left(-\frac{3}{2}\right)^2 - 6 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) + 3 = 3$

Logo, a equação admite apenas uma raiz racional: o número $\frac{1}{2}$.

Nota:

O teorema do resto nos garante que o resto da divisão de um polinômio $P(x)$ por $x - a$ é igual a $P(a)$. Assim, neste exercício, poderíamos ter abreviado os cálculos aplicando o dispositivo prático de Briot-Ruffini. Analise o exercício seguinte, em que utilizaremos esse recurso.

16. Resolva, em $\mathbb{C}$, a equação $x^4 - x^3 - x^2 - x - 2 = 0$.

Resolução

A equação tem os coeficientes inteiros; logo, se ela admitir raiz do tipo $\frac{p}{q}$, com p e q inteiros primos entre si e $q \neq 0$, então p é divisor de -2 e q é divisor de 1, isto é:

$p \in \{\pm1, \pm2\}$ e $q \in \{\pm1\}$ e, portanto, $\frac{p}{q} \in \{\pm1, \pm2\}$.

Vamos testar as "candidatas" à raiz racional da equação $P(x) = 0$, em que $P(x) \equiv x^4 - x^3 - x^2 - x - 2$, aplicando o dispositivo prático de Briot-Ruffini.

- Dividindo $P(x)$ por $x - 1$:

1	1	−1	−1	−1	−2
	1	0	−1	−2	−4

$\underbrace{-4}_{\text{resto}}$

Como o resto é diferente de zero, 1 não é raiz da equação.

- Dividindo $P(x)$ por $x + 1$:

-1	1	-1	-1	-1	-2
	1	-2	1	-2	$\underbrace{0}_{\text{resto}}$

Como o resto é zero, -1 é raiz da equação. Assim, podemos escrever:

$$P(x) \equiv (x + 1)\underbrace{(x^3 - 2x^2 + x - 2)}_{Q_1(x)}$$

Logo, se existirem outras raízes racionais, elas serão raízes de $Q_1(x)$. Como, pelo teorema das raízes racionais, essas raízes só podem ser 2 ou -2, testamos a seguir cada uma delas.

- Dividindo $Q_1(x)$ por $x - 2$.

2	1	-2	1	-2
	1	0	1	$\underbrace{0}_{\text{resto}}$

Como o resto é zero, 2 é raiz da equação e podemos escrever:

$$P(x) \equiv (x + 1)(x - 2)(x^2 + 1)$$

Não precisamos continuar testando as "candidatas" a raízes racionais, pois, com essa forma fatorada de $P(x)$, a equação $P(x) = 0$, equivalente a $(x + 1)(x - 2)(x^2 + 1) = 0$, pode ser facilmente resolvida.

Pela propriedade do produto nulo, temos:

$(x + 1)(x - 2)(x^2 + 1) = 0 \Rightarrow x + 1 = 0$ ou $x - 2 = 0$ ou $x^2 + 1 = 0$

Assim, $x = -1$ ou $x = 2$ ou $x = \text{i}$ ou $x = -\text{i}$.

Concluímos, então, que o conjunto solução da equação proposta é $S = \{-1, 2, \text{i}, -\text{i}\}$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Faça os exercícios no caderno.

56. Determine, se existirem, as raízes racionais de cada uma das seguintes equações:

a. $2x^4 + x^3 + x^2 + x - 1 = 0$ **56. a.** -1 e $\frac{1}{2}$

b. $x^5 + 3x^4 - 8x^3 - 7x - 2 = 0$ **56. b.** 2

57. Resolva, em $\mathbb{C}$, a equação: $x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 3x + 2 = 0$

57. $S = \{-1, -2, \text{i}, -\text{i}\}$

58. Um aquário tem, internamente, o formato de um paralelepípedo reto-retângulo cuja altura é 1 dm menor que a largura, e o comprimento é 2 dm maior que a largura. Calcule as medidas das dimensões desse aquário, sabendo que sua capacidade é de 30 L.

58. 5 dm, 3 dm e 2 dm

59. As medidas, em centímetro, dos raios de duas bolas maciças são R e $R + 1$. O volume da bola maior tem $\frac{44\pi}{3}$ cm³ a mais que o dobro do volume da menor. Calcule a medida R.

59. $R = 2$ cm ou $R = \frac{1 + \sqrt{21}}{2}$ cm

Para retomar os conteúdos estudados, resolva os exercícios complementares 13 a 15.

9. Relações de Girard

A busca por fórmulas gerais que resolvessem equações polinomiais provocou o surgimento de importantes teoremas sobre esse tipo de equação. Um deles, conhecido como relações de Girard, foi descoberto pelo matemático francês Albert Girard (1590-1633) e publicado, em 1629, em sua obra *Invention nouvelle en l'algèbre*. Esse teorema nos permite relacionar os coeficientes de uma equação polinomial à soma de suas raízes, à soma dos produtos dessas raízes tomadas duas a duas, à soma dos produtos dessas raízes tomadas três a três, e assim por diante, até o produto final das raízes.

Antes de estudar as relações de Girard em sua forma geral, vamos apresentá-las particularmente para equações polinomiais do 2º e do 3º grau.

As relações de Girard em uma equação polinomial do 2º grau

Consideremos o polinômio $P(x) \equiv ax^2 + bx + c$, com $\{a, b, c\} \subset \mathbb{C}$, $a \neq 0$ e raízes r_1 e r_2.
Pelo teorema da decomposição, temos:

$$ax^2 + bx + c \equiv a(x - r_1)(x - r_2)$$

Dividindo por a ambos os membros, obtemos a identidade:

$$x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} \equiv (x - r_1)(x - r_2)$$

que é equivalente a:

$$x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} \equiv x^2 - (r_1 + r_2)x + r_1 r_2$$

Pela definição de identidade de polinômios, concluímos que:

$$\begin{cases} -(r_1 + r_2) = \frac{b}{a} \\ r_1 r_2 = \frac{c}{a} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r_1 + r_2 = -\frac{b}{a} \\ r_1 r_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

Provamos, então, que:

As raízes r_1 e r_2 de uma equação polinomial do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$, com $\{a, b, c\} \subset \mathbb{C}$, obedecem às condições:

$$\begin{cases} r_1 + r_2 = -\frac{b}{a} \\ r_1 r_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

17. Sendo r_1 e r_2 as raízes da equação $5x^2 + \sqrt{3}x + \sqrt{7} = 0$, calcule:

a. $r_1 + r_2$

b. $r_1 r_2$

c. $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}$

d. $r_1^2 + r_2^2$

e. $\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2}$

Resolução

Os coeficientes da equação $5x^2 + \sqrt{3}x + \sqrt{7} = 0$ são $a = 5$, $b = \sqrt{3}$ e $c = \sqrt{7}$.

Temos, então:

a. $r_1 + r_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{\sqrt{3}}{5}$

b. $r_1 r_2 = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{7}}{5}$

c. $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = \frac{r_2 + r_1}{r_1 r_2} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{5}}{\frac{\sqrt{7}}{5}} = -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = -\frac{\sqrt{21}}{7}$

d. Observando a identidade $(r_1 + r_2)^2 = r_1^2 + 2r_1 r_2 + r_2^2$, temos:

$r_1^2 + r_2^2 = (r_1 + r_2)^2 - 2r_1 r_2$; logo:

$$r_1^2 + r_2^2 = \left(-\frac{\sqrt{3}}{5}\right)^2 - \frac{2\sqrt{7}}{5} = \frac{3 - 10\sqrt{7}}{25}$$

e. $\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} = \frac{r_2^2 + r_1^2}{r_1^2 r_2^2} = \frac{r_2^2 + r_1^2}{(r_1 r_2)^2} = \frac{\frac{3 - 10\sqrt{7}}{25}}{\left(\frac{\sqrt{7}}{5}\right)^2} =$

$= \frac{3 - 10\sqrt{7}}{7}$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Faça os exercícios no caderno.

60. Faça o que se pede.

a. Determine as constantes b e c, sabendo que as raízes da equação, na variável x, $3x^2 + bx + c = 0$ são $2 + \sqrt{7}$ e $2 - \sqrt{7}$. **60. a.** $b = -12$ e $c = -9$

b. O número complexo $2 + 4i$ é uma das raízes da seguinte equação polinomial do 2º grau de coeficientes reais: $px^2 + 2x - q = 0$. Determine as constantes p e q. **60. b.** $p = -\frac{1}{2}$ e $q = 10$

61. As dimensões, em decímetro, de um retângulo são as raízes da equação $\sqrt{5}x^2 - 5x + \sqrt{15} = 0$. Calcule o perímetro e a área desse retângulo. **61.** $2\sqrt{5}$ dm e $\sqrt{3}$ dm^2

62. Sendo r_1 e r_2 as raízes da equação $2x^2 - \sqrt{3}x + \sqrt{6} = 0$, calcule:

a. $r_1 + r_2$ **62. a.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$

b. $r_1 \cdot r_2$ **62. b.** $\frac{\sqrt{6}}{2}$

c. $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}$ **62. c.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$

d. $r_1^2 + r_2^2$ **62. d.** $\frac{3 - 4\sqrt{6}}{4}$

e. $\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2}$ **62. e.** $\frac{3 - 4\sqrt{6}}{6}$

Para retomar os conteúdos estudados, resolva o exercício complementar 16.

As relações de Girard em uma equação polinomial do 3º grau

Seja o polinômio $P(x) \equiv ax^3 + bx^2 + cx + d$, com $\{a, b, c, d\} \subset \mathbb{C}$, $a \neq 0$ e raízes r_1, r_2 e r_3. Pelo teorema da decomposição, temos:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d \equiv a(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3)$$

Dividindo por a ambos os membros, obtemos a identidade:

$$x^3 + \frac{bx^2}{a} + \frac{cx}{a} + \frac{d}{a} \equiv (x - r_1)(x - r_2)(x - r_3)$$

que é equivalente a:

$$x^3 + \frac{bx^2}{a} + \frac{cx}{a} + \frac{d}{a} \equiv x^3 - (r_1 + r_2 + r_3)x^2 + (r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3)x - r_1r_2r_3$$

Pela definição de identidade de polinômios, concluímos:

$$\begin{cases} -(r_1 + r_2 + r_3) = \frac{b}{a} \\ r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3 = \frac{c}{a} \\ -r_1r_2r_3 = \frac{d}{a} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r_1 + r_2 + r_3 = -\frac{b}{a} \\ r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3 = \frac{c}{a} \\ r_1r_2r_3 = -\frac{d}{a} \end{cases}$$

Provamos, então, que:

As raízes r_1, r_2 e r_3 de uma equação polinomial do 3º grau $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, com $\{a, b, c, d\} \subset \mathbb{C}$, obedecem às condições:

$$\begin{cases} r_1 + r_2 + r_3 = -\frac{b}{a} \\ r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3 = \frac{c}{a} \\ r_1r_2r_3 = -\frac{d}{a} \end{cases}$$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

18. Determine o valor da constante complexa k, sabendo que as raízes da equação $x^3 - 3x^2 - 6x + k = 0$ formam uma progressão aritmética.

Resolução

Como as raízes da equação formam uma P.A., podemos indicá-las por: $p - r$, p e $p + r$

Temos, por uma das relações de Girard:

$$p - r + p + p + r = 3 \Rightarrow p = 1$$

Logo, o número 1 é uma das raízes da equação proposta $P(x) = 0$, ou seja,

$$1^3 - 3 \cdot 1^2 - 6 \cdot 1 + k = 0$$

de onde concluímos que $k = 8$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Faça os exercícios no caderno.

63. Sendo r_1, r_2 e r_3 as raízes da equação $3x^3 - 3x^2 + 6x - 1 = 0$, calcule:

a. $r_1 + r_2 + r_3$ **63. a.** 1

b. $r_1 \cdot r_2 + r_1 \cdot r_3 + r_2 \cdot r_3$ **63. b.** 2

c. $r_1 \cdot r_2 \cdot r_3$ **63. c.** $\frac{1}{3}$

d. $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3}$ **63. d.** 6

e. $r_1^2 + r_2^2 + r_3^2$ **63. e.** -3

f. $(r_1 \cdot r_2)^2 + (r_1 \cdot r_3)^2 + (r_2 \cdot r_3)^2$ **63. f.** $\frac{10}{3}$

g. $\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} + \frac{1}{r_3^2}$ **63. g.** 30

64. $S = \left\{-3, 2, \frac{1}{2}\right\}$

64. Resolva a equação $2x^3 + x^2 - 13x + 6 = 0$, sabendo que a soma de duas de suas raízes é igual a -1.

65. Duas das raízes da equação $2x^3 - 3x^2 + px + 2 = 0$ são inversas entre si. Determine a constante complexa p.

65. $p = -3$

66. Resolva, em $\mathbb{C}$, a equação $x^3 - 60x^2 + 1.100x - 6.000 = 0$, sabendo que suas raízes estão em progressão aritmética.

66. $S = \{10, 20, 30\}$

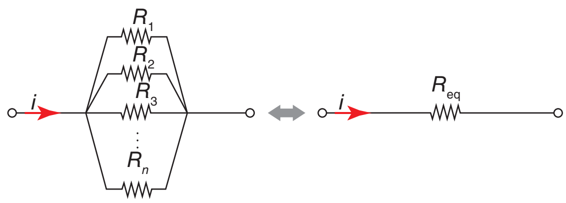
67. (Fuvest-SP) As raízes da equação do terceiro grau $x^3 - 14x^2 + kx - 64 = 0$ são todas reais e formam uma progressão geométrica. Determine:

a. as raízes da equação; 67. a. 2, 4 e 8

b. o valor de k. 67. b. 56

68. Dos estudos de Física, sabemos que em uma associação em paralelo de n resistores com resistências iguais a $R_1, R_2, R_3, \ldots, R_n$, respectivamente, a resistência equivalente (R_{eq}) é dada por:

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \ldots + \frac{1}{R_n}$$



FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

As resistências R_1, R_2 e R_3 de três resistores em paralelo, medidas em ohm (Ω), são as raízes da equação $x^3 - 165x^2 + 8.100x - 121.500 = 0$. Calcule a resistência equivalente. 68. A resistência equivalente é de 15 V.

Nota: A letra grega maiúscula Ω (ômega) simboliza a unidade ohm de resistência elétrica.

Para retomar os conteúdos estudados, resolva os exercícios complementares 17 e 18.

Reflexão

É possível determinar as raízes de uma equação polinomial qualquer resolvendo o sistema formado pelas equações obtidas das relações de Girard?

Reflexão: Resposta nas **Orientações específicas** deste capítulo.

As relações de Girard em uma equação polinomial de grau *n*

Finalmente, vamos apresentar as relações de Girard em sua forma geral.

Em toda equação polinomial de grau n, com $n \geqslant 1$,

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_1 = 0$$

com $\{a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n\} \subset \mathbb{C}$ e raízes $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_n$, tem-se:

- a soma das raízes é $-\frac{a_{n-1}}{a_n}$, isto é:

$$r_1 + r_2 + r_3 + \ldots + r_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$$

- a soma dos produtos das raízes tomadas duas a duas é $\frac{a_{n-2}}{a_n}$, isto é:

$$r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_1 r_4 + \ldots + r_{n-1} r_n = \frac{a_{n-2}}{a_n}$$

- a soma dos produtos das raízes tomadas três a três é $-\frac{a_{n-3}}{a_n}$, isto é:

$$r_1 r_2 r_3 + r_1 r_2 r_4 + r_1 r_2 r_5 + \ldots + r_{n-2} r_{n-1} r_n = -\frac{a_{n-3}}{a_n},$$

e assim por diante.

- o produto de todas as raízes é $\frac{(-1)^n \cdot a_0}{a_n}$, isto é:

$$r_1 r_2 r_3 \cdot \ldots \cdot r_n = \frac{(-1)^n \cdot a_0}{a_n}$$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

19. Calcule a soma dos inversos das raízes da equação $5x^4 + 3x^2 - x + 4 = 0$.

Resolução

A equação pode ser escrita na forma:

$5x^4 + 0x^3 + 3x^2 - x + 4 = 0$

Assim, seus coeficientes são $a = 5$, $b = 0$, $c = 3$, $d = -1$ e $e = 4$.

Indicando as raízes por r_1, r_2, r_3, r_4, temos:

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_4} = \frac{r_2 \cdot r_3 \cdot r_4 + r_1 \cdot r_3 \cdot r_4 + r_1 \cdot r_2 \cdot r_4 + r_1 \cdot r_2 \cdot r_3}{r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 \cdot r_4} =$$

$$= \frac{-\frac{d}{a}}{\frac{e}{a}} = \frac{-\frac{(-1)}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{1}{4}$$

69. $\begin{cases} r_1 + r_2 + r + r_4 = 0 \\ r_1r_2 + r_1r_3 + r_1r_4 + r_2r_3 + r_2r_4 + r_3r_4 = 3 \\ r_1r_2r_3 + r_1r_2r_4 + r_1r_3r_4 + r_2r_3r_4 = 1 \\ r_1r_2r_3r_4 = 0 \end{cases}$

Portanto, a soma dos inversos das raízes da equação é $\frac{1}{4}$.

ANÁLISE DA RESOLUÇÃO

Reúna-se com um colega. Apontem o erro cometido na resolução a seguir e, depois, refaçam a resolução no caderno, corrigindo-a.

Exercício

Resolva em $\mathbb{C}$ a equação: $x^3 + ix^2 + 2i = 0$, sabendo que uma de suas raízes é o número imaginário i.

Resolução

Pelo teorema das raízes imaginárias, se i é raiz da equação, então $-i$ (conjugado de i) também é raiz. Assim, sendo r a terceira raiz, temos, pelas relações de Girard:

$$i + (-i) + r = -\frac{i}{1} \Rightarrow r = -i$$

Portanto, $S = \{i, -i\}$.

O estudante cometeu um erro ao usar o teorema das raízes imaginárias, que só pode ser aplicado a equações polinomiais de coeficientes reais. Se um número imaginário z é raiz de uma equação polinomial de coeficientes reais, então o conjugado de z também é raiz da equação.
Como a equação proposta nesse exercício não apresenta todos os coeficientes reais, esse teorema não é válido.
Resolução correta:
Se o número i é raiz da equação $x^3 + ix^2 + 2i = 0$, então o polinômio $P(x) \equiv x^3 + ix^2 + 2i$ é divisível por $x - i$. Efetuando essa divisão pelo dispositivo de Briot-Ruffini, temos:

i	1	i	0	2i
	1	2i	−2	0

Assim, a equação $P(x) = 0$ pode ser representada por:
$(x - i)(x^2 + 2ix - 2) = 0$
Pela propriedade do produto nulo, temos:
$x - i = 0$ ou $x^2 + 2ix - 2 = 0$
$\therefore x = i$ ou $x = 1 - i$ ou $x = -1 - i$
Logo, o conjunto solução é dado por:
$S = \{i, 1 - i, -1 - i\}$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Faça os exercícios no caderno.

69. As raízes da equação $x^4 + 3x^2 - x = 0$ são r_1, r_2, r_3 e r_4. Escreva todas as relações de Girard para essa equação.

70. Determine as constantes a, b, c e d, sabendo que a equação $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ possui uma raiz simples igual a -2 e uma raiz tripla igual a 4.

70. $a = -10$; $b = 24$; $c = 32$; $d = -128$

71. Resolva, em $\mathbb{C}$, a equação $x^5 - 6x^4 + 64x^2 - 144x + 96 = 0$, sabendo que três de suas raízes são iguais e as outras duas são opostas entre si. **71.** $S = \{2, 2\sqrt{3}, -2\sqrt{3}\}$

Para retomar os conteúdos estudados, resolva o exercício complementar 19.

O conteúdo do boxe **Trabalho e juventudes** aborda a atuação de um engenheiro aeroespacial apresentando funções dessa profissão. Solicite aos estudantes que relatem o que sabem sobre essa profissão. Incentive todos a participar e a argumentar para justificar suas opiniões. Pode-se aprofundar o assunto propondo aos estudantes que citem algumas habilidades que precisam ser desenvolvidas para alguém se tornar engenheiro aeroespacial. Após a leitura e a discussão inicial, peça aos estudantes que pesquisem mais informações sobre essa profissão, façam um resumo da pesquisa e compartilhem-na com os demais colegas. Ao explorar esse tema, contribuímos para o desenvolvimento do **TCT Trabalho** e da **competência geral 6**, pois os estudantes podem se apropriar de procedimentos adotados no mundo do trabalho.

TRABALHO E JUVENTUDES

Engenheiro aeroespacial

O engenheiro aeroespacial é o profissional responsável por desenvolver, projetar, testar e supervisionar a produção de espaçonaves e aeronaves. Sua atuação é abrangente, envolvendo desde o *design* até inspeções minuciosas na indústria aeroespacial. Com um vasto leque de especializações e funções, esse profissional pode trabalhar em indústrias aeroespaciais, agências espaciais, instituições de pesquisa, universidades, indústria de defesa, entre outros setores. No Brasil, a engenharia aeroespacial ganhou impulso a partir da década de 1960, com a criação da Comissão Nacional de Atividades Espaciais (CNAE) pelo presidente Jânio Quadros.

Quer saber mais sobre a profissão de engenheiro aeroespacial? Faça uma pesquisa na internet e compartilhe com os colegas um resumo das informações que você obteve.

Trabalho e juventudes: Pesquisa pessoal.

CHANDAN KHANNA/AFP/GETTY IMAGES

Thomas Pesquet, engenheiro aeroespacial francês, piloto e astronauta da Agência Espacial Europeia, em frente ao Módulo de Serviço Europeu da missão Artemis II, dentro do Edifício de Operações e Checkout (OC) no Centro Espacial Kennedy em Cabo Canaveral, Flórida, Estados Unidos. Foto de 2022.

10. Interpolação polinomial

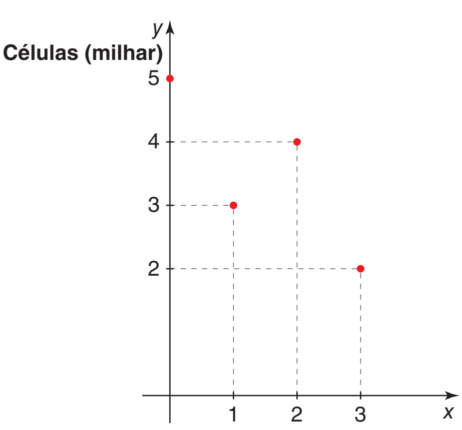
Nesse tópico, exploramos a interpolação polinomial, que mostra uma aplicação dos polinômios na previsão de resultados.

Considere o teorema a seguir.

> Dados n pontos distintos do plano cartesiano, (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), ..., (x_n, y_n), com abscissas diferentes entre si, existe um único polinômio $P(x)$ de coeficientes reais e grau menor que n, tal que $P(x_1) = y_1$, $P(x_2) = y_2$, $P(x_3) = y_3, \ldots, P(x_n) = y_n$.

Esse teorema tem uma importante aplicação na estimativa de valores intermediários não tabelados a partir de valores tabelados. Para entender como isso é feito, considere o problema a seguir, que detalha o procedimento apresentado no primeiro tópico deste capítulo.

Durante três semanas consecutivas, uma cientista estudou a ação de certo medicamento em um tumor maligno, estimando, semanalmente, o número de células cancerosas em determinada região desse tumor. Ao final do estudo, a cientista representou no plano cartesiano os valores observados, obtendo o gráfico apresentado.



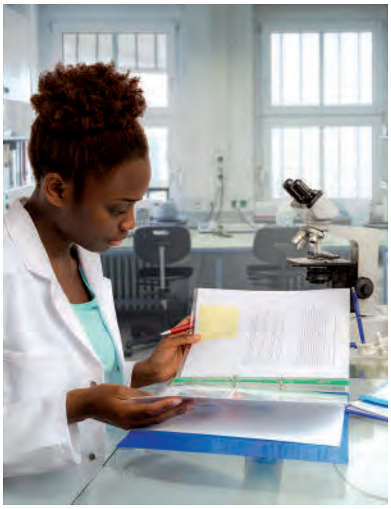
FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

Se essa cientista necessitar de um valor não tabelado, ocorrido durante o estudo, ela poderá recorrer à teoria dos polinômios, estimando esse valor por meio de um método conhecido por **interpolação polinomial**. Por exemplo, o número estimado de células doentes no instante 2,5 semanas após o início do estudo pode ser calculado como descrito a seguir.

Pelo teorema anterior, sabe-se que existe um único polinômio P de coeficientes reais de grau menor que 4, cujo gráfico passa pelos quatro pontos representados no plano cartesiano. Assim, o grau máximo que pode ter o polinômio P é 3, ou seja, $P(x) \equiv ax^3 + bx^2 + cx + d$.

Como o gráfico de P passa pelos pontos (1, 3), (2, 4), (3, 2) e (0, 5), temos que $P(1) = 3$, $P(2) = 4$, $P(3) = 2$ e $P(0) = 5$, isto é:

$$\begin{cases} a + b + c + d = 3 \\ 8a + 4b + 2c + d = 4 \\ 27a + 9b + 3c + d = 2 \\ 0a + 0b + 0c + d = 5 \end{cases} \Rightarrow a = -1,\ b = \frac{9}{2} \text{ e } c = -\frac{11}{2}$$



Cientista trabalhando em um laboratório.

Concluímos, então, que $P(x) = -x^3 + \frac{9x^2}{2} - \frac{11x}{2} + 5$.

Assim, o número de células doentes no instante 2,5 semanas é estimado por:

$$P(2{,}5) = -(2{,}5)^3 + \frac{9(2{,}5)^2}{2} - \frac{11 \cdot 2{,}5}{2} + 5 \Rightarrow P(2{,}5) = 3{,}75$$

Conclui-se que, 2,5 semanas após o início do estudo, havia 3.750 células cancerosas na região analisada.

Nota:
Quanto mais próximos os valores estimados estiverem dos valores efetivamente observados, mais confiáveis serão as estimativas pelo método da interpolação polinomial.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Faça os exercícios no caderno.

72. Determine o polinômio $P(x)$, de grau menor que 4, cujo gráfico passa pelos pontos (–1, 8), (0, 2), (1, –5) e (2, –10) do plano cartesiano. **72.** $P(x) \equiv \frac{x^3}{2} - \frac{x^2}{2} - 7x + 2$

73. Suponha que cada ponto (x, y) do exercício anterior represente a temperatura y, em grau Celsius, na altitude x, em quilômetro, registradas em determinado dia por um alpinista. Estime a temperatura registrada, em grau Celsius, à altitude de 0,5 km.

73. Por meio do polinômio $P(x) \equiv \frac{x^3}{2} - \frac{x^2}{2} - 7x + 2$, obtido no **exercício 72**, podemos estimar a temperatura, em grau Celsius, à altitude de 0,5 km, calculando $P(0{,}5)$:
$P(0{,}5) = \frac{(0{,}5)^3}{2} - \frac{(0{,}5)^2}{2} - 7 \cdot 0{,}5 + 2$
$P(0{,}5) = -1{,}5625$
Concluímos, então, que a temperatura na altitude de 0,5 km era estimada em –1,5625 °C.

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

Faça os exercícios no caderno.

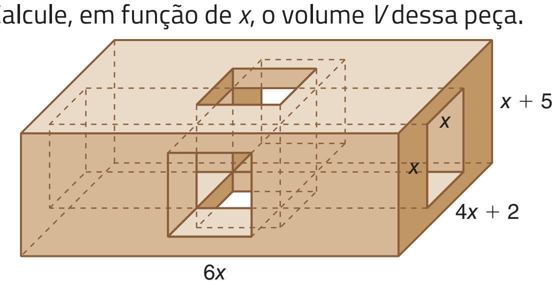
1. A temperatura T de um forno industrial, em grau Celsius, variou em função do tempo t, em minuto, de acordo com a função polinomial crescente: $T(t) = t^3 + 2t^2 + t + 40$, a partir do instante em que foi ligado, até 8 minutos depois, quando atingiu sua temperatura máxima.

a. Qual era a temperatura do forno no instante em que foi ligado? **1. a.** 40 °C

b. Qual era a temperatura do forno 4 minutos depois de ter sido ligado? **1. b.** 140 °C

c. Qual a temperatura máxima atingida por esse forno? **1. c.** 688 °C

2. Uma peça de madeira tem a forma de um paralelepípedo reto-retângulo de comprimento $6x$, largura $4x + 2$ e altura $x + 5$. Um furo sob a forma de paralelepípedo reto-retângulo atravessa a peça ao longo de cada dimensão tal que as bordas do furo em cada face da peça são lados de um quadrado de lado x, com o mesmo centro dessa face e com lados paralelos aos lados dessa face, conforme ilustra a figura a seguir. Calcule, em função de x, o volume V dessa peça. **2.** $V = 15x^3 + 125x^2 + 60x$



3. (UFV-MG) Considere os polinômios $P(x) = x(x^2 - 2x) - (x - 2)(3x + 4)$ e $Q(x) = x^2 - 1$. Determine o resto da divisão de $P(x)$ por $Q(x)$. **3.** $3x + 3$

4. Determine o polinômio do 2º grau que, dividido por x, $x - 1$ e $x + 1$, apresenta restos iguais a -1, 0 e 4, respectivamente. **4.** $3x^2 - 2x - 1$

5. Em relação aos polinômios
$P(x) \equiv 2x^4 + kx^3 + 3x^2 - x - 1$ e $D(x) \equiv (x + 1)^3$, faça o que se pede.

a. Determine a constante k de modo que $P(x)$ seja divisível por $D(x)$. **5. a.** $k = 5$

b. Para o valor de k determinado no item **a**, obtenha o quociente $Q(x)$ da divisão exata de $P(x)$ por $D(x)$, aplicando o dispositivo prático de Briot-Ruffini.
5. b. $Q(x) \equiv 2x - 1$

6. Duas raízes do polinômio $P(x) \equiv 2x^3 - x^2 + ax + b$ são 2 e -1. **6. a.** $a = -5$, $b = -2$

a. Determine as constantes complexas a e b.

b. Determine a terceira raiz de $P(x)$. **6. b.** $-\frac{1}{2}$

7. Numerando por 1, 2,..., 6 os meses de janeiro, fevereiro, ..., junho, respectivamente, observou-se que ao final de cada mês x do primeiro semestre de 2024, a dívida acumulada, D, de uma empresa, em milhão de reais, pôde ser descrita pela função polinomial $D(x) = 2x^3 - 4x^2 + 2x + 1$. Em que mês de 2024 a dívida acumulada dessa empresa atingiu 5 milhões de reais? **7.** Em fevereiro de 2024.

8. Considerando o polinômio
$P(x) \equiv 2x^3 - (3a + 2)x^2 + (a^2 + 3a)x - a^2$, em que a é uma constante complexa, faça o que se pede.

a. Mostre que $P(x)$ é divisível por $x - 1$ para qualquer valor da constante a.

b. Fatore $P(x)$, em função de a, como o produto de uma constante por polinômios do 1º grau.
8. b. $P(x) \equiv 2(x - 1)(x - a)\left(x - \frac{a}{2}\right)$

9. O número 3 é raiz dupla da equação
$x^4 - 6x^3 + 10x^2 - 6x + 9 = 0$. Determine as outras raízes dessa equação. **9.** As outras raízes são i e –i.

10. O número 1 é raiz da equação
$x^5 - 3x^4 + 2x^3 + 2x^2 - 3x + 1 = 0$. Determine a multiplicidade dessa raiz. **10.** multiplicidade 4

11. (PUC-SP) O polinômio $P(x) = x^3 - 7x^2 + 17x - 15$ admite a raiz complexa $2 + \mathrm{i}$. Então, $P(x)$ é divisível por:

a. $x^2 + 2x + 1$

b. $x^2 - 2x + 1$

c. $x^2 + 3x + 4$

d. $x^2 + 5x + 6$

e. $x^2 - 4x + 5$

11. alternativa **e**

12. Em um mesmo dia, Carlos tomou emprestado R$ 13.500,00 de seu amigo Pedro e R$ 10.000,00 de seu amigo João. A taxa percentual mensal de juros foi a mesma nos dois empréstimos, porém o empréstimo tomado de Pedro foi feito em regime de juros simples,

13. a. O número i é raiz de $p(x)$, pois:
$p(i) = i^4 + 2i^3 + 3i^2 + 2i + 2 = 1 - 2i - 3 + 2i + 2 = 0$

e o de João em regime de juros compostos. Três meses depois, Carlos pagou quantias iguais aos dois amigos, liquidando as dívidas. Indicando por x a taxa percentual mensal de juros nos dois empréstimos, responda aos itens seguintes.

a. Sabendo que no decorrer desses três meses não foi feita nenhuma amortização das dívidas, obtenha uma equação, na incógnita x, que relacione as quantias pagas aos dois amigos?
12. a. $20x^3 + 60x^2 - 21x - 7 = 0$

b. Resolvendo a equação sugerida no item a, obtém-se a taxa x. Qual é essa taxa?
12. b. A taxa de juros nos dois empréstimos foi de 50%.

13. (UFF-RJ) Considere o polinômio
$p(x) = x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 2$.

a. Verifique se o número complexo i é raiz de $p(x)$.

b. Calcule todas as raízes complexas de $p(x)$.
13. b. i, $-$i, $-1 + \mathrm{i}$ e $-1 - \mathrm{i}$

14. Determine, se existirem, as raízes racionais de cada uma das equações.

a. $x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 3x + 2 = 0$ **14. a.** -1 e -2

b. $2x^3 + x^2 - 3 = 0$ **14. b.** 1

15. Resolva, em $\mathbb{C}$, as equações a seguir.

a. $2x^4 - 4x^3 + x^2 + x = 0$ **15 a.** $\left\{0,\ 1,\ \frac{1 + \sqrt{3}}{2},\ \frac{1 - \sqrt{3}}{2}\right\}$

b. $x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1 = 0$ **15. b.** $S = \{-1, \mathrm{i}, -\mathrm{i}\}$

16. Um sistema de abastecimento de água é formado por duas represas, A e B, cujas capacidades, em bilhão de litros, são as raízes da equação:
$3{,}2x^2 - 3.875{,}2x + 1.158.636{,}8 = 0$
Qual é a capacidade, em bilhão de litros, das duas represas juntas?
16. 1.211 bilhões de litros de água

17. (Fuvest-SP) As raízes do polinômio
$P(x) = x^3 - 3x^2 + m$, em que m é um número real, estão em progressão aritmética. Determine:

a. o valor de m; **17. a.** 2

b. as raízes do polinômio. **17. b.** 1, $1 + \sqrt{3}$ e $1 - \sqrt{3}$

18. As três raízes da equação
$x^3 - 2(3 + \sqrt{5})x^2 + mx + n = 0$, na variável x, com $\{m, n\} \subset \mathbb{C}$, consideradas medidas em uma mesma unidade de comprimento, são as medidas dos lados de um triângulo retângulo. Sabendo que a maior raiz dessa equação é $2\sqrt{5}$, determine as constantes m e n.
18. $m = 4(2 + 3\sqrt{5})$ e $n = -16\sqrt{5}$

19. (Unifor-CE) Se, no universo $\mathbb{C}$, a equação
$x^5 - x^4 - 5x^3 + x^2 + 8x + 4 = 0$ admite a raiz -1, com multiplicidade 2, então a soma das demais raízes é:
19. alternativa **b**

a. 4.

b. 3.

c. 0.

d. -3.

e. -4.

8. a. $P(1) = 2 \cdot 1^3 - (3a + 2) \cdot 1^2 + (a^2 + 3a) \cdot 1 - a^2 = 2 - 3a - 2 + a^2 + 3a - a^2 = 0$
Logo, $P(x)$ é divisível por $x - 1$ para qualquer valor de a.

VERIFIQUE O QUE APRENDEU NO CAPÍTULO 10

Além do processo de avaliação promovido pelo professor, é importante que você, estudante, faça uma autoavaliação. O objetivo desse instrumento é mensurar seu nível de aprendizagem em relação ao assunto desenvolvido no capítulo. Para ajudá-lo nessa tarefa, apresentamos as seguintes questões.

1. A avaliação dos ganhos ou perdas de uma indústria, na produção e venda de x unidades de um produto, envolve três funções: custo, receita e lucro. A função custo representa os gastos para a produção das x unidades do produto; a função receita representa o total obtido com a venda das x unidades do produto; e a função lucro é a diferença, nessa ordem, entre a função receita e a função custo. De acordo com esses conceitos, resolva o problema a seguir.

Uma indústria produz x cintos de couro por semana e vende toda a sua produção por $(430 - x)$ reais cada cinto. Dado que o custo de produção de cada cinto é de $\left(\frac{x}{40} + 2\right)$ reais, obtenha a função polinomial:

a. custo semanal, $C(x)$. **1. a.** $C(x) = \frac{x^2}{40} + 2x$

b. receita semanal, $R(x)$. **1. b.** $R(x) = 430x - x^2$

c. lucro semanal, $L(x)$. **1. c.** $L(x) = -\frac{41x^2}{40} + 428x$

2. Aplicando o método da chave, obtenha o quociente $Q(x)$ e o resto $R(x)$ da divisão de $E(x)$ por $D(x)$, nos casos a seguir. **2. a.** $Q(x) = x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$ e $R(x) = 0$

a. $E(x) \equiv x^5 + 1$ e $D(x) \equiv x + 1$

b. $E(x) \equiv 6x^4 + x^3 + 8x^2 + 2$ e $D(x) \equiv 3x^2 + x + 4$

2. b. $Q(x) = 2x^2 - \frac{x}{3} + \frac{1}{9}$ e $R(x) = \frac{11x}{9} + \frac{14}{9}$

3. Resolva em $\mathbb{C}$ a equação $x^5 - 3x^4 + 3x^3 - 9x^2 - 4x + 12 = 0$, sabendo que duas de suas raízes são 3 e 2i. **3.** $S = \{1, -1, -2i, 2i, 3\}$

4. Um caminhão carregado percorreu 8 km em rua pavimentada da cidade, 2 km em rua de terra e 6 km em autoestrada, consumindo 8L de diesel no percurso total. O quadro a seguir mostra o desempenho do caminhão nesses trechos, em quilômetro rodado por litro de combustível.

Desempenho do caminhão, em quilômetro rodado por litro de combustível

Tipo de via	Rua pavimentada da cidade	Rua de terra	Autoestrada
Desempenho (km/L)	x	$x - 1$	$x + 1$

Qual foi o desempenho do caminhão, em km/L, em cada tipo de via?

4. O desempenho do caminhão nas ruas da cidade foi de 2 km/L; nas ruas de terra foi de 1 km/L; e na autoestrada foi de 3 km/L.

Ferramenta de estudo

Elaborar um resumo dos tópicos estudados é uma ferramenta de estudo que retoma o que foi estudado, em que você pode destacar conteúdos nos quais ainda apresenta dificuldades ou que ainda não foram compreendidos.

Para elaborar um resumo, você pode seguir algumas dicas, como as sugeridas a seguir.

1. A cada conteúdo estudado, faça anotações detalhadas com tudo o que você aprendeu.

2. Ao finalizar o estudo dos tópicos do capítulo, retome suas anotações e elabore um texto resumindo-as.

3. Para fazer o resumo, você também pode retomar os tópicos deste capítulo a fim de verificar ou relembrar conceitos, palavras-chave, situações-problema etc.

4. Organize em tópicos a sequência das informações que você pretende apresentar no resumo antes de escrevê-lo.

Agora, elabore um resumo utilizando o que você aprendeu neste capítulo. Compartilhe seu resumo com outros colegas e leia o resumo deles também, a fim de aprimorar seu registro.

Se teve dificuldades em elaborar o resumo ou não resolveu algum exercício, retome os conteúdos abordados no capítulo. Após algumas tentativas, anote as dúvidas e converse com um colega que possa ajudá-lo. Se mesmo assim a dúvida persistir, pergunte ao professor na aula seguinte. Gerencie bem seu tempo de estudo em casa e estabeleça metas diárias alcançáveis, planejando seus estudos, passo a passo.

RESPOSTAS

CAPÍTULO 1

Além da teoria

3. Positivo: 255 pessoas; falso-positivo: 12 pessoas; negativo: 188 pessoas; falso-negativo: 45 pessoas.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. alternativa **d**

2. **a.** $E = \{(C, C, C), (C, C, K), (C, K, C), (K, C, C), (K, K, K), (K, K, C), (K, C, K), (C, K, K)\}$
b. $\frac{1}{2}$
c. $\frac{7}{8}$

3. **a.** $\frac{1}{6}$
b. $\frac{5}{36}$
c. 0
d. $\frac{1}{6}$
e. 1

4. **a.** 216 **b.** $\frac{1}{36}$

5. **a.** 7,5%

6. **a.** 56 **b.** $\frac{3}{7}$

8. 375 carpas

9. **a.** $\frac{1}{6}$
b. 0 (evento impossível)

10. 28 pessoas

11. $\frac{22}{27}$

12. **a.** 0 **b.** 1

13. **a.** 729
b. Resposta possível: (1, 3, 5)
c. 125
d. $\frac{604}{729}$

14. 25%

15. alternativa **e**

16. alternativa **d**

17. $\frac{13}{20}$

18. 50%

19. $\frac{4}{7}$

20. 25%

21. $\frac{13}{20}$

22. $\frac{13}{40}$ ou 32,5%

24. $P(B/A) = \frac{1}{4}$

25. $P(B/A) = \frac{4}{5}$

26. $\frac{2}{9}$

27. $\frac{2}{3}$

28. alternativa **e**

29. **a.** $\frac{3}{5}$
b. $\frac{2}{3}$
c. $\frac{2}{5}$
d. $\frac{13}{15}$

30. Sim, pois $P(A \cap B) \neq 0$.

31. **a.** $E = \{(C, C, C), (C, C, K), (C, K, C), (K, C, C), (C, K, K), (K, C, K), (K, K, C), (K, K, K)\}$, em que $n(E) = 8$
b. $A = \{(C, C, K), (C, K, C), (K, C, C), (C, K, K), (K, C, K), (K, K, C)\}$, em que $n(A) = 6$
c. $B = \{(C, C, C), (C, C, K), (C, K, C), (K, C, C)\}$, em que $n(B) = 4$
d. $A \cap B = \{(C, C, K), (C, K, C), (K, C, C)\}$, em que $n(A \cap B) = 3$
e. $P(B) = \frac{1}{2}$ e $P(B/A) = \frac{1}{2}$
f. Sim, pois $P(B) = P(B/A)$.

32. **a.** $\frac{3}{100}$
b. $\frac{9}{50}$
c. $\frac{1}{8}$

33. **a.** $\frac{1}{24}$
b. $\frac{1}{4}$
c. $\frac{1}{12}$

34. **a.** $\frac{10}{63}$
b. $\frac{10}{21}$
c. $\frac{1}{126}$
d. $\frac{125}{126}$

35. $\frac{3}{32}$

36. **a.** $\frac{1}{9}$
b. $\frac{8}{9}$
c. $\frac{528}{2.925}$
d. $\frac{576}{2.925}$

37. **a.** $\frac{2}{7}$
b. $\frac{3}{14}$
c. $\frac{1}{14}$

38. 8,1%

39. 5,12%

40. alternativa **c**

42. **a.** $\frac{1}{28}$
b. $\frac{1}{56}$
c. $\frac{3}{7}$
d. $\frac{3}{11}$

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

1. alternativa **c**

2. 215.300.000 pessoas

3. $\frac{2}{7}$

4. 100%

5. **a.** Esses percentuais são determinados pelos intervalos de tempo entre os trens com destinos opostos. Como o número de visitas à avó materna (região leste) foi o triplo do número de visitas à avó paterna (região oeste), o intervalo de tempo entre um trem para oeste e o próximo para leste é o triplo do intervalo de tempo entre um trem para leste e o próximo para oeste.
b. 8 h 23 min

6. $\frac{7}{9}$

7. $\frac{11}{24}$

8. alternativa **a**

9. 20 homens e 20 mulheres.

10. **a.** 36
b. $A = \{(3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6)\}$; $P(A) = \frac{1}{6}$
c. $B = \{(1, 2), (2, 2), (3, 2), (4, 2), (5, 2), (6, 2)\}$; $P(B) = \frac{1}{6}$
d. $\frac{1}{6}$
e. Sim, pois $P(B/A) = P(B)$ ou $P(A/B) = P(A)$.

11. **a.** Sim, são independentes.
b. Não são independentes.

12. $\frac{53}{54} \approx 98\%$

13. alternativa **a**

14. **a.** $\frac{1}{13} \approx 7{,}7\%$
b. $\frac{16}{39} \approx 41\%$
c. $\frac{19}{39} \approx 48{,}7\%$

15. INÍCIO

#Constantes#
Total_Numeros = 80
Numeros_Sorteados = 5
#Variáveis#
n; *k*; *aposta*

Função **Combinacao**(*n*, *k*)
Calcule Fatorial(*n*) / (Fatorial(*k*) * Fatorial(*n* – *k*))
FimFunção

Função **CalcularProbabilidade**(*aposta*)
Numerador = **Combinacao**(*aposta*, *Numeros_Sorteados*)
Denominador = **Combinacao** (*Total_Numeros*, *Numeros_Sorteados*)
Calcule Numerador / Denominador
FimFunção

probabilidadeMinima = **CalcularProbabilidade**(5)
probabilidadeMaxima = **CalcularProbabilidade**(7)

Escreva ("A probabilidade de acertar todos os números com uma aposta mínima é de", *probabilidadeMinima*)
Escreva ("A probabilidade de acertar todos os números com uma aposta máxima é de", *probabilidadeMaxima*)

FIM

Reflexão

Página 20: Sim, pois podemos resolver esse exercício aplicando apenas a definição de probabilidade.

Página 24: A demonstração pode ser feita do seguinte modo:

$$P(B/A) = P(B) \Rightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = P(B) \qquad (1)$$

e

$$\frac{P(A \cap B)}{P(A)} = P(B) \Rightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A) \qquad (2)$$

De (1) e (2), deduzimos que:

$$P(B/A) = P(B) \Rightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A) \qquad (3)$$

Observando que, por definição,

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \qquad (4),$$

concluímos de (3) e (4):

$P(B/A) = P(B) \Rightarrow P(B/A) = P(A)$

Matemática sem fronteiras

1. a. ≈ 96,2% b. ≈ 93,8% c. ≈ 7,6%

Verifique o que aprendeu no Capítulo 1

1. alternativa **d**
2. $\frac{10}{21}$
3. alternativa **d**
4. a. $\frac{2}{7}$ b. $\frac{5}{7}$

CAPÍTULO 2

Além da teoria

1. ≈ −633 mil candidatos
2. De 2020 para 2021: ≈ 2,8%;
   De 2021 para 2022: ≈ 1,4%;
   De 2022 para 2023: ≈ −1,6%

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

5. a. 0,04

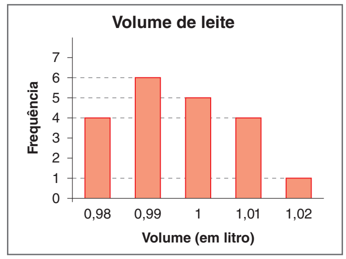
b.

Volume de leite

Volume (em litro)	Frequência (F)	Frequência relativa (F%)
0,98	4	20%
0,99	6	30%
1,00	5	25%
1,01	4	20%
1,02	1	5%
	$F_t = 20$	

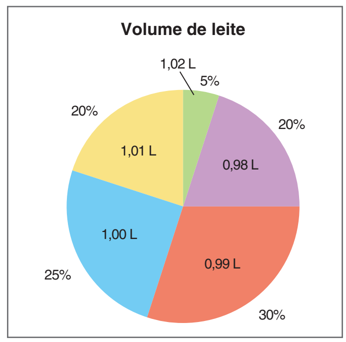
Elaborado para fins didáticos.

c. Gráfico de barras verticais:



Elaborado para fins didáticos.

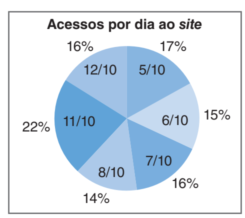
Gráfico de setores:



Elaborado para fins didáticos.

6. a. 500 acessos

b.

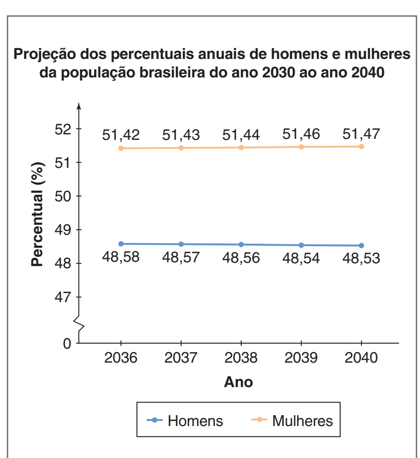


Elaborado para fins didáticos.

7. a. ≈ 2,84%

b. ≈ 94,29%

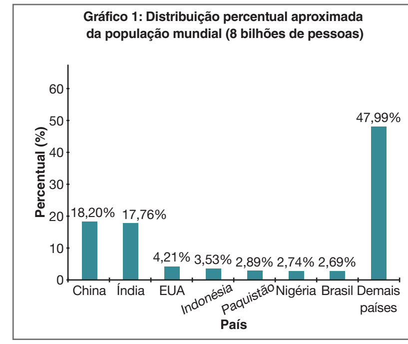
c.



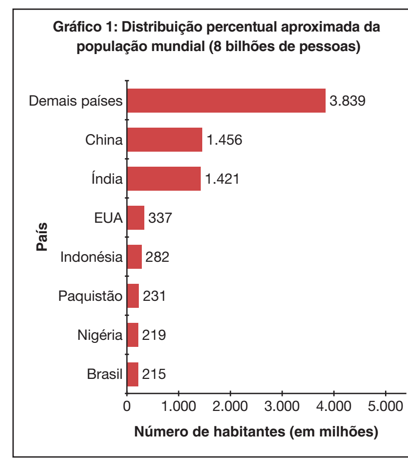
Fonte: INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA. **Projeção da população do Brasil por sexo e idade para o período 1980-2050**. Brasília, DF: IBGE, 2008. Disponível em: https://seriesestatisticas.ibge.gov.br/series.aspx?no=10&op=0&vcodigo=POP302&t=revisao-2008-projecao-populacao-mulheres e https://seriesestatisticas.ibge.gov.br/series.aspx?no=10&op=0&vcodigo=POP301&t=revisao-2008-projecao-populacao-homens. Acesso em: 5 out. 2024.

8. a. 113.750.400 mulheres

b.



c.



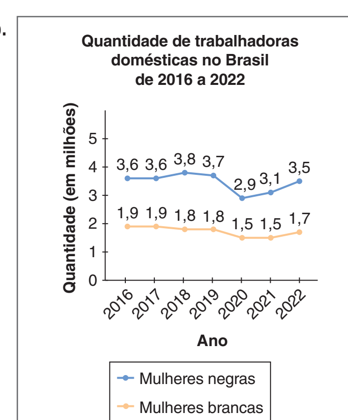
Fonte: COUNTRY METERS. **População mundial**. [*S. l.*]: Country Meters, [2024]. Disponível em: https://countrymeters.info/pt. Acesso em: 22 jul. 2024.

10. e. ≈ R$ 10,43

f. ≈ 4,3%

11. a. 35,72%

b.



Fonte: INSTITUTO DE PESQUISA ECONÔMICA APLICADA. **Retrato das Desigualdades de Gênero e Raça 2024**. [*S. l.*]: Ipea, [2024]. Disponível em: https://www.ipea.gov.br/portal/retrato/indicadores/tabelas-completas. Acesso em: 10 set. 2024.

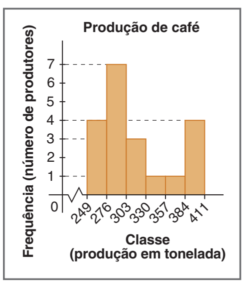
12. a. 160

b. **Produção de café**

Classe (produção em tonelada)	Frequência	Frequência relativa
[249, 276[	4	20%
[276, 303[	7	35%
[303, 330[	3	15%
[330, 357[	1	5%
[357, 384[	1	5%
[384, 411]	4	20%
	$F_t = 20$	

Elaborado para fins didáticos.

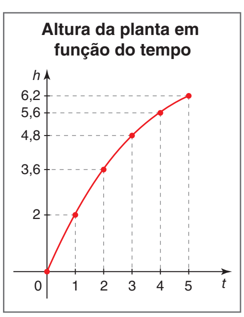
c.



Elaborado para fins didáticos.

13. a. verdadeira c. falsa
b. verdadeira d. verdadeira

15. a.



Elaborado para fins didáticos.

b. 1,24 cm c. 5,2 cm

16. alternativa **d**

17. 16

18. alternativa **a**

19. 19,1

20. alternativa **e**

21. alternativa **c**

22. $\frac{28}{95}$

23. alternativa **b** 24. 2,14%

27. a. R$ 8.000,00
b. ≈ R$ 5.466,67
c. ≈ R$ 5.125,00

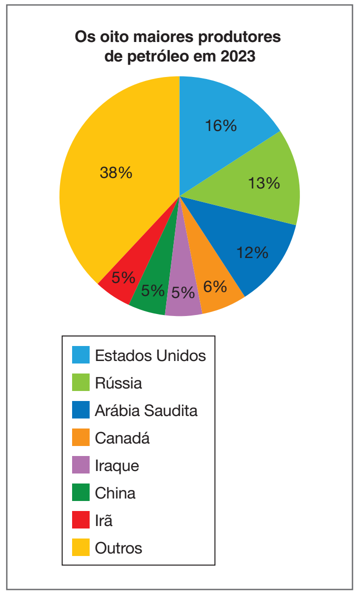
28. a. A: 0,4; B: 0,5 b. máquina B

29. a. 7,0
b. Gustavo: 0,3125; Lucas: 0,375

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

1. a. 5,9 milhões de meninos e 5,9 milhões de meninas

2. a.



Nota: Inclui condensado e LGN. Atualização em julho de 2024. Elaborado com base em: INSTITUTO BRASILEIRO DE PETRÓLEO E GÁS (IBP). **Maiores produtores de petróleo em 2023**. Rio de Janeiro: IBP, 2024. Disponível em: https://www.ibp.org.br/observatorio-do-setor/snapshots/maiores-produtores-mundiais-de-petroleo/. Acesso em: 6 out. 2024.

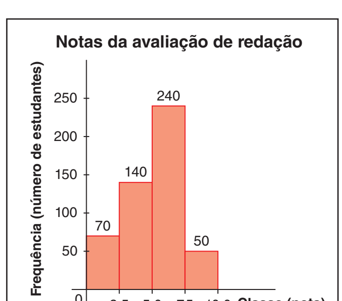
3. a. não
b. abril; US$ 8.568,5 milhões
c. fevereiro; US$ 5.203,5 milhões
d. US$ 42.309,7 milhões

4. a. **Notas da avaliação de redação**

Classe (nota)	Frequência (número de estudantes)
[0; 2,5[	70
[2,5; 5,0[	140
[5,0; 7,5[	240
[7,5; 10,0]	50
	$F_t = 500$

Elaborado para fins didáticos.

b.



Elaborado para fins didáticos.

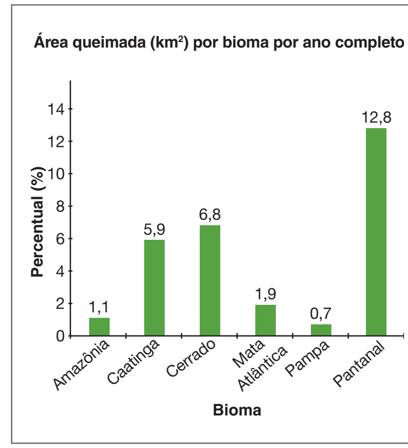
5. 25 pessoas

6. 80 mulheres e 40 homens

7. a. 250 minutos
b. Todas as classes têm a mesma amplitude de 50 minutos.
c. ≈ 123,3 minutos

8. alternativa **e**

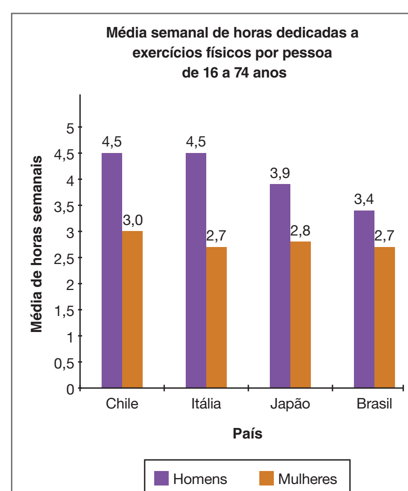
9. a.



Elaborado com base em: INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS (INPE). **Dados de queimadas**. São José dos Campos: Inpe, 2024. Disponível em: https://terrabrasilis.dpi.inpe.br/queimadas/bdqueimadas/#exportardados. Acesso em: 29 jul. 2024.

b. ≈ 4, 9
c. *Dam* ≈ 3,6%; σ ≈ 18%

10. a.



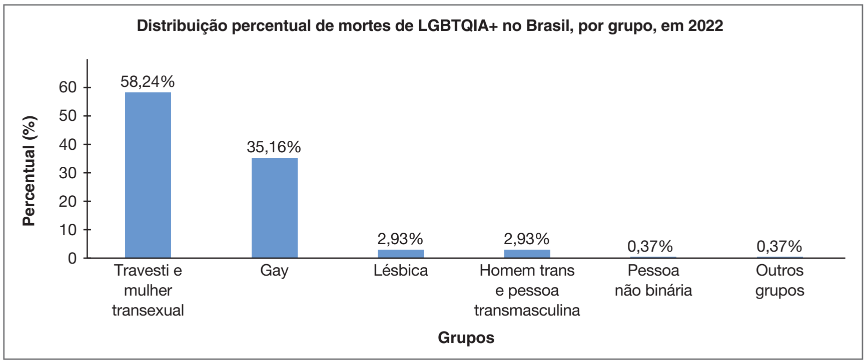
Elaborado com base em: INSTITUTO IPSOS. **Global views on sports and exercise**. Paris: Ipsos, 2021. Disponível em: https://www.ipsos.com/sites/default/files/ct/news/documents/2021-08/Global-Views-on-Sports-and-Exercise-Ipsos.pdf. Acesso em: 30 jul. 2024.

b. homens: média aritmética 4,075, desvio absoluto médio 0,425, variância ≈ 0,21, desvio-padrão ≈ 0,46; mulheres: média aritmética 2,8, desvio absoluto médio 0,1, variância 0,015, desvio-padrão ≈ 0,12.

ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

Matemática sem fronteiras

2. b.



Fonte: OBSERVATÓRIO DE MORTES E VIOLÊNCIA CONTRA LGBTI+ NO BRASIL. **Dossiê denuncia 273 mortes e violências de pessoas LGBT em 2022**. [*S. l.*], 8 maio 2023. Disponível em: https://observatoriomorteseviolenciaslgbtibrasil.org/dossie/mortes-lgbt-2022/. Acesso em: 6 out. 2024.

Verifique o que aprendeu no Capítulo 2

1. I. alternativa **d**
   II. alternativa **b**
   III. alternativa **c**
2. alternativa **d**
3. alternativa **e**
4. alternativa **a**

CAPÍTULO 3

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. a. $A = \begin{pmatrix} 94,8 & 211,4 \\ 64,3 & 64,8 \\ 12,1 & 7,7 \end{pmatrix}$

b. Rússia.

2. a. R$ 2.800,00

b. R$ 10.580,00

c. R$ 7.730,00

3. a. $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 6 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$

b. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

c. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

4. a. 630 **b.** 630

5. $x = -2$

6. $p = 1$ e $q = 3$

7. $x = 4$

9. a. $\begin{pmatrix} 6 & 8 & -1 \\ 7 & -2 & 7 \end{pmatrix}$

b. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 25 \\ -4 & -10 & -7 \end{pmatrix}$

c. $\begin{pmatrix} 5 & 5 & 26 \\ 3 & -15 & 5 \end{pmatrix}$

10. a. sim **b.** sim **c.** sim

11. a. $A = \begin{pmatrix} 4 & -8 & 10 \\ 7 & -10 & 0 \end{pmatrix}$

b. $X = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$; $Y = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

12. a. 62 placas **c.** 144 placas

b. 82 placas **d.** 135 placas

e. $\begin{pmatrix} 126 & 144 \\ 135 & 146 \\ 144 & 146 \end{pmatrix}$

f. $\begin{pmatrix} -24 & -20 \\ -37 & -44 \\ -20 & -30 \end{pmatrix}$

14. a. $\begin{pmatrix} 26 \\ -4 \end{pmatrix}$

b. não existe

c. $\begin{pmatrix} 4 & -8 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$

d. $\begin{pmatrix} -2 & 12 \\ -2 & -6 \end{pmatrix}$

e. não existe

15. a. $\begin{pmatrix} 15 & 15 \\ 26 & 26 \end{pmatrix}$

b. $\begin{pmatrix} 1 & 8 & 4 \\ 4 & 32 & 16 \\ 2 & 16 & 8 \end{pmatrix}$

c. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & 1 \end{pmatrix}$

d. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & 1 \end{pmatrix}$

e. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

16. a. falsa **c.** falsa

b. verdadeira

17. $X = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix}$

18. a. $C = \begin{pmatrix} 41.000 & 55.000 \\ 29.000 & 39.000 \end{pmatrix}$

b. 41 kg **d.** 94 kg

c. 96 kg

19. a. São inversas entre si.

b. Não são inversas entre si.

c. $G^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$; não existe a inversa de H.

20. não

22. a. $M' = \begin{bmatrix} 9 \\ -1 \end{bmatrix}$ **b.** $P' = \begin{bmatrix} -\sqrt{2} \\ 5\sqrt{2} \end{bmatrix}$

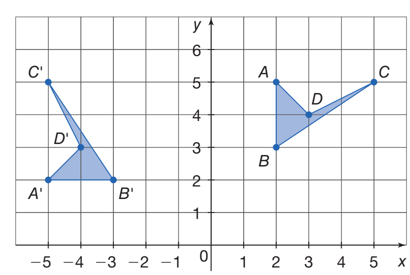
23. a. Rotação de 90° no sentido anti-horário.

b. Reflexão em torno do eixo x.

c. Reflexão em torno do eixo y.

d. A multiplicação entre essas matrizes não está definida, assim, não pode ser associada a nenhuma transformação geométrica.

24. a.

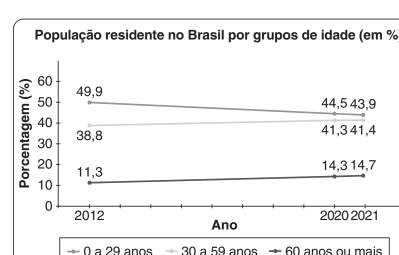


24. b. Rotação de 90° no sentido horário em torno da origem.

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

1. a. $5,2 \cdot 10^9$ **b.** 5%

2. a.



Fonte: PNAD Contínua. População cresce, mas número de pessoas com menos de 30 anos cai 5,4% de 2012 a 2021. **Agência IBGE notícias**. Disponível em: https://agenciadenoticias.ibge.gov.br/agencia-noticias/2012-agencia-de-noticias/noticias/34438-opulacao-cresce-masnumero-de-pessoas-com-menos-de-30-anos-cai-5-4-de-2012-a-2021. Acesso em: 26 jul. 2024.

b. ≈ 98,7 milhões de pessoas.

3. alternativa **a**

4. **a.** $A = \begin{bmatrix} 25 & 25 \\ 28 & 27 \\ 27 & 28 \end{bmatrix}$

   b. $C = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

   c. Cada elemento c_{ij}, da matriz C, obtida no item **b**, representa o crescimento da produção, em tonelada, da fábrica i no mês j do primeiro bimestre de 2025, em relação à produção dessa fábrica no mês j do primeiro bimestre de 2024.

   d. 8% **e.** 10% **f.** 7,5%

5. **a.** comutam **b.** $x = 2$

6. **a.** I_2 **b.** M

7. alternativa **e**

8. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$

9. **a.** $C = \begin{bmatrix} 1.400 & 1.800 & 1.750 \\ 1.450 & 1.600 & 1.700 \end{bmatrix}$

   b. Quantidade, em quilograma, de fertilizante Z usado nas plantações de milho, soja e feijão na região Q.

10. alternativa **e**

Reflexão

Página 88: $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x \\ y \end{bmatrix}$

Verifique o que aprendeu no Capítulo 3

1. $X = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$ e $Y = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ -5 & -1 \end{bmatrix}$

2. **a.** 73 unidades

   b. 80 unidades

   c. $A + B = \begin{pmatrix} 125 & 140 & 115 \\ 183 & 108 & 123 \end{pmatrix}$

   d. $A - B = \begin{pmatrix} -27 & -20 & 25 \\ -3 & -12 & 23 \end{pmatrix}$

   e. $P = 2(A + B) = \begin{pmatrix} 250 & 280 & 230 \\ 366 & 216 & 246 \end{pmatrix}$

3. alternativa **a**

CAPÍTULO 4

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. **a.** 0 **b.** $\frac{40}{3}$

2. **a.** $x + 2y + 5z = 15$

   b. (3, 1, 2); (8, 1, 1); (4, 3, 1)

   c. 6 soluções

   d. 4 pacotes

3. 4 ou 15 relógios

5. **a.** verdadeira **d.** verdadeira

   b. verdadeira **e.** falsa

   c. falsa **f.** falsa

6. alternativa **d**

7. **e.** $\left(-\frac{1}{9}, \frac{16}{9}\right)$

8. **a.** SPD; $S = \{(2, 1, 3)\}$

   b. SPI; $S = \{(7 - 18z;\ 1 - 3z;\ z)$, com $z \in \mathbb{R}\}$

   c. SPI; $S = \left\{\left(\frac{y - 7}{2}, y, 2\right)\text{, com } y \in \mathbb{R}\right\}$

9. 2

10. **a.** SPD; $S = \{(1, 1, 2)\}$

    b. SI; $S = \varnothing$

    c. SPI; $S = \{(6z - 5, 3 - z, z)$, com $z \in \mathbb{R}\}$

11. **a.** SI; $S = \varnothing$

    b. SPD; $S = \{(-2, 2)\}$

    c. SPI; $S = \{(2y + 3, y)$, com $y \in \mathbb{R}\}$

    d. SPD; $S = \left\{\left(\frac{11}{19}, \frac{1}{19}\right)\right\}$

12. 900 estudantes na Educação Infantil, 1.400 estudantes no Ensino Fundamental e 700 no Ensino Médio.

13. Os dados fornecidos são insuficientes.

15. **a.** 23 **c.** -12

    b. 3 **d.** 1

16. alternativa **d**

17. $k \neq \frac{1}{4}$

18. **a.** $S = \{-3, 3\}$

    b. $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{4} + k\pi\text{, com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

    c. $S = \left\{2, -\frac{3}{5}\right\}$

    d. $S = \varnothing$

20. **a.** para $k \neq 8$, SPD; para $k = 8$, SI.

    b. para $k \neq 3$ e $k \neq -3$, SPD;
    para $k = 3$, SI; para $k = -3$, SPI.

21. **a.** para $m \neq -1$, SPD;
    para $m = -1$, SPI.

    b. para $m \neq 2$ e $m \neq 1$, SPD;
    para $m = 2$ ou $m = 1$, SI.

22. **a.** para $m \neq 6$, SPD;
    para $m = 6$ e $n \neq 3$, SI;
    para $m = 6$ e $n = 3$, SPI.

    b. para $m \neq 1$ e $m \neq -1$, SPD;
    para $m = 1$ e $n \neq 1$, SI;
    para $m = 1$ e $n = 1$, SPI;
    para $m = -1$ e $n \neq -1$, SI;
    para $m = -1$ e $n = -1$, SPI.

23. **a.** $y = 2x + 4$

    b. $k \neq 2 \Rightarrow$ SPD; $k = 2 \Rightarrow$ SI

    c. $k \neq 2 \Rightarrow r$ e s são concorrentes;
    $k = 2 \Rightarrow r$ e s são paralelas distintas.

24. $k = 3{,}2$

26. alternativa **e**

27. **a.** $m \neq 15 \Rightarrow$ SPI; $m = 15 \Rightarrow$ SI

    b. $p \neq \frac{4}{3} \Rightarrow$ SPI;
    $p = \frac{4}{3}$ e $q = 18 \Rightarrow$ SPI;
    $p = \frac{4}{3}$ e $q \neq 18 \Rightarrow$ SI.

28. **a.** $a = -1 \Rightarrow$ SPD; $a \neq -1 \Rightarrow$ SI.

    b. $a = -3 \Rightarrow$ SPD; $a \neq -3 \Rightarrow$ SI.

29. $m = 1$

30. $k = 3$

31. **a.** -7; SPD **b.** 0; SPI

32. **a.** $S = \{(0, 0)\}$

    b. $S = \left\{\left(-\frac{7c}{5}, -\frac{4c}{5}, c\right)\text{, com } c \in \mathbb{R}\right\}$

33. **a.** infinitos

    b. $S = \left\{\left(-\frac{z}{2}, -\frac{z}{2}, z\right)\text{, com } z \in \mathbb{R}\right\}$

34. **a.** para $k \neq 6 \Rightarrow$ SPD;
    para $k = 6 \Rightarrow$ SPI.

    b. para $k \neq 4$ e $k \neq -4 \Rightarrow$ SPD; para $k = 4$ ou $k = -4 \Rightarrow$ SPI.

35. **a.** $n \neq 0$ e $n \neq -\frac{12}{5} \Rightarrow$ SPD
    $n = 0$ ou $n = -\frac{12}{5} \Rightarrow$ SPI

    b. SPI para qualquer valor real de n

36. qualquer número real k, com $k \neq 5$

37. $a = -4$

38. **a.** $\begin{cases} x - 3y = 0 \\ x - 9z = 0 \\ y - 3z = 0 \end{cases}$

    b. $(9z, 3z, z)$, com $z \in \mathbb{R}^*_+$

40. 1,5 unidade de área

41. 55 km^2

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

1. **a.** $5x + 10y + 20z = 80$

   b. 9 soluções

2. **a.** qualquer valor real k

   b. $(-5, -14, 0)$; $(1, -4, 2)$; $(-8, -19, -1)$

3. **a.** qualquer número real k, com $k \neq 0$

   b. $k = 0$

   c. $k = 0$

4. **a.** SPD; $S = \{(3, -1, 2)\}$

   b. SPI; $S = \left\{\left(\frac{7 - 5z}{7}; -\frac{z}{7}, z\right)\text{, com } z \in \mathbb{R}\right\}$.

   c. SI; $S = \varnothing$

   d. SPD; $S = \{(1, -1)\}$

   e. SPD; $S = \{(1, 2, 0)\}$

5. 156 pessoas

6. alternativa **c**

7. 13,8 mm

8. alternativa **c**

9. O fato ocorreu em 1925, e havia 1.600 leões e 1.650 zebras na região.

10. Como o sistema é impossível, concluímos que há erro nas informações.

11. 13

12. **a.** zero; SI **c.** 9; SPD

    b. zero; SPI

13. **a.** $S = \{2\}$ **c.** $S = \mathbb{R}$

    b. $S = \varnothing$

14. alternativa **d**

15. alternativa **e**

16. a. $p \neq 10 \Rightarrow$ SPD;
$p = 10$ e $q = 4 \Rightarrow$ SPI;
$p = 10$ e $q \neq 4 \Rightarrow$ SI.
b. $p \neq 1$ e $p \neq -1 \Rightarrow$ SPD;
$p = 1$ e $q = -3 \Rightarrow$ SPI;
$p = 1$ e $q \neq -3 \Rightarrow$ SI;
$p = -1$ e $q = 1 \Rightarrow$ SPI;
$p = -1$ e $q \neq 1 \Rightarrow$ SI.

17. alternativa **a**

18. a. $m \neq 2$ c. $m = 3$ e $p = -2$
b. $m = 3$ e $p \neq -2$ d. $m = \frac{7}{3}$

19. a. $k = 0{,}1$
b. Devem ser vendidas mais de 100.000 garrafas.

20. alternativa **e**

21. para $a \neq 3$, SPI; para $a = 3$, SI

22. $a \neq \frac{4}{3} \Rightarrow$ SPD;
$a = \frac{4}{3}$ e $b = 18 \Rightarrow$ SPI;
$a = \frac{4}{3}$ e $b \neq 18 \Rightarrow$ SI

23. alternativa **c**

24. a. $S = \{(0{,}0)\}$
b. $S = \{(-y, y)$, com $y \in \mathbb{R}\}$

25. SPD para qualquer valor real de p.

26. $k = -\frac{1}{2}$ ou $k = -2$

27. a. $\begin{cases} 3kx - 4y = 0 \\ 2kx - 4z = 0 \\ 2ky - 3kz = 0 \end{cases}$
b. O sistema é SPI para qualquer valor real positivo de k.

Verifique o que aprendeu no Capítulo 4

1. alternativa **a**
2. a. s: $y = -2x + 4$; r: $y = x + 1$
c. $r \cap s = \{(1{,}2)\}$
3. A: R\$ 80,00; B: R\$ 120,00; C: R\$ 150,00.
5. alternativa **e** 6. alternativa **c**

CAPÍTULO 5

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. a. 8 c. 10
b. 5 d. $2\sqrt{5}$

2. a. $P(0, 12)$ e $P'(0, -4)$
b. $Q(1, 0)$

3. a. $C(0, 7)$ b. $r = 5$

4. a. $B(-1; 2{,}4)$ c. 2,6 km
b. 3,4 km

5. a. Sim, pois: $PE = 20$ km < 23 km
b. Não, pois: $ME \approx 23{,}3$ km > 23 km
c. $GE \leqslant 23 \Rightarrow \sqrt{(x+6)^2 + (y-4)^2} \leqslant 23$

7. a. $(6, 8)$ b. $(1, -3)$

8. a. $B(4, 0)$, $C(7, 3)$ e $D(10, 6)$
b. $A'(25, 21)$

9. $D(3, 17)$

10. a. $(4, 7)$ c. $(7, 10)$
b. $\left(\frac{7}{2}, \frac{13}{2}\right)$

11. a. $135°$; -1 b. $60°$; $\sqrt{3}$

12. a. $45°$; 1

13. a. 4 c. zero
b. $-\frac{3}{2}$ d. não existe

14. $q = 6$

15. a. 1,5

16. a. $m = 0{,}3$ e. $m = -1{,}175$

18. a. sim c. sim
b. sim d. não

19. a. $x = -1$ b. $m \neq 14$

20. alternativa **d**

22. a. $y = 2x - 9$ c. $y = 8x$
b. $y = x - 9$ d. $y = -\frac{5x}{6} + 1$

23. a. $y = -x - 3$ c. $y = x - 3$
b. $y = \sqrt{3}\,x - 4\sqrt{3}$ d. $y = 4$

24. a. $y = 2x - 1$ c. $y = 8$
b. $y = -2x + 3$

25. a. $y = 0{,}1x + 1$ c. 3,5 atm
b. 4,5 atm

26. a. $M(4, 4)$; $Q(8, 8)$; $T(-4, 4)$
b. (s) $y = 4$; (r) $x = 8$; (b_i) $y = x$; (b_p) $y = -x$

27. a. $P(-5, -5)$ ou $P(9, 9)$
b. $S(4, -4)$ ou $S(-3, 3)$

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

1. 1 : 20.000

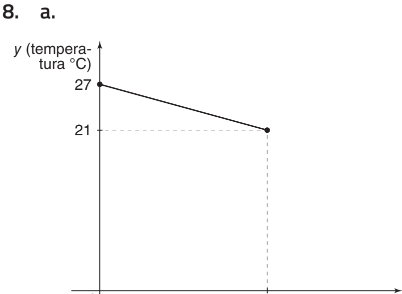
2. a. 5 unidades de comprimento
b. $A(4, 0)$; $B(0, -3)$

4. alternativa **d**

5. R\$ 12,00 6. a. 2060
b. 0,048 °C por ano

7. a. $m = 205.233$
e. $m_e = -174.330{,}8$

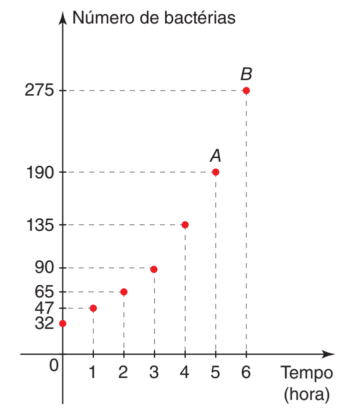
8. a.



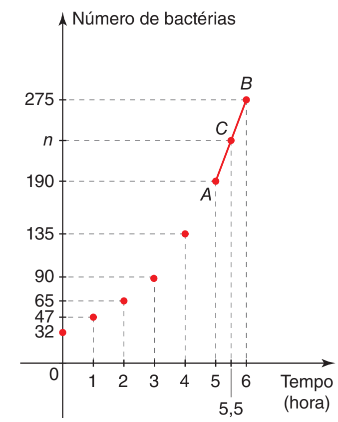
b. $y = -\frac{3x}{50} + 27$ d. 24,6 °C

Matemática sem fronteiras

1.



2.



3. ≈ 233 bactérias

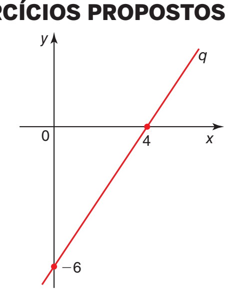
Verifique o que aprendeu no Capítulo 5

1. a. dia 24 b. 998 eleitores
2. alternativa **c**
3. $y = 3x - 2$

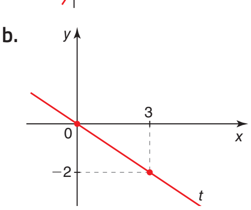
CAPÍTULO 6

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

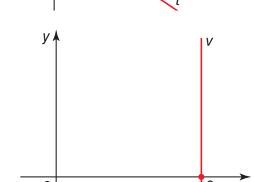
1. a.



b.

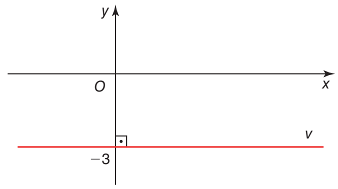


c.



ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

d.

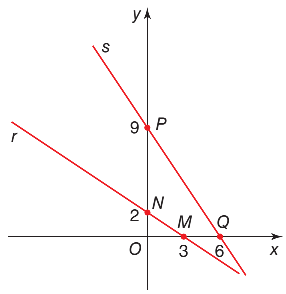


e. *r* de equação geral $x = 0$

f. *s* de equação geral $y = 0$

2. a. $(-1, 1)$ **b.** $(2, -7)$

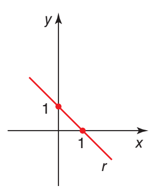
3. a.



b. 24 u

4. $3x - 2y - 1 = 0$

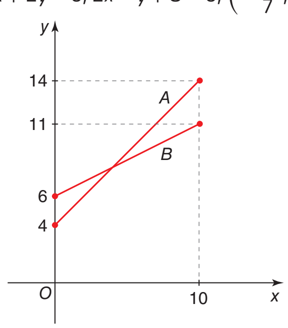
5. a.



b. $1 - k$ **c.** $(4, -3)$; $(-3, 4)$

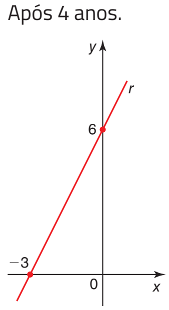
6. $3x + 2y = 0$; $2x - y + 8 = 0$; $\left(-\frac{16}{7}, \frac{24}{7}\right)$

7. a.



b. Após 4 anos.

9. a.



b. $m = 2$; $q = 6$

10. a. $p = 18$ e $q = 24$

11. $x + y - 9 = 0$

12. $y = -2x - 5$

13. a. $y = -3x + 11$ **c.** $y = \frac{2x}{3}$

b. $y = -4x + 1$

14. a. $k \neq 0$ e $k \neq 3$ e $k \neq -3$

b. $k = 3$

c. $k = -3$

15. a. verdadeira **d.** verdadeira

b. verdadeira **e.** verdadeira

c. falsa

17. a. $y = 2x$ **b.** $4x - 5y - 20 = 0$

18. $y = 2x + 2$

19. a. $x - y + 4 = 0$ **b.** $y = 4$

20. a. $2x + y + 2 = 0$ **c.** $(1, -4)$

b. $x - 2y - 9 = 0$ **d.** $(-3, -6)$

21. a. $x + y - 8 = 0$ e $x - 2y = 0$

b. $D\left(\frac{16}{3}, \frac{8}{3}\right)$

c. $R = \frac{2\sqrt{65}}{3}$

22. $y = -\frac{x}{2} + \frac{1}{2}$

23. $L = \frac{7C}{10} - 20.400$

24. $V = 0{,}036c + 998{,}56$, para $c \in \mathbb{R}$, com $40 \leqslant c \leqslant 90$

26. a. 3 **c.** 5

b. $3\sqrt{2}$ **d.** 5

27. b. $x - y + 2 = 0$ e $3x + 3y - 4 = 0$

28. a. $3x + 4y - 15 = 0$

b. 1 **c.** $\frac{5}{2}$

29. a. $A(8, 0)$ e $A'(-2, 0)$

b. $B(22, 22)$ e $B'(2, 2)$

c. $C(33, 35)$ e $C'(3, 5)$

30. $310\sqrt{2}$ m

31. 25π

33. a. 9 unidades de área

b. 30,5 unidades de área

34. alternativa **b**

35. $P(-2, 2)$ ou $P(2, -2)$

36. 65 km²

37. sim; 60 cm²

39. a. sim **b.** não **c.** sim

40. a. $x = 2$ ou $x = -\frac{5}{3}$

41. a. $x - y + 1 = 0$

b. $x + y + 2 = 0$

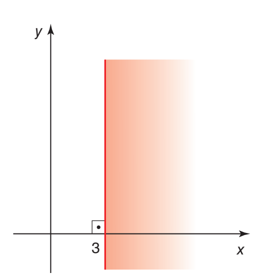
c. $x = 2$

d. $y = -2$

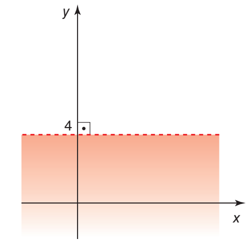
42. a. $a = 0{,}5$ **b.** 4 kWh por hora

43. 1 minuto

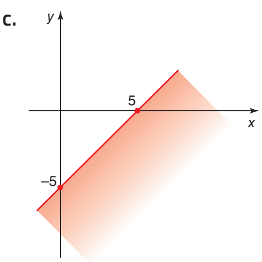
45. a.



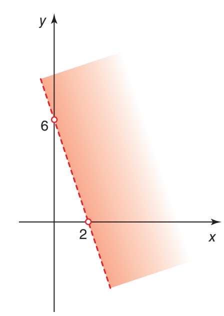
b.



c.



d.



49. b. 360 ha de milho e 120 ha de soja

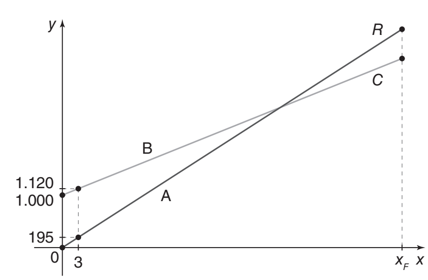
EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

1. a. $5x + 12y - 45 = 0$

b. 3,75 m

c. 93,6 km/h

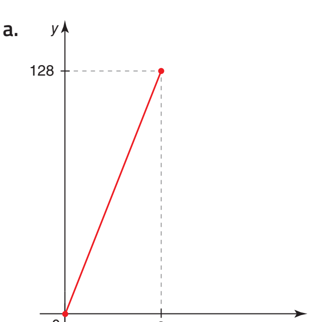
2. a.



b. (40, 2.600)

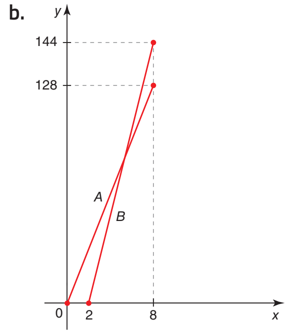
c. Mais do que 40 kg

3. a.



ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

b.



FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

c. 6 h; 96 L

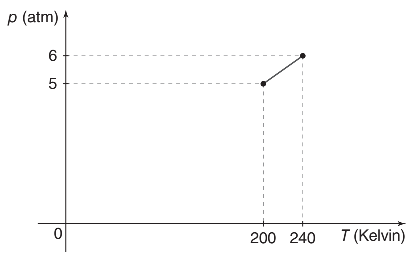
4. **a.** $y = 2x - 5$ **c.** $\left(\frac{7}{2}, 2\right)$

b. $2k - 5$

5. **a.** $P'(-2, 3)$ **b.** $Q(-5, 2)$

6. **a.** 6 atm

b.



ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

c. $\begin{cases} T = 200 + 2t \\ p = 5 + \dfrac{t}{20} \end{cases}$, com $0 \leqslant t \leqslant 20$

7. $a = 1$ ou $a = -27$

8. alternativa **c**

9. $P(0, -6)$ ou $P(5, 4)$

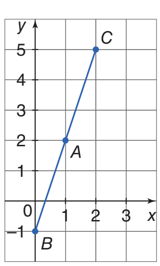
10. $\alpha = \frac{\pi}{3}$ ou $\alpha = \frac{4\pi}{3}$

11. 2

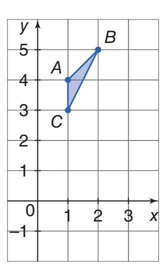
Conectado

Página 172:

Exemplo **a**:



Exemplo **b**:



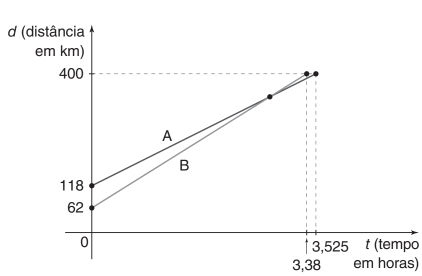
ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

Verifique o que aprendeu no Capítulo 6

1. **a.** 9 **b.** $27\sqrt{3}$

2. **a.** $d_A = 62 + 100t$ e $d_B = 118 + 80t$

b.



ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

c. $P(2,8; 342)$

3. **a.** 46 °C **b.** 22 °C

5. alternativa **b**

6. alternativa **c**

CAPÍTULO 7

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. **a.** $(x - 4)^2 + (y - 6)^2 = 100$

b. $(x - 7)^2 + y^2 = 3$

c. $x^2 + (y + 1)^2 = \frac{4}{9}$

d. $x^2 + y^2 = 16$

2. **a.** $C(6, 2)$ e $R = 7$

b. $C(4, 0)$ e $R = \sqrt{5}$

c. $C(-1, -2)$ e $R = \frac{4}{5}$

3. **a.** A não pertence a λ, e B pertence a λ.

b. $k = -2$ ou $k = -10$

4. **a.** $F(5, 7)$ e $G(1, 7)$

b. $(x - 3)^2 + (y - 5)^2 = 8$

c. $P(3 + 2\sqrt{2}, 5)$

d. $Q(3, 5 - 2\sqrt{2})$

5. λ_1: $(x - 8)^2 + (y - 3)^2 = 100$ e λ_2: $(x - 3)^2 + y^2 = 49$

6. $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 25$ ou $(x - 3)^2 + (y - 3)^2 = 25$

7. **a.** $k > 4$ **b.** $k = 4$ **c.** $k < 4$

8. $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 25$

9. alternativa **a**

11. **a.** $C(5, 1)$ e $R = 3$

b. $C(4, -3)$ e $R = \sqrt{6}$

c. $C(7, 0)$ e $R = \sqrt{5}$

d. $C(0, 0)$ e $R = \sqrt{3}$

e. $C(1, -1)$ e $R = 2$

12. **a.** $C(3, 1)$ e $R = 6$

b. $C(-2, 4)$ e $R = 1$

c. $C(-5, 0)$ e $R = \sqrt{2}$

d. $C\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$ e $R = \frac{1}{2}$

13. $x^2 + y^2 - 10x + 20 = 0$

14. $x^2 + y^2 - 6x - 6y - 8 = 0$

15. $x^2 + y^2 - 8x + 2y - 8 = 0$

16. $x^2 + y^2 - 2x - 8y - 8 = 0$ e $x^2 + y^2 - 20x - 32y + 256 = 0$

18. alternativa **e**

19. alternativa **e**

20. **a.** P é interior a λ. **c.** P pertence a λ.

b. P é exterior a λ.

23. alternativa **d**

24. **a.** s é tangente a λ. **c.** s é exterior a λ.

b. s é secante a λ.

25. **a.** $2x - y + 4 = 0$

b. $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 5$

26. **a.** $4^2 + 2^2 - 4 \cdot 4 - 2 \cdot 2 = 0 \Rightarrow 0 = 0$ é verdadeiro. Logo, o ponto B pertence a λ.

b. $C(2, 1)$ e $R = \sqrt{5}$

c. $2x + y - 10 = 0$

d. $S = 2,5$

27. **a.** $y = x$

b. $y = -x$

c. $-1 < m_u < 1$

d. $m_v < -1$ ou $m_v > 1$

28. $2x - y + 4\sqrt{5} - 10 = 0$ e $2x - y - 4\sqrt{5} - 10 = 0$

29. **a.** $s \cap \lambda = \{(2, 4), (3, 3)\}$

b. $\sqrt{2}$

30. **a.** $s \cap \lambda = \{(0, 1)\}$ **b.** $s \cap \lambda = \varnothing$

31. **a.** $(-1, 0)$ e $(9, 0)$ **c.** $(4, 5)$ e $(4, -5)$

b. $(0, 3)$ e $(0, -3)$

32. **a.** $k < -2$ ou $k > 2$

b. $k = -2$ ou $k = 2$

c. $-2 < k < 2$

34. **a.** $y = 2x + q$, com $q \in \mathbb{R}$

b. $2\sqrt{5}$ ou $-2\sqrt{5}$

c. $-2\sqrt{5} < q < 2\sqrt{5}$

d. $q < -2\sqrt{5}$ ou $q > 2\sqrt{5}$

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

1. Há duas circunferências possíveis: $(x - 2)^2 - (y - 2)^2 = 25$ e $(x - 3)^2 - (y - 3)^2 = 25$

2. **a.** $x^2 + y^2 = 9$ **b.** $\frac{\pi}{4}$ u

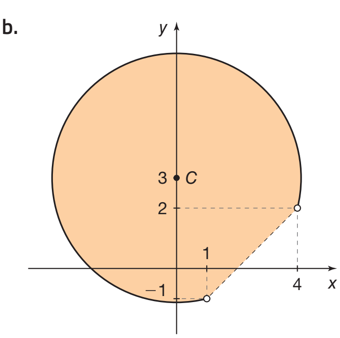
3. 30 segundos

4. $x^2 + y^2 \leqslant 64$

5. $3x + 2y + 16 = 0$; $3x + 2y - 10 = 0$

6. **a.** $s \cap \lambda = \{(1, -1), (4, 2)\}$

b.



7. **a.** $y = 3,4$

b. $x^2 + y^2 = 17,64$

c. $P_1(2,5; 3,4)$ e $P_2(-2,5; 3,4)$

d. 6.410 segundos, ou seja, 1 hora e 47 minutos

Verifique o que aprendeu no Capítulo 7

1. $(x - 4)^2 + (y + 4)^2 = 16$

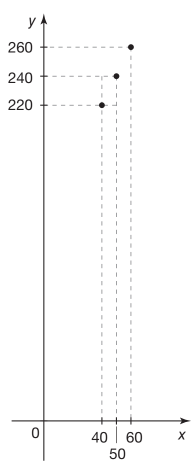
2. $x^2 + y^2 - 2x - 6y = 0$

3. alternativa **a**

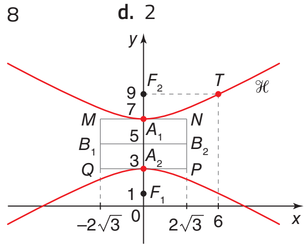
CAPÍTULO 8

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

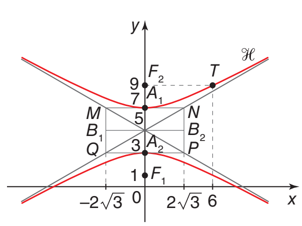
1. a. $2a = 10$
   b. $A_1\,(3, 0)$ e $A_2\,(13, 0)$
   c. $B_1B_2 = 6$
   d. $B_2\,(8, -3)$
   e. $\mathscr{E} = 0{,}8$
2. $A_1A_2 = 3 \cdot 10^8$ km; $F_1F_2 = 6 \cdot 10^6$ km
4. a. $\dfrac{(x-7)^2}{25} + \dfrac{(y-4)^2}{9} = 1$
   b. $\dfrac{(x-7)^2}{4} + \dfrac{(y+4)^2}{9} = 1$
   c. $\dfrac{x^2}{36} + \dfrac{y^2}{49} = 1$
5. $e = \dfrac{4}{5}$; $F_1(3, 4)$ e $F_2(11, 4)$
6. a. $\dfrac{(x-2)^2}{9} + \dfrac{(y+1)^2}{1} = 1$
   b. $e = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$
   c. 12
7.



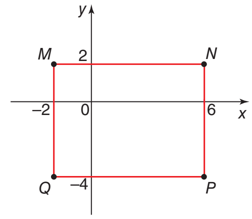
8. a. 4　　c. $2\sqrt{3}$　　e. $(0, 5)$
   b. 8　　d. 2
   f.



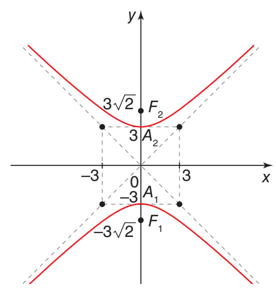
   g.



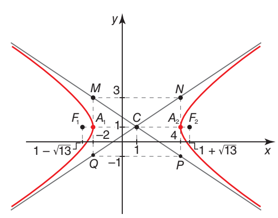
   h. $y = -\dfrac{\sqrt{3}\,x}{3} + 5$ e $y = \dfrac{\sqrt{3}\,x}{3} + 5$
9. 2 ua
10. a. $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{(y-2)^2}{16} = 1$
    b. $\dfrac{(y-3)^2}{4} - \dfrac{(x-2)^2}{5} = 1$
11. a.



    b. $A_1(-2, -1)$, $A_2(6, -1)$, $C(2, -1)$, $F_1(-3, -1)$ e $F_2(7, -1)$
    c. $\dfrac{(x-2)^2}{16} - \dfrac{(y+1)^2}{9} = 1$
    d. $3x + 4y - 2 = 0$ e $3x - 4y - 10 = 0$
12. a.



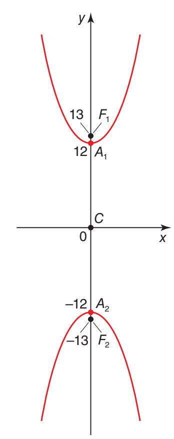
    b. $\dfrac{y^2}{9} - \dfrac{x^2}{9} = 1$　　c. $y = 0$ e $x = 0$
13. a. $\dfrac{(x-1)^2}{9} - \dfrac{(y-1)^2}{4} = 1$
    b.



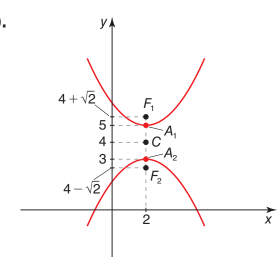
    c. $y = -\dfrac{2x}{3} + \dfrac{5}{3}$ e $y = \dfrac{2x}{3} + \dfrac{1}{3}$
14. $d = 8$ cm
16. a. $y = 2$　　c. $x = 5$
    b. $p = 4$　　d. $V(5, 4)$
17. $k = 13$ ou $k = -3$
18. a. $8(\sqrt{2} - 1)$ cm　　b. $8(2 - \sqrt{2})$ cm
20. a. $(x + 2)^2 = 16(y - 5)$
    b. $x^2 = -12(y + 1)$
    c. $(y - 6)^2 = -20(x - 1)$
21. a. $(x + 1)^2 = \dfrac{1}{3}(y + 8)$
    b. $(y - 3)^2 = x + 2$
    c. $(x - 2)^2 = 4(y + 4)$
22. Vértice: $V(1, 3)$; parâmetro $p = \dfrac{1}{4}$; foco: $F\left(1; \dfrac{25}{8}\right)$;
    equação da diretriz d: $y = \dfrac{23}{8}$; equação do eixo de simetria e: $x = 1$.
23. a. 425 m　　b. 375 m
24. $(y + 1)^2 = 4(x - 2)$
25. a. 3 u　　b. $x^2 = 12(y - 4)$
26. 2 m

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

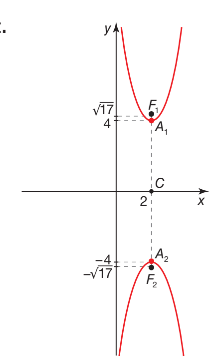
1. O eixo maior mede 10 m, o eixo menor mede 8 m e a excentricidade é $\dfrac{3}{5}$.
2. a. $\dfrac{(x-6)^2}{9} + \dfrac{(y-7)^2}{36} = 1$
   b. $\dfrac{(x-10)^2}{100} + \dfrac{y^2}{64} = 1$
3. 68 cm
4. $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{(y-5)^2}{25} = 1$
5. a. $\dfrac{(x+2)^2}{9} + \dfrac{(y-3)^2}{16} = 1$
   b. $\dfrac{(x-2)^2}{36} + \dfrac{(y-1)^2}{4} = 1$
   c. $\dfrac{(x-2)^2}{5} + \dfrac{y^2}{3} = 1$
   d. $\dfrac{x^2}{\frac{1}{9}} + \dfrac{y^2}{\frac{1}{4}} = 1$
   e. $\dfrac{x^2}{\frac{2}{3}} + \dfrac{y^2}{\frac{2}{5}} = 1$
6. a. $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{16} = 1$
   b. $(y - 4)^2 - \dfrac{(x+3)^2}{8} = 1$
7. a.



   b.



   c.



8. a. 12　　b. $e = \dfrac{\sqrt{13}}{3}$
   c. $2x - 3y + 4 = 0$ e $2x + 3y - 8 = 0$

9. a. $(y-4)^2 = 8(x-5)$

b. $y^2 = 8x$

10. a. $\left(y+\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(x+\frac{3}{2}\right)$

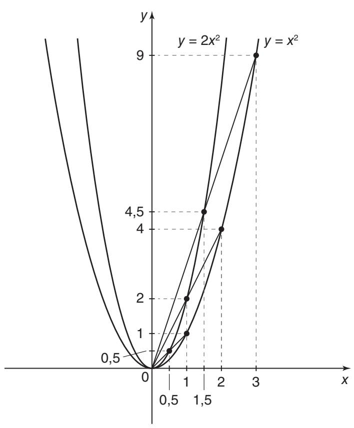
b. $\left(x+\frac{3}{2}\right)^2 = y+\frac{9}{4}$

c. $(x-1)^2 = -\frac{1}{3}(y-7)$

d. $y^2 = -1(x-1)$

11. a. $y = 2x^2$

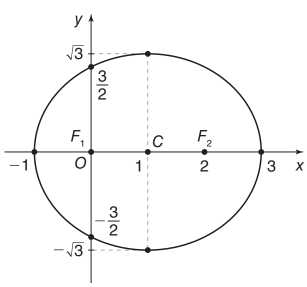
b.



Verifique o que aprendeu no Capítulo 8

1. a. $\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$

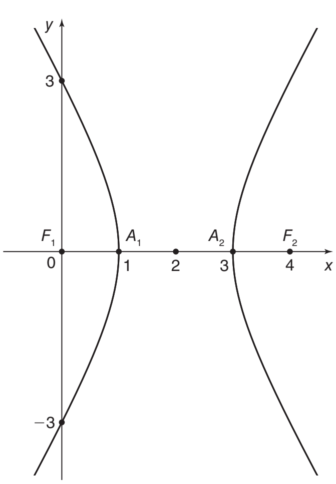
b.



c. $e = \frac{1}{2}$

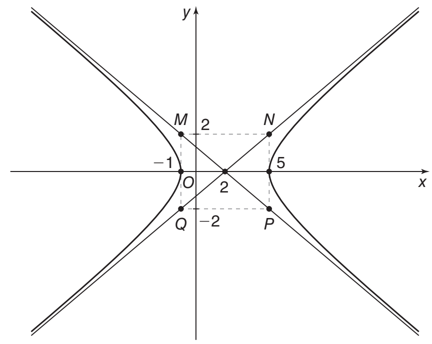
2. a. $3x^2 - y^2 - 12x + 9 = 0$

b.



c. $e = 2$

3. a.

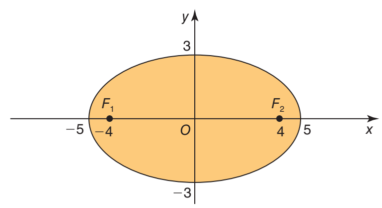


b. $y = -\frac{2x}{3} + \frac{4}{3}$ e $y = \frac{2x}{3} - \frac{4}{3}$

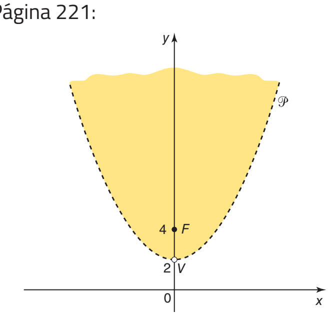
4. $(y-5)^2 = 4(x-2)$

Reflexão

Página 207:



Página 221:



CAPÍTULO 9

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

2. a. $x = 3$ b. $x \neq 3$ c. $x = -3$

3. $a = 1$ e $b = 3$

4. $x = 2$ e $y = 3$ ou $x = -2$ e $y = 3$

5. a. $1 + 3i$ b. $11 + 2i$

6. a. $30 + 18i$ b. $-6 + 10i$ c. $13 + i$ d. $12 + 6i$

7. a. $\frac{4}{13} - \frac{6i}{13}$ b. $-\frac{4}{5} + \frac{8i}{5}$ c. $\frac{2}{5} + \frac{i}{5}$ d. $-\frac{i}{4}$

8. a. $10 + 11i$ b. $6 + 3i$

9. a. $S = \{2 - 6i\}$

b. $S = \{3 + i, -5 + i\}$

10. $a = 1$

11. $\alpha = \frac{3\pi}{2} + k \cdot 2\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$

12. a. i b. 1 c. -1 d. $-i$ e. $-128i$ f. $-27i$ g. 256 h. $256 + 256i$

13. a. $-38 + 41i$

b. $-117 + 44i$

c. $\frac{2}{5} - \frac{i}{5}$

14. a. $-2i$ b. -64

15. a. $(w_1)^2 = (\sqrt{2} + i\sqrt{2})^2 =$

$= (\sqrt{2})^2 + 2 \cdot \sqrt{2} \cdot i\sqrt{2} + (i\sqrt{2})^2 =$

$= 2 + 4i - 2 = 4i$

$(w_2)^2 = [-(\sqrt{2} + i\sqrt{2})]^2 =$

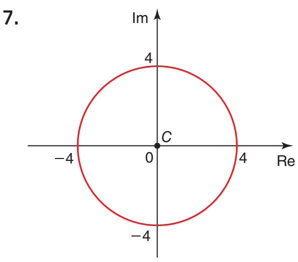
$= (\sqrt{2} + i\sqrt{2})^2 = 4i$

Logo, w_1 e w_2 são raízes quadradas de 4i.

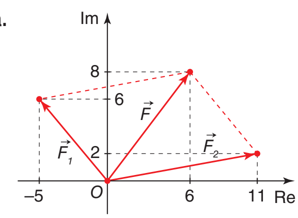
b. 6i e $-6i$

c. $S = \{1 + 3i, 1 - 3i\}$

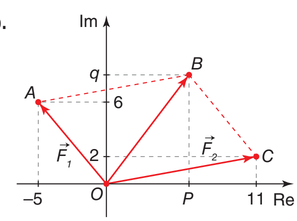
17.



18. a.

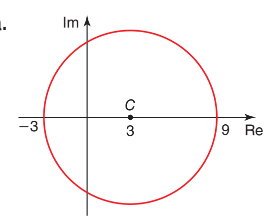


b.

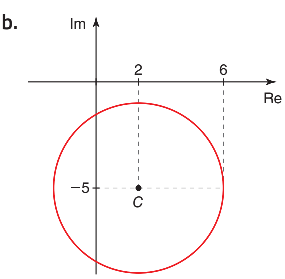


19. a. 5 b. 13 c. 4 d. 7 e. 9 f. 6

20. a.

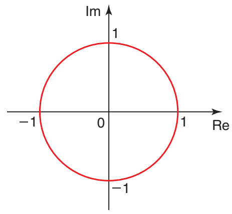


b.

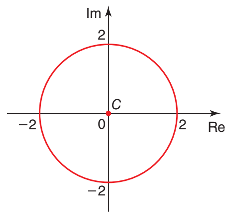


21. a. $z = 8i$ b. $w = -1 - i$

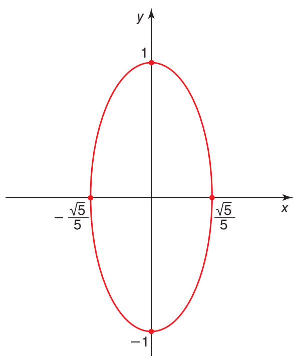
22. a.



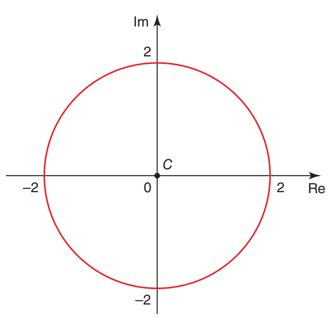
b.



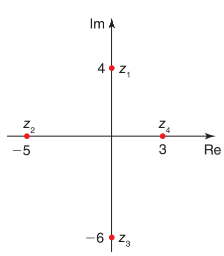
23. a.



b.



25. a.



$|z_1| = 4$ e $\varphi_1 = 90°$ ou $\frac{\pi}{2}$; $|z_2| = 5$ e $\varphi_2 = 180°$ ou π; $|z_3| = 6$ e $\varphi_3 = 270°$ ou $\frac{3\pi}{2}$; $|z_4| = 3$ e $\varphi_4 = 0°$ ou 0 rad

26. a. $\frac{13\pi}{7}$

b. $\frac{8\pi}{7}$

c. $\frac{6\pi}{7}$

27. a. $\sqrt{2}$; 45° **c.** 1; 135°

b. 2; 300° **d.** 10; 210°

28. a. $2(\cos 60° + i \operatorname{sen} 60°)$ ou $2\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{3}\right)$

b. $\sqrt{2}(\cos 315° + i \operatorname{sen} 315°)$ ou $\sqrt{2}\left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{7\pi}{4}\right)$

c. $2(\cos 150° + i \operatorname{sen} 150°)$ ou $2\left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \operatorname{sen} \frac{5\pi}{6}\right)$

29. a. 2i

b. $3\sqrt{3} + 3i$

c. $-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$

30. $z_2 = -\sqrt{14} + \sqrt{14}\,i$

32. a. $8 - 8\sqrt{3}\,i$ **c.** $-\frac{\sqrt{3}}{8} + \frac{1}{8}i$

b. $-2\sqrt{3} - 2i$ **d.** -16

33. 14; 48°

34. $z' = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{7\sqrt{2}\,i}{2}$

35. a. $256\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i \operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}\right)$ ou $256(\cos 120° + i \operatorname{sen} 120°)$

b. 12

c. 6

36. a. $-128 + 128\sqrt{3}\,i$

b. $512 + 512\sqrt{3}\,i$

37. 3

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

1. $x = 4$ ou $x = -4$

2. $(x = 0$ e $y = -1)$ ou $\left(x = 1 \text{ e } y = -\frac{3}{2}\right)$

3. $7 - 50i$

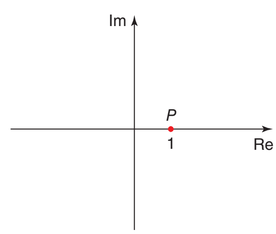
4. a. $S = \{-4 + 2i\}$ **b.** $S = \{0, i\}$

5. alternativa **b**

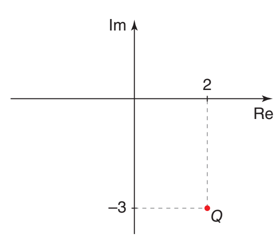
6. $\frac{1}{5} - \frac{2i}{5}$

7. alternativa **e**

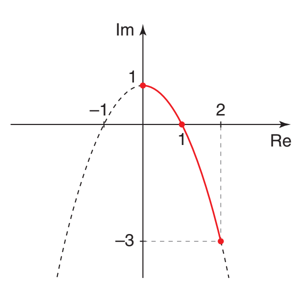
8. a.



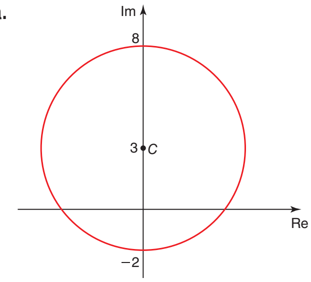
b.



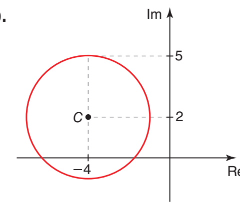
c.



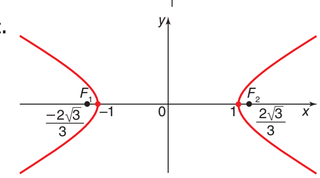
9. a.



b.



c.



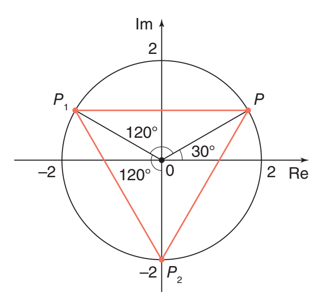
10. alternativa **b**

11. a. $2\sqrt{2}(\cos 225° + i \operatorname{sen} 225°)$ ou $2\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{5\pi}{4}\right)$

b. $\cos 330° + i \operatorname{sen} 330°$ ou $\cos\frac{11\pi}{6} + i \operatorname{sen}\frac{11\pi}{6}$

c. $4(\cos 210° + i \operatorname{sen} 210°)$ ou $4\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i \operatorname{sen}\frac{7\pi}{6}\right)$

12. a. $-\sqrt{3} + i$ e $-2i$



b. $2\sqrt{3}$

13. a. 4i **c.** $\frac{1}{8} - \frac{\sqrt{3}\,i}{8}$

b. -5 **d.** $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$

14. a. $z_A = 3(\cos 10° + i \operatorname{sen} 10°)$

b. $w = 1(\cos 60° + i \operatorname{sen} 60°)$

c. $k = 1(\cos 240° + i \operatorname{sen} 240°)$

d. $z = 1(\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha)$

15. a. -1 **b.** -4.096

Verifique o que aprendeu no Capítulo 9

1. a. $S = \{1 + 5i, 1 - 5i\}$

b. $S = \{i, -2i\}$

c. $S = \{2 + i, 2 - i\}$

d. $S = \{2, -1 + i\sqrt{3}, -1 - i\sqrt{3}\}$

2. a. 13 **b.** $2\sqrt{2}$

CAPÍTULO 10

Além da teoria

2. 45 m

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. $a = -3$; $b = 2$
2. a. $m = 4$
   b. $k \neq 2$ e $k \neq -2 \Rightarrow$ gr $(Q) = 5$
   $k = 2 \Rightarrow$ gr $(Q) = 3$
   $k = -2 \Rightarrow$ gr $(Q) = 4$
3. $a = -1$
4. $P(x) \equiv 2x^2 - x + 2$
5. a. $1, -\frac{1}{2}$
   b. $-1, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}\,i}{2}, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}\,i}{2}$
   c. 4, i, –i
6. $a = 0$; $b = -\frac{1}{2}$
7. a. $P(x) \equiv x^3 + 3x^2 + x + 26$
   b. 142 m
8. $k = 3$
9. $a = 4$; $b = 3$; $c = 5$
10. a. $3x^3 + 3x^2 - x - 1$
    b. $3x^3 + x^2 - 7x + 1$
    c. $12x^3 + 8x^2 - 16x$
    d. $6x^3 - x^2 - 23x + 5$
    e. $7x^3 + 12x^2 - 14x + 2$
    f. $x^4 + 6x^3 + 7x^2 - 6x + 1$
11. $P(x) \equiv -6x^4 + 14x^3 - 9x^2 + 4x + 11$
12. $a = 2$; $b = 1$
13. $V = 8\pi x^2 + 16\pi x$
15. a. $Q(x) \equiv 4x^2 + 2x - 1$ e $R(x) \equiv 8x + 2$
    b. $Q(x) \equiv x^2 + x + 1$ e $R(x) \equiv 3x + 3$
    c. $Q(x) \equiv x^3 + x^2 + x + 1$ e $R(x) \equiv 0$
16. $D(x) \equiv x^2 + 3x$
17. a. $B(x) \equiv x^2 + 5x + 6$
    b. $U(x) \equiv 1.000x^3 + 10.000x^2 + 31.000x +$
    $+ 30.000$
18. a. 33
    b. 0
    c. $\frac{1}{4}$
19. $m = -3$
20. $k = 1$
21. $a = 4$; $b = -6$
22. $2x^2 - 3x + 1$
23. a. verdadeira
    b. verdadeira
    c. falsa
    d. verdadeira
24. $a = 0$ ou $a = 1$
25. $a = -33$; $b = 27$
26. b. $a = 9$ e $b = -10$
27. Para qualquer número n natural par, não nulo.
28. a. $Q(x) \equiv 6x^3 + 11x^2 + 25x + 51$ e $R = 100$
    b. $Q(x) \equiv 2x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 3x$ e $R = 1$
    c. $Q(x) \equiv x^3 + 3x^2 + 9x + 27$ e $R = 0$
29. $P(x) \equiv (x - 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$
30. $P(x) \equiv (x + 1)(x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + 1)$
31. a. $Q(x) \equiv \frac{x^4}{3} + \frac{x^3}{3} - \frac{2x^2}{3} - \frac{x}{3} - \frac{1}{3}$
    e $R = -2$
    b. $Q(x) \equiv 3x^2 + \frac{3x}{2} + \frac{7}{4}$ e $R = \frac{15}{4}$
    c. $Q(x) \equiv -x^5 - 2x^4 - 4x^3 - 8x^2 - 16x - 32$
    e $R = 63$
32. a. 1 b. –1 c. $-2 + 2i$
33. $k = -1$
34. $k = -58$
35. a. $k = -\frac{1}{4}$ b. 52.635 L
37. a. $(x - 1)(x - 2)(x - 4) = 0 \Rightarrow$
    $\Rightarrow x^3 - 7x^2 + 14x - 8 = 0$
    b. $x^3 - 7x^2 + 11x - 5 = 0$
    c. $3x^4 - 24x^3 + 72x^2 - 96x + 48 = 0$
38. $S = \{5, 1 + i, 1 - i\}$
39. $S = \left\{-2, 3, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$
40. Às 16 h e às 19 h.
41. a. $P(x) \equiv 4(x - 1)\left(x + \frac{3}{4}\right)$
    b. $P(x) \equiv x(x - 2)(x - 6)$
    c. $P(x) \equiv 3(x - 2)(x - i)(x + i)$
42. $P(x) \equiv 3\left(x - \frac{1}{3}\right)(x - 1)(x - 2)(x - 5)$
43. a. $S = \{5, 1, -1\}$
    b. $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 1 \text{ ou } x > 5\}$
44. a. $S = \{2, 5, -7\}$
    b. 2 é raiz tripla; 5 é raiz quádrupla; –7 é raiz simples
    c. 8º grau
45. $6(x - 1)^2(x + 2)^3(x - 3) = 0$
46. A raiz –1 tem multiplicidade 2 e a raiz 2 tem multiplicidade 3.
47. $r = -3$
48. $a = 0$; $b = -1$
49. b. $S = \{i, 3i, -2i\}$
51. $S = \{5, 3 + 2i, 3 - 2i\}$
52. 7
53. Resposta possível:
    $x^4 - 2x^3 + 10x^2 - 18x + 9 = 0$
54. $S = \{-2i, 2i, -1, 4\}$
55. a. $S = \{2, 4i, -4i, 1, -1\}$
    b. $S = \{i, -i, 2i, -2i\}$
56. a. -1 e $\frac{1}{2}$ b. 2
57. $S = \{-1, -2, i, -i\}$
58. 5 dm, 3 dm e 2 dm
59. $R = 2$ cm ou $R = \frac{1 + \sqrt{21}}{2}$ cm
60. a. $b = -12$; $c = -9$
    b. $p = -\frac{1}{2}$ e $q = 10$
61. $2\sqrt{5}$ dm e $\sqrt{3}$ dm²
62. a. $\frac{\sqrt{3}}{2}$
    b. $\frac{\sqrt{6}}{2}$
    c. $\frac{\sqrt{2}}{2}$
    d. $\frac{3 - 4\sqrt{6}}{4}$
    e. $\frac{3 - 4\sqrt{6}}{6}$
63. a. 1 d. 6 g. 30
    b. 2 e. –3
    c. $\frac{1}{3}$ f. $\frac{10}{3}$
64. $S = \left\{-3, 2, \frac{1}{2}\right\}$
65. $p = -3$
66. $S = \{10, 20, 30\}$
67. a. 2, 4 e 8 b. 56
68. 15 Ω
69. $\begin{cases} r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = 0 \\ r_1r_2 + r_1r_3 + r_1r_4 + r_2r_3 + r_2r_4 + r_3r_4 = 3 \\ r_1r_2r_3 + r_1r_2r_4 + r_1r_3r_4 + r_2r_3r_4 = 1 \\ r_1r_2r_3r_4 = 0 \end{cases}$
70. $a = -10$; $b = 24$; $c = 32$; $d = -128$
71. $S = \{2, 2\sqrt{3}, -2\sqrt{3}\}$
72. $P(x) \equiv \frac{x^3}{2} - \frac{x^2}{2} - 7x + 2$
73. –1,5625 °C

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

1. a. 40 °C c. 688 °C
   b. 140 °C
2. $V = 15x^3 + 125x^2 + 60x$
3. $3x + 3$
4. $3x^2 - 2x - 1$
5. a. $k = 5$ b. $Q(x) \equiv 2x - 1$
6. a. $a = -5$, $b = -2$ b. $-\frac{1}{2}$
7. Em fevereiro de 2024.
8. a. $P(1) = 2 \cdot 1^3 - (3a + 2) \cdot 1^2 +$
   $+ (a^2 + 3a) \cdot 1 - a^2 =$
   $= 2 - 3a - 2 + a^2 + 3a - a^2 = 0$
   Logo, $P(x)$ é divisível por $x - 1$ para qualquer valor de a.
   b. $P(x) \equiv 2(x - 1)(x - a)\left(x - \frac{a}{2}\right)$
9. As outras raízes são i e –i.
10. multiplicidade 4
11. alternativa **e**
12. a. $20x^3 + 60x^2 - 21x - 7 = 0$
    b. 50%
13. a. O número i é raiz de $p(x)$.
    b. i, –i, $-1 + i$ e $-1 - i$
14. a. –1 e –2 b. 1
15. a. $S = \left\{0, 1, \frac{1 + \sqrt{3}}{2}, \frac{1 - \sqrt{3}}{2}\right\}$
    b. $S = \{-1, i, -i\}$
16. 1.211 bilhões de litros de água
17. a. 2
    b. 1, $1 + \sqrt{3}$ e $1 - \sqrt{3}$
18. $m = 4(2 + 3\sqrt{5})$ e $n = -16\sqrt{5}$
19. alternativa **b**

Verifique o que aprendeu no Capítulo 10

1. a. $C(x) = \frac{x^2}{40} + 2x$
   b. $R(x) = 430x - x^2$
   c. $L(x) = -\frac{41x^2}{40} + 428x$
2. a. $Q(x) = x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$ e $R(x) = 0$
   b. $Q(x) = 2x^2 - \frac{x}{3} + \frac{1}{9}$ e $R(x) = \frac{11x}{9} + \frac{14}{9}$
3. $S = \{1, -1, -2i, 2i, 3\}$
4. O desempenho do caminhão nas ruas da cidade foi de 2 km/L; nas ruas de terra, foi de 1 km/L; e, na autoestrada, foi de 3 km/L.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS COMENTADAS

AGUIAR, A. F. A. *et al*. **Cálculo para ciências médicas e biológicas**. São Paulo: Harbra, 1988.

Apresenta as aplicações da Matemática nas ciências médicas e biológicas.

ANTAR NETO, A. *et al*. **Conjuntos e funções**. São Paulo: Moderna, 1979.

A obra contempla as noções de lógica, conjuntos e funções.

ÁVILA, G. **Introdução às funções e às derivadas**. São Paulo: Atual, 1994.

Traz as funções elementares, além de uma introdução ao estudo de derivadas.

BARBOSA, J. L. M. **Geometria euclidiana plana**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2012.

A exposição sistemática permite iniciar e aprofundar os conceitos fundamentais de Geometria plana.

BOYER, C. B.; MERZBACH, U. C. **História da Matemática**. 3. ed. São Paulo: Blucher, 2012.

O livro contempla desde vestígios matemáticos encontrados em culturas primitivas até as tendências mais recentes em matemática.

BRACKMANN, C. P. **Desenvolvimento do pensamento computacional através de atividades desplugadas na Educação Básica**. 2017. Tese (Doutorado em Informática na Educação) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2017.

Pesquisa acadêmica cujo intuito foi avaliar a possibilidade de desenvolver o pensamento computacional na Educação Básica exclusivamente por meio de atividades sem o uso de computadores.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. 2018. Brasília: MEC, 2018.

Documento oficial do Ministério da Educação que apresenta as competências e habilidades a serem desenvolvidas em cada área do conhecimento na Educação Infantil, no Ensino Fundamental e no Ensino Médio de todo o país.

BRASIL. Ministério da Educação. **Diretrizes Curriculares Nacionais Gerais da Educação Básica**. Brasília, DF: MEC/SEB/DICEI, 2013.

Documento do Ministério da Educação que define as diretrizes curriculares da Educação Básica no país.

BRASIL. Ministério da Saúde. Secretaria de Atenção à Saúde. Departamento de Atenção Básica. **Guia alimentar para a população brasileira**. 2. ed. Brasília, DF: Ministério da Saúde, 2014.

Guia com o objetivo de instruir a população para uma alimentação saudável e diversa.

BRASIL. Ministério da Saúde. Secretaria de Atenção Primária à Saúde. Departamento de Promoção da Saúde. **Guia de atividade física para a população brasileira**. Brasília, DF: Ministério da Saúde, 2021.

Guia com sugestões e recomendações de atividades físicas para diversas faixas etárias, frisando a importância delas para a saúde.

BRASIL. Ministério da Educação. **Temas contemporâneos transversais na BNCC**: proposta de práticas de implementação, 2019.

Elaborado pelo Ministério da Educação, guia prático com explicações e orientações a respeito dos temas contemporâneos transversais.

CARAÇA, Bento J. **Conceitos fundamentais de Matemática**. Lisboa: Brás Monteiro, 1951.

Apresenta a importância das circunstâncias históricas e das concepções filosóficas e visões de Ciência no desenvolvimento da Matemática.

DAVIS, Philip J.; HERSH, Reuben. **A experiência matemática**. São Paulo: Francisco Alves, 1986.

Discute a prática da Matemática sob uma perspectiva histórica, filosófica e psicológica.

DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José N. **Fundamentos da Matemática elementar**. São Paulo: Atual, 2013. v. 5.

São apresentadas as noções de Geometria plana, com muitos exercícios resolvidos e propostos.

EVES, H. **Introdução à história da Matemática**. 5. ed. Campinas: Editora da Unicamp, 2011.

O livro traz uma abordagem sobre a história dos números, passando por diferentes sistemas de numeração e relatando diferentes temáticas da história da Matemática até o século XX.

HARSHBARGER, Ronald J.; REYNOLDS, James J. **Matemática aplicada**: administração, economia e ciências sociais e biológicas. 7. ed. São Paulo: McGraw-Hill, 2006.

Os 8 primeiros capítulos podem ser explorados no Ensino Médio com aplicações das funções elementares.

IEZZI, Gelson. MURAKAMI, Carlos. **Fundamentos da Matemática elementar**. São Paulo: Atual, 2013. v. 1.

São apresentadas as noções de conjunto e funções, com muitos exercícios resolvidos e propostos.

IEZZI, Gelson *et al*. **Fundamentos da Matemática elementar**. São Paulo: Atual, 2013. v. 11.

São estudadas as noções de Matemática comercial, Matemática financeira e Estatística descritiva.

JOHNSON, Donovan A. *et al*. **Matemática sem problemas.** São Paulo: José Olympio, 1972. v. 1, 2, 3, 4 e 5

Destaca, de forma lúdica, importantes aplicações da Matemática no cotidiano.

KASNER, Edward; NEWMAN, James. **Matemática e imaginação**. Rio de Janeiro: Zahar, 1968.

São apresentados problemas algébricos em forma de charadas, exercícios de topologia, paradoxos e suas resoluções, questões lógicas e de logística.

LIMA, Elon L. *et al*. **A Matemática do Ensino Médio**. São Paulo: Sociedade Brasileira de Matemática, 2001. v. 1, 2 e 3.

São abordados os temas do Ensino Médio por meio de uma linguagem acessível e precisa.

MACHADO, Antônio S. **Temas e metas**. São Paulo: Atual, 1988. v. 1.

Trata dos conjuntos numéricos e das funções elementares.

OLIVEIRA, José F. M. **Pavimentações do plano euclidiano**. Dissertação (Mestrado profissional em Educação Matemática) – Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. Universidade Estadual de Campinas. São Paulo, 2015. p. 27-43.

São estudadas algumas pavimentações do plano com polígonos.

PERUZZO, Tito M.; CANTO, Eduardo L. **Química**: na abordagem do cotidiano. São Paulo: Saraiva, 2015.

Possibilita o trânsito entre o conceito de função e o de fenômenos químicos.

POMPEO, José. N.; HAZZAN, Samuel. **Matemática financeira**. São Paulo: Saraiva, 2014.

Apresenta conceitos básicos de Matemática comercial e financeira.

PUCCINI, Abelardo L. **Matemática financeira objetiva e aplicada**. 10. ed. São Paulo: Saraiva, 2017.

Apresenta conceitos fundamentais de Matemática financeira com exercícios resolvidos.

RAMALHO Jr., Francisco *et al*. **Os fundamentos da Física**. São Paulo: Moderna, 1993.

Possibilita o trânsito entre o conceito de função e o de fenômenos físicos.

ROSA, Carlos A. P. **História da ciência**. Brasília: Funag, 2012. v. 1, 2 e 3.

Narra a história da ciência desde o Renascimento até o mundo contemporâneo.

STEWART, Ian. **Em busca do infinito**: uma história da Matemática dos primeiros números à teoria do caos. Rio de Janeiro: Zahar, 2014.

Uma narrativa histórica que destaca o que cada descoberta matemática provocou em sua época e nos dias atuais.

SUPLEMENTO PARA O PROFESSOR

Apresentação

Professor, esta coleção tem o objetivo de proporcionar aos estudantes uma sólida formação matemática, alinhada com as mais recentes diretrizes educacionais e políticas públicas.

Como material de apoio à prática pedagógica, este *Suplemento* traz, de maneira concisa, orientações e sugestões para o uso do livro do estudante, como texto de referência, com o objetivo de subsidiar seu trabalho em sala de aula. Esperamos que este material contribua para a compreensão das diretrizes pedagógicas que nortearam a elaboração dos livros desta coleção.

Para atender a esse objetivo, este *Suplemento* é composto de orientações gerais e orientações específicas que compõem cada capítulo, além das referências bibliográficas que embasaram a elaboração da coleção.

Nas orientações gerais apresentamos as diretrizes pedagógicas da coleção e trazemos discussões sobre diferentes temáticas, como saúde mental e emocional, *bullying* e *cyberbullying*, culturas juvenis, tecnologias digitais na educação e métodos de avaliação. Também expomos a estrutura da coleção e sugestões de cronogramas de trabalho.

Já nas orientações específicas trazemos as habilidades e competências da BNCC trabalhadas ao longo do volume e os objetivos de cada capítulo. Também indicamos sugestões para o desenvolvimentos dos capítulos, com propostas de ampliação e de trabalho interdisciplinar, além de referências suplementares de sites e livros que complementam as propostas do livro do estudante. As resoluções e encaminhamentos de exercícios de cálculo são apresentadas como apoio de trabalho ao professor.

Assim, este *Suplemento* foi elaborado para contribuir com reflexões e sugestões de trabalho; no entanto, as orientações não devem ser entendidas como um modelo a ser seguido, mas como um complemento à formação e à experiência do professor.

Bom trabalho!

Os Autores.

SUMÁRIO

ORIENTAÇÕES GERAIS

O novo Ensino Médio

O século XX foi um período de extraordinários avanços científicos e tecnológicos na história da humanidade. Entre as grandes conquistas daquele século estão: a teoria da relatividade; a descoberta da estrutura do DNA; a invenção da televisão, do avião, do computador e da fibra ótica; a exploração espacial; os satélites de comunicação, tendo como consequência o telefone celular; a descoberta do *laser* e o primeiro transplante de coração, só para citar alguns exemplos.

Além dessa evolução científica e tecnológica, o século XX apresentou significativas transformações sociais e políticas, provocadas por variados fatores, como o próprio avanço tecnológico; as duas guerras mundiais; a instauração de uma nova ideologia política e socioeconômica; e as disputas estratégicas e os conflitos indiretos entre os Estados Unidos da América e a extinta União Soviética.

Mas como se comportaram os sistemas de ensino em todo o mundo, diante do fecundo e tumultuado século XX?

Os conteúdos, a didática e os objetivos do ensino também foram se remodelando ao longo daquele século, chegando ao início do século XXI com a proposta desafiadora de formar cidadãos produtivos e criativos, capazes de enfrentar as novas relações com os saberes, nas quais nem sempre as respostas se apresentam prontas.

Acompanhando a tendência mundial, o Brasil também realizou reformas periódicas no sistema de ensino. Neste momento, vivemos o processo de implantação de uma nova reforma do Ensino Médio, que pretende emparelhar-se com as exigências contemporâneas.

Em julho de 2024 foi sancionada a Lei nº 14.945/2024, que estabelece a Política Nacional de Ensino Médio. A norma, que passa a valer em 2025, altera a Lei nº 9.394/1996, de Diretrizes e Bases da Educação Nacional, e revoga parcialmente a Lei nº 13.415/2017, que dispõe sobre a reforma do Ensino Médio. As principais mudanças foram:

> [...] o aumento da carga horária destinada à formação geral básica; a definição dos itinerários formativos, conectados às áreas do conhecimento; e a valorização do ensino profissional e tecnológico integrado ao ensino médio.
>
> Carga horária: a formação é de, no mínimo, 3.000 horas, sendo 2.400 horas para a formação geral básica e 600 horas para os itinerários formativos.
>
> Itinerários formativos: o estudante cursa uma das áreas de conhecimento (Linguagens e suas Tecnologias; Matemática e suas Tecnologias; Ciências da Natureza e suas Tecnologias; e Ciências Humanas e Sociais Aplicadas) ou a formação técnica e profissional. Cada escola deve oferecer pelo menos dois itinerários.
>
> Ensino profissional: reserva 2.100 horas para a formação básica, com 300 horas podendo ser destinadas a conteúdos da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) relacionados à formação técnica. A nova lei prevê que até 1.200 horas sejam destinadas para o ensino técnico (Itinerários Formativos Técnicos).
>
> BRASIL. Ministério da Educação. Política Nacional de Ensino Médio. **Gov.br**. Brasília, DF, 2024. Disponível em: https://www.gov.br/mec/pt-br/areas-de-atuacao/eb/politica-nacional-ensino-medio. Acesso em: 31 ago. 2024.

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC)

O Brasil, por suas dimensões continentais e diversidades regionais, sempre teve diferentes propostas curriculares e pedagógicas para a Educação Básica. Para estabelecer um núcleo comum, foi publicada a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), definida a seguir, cujos princípios devem regulamentar tanto o Ensino Fundamental como o Ensino Médio.

> A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é um documento de caráter normativo que define o conjunto orgânico e progressivo de **aprendizagens essenciais** que todos os estudantes devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica, de modo a que tenham assegurados seus direitos de aprendizagem e desenvolvimento, em conformidade com o que preceitua o Plano Nacional de Educação (PNE). Este documento normativo aplica-se exclusivamente à educação escolar, tal como a define o § 1º do Artigo 1º da Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB, Lei n. 9.394/1996), e está orientado pelos princípios éticos, olíticos e estéticos que visam à formação humana integral e à construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva, como fundamentado nas Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica (DCN).
>
> BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. 2018. Brasília, DF: MEC, 2018. p. 7.

Esse documento se propõe a ser uma referência nacional comum e obrigatória para a elaboração de currículos e de propostas pedagógicas das redes de ensino e instituições escolares públicas e privadas do país.

É importante destacar, porém, que os currículos propostos constituem o conteúdo mínimo a ser desenvolvido durante o período escolar, podendo ser complementado. Com isso, preservam-se a autonomia das escolas e dos professores e as particularidades regionais.

Competências na BNCC

Visando assegurar as aprendizagens essenciais a que todo estudante da Educação Básica tem direito, a BNCC propõe o desenvolvimento de competências que vão além dos conteúdos curriculares a serem ensinados, pois é preciso assumir a necessidade de os estudantes se tornarem capazes de mobilizar conteúdos, habilidades, atitudes e valores. Nesse sentido, propõe 10 competências gerais para a Educação Básica e 5 competências específicas para a área de Matemática, as quais listamos a seguir.

No Ensino Médio, as competências gerais devem ser contempladas e promovidas pelas quatro áreas do conhecimento: Linguagens e suas Tecnologias, Matemática e suas Tecnologias, Ciências da Natureza e suas Tecnologias, Ciências Humanas e Sociais Aplicadas.

Competências gerais da Educação Básica

1. Valorizar e utilizar os conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico, social, cultural e digital para entender e explicar a realidade, continuar aprendendo e colaborar para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva.
2. Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas.
3. Valorizar e fruir as diversas manifestações artísticas e culturais, das locais às mundiais, e também participar de práticas diversificadas da produção artístico-cultural.
4. Utilizar diferentes linguagens – verbal (oral ou visual-motora, como Libras, e escrita), corporal, visual, sonora e digital –, bem como conhecimentos das linguagens artística, matemática e científica, para se expressar e partilhar informações, experiências, ideias e sentimentos em diferentes contextos e produzir sentidos que levem ao entendimento mútuo.
5. Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva.
6. Valorizar a diversidade de saberes e vivências culturais e apropriar-se de conhecimentos e experiências que lhe possibilitem entender as relações próprias do mundo do trabalho e fazer escolhas alinhadas ao exercício da cidadania e ao seu projeto de vida, com liberdade, autonomia, consciência crítica e responsabilidade.
7. Argumentar com base em fatos, dados e informações confiáveis, para formular, negociar e defender ideias, pontos de vista e decisões comuns que respeitem e promovam os direitos humanos, a consciência socioambiental e o consumo responsável em âmbito local, regional e global, com posicionamento ético em relação ao cuidado de si mesmo, dos outros e do planeta.
8. Conhecer-se, apreciar-se e cuidar de sua saúde física e emocional, compreendendo-se na diversidade humana e reconhecendo suas emoções e as dos outros, com autocrítica e capacidade para lidar com elas.
9. Exercitar a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação, fazendo-se respeitar e promovendo o respeito ao outro e aos direitos humanos, com acolhimento e valorização da diversidade de indivíduos e de grupos sociais, seus saberes, identidades, culturas e potencialidades, sem preconceitos de qualquer natureza.
10. Agir pessoal e coletivamente com autonomia, responsabilidade, flexibilidade, resiliência e determinação, tomando decisões com base em princípios éticos, democráticos, inclusivos, sustentáveis e solidários.

Competências específicas

Além de competências gerais, a BNCC estabelece competências específicas que particularizam as competências gerais para cada área do conhecimento. As competências específicas para o Ensino Médio estão articuladas às competências específicas de área para o Ensino Fundamental, com as adequações necessárias ao atendimento das especificidades de formação dos estudantes nessa etapa. Para assegurar o desenvolvimento das competências específicas, cada uma delas está relacionada a um conjunto de habilidades, que representa as aprendizagens essenciais a serem garantidas a todos os estudantes do Ensino Médio.

A interdisciplinaridade e a Matemática

Nesse vasto panorama do processo de ensino-aprendizagem, a formação dos estudantes em Matemática não se restringe à construção do "edifício da Matemática", mas está imbricada nas outras áreas de conhecimento. Então, esse ensino apenas será completo se houver um trabalho interdisciplinar na escola. Cabe aqui uma reflexão sobre o trabalho interdisciplinar, de acordo com o professor Nilbo Ribeiro Nogueira:

> **Uma atitude interdisciplinar**
>
> É importante refletir sobre a postura do professor, pois é ela que norteará os trabalhos de caráter interdisciplinar. Acreditamos que não basta apenas ter vontade de praticar a interdisciplinaridade; deve haver uma *vontade política* que vai além do discurso e assume uma atitude interdisciplinar.
>
> "[...] uma atitude diante de alternativas para conhecer mais e melhor, atitude de espera ante os atos consumados, atitude de reciprocidade que impele à troca, que impele ao diálogo – ao diálogo com pares idênticos, com pares anônimos ou consigo mesmo – atitude de humildade diante da limitação do próprio saber, atitude de perplexidade ante a possibilidade de desvendar novos saberes, atitude de desafio – desafio perante o novo, desafio em redimensionar o velho –, atitude de envolvimento e comprometimento com as pessoas neles envolvidas, atitude, pois, de compromisso em construir sempre da melhor forma possível, atitude de responsabilidade, mas, sobretudo, de alegria, de revelação, de encontro, enfim, de vida" (Fazenda, 1998, p. 82).
>
> Tal atitude ainda exigirá romper com velhos paradigmas, acreditar no novo, conceber a hipótese de que o aprendiz é possuidor de um espectro de competências ávidas a serem desenvolvidas, e que apenas ministrando 100% de um determinado conteúdo não garantirá os estímulos, as ações, as vivências, a interação social e todos os demais fatores essenciais à construção do conhecimento.
>
> Por outro lado, a postura e a atitude interdisciplinar podem garantir uma atuação mediadora do professor que, tal qual um facilitador, busca o foco de interesse, facilita o acesso aos materiais de pesquisa, indaga mais do que responde, promove discussões etc., sempre preocupado mais com o processo do que com o produto, garantindo o sucesso do processo de aprendizagem.

Esta não pode e nem deve ser uma postura de um único professor. A grande dificuldade reside em disseminá-la por toda a equipe, evitando desta forma a desuniformidade das ações, que ora podem surgir de forma disciplinar e [ora] compartimentada em alguns professores, comprometendo o desenrolar do processo interdisciplinar. A equipe deve possuir perfeito canal de comunicação. A regra decisória passa a ser o consenso, já que desta forma pode-se cobrar o comprometimento; há de se estabelecer divisões de tarefas e equidade nas informações tanto de ordem procedimental como de resultados.

Desta forma, só é possível pensar em interdisciplinaridade quando se possui uma equipe comprometida, bem diferente dos *grupos de sujeitos isolados*, que preocupam-se no máximo com o produto mensurável, demonstrado nas avaliações de caráter quantitativo.

NOGUEIRA, N. R. **Pedagogia dos projetos**: uma jornada interdisciplinar rumo ao desenvolvimento das múltiplas inteligências. 7. ed. São Paulo: Érica, 2010.

Conforme exposto pelo autor, o trabalho interdisciplinar só é efetivo se for desenvolvido em conjunto, por uma equipe comprometida de professores e com o apoio da escola. Além disso, os professores, mediadores do trabalho interdisciplinar, devem se preocupar mais com o processo do que com o produto. Para auxiliar nesse processo, a obra sugere propostas interdisciplinares, mas é importante ressaltar que compete a cada escola e equipe de profissionais definir o projeto que será desenvolvido de acordo com sua realidade. Nesse sentido, cabe uma reflexão e discussão coletiva para que se realize um trabalho interdisciplinar consistente e coerente com a proposta da escola.

É importante também ressaltar que a Matemática, por sua universalidade de quantificar e de expressar, entendida, portanto, como linguagem, incorpora uma característica única.

Nesse segmento de ensino, momento em que a abordagem das ciências tem um caráter mais elaborado e abstrato, a Matemática fornece instrumentos que favorecem a compreensão de vários fenômenos. Contudo, há Matemática impregnada em quase todas as atividades da vida atual (na informática, na música, no comércio, na meteorologia, na medicina, nas comunicações etc.), permitindo às pessoas codificar, ordenar, criar e analisar índices ou taxas, avaliar e interpretar dosagens etc.

Também devemos considerar que a Matemática entendida como ciência desenvolve os processos de construção e validação de conceitos, elaboração e refutação de argumentações, assim como as habilidades de generalizar, relacionar e concluir, contribuindo para o estabelecimento de relações e para a interpretação de fenômenos e informações. As competências formadas por essa disciplina, portanto, não se limitam a descrever uma situação, mas abrangem a elaboração de modelos, propondo soluções.

Isso posto, espera-se que o desenvolvimento da Matemática incorpore habilidades globais para o desenvolvimento dos estudantes, mas também compartilhe com as outras disciplinas a responsabilidade de desenvolver habilidades de raciocínio e expressão de pensamento. Feito de forma coordenada, esse trabalho permitirá que os estudantes desenvolvam as competências esperadas.

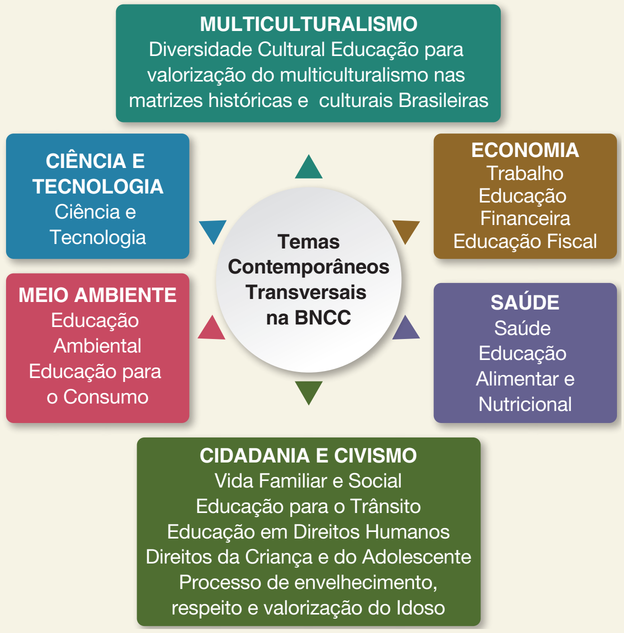
O trabalho interdisciplinar pode ser apoiado no desenvolvimento dos Temas Contemporâneos Transversais (TCTs). Os TCTs são aqueles conteúdos que não pertencem a apenas um componente curricular, uma vez que podem ser trabalhados por todos eles. Dizem respeito a temas relacionados ao mundo contemporâneo e à atualidade, o que favorece a integração dos componentes curriculares em um processo pedagógico com vistas à construção da cidadania e à formação de atitudes e valores éticos.

Os Temas Contemporâneos Transversais (TCTs) buscam uma contextualização do que é ensinado, trazendo temas que sejam de interesse dos estudantes e de relevância para seu desenvolvimento como cidadão. O grande objetivo é que o estudante não termine sua educação formal tendo visto apenas conteúdos abstratos e descontextualizados, mas que também reconheça e aprenda sobre os temas que são relevantes para sua atuação na sociedade. Assim, espera-se que os TCTs permitam ao aluno entender melhor: como utilizar seu dinheiro, como cuidar de sua saúde, como usar as novas tecnologias digitais, como cuidar do planeta em que vive, como entender e respeitar aqueles que são diferentes e quais são seus direitos e deveres, assuntos que conferem aos TCTs o atributo da **contemporaneidade**.

Já o **transversal** pode ser definido como aquilo que atravessa. Portanto, TCTs, no contexto educacional, são aqueles assuntos que não pertencem a uma área do conhecimento em particular, mas que atravessam todas elas, pois delas fazem parte e a trazem para a realidade do estudante. Na escola, são os temas que atendem às demandas da sociedade contemporânea, ou seja, aqueles que são intensamente vividos pelas comunidades, pelas famílias, pelos estudantes e pelos educadores no dia a dia, que influenciam e são influenciados pelo processo educacional.

BRASIL. Ministério da Educação. **Temas contemporâneos transversais na BNCC**: proposta de práticas de implementação. Brasília, DF: MEC, 2019. p. 7.

Publicado pelo Ministério da Educação em 2019, o documento Temas contemporâneos transversais na BNCC: proposta de práticas de implementação selecionou quinze temas e os distribuiu em seis macroáreas, conforme indicado a seguir.



ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

Além dos Temas Contemporâneos Transversais, destacamos o trabalho apoiado aos Objetivos de Desenvolvimento que fazem parte de uma agenda mundial adotada durante a Cúpula das Nações Unidas sobre o Desenvolvimento Sustentável em setembro de 2015 composta por 17 objetivos e 169 metas a serem atingidos até 2030. Nesta agenda estão previstas ações mundiais nas áreas de erradicação da pobreza, segurança alimentar, agricultura, saúde, educação, igualdade de gênero, redução das desigualdades, energia, água e saneamento, padrões sustentáveis de produção e de consumo, mudança do clima, cidades sustentáveis, proteção e uso sustentável dos oceanos e dos ecossistemas terrestres, crescimento econômico inclusivo, infraestrutura, industrialização, entre outros.

Identidades e diversidade na educação

A diversidade de perfis dos estudantes pode configurar um desafio às rotinas tradicionais e padronizadas de ensino e aprendizagem, levando estudantes e professores a buscar alternativas que satisfaçam os objetivos escolares e contribuam com a formação global desses estudantes.

Cada indivíduo apresenta interesses e história de vida distintos e o processo de ensino e aprendizagem acompanha essa diversidade. Muitos estudantes podem não demonstrar dificuldade em apreender conteúdos apresentados visualmente por meio de textos e imagens, enquanto outros alcançam resultados melhores quando têm a oportunidade de conversar com colegas e professores ou de colocar em prática aspectos de determinado tema.

Atividades que reconheçam as diferenças cognitivas entre os estudantes, e incluam todos em um mesmo propósito podem gerar maior confiança entre os estudantes e confortar aqueles que porventura se sentem desfavorecidos pelas metodologias convencionais de ensino e aprendizagem.

Vale ressaltar que não existem consensos científicos a respeito da efetividade de métodos de ensino e aprendizagem, o que leva à compreensão de que cada educador deve avaliar seu contexto e considerar a viabilidade dessas ferramentas em sala de aula.

Nesse sentido, fazem-se úteis diferentes metodologias de ensino e aprendizagem. É importante destacar o ensino centrado no estudante, de modo a torná-lo autônomo e ativo, lançando mão de situações-problemas que demandem o uso de diferentes habilidades cognitivas. A partir do momento em que os estudantes são convidados a solucionar problemas, habilidades subjacentes serão desenvolvidas juntamente com a apreensão dos objetos de aprendizagem, aprimorando o raciocínio, o trabalho coletivo, a escuta, a argumentação e a comunicação. Assim, um leque de conhecimentos conceituais, atitudinais e procedimentais são trabalhados de forma integrada, contemplando diferentes formas de aprender presentes em sala de aula e corroborando a formação global do estudante que, em seu futuro próximo, irá se deparar com desafios complexos que requerem desenvoltura social e habilidade de ouvir e argumentar de maneira clara e objetiva.

Nesse contexto, o professor assume o papel de mediador de discussões e pesquisas, direcionando o processo de ensino e aprendizagem, abandonando o papel de detentor e transmissor do conteúdo. É importante destacar que não há um melhor método para ensinar todos os estudantes, pois podemos encontrar diferentes formas de aprender na sala de aula.

De acordo com Cruz (2016), existem 10 práticas que podem trazer benefícios ao processo de ensino e aprendizagem com base nos estudos sobre como o cérebro aprende. São elas:

1. Introduzir o material a ser aprendido fazendo ligações com o que já é sabido.
2. Criar situações semelhantes à vida real.
3. Criar oportunidades de rememoração e de novas associações.
4. Utilizar trabalhos em grupo seguidos de exposição pelos alunos.
5. Aprender fazendo.
6. Utilizar técnicas mnemônicas, ou seja, que auxiliam a memória, como a música, rimas.
7. Dividir as atividades em intervalos.
8. Introduzir o novo, o intenso e o pouco usual.
9. Utilizar tempo de relaxamento entre as atividades.
10. Levar em conta a necessidade de consolidação da memória.

CRUZ, L. F. C. Bases neuroanatômicas e neurofisiológicas do processo ensino e aprendizagem. *In*: **III Curso de Atualização de Professores da Educação Infantil, Ensino Fundamental e Médio A Neurociência e a Educação**: Como nosso cérebro aprende. Ouro Preto, 2016.

Saúde mental e emocional

Nos últimos anos, a saúde mental e emocional dos estudantes e sua interação com a escola tem recebido cada vez mais atenção. Estudiosos argumentam que a pré-adolescência oferece uma janela de oportunidade única para a prevenção e intervenção precoce, uma vez que é durante esse período que muitos resultados negativos de saúde física e mental começam a se manifestar pela primeira vez.

É imprescindível observar sinais que os jovens em sofrimento emocional costumam dar, como isolamento e distanciamento dos amigos e dos grupos sociais, brigas constantes e agressividade, publicações com conteúdo negativo nas redes sociais ou participação em grupos virtuais que incentivam automutilação ou suicídio, entre outros. Nesses casos, para auxiliar o estudante, acolha-o e procure estabelecer uma conversa amigável, questionando se está passando por alguma dificuldade, dizendo perceber que ele mostra condutas que têm preocupado você, como isolamento ou tristeza, muito sono nas aulas, entre outras. Em seguida, procure os gestores escolares para pensarem juntos em uma estratégia que possa envolver a equipe docente, como, por exemplo, alertar os demais professores para que também fiquem atentos ao jovem em questão. Chamar a família para uma conversa também pode ser produtivo. Além disso, com a equipe gestora, pode ser feito o encaminhamento para o serviço especializado do Sistema Único de Saúde (SUS), que oferece atendimento por meio dos Centros de Atenção Psicossocial (CAPS).

Os desafios escolares referentes às competências socioemocionais transcendem os limites disciplinares e se apresentam nas mais diversas situações durante a vida estudantil. Assim, a construção de um ambiente favorável ao bem estar emocional é responsabilidade de estudantes, professores, funcionários e demais atores da comunidade escolar. Atividades que abordam com clareza e objetividade as dimensões psíquicas vividas por estudantes corroboram não apenas o amadurecimento de jovens e crianças em relação à sua educação emocional, mas desenvolvem relações harmônicas entre todos e um melhor desempenho escolar.

A capacidade de solucionar problemas além de ajudar nos estudos, é uma importante competência socioemocional que pode e deve ser desenvolvida desde cedo a fim de que os estudantes consigam ter clareza dos desafios para, então, propor as soluções apropriadas. Para auxiliar o desenvolvimento dessa habilidade, propomos a seguinte atividade:

Peça aos estudantes que formem grupos ou duplas e relatem uns aos outros algumas dificuldades enfrentadas por eles, em diferentes situações do cotidiano, e que eles se sintam à vontade para compartilhar. Em seguida, deverão selecionar uma delas e seguir os 6 passos:

1. Qual é o problema?
(Eles devem descrever detalhadamente o problema em um papel.)

2. Liste todas as soluções possíveis.
(Após uma reflexão, devem listar todas as ideias que surgirem, mesmo aquelas mais improváveis. Este é um bom momento para usar a criatividade.)

3. Analise isoladamente cada solução e escreva seus prós e contras.
(Peça que componham uma tabela com três colunas. Na primeira está a ideia de solução, na segunda seus pontos favoráveis e na terceira os contrários.)

4. Escolha a solução mais prática e rápida e coloque em prática.
(O grupo deve eleger a alternativa mais viável e promissora para que o estudante que compartilhou o problema possa adotar.)

5. Avalie a eficácia da solução e, se for necessário, recorra às ideias seguintes presentes na lista.
(Oriente o estudante a sempre retornar à tabela e dar uma nova chance à solução do problema.)[1]

O objetivo é que a atividade seja de fácil execução e ajude os estudantes a perceberem que verbalizar e sistematizar os pensamentos e as emoções podem ser extremamente úteis ao lidar com problemas de natureza emocional. Peça aos estudantes que façam uma autoavaliação sobre a atividade e seus próprios desempenhos.

[1] BLACK DOG INSTITUTE. Structured Problem Solving. Disponível em: https://www.blackdoginstitute.org.au/wp-content/uploads/2020/04/16-structured-problem-solving.pdf. Acesso em: 22 set. 2024.

Bullying e *cyberbullyng*

O *bullying* tem sido um dos grandes problemas encarados no ambiente escolar e a principal forma de violência praticada nesse espaço.

> O *bullying* caracteriza antes um padrão de comportamento do que incidentes isolados, e com frequência se agrava caso não seja controlado. Pode ser definido como o comportamento intencional e agressivo recorrente contra uma vítima, em uma situação em que há um desequilíbrio real ou percebido de poder e as vítimas se sentem vulneráveis e impotentes para se defenderem. Comportamentos de *bullying* podem ser físicos (golpes, chutes e a destruição de bens), verbais (provocação, insulto e ameaça), ou relacionais (difamação e exclusão de um grupo).
>
> ORGANIZAÇÃO das Nações Unidas para a Educação, a Ciência e a Cultura. **Violência escolar e *bullying***: relatório sobre a situação mundial. Brasília, DF: UNESCO, 2019. p. 15.

Segundo a Unesco (2019), estima-se que, todos os anos, 246 milhões de crianças e adolescentes sofrem algum tipo de violência escolar e *bullying*. As estimativas do número de crianças e jovens afetados pelo *bullying* escolar variam de acordo com os países e o tipo de estudo, em uma escala que varia de menos de 10% até mais de 65%.

As novas tecnologias digitais e as tecnologias de informação e comunicação (TIC) geram tanto oportunidades quanto desafios para a educação. Por um lado, existe o potencial para apoiar e melhorar os processos educacionais de estudantes, inclusive aqueles com necessidades educacionais especiais. Por outro lado, muitos países enfrentam um desafio real em relação às desigualdades no acesso às tecnologias digitais e à internet na educação. Além disso, com o grande alcance da internet, um outro tipo de violência, derivada do *bullying*, tem ganhado grande repercussão: o *cyberbullying*. Nesses casos, crianças e jovens são hostilizados, atacados, depreciados e até ameaçados virtualmente.

Devido a essas atitudes é comum que os estudantes percam o interesse em frequentar a escola, o desempenho e a expectativa de aprendizagem tendem a ser baixos, e eles podem desenvolver ansiedade e outros transtornos psicológicos, assim como transtornos alimentares e até evasão escolar.

> Uma das ações que promove a paz nas escolas envolve os alunos conversarem com os responsáveis da instituição de ensino para fazer encontros de imersão sobre fazer o bem, entender sobre o *bullying* e suas consequências, e ainda, onde podem se informar sobre saúde mental compartilhando seus posicionamentos sobre o tema e experiências que passaram. Também é importante uma rede de apoio das instituições para auxiliar as vítimas de violência, *bullying*, como psicólogos nas escolas, prontos para atender todos os alunos. Em suma, algumas dicas podem nortear algumas de nossas ações, como:
>
> - Inserir o enfrentamento do *bullying* e a valorização da diversidade durante o ano escolar, para que as reflexões possam acontecer não apenas em períodos, aulas ou atividades específicas;
> - Campanhas e/ou práticas solidárias, como, por exemplo, campanhas do agasalho ou arrecadação de alimentos, de forma a engajar a comunidade escolar a solidarizar-se com o próximo;
> - Promoção de atividades colaborativas, com o intuito de desenvolver competências e valores que auxiliem os estudantes a respeitar os diversos saberes e momentos das turmas, criando um senso de pertencimento à comunidade;
> - Diálogos com a direção escolar de forma a criar um espaço como uma sala de imersão para fazer o bem, que fomente o compartilhamento de experiências, fortalecendo experiências exitosas e positivas para resolução de problemas;
> - Incentivar a criação de redes de apoio para pessoas vítimas de violência;
> - Implementação da psicologia escolar como forma de fortalecer a rede de apoio e a comunidade escolar para a consolidação de uma cultura de paz.
>
> PITANGA, G. *et al*. *Bullying* e violência escolar: suas consequências e como combatê-las. *In*: **Blog #tmjUNICEF**. Brasília, DF: 18 jul. 2023. Disponível em: https://www.unicef.org/brazil/blog/bullying-e-violencia-escolar. Acesso em: 22 set. 2024.

Apresentação da obra

Os objetivos gerais do Ensino Médio podem ser resumidos em formar cidadãos: produtivos e criativos; com raciocínio analítico; que saibam antecipar-se a inovações; que busquem novos conhecimentos em um processo de formação contínua; com conhecimentos básicos de higiene e saúde; conscientes de seus direitos e deveres; e capazes de se inserir no mundo do trabalho e no convívio social.

Considerando esses objetivos, além dos objetivos específicos relativos à Matemática, elaboramos a obra em concordância com os referenciais teórico-metodológicos descritos no item a seguir, cujo entendimento depende dos conceitos de competência e habilidade. Esses conceitos frequentemente aparecem juntos por serem indissociáveis e são muitas vezes tomados como sinônimos. Contudo, na verdade, eles têm significados diferentes, embora complementares.

Na BNCC, competência é definida como "mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos), habilidades (práticas, cognitivas e socioemocionais), atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho". É interessante notar que essa definição pressupõe o conhecimento do conceito de habilidade. Mas o que é habilidade?

Habilidade pode ser definida como a capacidade de mobilizar conhecimentos para resolver determinado tipo de problema da vida pessoal, social e produtiva. O desenvolvimento de uma habilidade envolve:

- ação (compreender o problema, identificando variáveis; relacionar elementos relevantes; comparar com situações prévias);
- planejamento (visualizar possíveis métodos de resolução; adotar estratégias e recursos que serão usados);
- execução (conforme o planejamento, pôr em prática a ideia da resolução);
- checagem (analisar criticamente a solução encontrada).

Referenciais teórico-metodológicos

Os referenciais teórico-metodológicos da obra seguem as orientações da BNCC, que mantêm e ampliam a linha das políticas educacionais anteriores, propostas pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) e pelas Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica (DCN). O foco continua sendo o desenvolvimento de competências, como se constata pelo texto a seguir.

> O conceito de competência, adotado pela BNCC, marca a discussão pedagógica e social das últimas décadas e pode ser inferido no texto da LDB, especialmente quando se estabelecem as finalidades gerais do Ensino Fundamental e do Ensino Médio (Artigos 32 e 35). Além disso, desde as décadas finais do século XX e ao longo deste início do século XXI, o foco no desenvolvimento de competências tem orientado a maioria dos Estados e Municípios brasileiros e diferentes países na construção de seus currículos. É esse também o enfoque adotado nas avaliações internacionais da Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE), que coordena o Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (Pisa, na sigla em inglês), e da Organização das Nações Unidas para a Educação, a Ciência e a Cultura (Unesco, na sigla em inglês), que instituiu o Laboratório Latino-americano de Avaliação da Qualidade da Educação para a América Latina (LLECE, na sigla em espanhol).
>
> Ao adotar esse enfoque, a BNCC indica que as decisões pedagógicas devem estar orientadas para o desenvolvimento de competências. Por meio da indicação clara do que os estudantes devem "saber" (considerando a constituição de conhecimentos, habilidades, atitudes e valores) e, sobretudo, do que devem "saber fazer" (considerando a mobilização desses conhecimentos, habilidades, atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho), a explicitação das competências oferece referências para o fortalecimento de ações que assegurem as aprendizagens essenciais definidas na BNCC.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. 2018. Brasília, DF: MEC, 2018. p. 13.

Para a consulta a esses referenciais, neste *Suplemento* são reproduzidas as competências gerais da Educação Básica e as competências específicas e habilidades da área de Matemática e suas Tecnologias para o Ensino Médio.

Competências específicas de outras áreas do conhecimento também são parcialmente contempladas ao longo dos livros desta coleção, no sentido de estabelecer relações entre essas áreas e a Matemática no Ensino Médio.

Cada habilidade é identificada por um código alfanumérico, iniciado por uma sequência de duas letras e dois números (EM13) que identificam a etapa do Ensino Médio e seus respectivos anos (1º, 2º e 3º ano). Na sequência, temos o código da área do conhecimento ou componente curricular, da competência específica e da habilidade relacionada àquela competência, conforme esquema a seguir:

EM13MAT103

MAT: Matemática e suas Tecnologias LGG: Linguagens e suas Tecnologias LP: Língua Portuguesa CNAT: Ciências da Natureza e suas Tecnologias CHS: Ciências Humanas e Sociais Aplicadas	O primeiro número indica a competência específica da área ou do componente curricular e é seguido do número da habilidade propriamente dita. É importante destacar que tal número não representa hierarquia nem sequência em que as habilidades devem ser trabalhadas.

Objetivos e estratégias

Procuramos contribuir com os objetivos gerais do Ensino Médio transmitindo três tipos de orientações ao longo da obra: "como se faz", "para que se faz" e "porque se faz". Na expectativa de que essas orientações sejam entendidas e seguidas, fixamos os objetivos gerais descritos a seguir.

- Apresentar os rudimentos do pensamento científico.
- Propiciar a compreensão da evolução do pensamento científico por meio da ampliação de conceitos e/ou da construção de objetos abstratos.
- Entender a Matemática como um sistema de proposições verdadeiras e ordenadas, em que as primeiras justificam as seguintes.

- Estabelecer ligações entre o estágio de aprendizado do Ensino Médio e os conhecimentos adquiridos no Ensino Fundamental.
- Estabelecer ligações entre o conhecimento matemático/etnomatemático e as experiências da vida pessoal, social e produtiva.
- Ampliar as possibilidades de representações, por meio da linguagem matemática, exercitando: a construção de esquemas, tabelas e gráficos; as argumentações lógicas; o uso de expressões algébricas etc.
- Transitar pelas várias formas de representação de um mesmo objeto matemático.
- Fornecer embasamento científico para a tomada de decisões, por meio de análises de dados.
- Implementar o trabalho em equipe.

A pertinência desses objetivos pode ser justificada pelas seguintes concepções:

Argumentação e reflexão

Organizamos, em todos os volumes, atividades para que os estudantes desenvolvam a capacidade de análise crítica, criativa e propositiva em relação ao conteúdo abordado, estimulando o aprender a aprender e aprender sempre, a curiosidade investigativa e crítica por meio da proposição de hipóteses e argumentação baseada em fatos científicos e sociais. Quando realizados coletivamente, proporcionarão aos estudantes a possibilidade de diálogo, confronto de ideais, argumentação e o desenvolvimento da empatia, do aprender com o outro e do respeito à diversidade de ideias, pensamentos, valores e comportamentos.

Representações e registros

O filósofo e psicólogo francês Raymond Duval é responsável pelo desenvolvimento da Teoria dos registros de representação semiótica e outros importantes estudos em psicologia cognitiva.

> Segundo Duval (2013b), a principal dificuldade na aprendizagem da Matemática decorre do fato que os objetos matemáticos não possuem existência física e, sendo assim, o acesso a esses objetos só é possível com a utilização de um sistema semiótico. Desta forma, na Matemática, muito mais do que em qualquer outra área do conhecimento, a diversidade dos sistemas semióticos é fundamental para a aprendizagem e para a construção de novos conceitos
>
> Um sistema semiótico é, de acordo com Duval (2011), um conjunto de signos, organizados segundo regras próprias de formação e convenções, que apresentam relações internas que permitem identificar os objetos representados. Em outras palavras, é um sistema que desempenha a função de comunicação uma vez que é capaz de produzir e transmitir informações.
>
> Para designar os sistemas semióticos específicos da Matemática, Duval (2011) escolheu o termo registro. Para ele, um registro de representação é um sistema semiótico que cumpre, além da função de comunicação, as funções cognitivas de objetivação (entendimento para si) e tratamento. Partindo desta ideia, o autor faz referência a quatro tipos de registros de representação: a língua natural, os sistemas de escrita (numérica, algébrica e simbólica), os gráficos cartesianos e as figuras geométricas.
>
> DENARDI, V. B. Teoria dos registros e representação semiótica: contribuições para a formação de professores de matemática. *In*: XXI Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática, 2017, Pelotas, RS. **Anais do XXI EBRAPEM**. Pelotas: Universidade Federal de Pelotas, 2017.

Em linhas gerais, as pesquisas de Duval constatam que o trânsito por pelo menos duas representações de um mesmo objeto matemático aumenta a possibilidade de entendimento do objeto. Seguindo essa orientação, exploramos, sempre que possível, mais de uma representação de um mesmo objeto de estudo.

Interação, diálogo e colaboração

Uma das principais competências exigidas pelo mundo moderno é saber trabalhar em equipe. Essa competência resulta de algumas habilidades, de algum conhecimento e de certas posturas e atitudes, como: modéstia, respeito, doação e dedicação. Trabalhar em equipe não é fácil, pois um objetivo deve ser alcançado a partir de opiniões que nem sempre convergem; por isso, é preciso exercitar essa prática.

> Há, no entanto, um alerta quanto à realização efetiva de um trabalho em grupo na sala de aula de matemática, onde o significado da cooperação deve ser negociado pelo professor e pelos alunos no curso de suas interações sociais, sendo ambos responsáveis pela construção e execução das normas de sala de aula. Tais normas que não são regras estáticas a serem seguidas, mas, sim, regularidades no processo de interação social, incluem o seguinte: (a) os alunos cooperam para resolver problemas; (b) a atividade significativa é valorizada mais do que as respostas corretas; (c) a persistência pessoalmente desafiadora no problema é mais importante que completar um grande número de atividades; e (d) os parceiros devem encontrar consenso quando trabalham nas atividades.
>
> Quando trabalham juntos, cooperativamente, em pequenos grupos, os alunos se engajam em dois tipos de resolução de problemas. Por um lado, eles tentam solucionar seus problemas matemáticos e, por outro lado, procuram trabalhar juntos produtivamente, completando, com persistência, as atividades instrucionais propostas. A língua falada é obviamente um meio importante de comunicação nesse processo. Oportunidades para a aprendizagem matemática também surgem quando os alunos tentam alcançar um consenso. Aqui a vontade de ouvir as explicações de outros, de aprender a ouvir, é fundamental. Quando o aluno é obrigado a explicar e justificar o seu método de solução ao parceiro e, por sua vez, a escutar a explicação, tem a oportunidade tanto de dar esclarecimentos ao outro, como de revisar sua própria compreensão.
>
> SILVA, M. R. G. da. Considerações sobre o trabalho em grupo na aula de Matemática. **Mimesis**, Bauru, v. 19, n. 2, 1998. p. 135-145.

De acordo com esse preceito, propomos, em diversas situações, essa forma de trabalho, propiciando uma participação mais ativa dos estudantes.

Progressão do pensamento científico

Os assuntos são desenvolvidos de modo a possibilitar a progressão do pensamento científico. Para isso, adotamos estratégias, viabilizando:

- articulação horizontal (por meio da revisão de conteúdos essenciais do Ensino Fundamental) e vertical (por meio do aprofundamento daqueles conteúdos e da apresentação de novos conteúdos);
- conjectura e o teste de hipóteses;
- visão sistêmica da Matemática como uma sequência de verdades, em que as primeiras justificam as seguintes;
- compreensão dos três fundamentos: "como se faz", "para que se faz" e "por que se faz", visando a competência fundamental, que é **aprender a aprender**.

As tecnologias digitais na educação

A tecnologia revolucionou a forma como recebemos, enviamos e usamos informações todos os dias. Além disso, está em diferentes lugares, moldando a comunicação, o transporte, as relações interpessoais e as práticas sociais. Conforme a ciência e a tecnologia evoluem, essa constante transformação se reflete diretamente no funcionamento da sociedade e, consequentemente, no mundo do trabalho e na educação. No entanto, apesar de apresentar benefícios, muitas escolas no Brasil enfrentam desafios significativos quando se trata de integrar efetivamente a tecnologia na sala de aula.

Em 2022, a Base Nacional Comum Curricular ganhou um documento complementar, Normas sobre Computação na Educação Básica – Complemento à BNCC (Resolução CNE/CE nº 1 /2022), que estabeleceu competências e habilidades computacionais a serem desenvolvidas ao longo de toda a Educação Básica. Este documento está organizado em três eixos estruturantes:

- Pensamento computacional: enfatiza a resolução de problemas por meio do pensamento lógico. Não se limita à programação, incentiva a incorporação às atividades cotidianas que estimulam o pensamento estruturado desde a Educação Infantil.
- Mundo digital: perpassa a compreensão do funcionamento da tecnologia – transmissão de dados, atuação em redes e *gadgets* são explorados.
- Cultura digital: aborda o uso da tecnologia, levantando questões cruciais como privacidade online, ética no uso de dados e a influência da inteligência artificial.

Ainda, como forma de ampliar o trabalho com as tecnologias na educação, em 2023 foi sancionada a Lei nº 14.533/23 que institui a Política Nacional de Educação Digital (PNED), que se apoia em quatro eixos: inclusão digital da sociedade, educação digital nas escolas, ações de capacitação do mercado de trabalho e incentivo à inovação, à pesquisa e ao desenvolvimento.

> Art. 3º O eixo Educação Digital Escolar tem como objetivo garantir a inserção da educação digital nos ambientes escolares, em todos os níveis e modalidades, a partir do estímulo ao letramento digital e informacional e à aprendizagem de computação, de programação, de robótica e de outras competências digitais, englobando:
>
> I – pensamento computacional, que se refere à capacidade de compreender, analisar, definir, modelar, resolver, comparar e automatizar problemas e suas soluções de forma metódica e sistemática, por meio do desenvolvimento da capacidade de criar e adaptar algoritmos, com aplicação de fundamentos da computação para alavancar e aprimorar a aprendizagem e o pensamento criativo e crítico nas diversas áreas do conhecimento;
>
> II – mundo digital, que envolve a aprendizagem sobre *hardware*, como computadores, celulares e *tablets*, e sobre o ambiente digital baseado na internet, como sua arquitetura e aplicações;
>
> III – cultura digital, que envolve aprendizagem destinada à participação consciente e democrática por meio das tecnologias digitais, o que pressupõe compreensão dos impactos da revolução digital e seus avanços na sociedade, a construção de atitude crítica, ética e responsável em relação à multiplicidade de ofertas midiáticas e digitais e os diferentes usos das tecnologias e dos conteúdos disponibilizados;
>
> IV – direitos digitais, que envolve a conscientização a respeito dos direitos sobre o uso e o tratamento de dados pessoais, nos termos da Lei nº 13.709, de 14 de agosto de 2018 (Lei Geral de Proteção de Dados Pessoais), a promoção da conectividade segura e a proteção dos dados da população mais vulnerável, em especial crianças e adolescentes;
>
> V – tecnologia assistiva, que engloba produtos, recursos, metodologias, estratégias, práticas e serviços que objetivam promover a funcionalidade e a aprendizagem, com foco na inclusão de pessoas com deficiência ou mobilidade reduzida.
>
> BRASIL. **Lei nº 14.533, de 11 de janeiro de 2023**. Diário Oficial da União: seção 1, Brasília, DF, 12 jan. 2023.

O pensamento computacional

O pensamento computacional se apoia nos quatro pilares expostos a seguir.

- Decomposição: consiste em dividir um problema em partes menores (subproblemas) ou etapas, de maneira que a resolução de cada uma das partes ou etapas resulta na resolução do problema inicial. Dessa maneira, um problema complexo pode ser resolvido aos poucos, com estratégias e abordagens diversas.
- Reconhecimento de padrões: ocorre ao se perceber similaridade da situação enfrentada com outra previamente resolvida, o que permite o reaproveitamento de uma estratégia conhecida. Esse reconhecimento de padrões pode se dar entre instâncias distintas de um problema ou dentro dele mesmo, quando há repetições de etapas ou padrões em sua resolução.
- Abstração: no contexto do pensamento computacional, significa filtrar as informações e dados relevantes à resolução, eliminando dados desnecessários, permitindo uma modelagem do problema mais limpa e eficaz.
- Algoritmo: a aplicação dos pilares anteriores pode facilitar o surgimento de um algoritmo, que é uma generalização da resolução e permite resolver toda uma família de problemas similares. Um algoritmo pode ser definido como uma

sequência finita de passos cuja finalidade é resolver um problema ou executar uma tarefa.

O uso das tecnologias nesta coleção

Nesta coleção, consideramos que o uso das tecnologias digitais pode favorecer e ampliar o processo de resolução de problemas, reforçando o raciocínio lógico, a formulação de hipóteses e a argumentação, além de inspirar os estudantes a aprender cada vez mais e de maneira significativa.

Criando caminhos e conexões entre os alunos e os conteúdos apresentados, com vistas, sempre, ao desenvolvimento de competências e habilidades que permitam a extrapolação dos conteúdos de sala de aula para o cotidiano dos estudantes e comunidades, esta obra propõe, em todos os seus volumes, estratégias intencionais para o desenvolvimento do pensamento científico e computacional, para a ampliação das redes de diálogo e comunicação dos estudantes por meio de aplicativos, *sites*, vídeos, entre outras ferramentas que permitam maior aproximação com o mundo tecnológico.

As seções *Conectado* e *Educação Midiática* foram criadas para trabalhar temáticas relacionadas ao Pensamento computacional, Mundo digital e Cultura digital. Além dessas seções, em alguns exercícios resolvidos, apresentamos a resolução estruturada segundo os pilares do Pensamento computacional. É importante destacar que nem todos os pilares do Pensamento computacional precisam ser acionados para a resolução de todos os problemas. Além disso, há atividades desplugadas que podem ser realizadas para ensinar Pensamento computacional, sem fazer uso de um computador.

Também propomos o uso de *softwares* para a realização de atividades que envolvam confecção de gráficos, elaboração de planilhas eletrônicas, gravações de vídeos entre outras propostas. Esse conjunto de atividades fazem parte de uma proposta para o implemento dos eixos Cultura digital e Mundo digital, estimulando as habilidades de uso das tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, e promovendo formas diversas de comunicação e disseminação de informações de maneira tecnológica.

Juventudes, educação e trabalho

As rápidas mudanças no mercado de trabalho, têm produzido diversos desafios para a inserção laboral dos jovens, como destaca o texto a seguir.

> Os jovens estão inseridos em grupos de variados níveis e, por isso, sujeitos a diferentes oportunidades, restrições e influências.
>
> Esferas como a família e as políticas sociais produzem diversos impactos nas trajetórias de jovens, seja pela reprodução, seja pelo enfrentamento de vulnerabilidades. No Brasil, é possível identificar cinco categorias de jovens em transição escola-trabalho (18 a 24 anos) quanto à sua inserção educacional e laboral: jovem apenas estudando (15% das juventudes); jovem estudando e trabalhando (14% das juventudes); jovem apenas trabalhando (39% das juventudes); jovem estudando e desempregado (5% das juventudes); jovem “sem-sem” (sem oportunidade de estudar e trabalhar) (27% das juventudes). Cada categoria possui uma configuração específica em termos de marcadores sociais e demanda estratégias que deem conta de diferentes desafios para a inserção no mercado de trabalho.
>
> As evidências acima indicam temas centrais que devem pautar a agenda da inclusão produtiva de jovens no Brasil. Um primeiro ponto e a necessidade de agir com urgência para aproveitar a janela de oportunidade representada pelo “bônus demográfico”. É preciso ampliar as oportunidades formativas, visando tanto à qualificação das juventudes, quanto ao desenvolvimento de habilidades.

ITAÚ EDUCAÇÃO E TRABALHO (org.). **O Futuro do mundo do trabalho para as juventudes Brasileiras**. São Paulo: Itaú educação e trabalho, 2023. p. 9.

Nesse sentido, a escola tem um papel central na melhoria das oportunidades e das condições para este grupo. Assim, além do ensino propedêutico, é preciso educar emocionalmente os jovens. Para isso, consideramos importante apresentar aos estudantes, por meio de palestras, relatos de diferentes trabalhadores de diversas áreas e de profissionais como psicólogos, com o objetivo de ajudar os jovens a lidar com as próprias emoções em situações difíceis, para que possam ser estimulados a conquistar a autoconfiança.

Como professor de Matemática, é importante destacar a participação dos conceitos e práticas matemáticas nas mais variadas profissões do mercado de trabalho. Qualquer profissão demandará, em maior ou menor profundidade e frequência, um conjunto de conhecimentos matemáticos. Na seção *Trabalho e juventudes*, presente em todos os volumes da coleção, buscou-se apresentar que a Matemática será parte indissociável da rotina de trabalho em diferentes profissões. Identificar com os estudantes a participação da Matemática nas profissões que lhes aprouverem será um ótimo exercício de aproximação entre matemática, trabalho e juventudes.

Além disso, é preciso considerar a diversidade entre os estudantes:

> Considerar que há muitas juventudes implica organizar uma escola que acolha as diversidades, promovendo, de modo intencional e permanente, o respeito à pessoa humana e aos seus direitos. E mais, que garanta aos estudantes ser protagonistas de seu próprio processo de escolarização, reconhecendo-os como interlocutores legítimos sobre currículo, ensino e aprendizagem. Significa, nesse sentido, assegurar-lhes uma formação que, em sintonia com seus percursos e histórias, permita-lhes definir seu projeto de vida, tanto no que diz respeito ao estudo e ao trabalho como também no que concerne às escolhas de estilos de vida saudáveis, sustentáveis e éticos.
>
> Para formar esses jovens como sujeitos críticos, criativos, autônomos e responsáveis, cabe às escolas de Ensino Médio proporcionar experiências e processos que lhes garantam as aprendizagens necessárias para a leitura da realidade, o enfrentamento dos novos desafios da contemporaneidade (sociais, econômicos e ambientais) e a tomada de decisões éticas e fundamentadas. O mundo deve lhes ser apresentado como campo aberto para investigação e intervenção quanto a seus aspectos políticos, sociais, produtivos, ambientais e culturais, de modo que se sintam estimulados a equacionar e resolver questões legadas pelas gerações anteriores – e que se refletem nos contextos atuais –, abrindo-se criativamente para o novo.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. 2018. Brasília, DF: MEC, 2018. p. 463.

Culturas juvenis

A escola do jovem precisa reconhecer o contexto social e psicológico vivido pelos estudantes nesse período de constantes mudanças de valores e sentimentos. É desejável, portanto, acolher os adolescentes e aproximar conteúdos e procedimentos escolares à vida e aos interesses deles, reconhecendo suas culturas e identidades.

Em vez de ignorar ou modificar as formas de expressão trazidas pelos jovens à sala de aula, os educadores podem aproveitar essa oportunidade para conhecer melhor essa geração. Conhecer os conteúdos de mídias e redes sociais consumidos pelos adolescentes, seu jeito de falar, suas preferências artísticas e esportivas é entender quais são seus sonhos e como eles pensam. Identificar aquilo que é importante para o adolescente pode ser chave para atribuir maior sentido e valor aos conteúdos e às rotinas escolares.

Atividades que convidem estudantes de diferentes perfis a expor seus interesses e a expressar suas diferentes culturas e linguagens em um ambiente livre e seguro na sala de aula podem encorajar os estudantes a se conectar uns com os outros, além de trazerem uma oportunidade de diversificação do trabalho docente. Reforce a importância da diversidade entre as pessoas e da prática da tolerância com relação à sua origem, à identidade de gênero, à orientação sexual, à aparência física, à etnia, à presença de deficiências psíquico-motoras, à condição social entre outras características pessoais visando a cultura de paz em sala de aula.

Organização dos conteúdos na coleção

A obra é constituída por 3 volumes e traz uma seleção de tópicos programáticos fundamentais à Matemática, que contemplam habilidades da BNCC para Matemática e suas Tecnologias. A seguir apresentamos sugestões de cronogramas bimestrais, trimestrais e semestrais para o trabalho com esses conteúdos.

Sugestão de cronograma bimestral para o volume 1

Bimestre	Capítulos do livro
1º	1. A linguagem dos conjuntos 2. Temas básicos da Álgebra e Matemática financeira
2º	3. Geometria plana: triângulos e proporcionalidade 4. Circunferência, círculo e área de figuras planas
3º	5. A linguagem das funções 6. Função polinomial do 1º grau ou função afim 7. Função polinomial do 2º grau ou função quadrática
4º	8. Função modular 9. Função exponencial 10. Função logarítmica

Sugestão de cronograma trimestral para o volume 1

Trimestre	Capítulos do livro
1º	1. A linguagem dos conjuntos 2. Temas básicos da Álgebra e Matemática financeira 3. Geometria plana: triângulos e proporcionalidade
2º	4. Circunferência, círculo e área de figuras planas 5. A linguagem das funções 6. Função polinomial do 1º grau ou função afim 7. Função polinomial do 2º grau ou função quadrática
3º	8. Função modular 9. Função exponencial 10. Função logarítmica

Sugestão de cronograma semestral para o volume 1

Semestre	Capítulos do livro
1º	1. A linguagem dos conjuntos 2. Temas básicos da Álgebra e Matemática financeira 3. Geometria plana: triângulos e proporcionalidade 4. Circunferência, círculo e área de figuras planas
2º	5. A linguagem das funções 6. Função polinomial do 1º grau ou função afim 7. Função polinomial do 2º grau ou função quadrática 8. Função modular 9. Função exponencial 10. Função logarítmica

Sugestão de cronograma bimestral para o volume 2

Bimestre	Capítulos do livro
1º	1. Sequências 2. Trigonometria no triângulo retângulo
2º	3. Circunferência trigonométrica: seno e cosseno 4. Outras razões trigonométricas e adição de arcos 5. Funções trigonométricas e resolução de triângulos
3º	6. Os princípios da Análise combinatória 7. Agrupamentos e métodos de contagem
4º	8. Geometria de posição e poliedros 9. Prismas e pirâmides 10. Corpos redondos

Sugestão de cronograma trimestral para o volume 2

Trimestre	Capítulos do livro
1º	1. Sequências 2. Trigonometria no triângulo retângulo 3. Circunferência trigonométrica: seno e cosseno
2º	4. Outras razões trigonométricas e adição de arcos 5. Funções trigonométricas e resolução de triângulos 6. Os princípios da Análise combinatória 7. Agrupamentos e métodos de contagem
3º	8. Geometria de posição e poliedros 9. Prismas e pirâmides 10. Corpos redondos

Sugestão de cronograma semestral para o volume 2

Semestre	Capítulos do livro
1º	1. Sequências 2. Trigonometria no triângulo retângulo 3. Circunferência trigonométrica: seno e cosseno 4. Outras razões trigonométricas e adição de arcos 5. Funções trigonométricas e resolução de triângulos
2º	6. Os princípios da Análise combinatória 7. Agrupamentos e métodos de contagem 8. Geometria de posição e poliedros 9. Prismas e pirâmides 10. Corpos redondos

Sugestão de cronograma bimestral para o volume 3

Bimestre	Capítulos do livro
1º	1. Probabilidade 2. Estatística
2º	3. Matrizes 4. Sistemas lineares e determinantes
3º	5. Geometria analítica: ponto e reta 6. Complementos sobre o estudo da reta 7. Equações da circunferência
4º	8. As cônicas: elipse, hipérbole e parábola 9. Conjunto dos números complexos 10. Polinômios e equações polinomiais

Sugestão de cronograma trimestral para o volume 3

Trimestre	Capítulos do livro
1º	1. Probabilidade 2. Estatística 3. Matrizes
2º	4. Sistemas lineares e determinantes 5. Geometria analítica: ponto e reta 6. Complementos sobre o estudo da reta 7. Equações da circunferência
3º	8. As cônicas: elipse, hipérbole e parábola 9. Conjunto dos números complexos 10. Polinômios e equações polinomiais

Sugestão de cronograma semestral para o volume 3

Semestre	Capítulos do livro
1º	1. Probabilidade 2. Estatística 3. Matrizes 4. Sistemas lineares e determinantes
2º	5. Geometria analítica: ponto e reta 6. Complementos sobre o estudo da reta 7. Equações da circunferência 8. As cônicas: elipse, hipérbole e parábola 9. Conjunto dos números complexos 10. Polinômios e equações polinomiais

A estrutura da obra

A coleção é composta de três volumes do estudante e respectivos manuais do professor. O *Manual do professor* de cada volume reúne o livro do estudante com orientações e respostas dos exercícios, além do *Suplemento para o professor*, que é dividido em: *Orientações gerais*, comum a cada um dos volumes da coleção, *Orientações específicas* de cada volume e *Resolução de exercícios*.

Cada volume foi organizado em 10 capítulos. A seguir apresentamos a organização de cada capítulo:

Abertura: apresentamos recursos visuais e textuais que despertam o interesse do estudante, buscando ainda resgatar seus conhecimentos prévios por meio de questões apresentadas no boxe *Além da teoria*. As atividades desse boxe podem ser discutidas em grupo, e suas conclusões, compartilhadas com a turma.

Desenvolvimento do conteúdo: ao desenvolver a teoria, a escolha de textos, de atividades e aplicações no desenvolvimento dos exercícios resolvidos, o estabelecimento gradual da terminologia matemática e de outros procedimentos visam facilitar a compreensão dos assuntos pelo estudante. Isso, porém, não significa que optamos pela exclusão de situações mais complexas, mas que sua inclusão foi criteriosa.

Exercícios resolvidos e **Análise da resolução**: intercalados aos textos explicativos, todos os capítulos trazem *Exercícios resolvidos* apresentando estratégias de resolução e aplicação dos conteúdos estudados. Além disso, em alguns momentos, apresentamos diferentes estratégias de resolução de um mesmo exercício e a resolução seguindo as etapas do Pensamento Computacional. A seção *Análise da resolução* explora erros comuns e recorrentes cometidos pelos estudantes. Entendemos que uma estratégia para minimizar esses erros é submetê-los à crítica. Para isso, eles devem apontar e corrigir um erro cometido, propositalmente, em um exercício resolvido. Dessa maneira, estimula-se o levantamento de dúvidas e o posicionamento crítico dos estudantes, embasados na ciência, favorecendo a reflexão crítica, investigando causas que permitam a elaboração e testagem de hipóteses e a criação de soluções individuais e coletivas.

Exercícios propostos e **Exercícios complementares**: os *Exercícios propostos* estão organizados como forma de auxiliar a compreensão dos conceitos, promovendo uma aplicação imediata dos conteúdos. A seção de *Exercícios complementares* oferece questões de aprofundamento que promovem a fixação e a revisão dos conteúdos. São atividades que podem ser desenvolvidas conforme as características de cada turma e as necessidades didáticas, por exemplo: tarefa extraclasse, revisão do conteúdo trabalhado, fonte de exercícios para uma recuperação paralela ou reforço do conteúdo trabalhado. Seu objetivo, no entanto, é verificar o aprendizado, pois permitem avaliar se os estudantes compreenderam os conteúdos conceituais e assimilaram os procedimentos envolvidos.

Mentes brilhantes: nesses boxes são apresentados conhecimentos de diferentes grupos populacionais, povos ou contribuições de pesquisadores para o desenvolvimento da Matemática ou de outra Ciência. Os temas escolhidos buscam valorizar os conhecimentos historicamente produzidos, os aplicados em situações diversas e os passados entre gerações, favorecendo a compreensão da realidade, estimulando a curiosidade e objetivando estimular novas aprendizagens.

Conectado: esse boxe tem por objetivo auxiliar os estudantes a compreenderem o conceito de algoritmo, interpretar e construir fluxogramas, compreender linguagem de programação e suas estruturas e propõe alguns problemas para serem resolvidos com o auxílio de *softwares*.

Trabalho e juventudes: nesse boxe são abordadas várias profissões e sua relação com a Matemática. Ao explorar diversas profissões e os requisitos associados a cada uma, os estudantes podem identificar suas próprias vocações e interesses.

Educação midiática: esta seção abrange temas essenciais para a formação crítica dos estudantes no mundo digital, incentivando a análise criteriosa de dados e informações.

Matemática sem fronteiras: neste boxe exploramos a relação da Matemática com outras áreas de conhecimento, com o objetivo de contextualizar a teoria matemática por meio de situações reais e despertar a curiosidade dos estudantes para aplicações mais elaboradas. Também apresentamos propostas de atividades para serem realizadas em grupo, promovendo reflexões e discussões sobre o tema trabalhado.

Verifique o que aprendeu no capítulo: ao final de cada capítulo, é apresentado um conjunto de testes que podem ser utilizados para autoavaliação ou como uma avaliação formativa relativa aos conteúdos trabalhados no capítulo. As propostas indicadas no tópico *Ferramenta de estudo* têm como objetivo auxiliar os estudantes na organização seu aprendizado, promovendo retomadas e reflexões sobre o conteúdo estudado.

O trabalho com o livro

Entendemos que, em geral, os recursos presentes em salas de aula não são suficientes para fornecer todos os elementos necessários ao trabalho do professor e à aprendizagem do estudante. Nesse caso, o livro didático desempenha um papel importante, assessorando nesse processo, como organização e encaminhamento da teoria e propostas de exercícios. Assim, o livro didático contribui para o processo de ensino-aprendizagem e atua como mais um interlocutor na comunicação entre professor e estudante.

Mas é preciso considerar que o livro didático, por mais completo que seja, deve ser utilizado intercalado com outros recursos que enriqueçam o trabalho do professor.

No Ensino Fundamental, os estudantes tiveram contato com vários campos do conhecimento matemático. No Ensino Médio, espera-se que estejam em condições de utilizar e enriquecer esses conhecimentos, desenvolvendo de modo mais amplo capacidades como abstrair, investigar, analisar e compreender os fatos matemáticos e interpretar a própria realidade.

É importante que entendam que as verdades matemáticas (não sendo definições nem postulados) podem ser demonstradas. Não defendemos que todos os teoremas devam ser demonstrados em sala de aula, mas que alguns o sejam, para que os estudantes compreendam o significado de uma demonstração e o método sistêmico da ciência matemática.

As atividades propostas nas seções *Exercícios propostos* e *Exercícios complementares*, por serem bastante diversificadas, podem ser desenvolvidas individualmente, em duplas ou em grupos maiores, de acordo com a finalidade didática e as características de cada turma. O trabalho em grupo favorece a comunicação oral, a argumentação e a troca de experiências.

Sugerimos um destaque especial às atividades de elaboração de problemas, pois consideramos que elaborar e resolver corretamente um problema sobre determinado assunto é um indicador da compreensão daquele tema, além de ser um modo eficaz de autoavaliação.

O professor pode ainda complementar e ampliar as atividades com o uso do computador. Em alguns capítulos, no boxe *Conectado*, propomos atividades com o uso de *softwares* de construção de gráficos, de Geometria Dinâmica e, de exploração e construção de poliedros, planilha eletrônica e de linguagem de programação que podem ser obtidos gratuitamente na internet. Esses recursos auxiliam o estudo de alguns tópicos da Matemática, permitindo, por exemplo, que o estudante transite facilmente entre a representação algébrica e a representação gráfica e faça relações entre elas. É importante que, antes de propor essas atividades, o professor conheça os *softwares* e faça simulações, avalie como e quando esse recurso pode ser empregado em suas aulas, para melhor orientar os estudantes.

Outro aspecto relevante trabalhado no Livro do Estudante refere-se à comunicação matemática, que pode ser apresentada como relato escrito ou oral, registro ou expressão. Pode-se também explorar o boxe *Matemática sem fronteiras*, trabalhando-a como tema de pesquisa ou como problematização do texto. Destacamos ainda o trabalho em grupo, que estimula os estudantes a conversar, a ler e a escrever sobre assuntos matemáticos.

Nas atividades de pesquisa, é fundamental que o professor instrua os estudantes a pesquisarem em fontes confiáveis, como *sites* de universidades, publicações científicas, livros etc., e que citem essas fontes no trabalho.

Certas aulas podem ser desenvolvidas com a participação de professores de outras áreas do conhecimento. Nas **Orientações específicas**, sugerimos momentos oportunos em que isso pode ser feito.

Avaliações e reflexões

A avaliação é um instrumento fundamental para obter informações sobre o andamento do processo de ensino-aprendizagem. No decorrer desse processo, é preciso que os momentos de avaliação não se restrinjam ao final de cada bimestre, trimestre ou semestre, pois o diagnóstico contínuo possibilita a reformulação de procedimentos e estratégias, visando ao sucesso efetivo do estudante.

Ao longo do livro, muitas oportunidades de observação e avaliação surgem e podem ser aproveitadas para isso, como por exemplo, a seção *Verifique o que aprendeu no capítulo*, que é proposta ao final de todos os capítulos. A mobilização do conhecimento prévio dos estudantes, por exemplo, pode ser um bom início de avaliação. Além disso, no decorrer do trabalho com o conteúdo do capítulo, pontuar, registrar e relatar procedimentos comuns, relevantes e diferentes contribuem para melhor avaliar cada estudante. Acompanhar a resolução de atividades e as produções orais e escritas da turma possibilita a criação de perfis e a percepção sobre quais aspectos devem ser reforçados no ensino, quais conteúdos e habilidades convêm privilegiar e sobre quais assuntos os estudantes têm mais domínio.

Para obter informações sobre a apreensão de conteúdos, pode-se observar: a compreensão conceitual, a leitura e a interpretação do texto matemático e as atitudes (hesitante, alheio, preocupado com as questões sociais e ambientais, confiante, interessado etc.) na resolução das atividades. Também pode ser útil verificar se os estudantes fazem perguntas pertinentes, se participam das atividades e dos trabalhos em grupo, se são operativos com os colegas, se argumentam com justificativas coerentes para defender suas opiniões.

Além de empregar esses recursos, podem-se criar outras oportunidades de avaliação, por exemplo:

- solicitar aos estudantes que expliquem, na lousa ou oralmente, exercícios, resoluções de problemas ou ainda textos lidos em sala de aula;
- propor que façam estimativas de cálculo para a solução de uma situação-problema;
- propor que elaborem, individualmente ou em grupo, uma atividade ou situação-problema para um colega resolver individualmente ou em grupo.

Essas estratégias auxiliam a avaliar a coerência da argumentação e do pensamento matemático dos estudantes, a adequação das situações-problema criadas e do que é exigido em sua resolução.

Muitos e importantes autores tratam do tema avaliação em seus estudos pedagógicos. Jussara Hoffmann, por exemplo, discute aspectos relacionados à avaliação do ensino e da aprendizagem.

> Quando se desenvolve um processo mediador de avaliação, não há como prever todos os passos e tempos desse processo, pois as condições e ritmos diferenciados de aprendizagem irão lhe conferir uma dinâmica própria.
>
> As novas concepções de aprendizagem propõem fundamentalmente situações de busca contínua de novos conhecimentos, questionamento e crítica sobre as ideias em discussão, complementação através da leitura de diferentes portadores de texto, mobilização dos conhecimentos em variadas situações-problema, expressão diversificada do pensamento do aprendiz. Nesse sentido, a visão do educador/avaliador ultrapassa a concepção de alguém que simplesmente "observa" se o aluno acompanhou o processo e alcançou resultados esperados, na direção de um educador que propõe ações diversificadas e investiga, confronta, exige novas e melhores soluções a cada momento.

HOFFMANN, J. **Avaliar para promover**: as setas do caminho. Porto Alegre: Mediação, 2005. p. 77.

Assim, pode-se afirmar que a avaliação deve ser um processo, não uma série de obstáculos a serem vencidos. As provas escritas, quando atendem aos objetivos dos conteúdos, são meios adequados para examinar o domínio de procedimentos, a interpretação de texto, a compreensão conceitual e o entendimento de contextos. Mas, mesmo esse tipo de avaliação, muito comum no cotidiano escolar, pode ser utilizado como um momento de aprendizagem, pois permite a percepção de avanços e dificuldades em relação ao conteúdo avaliado.

Com esse propósito, também pode ser bastante interessante promover a aplicação de provas elaboradas pelos próprios estudantes, em duplas ou em grupos. A correção dessas provas também pode ser feita pelos estudantes, que trocariam de prova com o colega, sob a supervisão do professor. O fato de serem requisitados a "trocar de lugar" com o professor pode proporcionar momentos produtivos de reflexão sobre o que eles esperam do curso de Matemática no Ensino Médio e se enxergarem como produtores de conhecimento.

Outro ponto importante a ser discutido quando tratamos de avaliação é abordar o erro e seu papel no processo de aprendizagem. Conforme Helena de Noronha Cury:

> Ao corrigir qualquer prova, teste ou trabalho de Matemática, muitas vezes, o professor costuma apontar os erros cometidos pelos alunos passando pelos acertos como se estes fossem esperados. Mas quem garante que os acertos mostram o que o aluno sabe? E quem diz que os erros evidenciam somente o que ele não sabe? Qualquer produção, seja aquela que apenas repete uma resolução-modelo, seja a que indica a criatividade do estudante, tem características que permitem detectar as maneiras como o aluno pensa e, mesmo, que influências ele traz de sua aprendizagem anterior, formal ou informal. Assim, analisar as produções é uma atividade que traz para o professor e para os alunos a possibilidade de entender, mais de perto, como se dá a apropriação do saber pelos estudantes.
>
> A análise das respostas, além de ser uma metodologia de pesquisa, pode ser também enfocada como metodologia de ensino, se for empregada em sala de aula como "trampolim para a aprendizagem" [...], partindo dos erros detectados e levando os alunos a questionar suas respostas para construir o próprio conhecimento.
>
> Assim, a análise das produções dos estudantes não é um fato isolado na prática do professor; ela é – ou deveria ser – um dos componentes dos planos pedagógicos das instituições e dos planos de aula dos docentes, levando em conta os objetivos do ensino de cada disciplina.

CURY, H. N. **Análise de erros***:* o que podemos aprender com as respostas dos alunos. Belo Horizonte: Autêntica, 2007. p. 13.

Essa introdução às ideias da autora nos possibilita refletir um pouco sobre o tratamento dado ao erro. Habitualmente, ele é associado ao fracasso escolar. Contudo, seria mais apropriado abordá-lo como mais um instrumento de aprendizagem e reflexão disponível ao professor. Entre outras estratégias a serem empregadas para trabalhar com o erro em sala de aula, podem-se propor discussões com a turma sobre as causas de determinado tipo de erro ter aparecido com mais frequência. Dessa maneira, estimula-se o levantamento de dúvidas comuns entre os estudantes e seu esclarecimento, favorecendo a aprendizagem de determinado conteúdo.

Não são incomuns os casos de estudantes que receiam cometer um erro e serem humilhados pelos colegas (*bullying*) e, em casos assim, cabe ao professor discutir com a turma que o erro é uma parte integrante do processo de aprendizagem e não permitir que estudante algum se afaste dos demais, seja por motivo cognitivo, comportamental, moral, econômico etc, contribuindo, dessa maneira, para manter a autoconfiança e a autoestima dos discentes e evitar frustrações. Em toda sala de aula é certo que alguns estudantes necessitam de maior assistência do que outros. Em Matemática, por exemplo, um erro rotineiro que os estudantes cometem é a afirmação de que $(x + y)^2 = x^2 + y^2$. Acreditamos que uma tática eficiente para a abordagem/correção desse equivoco e evitar constrangimentos, é incentivar o estudante a substituir as variáveis x e y por números, efetuar as operações e comparar os resultados. Assim, digamos, para $x = 3$ e $y = 2$, tem-se $(3 + 2)^2 = 5^2 = 25$, ao passo que $3^2 + 2^2 = 9 + 4 = 13$, dessa maneira o estudante perceberá claramente que $(3 + 2)^2 \neq 3^2 + 2^2$ e o professor terá transformado o erro em um mecanismo do estudo e pode, a partir daí, fazer as generalizações necessárias. Essa tática pode ser aplicada dividindo a turma em grupos heterogêneos de forma que os estudantes que terminam a atividade antes possam transformar-se em auxiliares na edificação do aprendizado compartilhando seus conhecimentos e habilidades auxiliando aqueles com maiores dificuldades e estimulando as diferentes formas de discernimentos presente na sala.

No exercício da docência, espera-se ainda que o professor, ao analisar a frequência com que determinados erros ocorrem (em um grupo de estudantes ou até mesmo em várias turmas), reflita sobre sua prática docente e pense como poderá retomar e conduzir o desenvolvimento do conteúdo em que os estudantes apresentam dificuldades. É importante lembrar que o professor não está sozinho no processo de ensino-aprendizagem; há outros profissionais na escola que poderão auxiliar os estudantes ou as turmas a superar suas dúvidas, colaborando com visões e ideias diferentes, ou por meio de uma proposta de trabalho em conjunto.

Práticas avaliativas

A atribuição de um conceito ainda é a base para o professor mensurar o desempenho dos estudantes, mas isso não significa que as avaliações tenham de obedecer, necessariamente, o modelo tradicional. Neste item apresentaremos algumas práticas avaliativas que possam ser adequadas aos diferentes grupos de estudantes.

Team Based Learning (Aprendizagem baseada em equipes)

Esse método pode substituir as provas tradicionais por discussões em grupo, em sala de aula, estimulando a aprendizagem colaborativa e a percepção de dúvidas. Uma sequência possível para a aplicação desse método pode ser:

- Os estudantes, individualmente ou em grupos, estudam o material disponibilizado pelo professor. Esse material pode ser, por exemplo, um tópico já estudado do livro didático.
- A seguir, uma tarefa é proposta individualmente.
- Depois, a mesma tarefa é proposta aos grupos.
- Esses procedimentos visam proporcionar aos estudantes o conhecimento dos fundamentos do tema. Para que isso ocorra, o gabarito deve ser fornecido imediatamente após a realização da tarefa.
- O passo seguinte é revisar o tema para esclarecer eventuais dúvidas.
- A seguir, são propostas novas questões aos grupos, para novas discussões. Essas questões devem ser mais complexas que as anteriores e não devem ser encontradas facilmente no material disponibilizado pelo professor (nesse caso, um tópico do livro didático).
- Concluída a tarefa, o gabarito é fornecido, propiciando mais um momento de aprendizado.
- Finalmente, as eventuais dúvidas são esclarecidas pelo professor.

Avaliação formativa

Essa forma de avaliação visa verificar se os objetivos estabelecidos pelo professor estão sendo atingidos, permitindo acompanhar a evolução dos estudantes e identificar suas dificuldades. Os resultados podem orientá-lo quanto a algum ajuste necessário. Por meio da comunicação entre professor e estudantes, essa avaliação permite a redefinição de estratégias didáticas e de outras decisões que apoiem a turma em suas necessidades.

A aplicação desse formato deve ser feita em curtos períodos, para que o professor possa fazer uma correção de rumo em momentos oportunos. Como exemplos desse tipo de avaliação podemos citar: supervisionar os deveres de casa; observar a participação e o desempenho do estudante; aplicar provas, além das periódicas; propor projetos etc.

Avaliação somativa

Esse tipo de avaliação visa examinar a retenção dos conhecimentos ao final de um período, avaliando de modo geral em que grau os objetivos preestabelecidos foram atingidos pelos estudantes. Essa prática deve ser aplicada ao término de um ciclo, por meio de provas e trabalhos finais. Os conceitos atribuídos possibilitam identificar as dificuldades dos estudantes, permitindo avaliar se as estratégias de ensino utilizadas estão adequadas para a turma.

Avaliação diagnóstica

Pode ser entendida como uma ação avaliativa realizada no início de um processo de aprendizagem, que tem a função de obter informações sobre os conhecimentos, as aptidões e as competências dos estudantes, visando ao planejamento do curso a ser ministrado. Por isso, é mais recomendada no início de um ciclo. Entre as opções desse tipo de avaliação estão: entrevistas com estudantes, exercícios ou simulações, observação dos estudantes, questionários ou perguntas etc.

Avaliação comparativa

É a avaliação que compara o desempenho dos estudantes com um padrão externo ou com outros grupos de estudantes. Compreende conteúdos de um ciclo e visa, principalmente, avaliar o nível de conhecimento dos estudantes e identificar os pontos fortes e fracos do ensino.

Pode servir para identificar as diferenças entre os estudantes, ajudando no planejamento de intervenções pessoais. Como instrumento pode-se utilizar provas padronizadas ou trabalhos individuais. Destacamos a importância para o cuidado com que esse tipo de avaliação não se torne um instrumento de competição entre os estudantes.

VI. Avaliação ipsativa

Nesta avaliação consideramos o desempenho de um estudante consigo mesmo ao longo de um período, em vez de compará-lo com outros estudantes. Assim, o foco está no progresso individual, no crescimento e no desenvolvimento do estudante. Os instrumentos de avaliação neste caso, devem estar focados no acompanhamento do estudante do ciclo, na autoavaliação e no desempenho para a entrega das tarefas. O acompanhamento mais individualizado pode permitir que o estudante analise seu próprio crescimento e pontos de melhoria.

Autoavaliação

Além do processo de avaliação promovido pelo professor, é de fundamental importância que os estudantes realizem ao menos uma autoavaliação bimestral. O objetivo é verificar a visão que cada estudante tem de si mesmo, como pensa seu processo de aprendizagem e se consegue estabelecer estratégias para avançar nos conteúdos. Deve-se ressaltar que os estudantes poderão obter ajuda do professor e dos colegas.

Na seção *Verifique o que aprendeu no capítulo*, apresentamos, em alguns capítulos, como sugestão fichas de autoavaliação que devem ser copiadas no caderno e usadas para identificar os conteúdos estudados que ainda precisam ser retomados.

Também pode ser proposta aos estudantes uma ficha de autoavaliação para acompanhamento das atitudes diante do processo de aprendizagem. É importante discutir com eles quais atitudes consideram mais adequadas para o processo de aprendizagem e se uma mudança de conduta pode trazer benefícios para a produtividade de cada um.

Ficha de autoavaliação de atitudes diante do processo de aprendizagem

Nome do estudante:	**Sempre**	**Às vezes**
Presto atenção nas aulas e estudo em casa.		
Presto atenção nas aulas, mas não vejo necessidade de estudar em casa.		
Converso bastante com meus colegas, mas procuro estudar em casa.		
Converso durante as aulas e não estudo em casa.		
Gosto de desafios e procuro resolvê-los.		
Verifico se a solução que encontrei para o exercício é a correta.		
Tento resolver um exercício, mesmo que o considere difícil e trabalhoso.		
Comparo minhas resoluções com as dos colegas e gosto de conversar sobre como eles resolvem os exercícios.		
Resolvo os exercícios e não acho necessário saber como os colegas os resolvem.		
Não tento resolver os exercícios, prefiro pedir ajuda.		
Não tento resolver os exercícios e não peço ajuda.		
Observe quantas vezes você assinalou **Sempre** e **Às vezes**. Como você analisa as respostas mais frequentes? O que elas representam para você? Agora, escreva no caderno se você está satisfeito com suas atitudes no processo de aprendizagem e o que pretende fazer para mudá-las, se julgar necessário.		

Uma palavra sobre avaliações em larga escala

As avaliações educacionais em larga escala são realizadas no Brasil para monitorar a qualidade da educação dos sistemas de ensino e permitem a comparação dos aprendizados dos diferentes grupos de estudantes. Por isso, essas avaliações são particularmente úteis para analisar a eficácia de propostas educacionais e subsidiar decisões relativas, por exemplo, à promoção de estudantes.

A avaliação em larga escala do Ensino Básico, que inicialmente se reduzia ao Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica (Saeb), como uma avaliação focada nas competências em leitura e Matemática, desdobrou-se em diversas modalidades. Uma delas é o Exame Nacional do Ensino Médio (Enem), que é usado como forma de seleção para o ingresso no sistema federal de Educação Superior, substituindo, em muitos casos, o tradicional vestibular. A prova de Matemática do Enem é composta de testes de múltipla escolha. Cada teste apresenta cinco alternativas, das quais apenas uma é correta. Devido à importância do Enem, sugerimos que, periodicamente, sejam aplicadas provas no formato desse exame. Atentamos, porém, que ao elaborar questões similares às do Enem, o professor consulte a *Matriz de Referência* desse exame, disponível em: http://download.inep.gov.br/download/enem/matriz_referencia.pdf (acesso em: 22 set. 2024).

ORIENTAÇÕES ESPECÍFICAS

Competências específicas e habilidades

A seguir, listamos as competências específicas e as habilidades que foram trabalhadas neste volume. As competências gerais serão indicadas pontualmente ao longo das orientações.

Competência específica 1

1. Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.

Habilidades

(EM13MAT101) Interpretar criticamente situações econômicas, sociais e fatos relativos às Ciências da Natureza que envolvam a variação de grandezas, pela análise dos gráficos das funções representadas e das taxas de variação, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

(EM13MAT102) Analisar tabelas, gráficos e amostras de pesquisas estatísticas apresentadas em relatórios divulgados por diferentes meios de comunicação, identificando, quando for o caso, inadequações que possam induzir a erros de interpretação, como escalas e amostras não apropriadas.

(EM13MAT104) Interpretar taxas e índices de natureza socioeconômica (índice de desenvolvimento humano, taxas de inflação, entre outros), investigando os processos de cálculo desses números, para analisar criticamente a realidade e produzir argumentos.

(EM13MAT105) Utilizar as noções de transformações isométricas (translação, reflexão, rotação e composições destas) e transformações homotéticas para construir figuras e analisar elementos da natureza e diferentes produções humanas (fractais, construções civis, obras de arte, entre outras).

(EM13MAT106) Identificar situações da vida cotidiana nas quais seja necessário fazer escolhas levando-se em conta os riscos probabilísticos (usar este ou aquele método contraceptivo, optar por um tratamento médico em detrimento de outro etc.).

Competência específica 2

2. Propor ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas sociais, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, mobilizando e articulando conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática.

Habilidades

(EM13MAT202) Planejar e executar pesquisa amostral sobre questões relevantes, usando dados coletados diretamente ou em diferentes fontes, e comunicar os resultados por meio de relatório contendo gráficos e interpretação das medidas de tendência central e das medidas de dispersão (amplitude e desvio padrão), utilizando ou não recursos tecnológicos.

(EM13MAT203) Aplicar conceitos matemáticos no planejamento, na execução e na análise de ações envolvendo a utilização de aplicativos e a criação de planilhas (para o controle de orçamento familiar, simuladores de cálculos de juros simples e compostos, entre outros), para tomar decisões.

Competência específica 3

3. Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.

Habilidades

(EM13MAT301) Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

(EM13MAT302) Construir modelos empregando as funções polinomiais de 1º ou 2º graus, para resolver problemas em contextos diversos, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

(EM13MAT306) Resolver e elaborar problemas em contextos que envolvem fenômenos periódicos reais (ondas sonoras, fases da lua, movimentos cíclicos, entre outros) e comparar suas representações com as funções seno e cosseno, no plano cartesiano, com ou sem apoio de aplicativos de álgebra e geometria.

(EM13MAT307) Empregar diferentes métodos para a obtenção da medida da área de uma superfície (reconfigurações, aproximação por cortes etc.) e deduzir expressões de cálculo para aplicá-las em situações reais (como o remanejamento e a distribuição de plantações, entre outros), com ou sem apoio de tecnologias digitais.

(EM13MAT308) Aplicar as relações métricas, incluindo as leis do seno e do cosseno ou as noções de congruência e semelhança, para resolver e elaborar problemas que envolvem triângulos, em variados contextos.

(EM13MAT311) Identificar e descrever o espaço amostral de eventos aleatórios, realizando contagem das possibilidades, para resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo da probabilidade.

(EM13MAT312) Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de probabilidade de eventos em experimentos aleatórios sucessivos.

(EM13MAT314) Resolver e elaborar problemas que envolvem grandezas determinadas pela razão ou pelo produto de outras (velocidade, densidade demográfica, energia elétrica etc.).

(EM13MAT315) Investigar e registrar, por meio de um fluxograma, quando possível, um algoritmo que resolve um problema.

(EM13MAT316) Resolver e elaborar problemas, em diferentes contextos, que envolvem cálculo e interpretação das medidas de tendência central (média, moda, mediana) e das medidas de dispersão (amplitude, variância e desvio padrão).

Competência específica 4

4. Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.

Habilidades

(EM13MAT401) Converter representações algébricas de funções polinomiais de 1º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais o comportamento é proporcional, recorrendo ou não a *softwares* ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica.

(EM13MAT402) Converter representações algébricas de funções polinomiais de 2º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais uma variável for diretamente proporcional ao quadrado da outra, recorrendo ou não a softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica, entre outros materiais.

(EM13MAT404) Analisar funções definidas por uma ou mais sentenças (tabela do Imposto de Renda, contas de luz, água, gás etc.), em suas representações algébrica e gráfica, identificando domínios de validade, imagem, crescimento e decrescimento, e convertendo essas representações de uma para outra, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

(EM13MAT405) Utilizar conceitos iniciais de uma linguagem de programação na implementação de algoritmos escritos em linguagem corrente e/ou matemática.

(EM13MAT406) Construir e interpretar tabelas e gráficos de frequências com base em dados obtidos em pesquisas por amostras estatísticas, incluindo ou não o uso de *softwares* que inter-relacionem estatística, geometria e álgebra.

(EM13MAT407) Interpretar e comparar conjuntos de dados estatísticos por meio de diferentes diagramas e gráficos (histograma, de caixa (*box-plot*), de ramos e folhas, entre outros), reconhecendo os mais eficientes para sua análise.

Competência específica 5

5. Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.

Habilidades

(EM13MAT505) Resolver problemas sobre ladrilhamento do plano, com ou sem apoio de aplicativos de geometria dinâmica, para conjecturar a respeito dos tipos ou composição de polígonos que podem ser utilizados em ladrilhamento, generalizando padrões observados.

(EM13MAT510) Investigar conjuntos de dados relativos ao comportamento de duas variáveis numéricas, usando ou não tecnologias da informação, e, quando apropriado, levar em conta a variação e utilizar uma reta para descrever a relação observada.

(EM13MAT511) Reconhecer a existência de diferentes tipos de espaços amostrais, discretos ou não, e de eventos, equiprováveis ou não, e investigar implicações no cálculo de probabilidades.

Sugestões para o desenvolvimento dos capítulos

Ao longo da apresentação do conteúdo, na reprodução do livro do estudante, algumas orientações de trabalho foram apresentadas, bem como as respostas dos exercícios e atividades.

A seguir, apresentamos orientações complementares para o desenvolvimento dos capítulos, bem como os objetivos, habilidades e competências trabalhadas. Você também encontrará sugestões de atividades e de leituras complementares.

CAPÍTULO 1 Probabilidade

Objetivos

Ao final do capítulo, espera-se que o estudante esteja apto a:

- Reconhecer um experimento aleatório.
- Identificar e calcular o número de elementos de um espaço amostral finito de um experimento aleatório.
- Identificar e determinar o número de elementos de um evento de um espaço amostral finito.
- Calcular a probabilidade de ocorrer um elemento de um evento de um espaço amostral.
- Reconhecer eventos complementares.
- Aplicar as propriedades das probabilidades.
- Identificar o conectivo “ou” com a união de eventos, e o conectivo “e” com a intersecção de eventos.
- Aplicar o teorema da adição de probabilidades.
- Calcular probabilidades condicionais.
- Reconhecer eventos independentes.
- Aplicar o teorema da multiplicação de probabilidades.

Habilidades e competências específicas da BNCC

Ao apresentar conteúdos referente à taxa de expectativa de vida de uma população, os estudantes desenvolvem a habilidade **EM13MAT104**, pois podem interpretar e compreender como são calculadas a expectativa de vida e a probabilidade de morte e conversar a respeito de como essas taxas podem ser utilizadas, por exemplo, para definir políticas públicas. Além disso, ainda relacionado ao desenvolvimento da **competência específica 1**, os estudantes assimilam conhecimentos acerca da probabilidade e podem identificar situações da vida cotidiana em que seja necessário fazer escolhas considerando os riscos probabilísticos, como a importância da vacinação, e, dessa maneira, desenvolvem a habilidade **EM13MAT106**.

A **competência específica 3** é desenvolvida com a habilidade **EM13MAT311**, pois são propostos estudos que possibilitam aos estudantes identificarem e descreverem o espaço amostral de eventos aleatórios na elaboração e resolução de problemas que, por sua vez, também envolvem o cálculo de probabilidade e favorecem o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT312**.

Para mobilizar a **competência específica 4** e contribuir com o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT405**, é proposta uma atividade em que o estudante precisa escrever um algoritmo utilizando a linhagem corrente associado à linguagem matemática.

Em se tratando do reconhecimento de diferentes tipos de espaços amostrais e de eventos, neste capítulo os estudantes utilizam esses conhecimentos para calcular probabilidades e desenvolvem, assim, a **competência específica 5** e a habilidade **EM13MAT511**.

Sugestões de encaminhamento dos conteúdos

2. O conceito de probabilidade

O tópico **Espaço amostral equiprovável** apresenta um conceito que é fundamental no capítulo. Explique-o com detalhes. Ao lançar um dado várias vezes, constatamos que, quanto maior o número de lançamentos, as frequências relativas das faces tenderão a um mesmo número. Por isso, dizemos que o espaço amostral no lançamento desse dado é **equiprovável**, isto é, o número para o qual tende a frequência relativa de cada face é $\frac{1}{2}$.

Em uma exposição dialogada, comente outros exemplos com os estudantes e apresente exemplos de espaços amostrais não equiprováveis. Sugestões:

Há dados desonestos que são modificados lixando suas arestas ou acrescentando "pesos" interiores, de modo que a frequência relativa de determinada face se torne maior que as das outras faces. Assim, o espaço amostral no lançamento de um desses dados **desonestos** ou **viciados** não é equiprovável.

Registra-se a cor de uma bola retirada aleatoriamente de uma urna que contém 7 bolas pretas (P) e 3 bolas brancas (B). O espaço amostral $E = \{P, B\}$ desse experimento é não equiprovável, pois a possibilidade de retirar a bola preta da urna é maior que a de retirar a branca.

Se possível, organize os estudantes em estações de trabalho e proponha a cada grupo um tarefa: listar a ocorrência de determinado evento. Dois grupos, por exemplo, podem ficar responsáveis por listar o resultado do lançamento de um dado honesto de 6 faces e outros dois grupos pelo lançamento de um dado desonesto. Para obter um dado desonesto, eles podem lixar um dos "cantos" (associados a uma das arestas) ou fixar massinha de modelar em uma de suas faces. Outros grupos podem fazer trabalho similar com o lançamento de moedas honesta e desonesta. Proponha uma quantidade de lançamentos para cada grupo realizar e incentive os estudantes a transitarem entre as estações de trabalho. Ao final, organize-os em semicírculo para que comentem as observações e produzam, de maneira colaborativa e coletiva, um resumo.

Após isso, no entanto, ressalte que, neste curso, vamos focar os espaços amostrais finitos, não vazios e equiprováveis.

3. Definição de probabilidade

Defina probabilidade, distinguindo frequência relativa e probabilidade. A frequência relativa de um elemento é calculada em relação a um número finito de repetições do experimento. A probabilidade é o valor para o qual tende a frequência relativa quando o número de repetições do experimento tende ao infinito.

Enfatize que a definição $P(A) = \frac{n(A)}{n(E)}$ só é válida para espaços amostrais equiprováveis.

Retome alguns dos exemplos anteriores, perguntando aos estudantes:

- No lançamento de dois dados, qual é a probabilidade de se obter, nas faces voltadas para cima, a soma dos pontos igual a 5? $\left(\frac{1}{9}\right)$

  Nesse exemplo, enfatize que o número de elementos do espaço amostral pode ser calculado pelo princípio fundamental da contagem.

- No sorteio de um entre mil bilhetes, numerados de 1 a 1.000, o espaço amostral é o conjunto: $E = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots, 1.000\}$, em que $n(E) = 1.000$. Qual a probabilidade de o bilhete sorteado ter um dos números do evento $T = \{324, 325, 326, 327, 328\}$? $\left(\frac{5}{1.000} = 0,5\%\right)$

Explore o cálculo de probabilidades em problemas que envolvam análise combinatória, por exemplo:

- Uma comissão em que todos os membros terão funções idênticas será formada por cinco profissionais escolhidos aleatoriamente entre quatro economistas e cinco engenheiros. Qual é a probabilidade de ser escolhida uma comissão com dois economistas e três engenheiros? $\left(\frac{C_{4,2} \cdot C_{5,3}}{C_{9,5}}\right)$

4. Adição de probabilidades

Se optar por um exemplo mais simples para a introdução, sugerimos o seguinte: "Dos 800 candidatos que participam de um concurso, precisamente: 380 falam inglês, 260 falam francês e 140 falam inglês e francês". Pergunte:

- Escolhendo ao acaso um dos candidatos que participam desse concurso, qual é a probabilidade de que ele fale inglês ou francês?

  Para calcular a probabilidade pedida, indique por E o conjunto dos candidatos que prestam o concurso e por A e B os conjuntos dos candidatos que falam inglês e francês, respectivamente, considerando que a intersecção entre A e B não é vazia.

  Da teoria dos conjuntos, temos que:

  $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ e, portanto, $n(A \cup B) = 380 + 260 - 140 \Rightarrow n(A \cup B) = 500$

  Assim, concluímos que a probabilidade de que o candidato escolhido fale inglês ou francês é: $P(A \cup B) = \frac{n(A \cup B)}{n(E)} = \frac{5}{8}$

Teorema da adição de probabilidades

Se resolvermos genericamente o problema anterior, obteremos um importante resultado da teoria das probabilidades. Observe que, dividindo por $n(E)$ a identidade $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$, obtemos:

$$\frac{n(A \cup B)}{n(E)} = \frac{n(A)}{n(E)} + \frac{n(B)}{n(E)} - \frac{n(A \cap B)}{n(E)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Assim, podemos enunciar o resultado, conhecido como **teorema da adição de probabilidades**.

Saliente que, se os eventos A e B forem mutuamente exclusivos, isto é, $A \cap B = \varnothing$, então: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Enfatize que esse teorema pode ser aplicado na resolução de problemas cuja pergunta seja do tipo: qual é a probabilidade de ocorrer o evento A ou o evento B?

Aproveite para propor aos estudantes o ***Podcast*: Qual a probabilidade de errar todas as questões do ENEM?** em que apresentamos um cálculo de que essa probabilidade é quase nula. Junto a esse *podcast* apresentamos a sua transcrição, que é um recurso de acessibilidade.

Utilize esse momento para conversar com os estudantes sobre as expectativas deles em relação ao futuro e aos estudos após a conclusão do Ensino Médio e oriente-os sobre as dúvidas que possam surgir a respeito das oportunidades que se apresentam junto a programas de incentivo aos estudos. Comente também que durante a aplicação do Enem há recursos de acessibilidade como prova em braile, com letra ampliada, guia-intérprete, tempo adicional e mobiliário acessível.

5. Probabilidade condicional

Com relação a esse assunto, a maior dificuldade dos estudantes está na redução do espaço amostral. Descreva a seguinte experiência, que pode auxiliá-los a entender essa redução:

- Lança-se um dado sobre uma mesa e afirma-se que a face obtida contém um número ímpar de pontos. Em seguida, pergunta-se: qual é a probabilidade de que esse número seja o 5?

Pode-se raciocinar considerando o espaço amostral no lançamento do dado como $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. No entanto, a afirmação "a face obtida contém um número ímpar de pontos" reduz o espaço amostral para $E' = \{1, 3, 5\}$; logo, a probabilidade de o evento $A = \{5\}$ ocorrer é: $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(E')} = \dfrac{1}{3}$

No tópico **Eventos independentes**, comente que, como o nome sugere, dois eventos são independentes quando a probabilidade de ocorrência de qualquer um deles é a mesma, tendo ocorrido ou não o outro; portanto, a probabilidade de ocorrer qualquer um dos eventos independe da ocorrência do outro. Por exemplo: em dois lançamentos consecutivos de uma moeda, considera-se como resultado o par de faces voltadas para cima. Pergunte:

- Qual é a probabilidade de ocorrer a face cara no segundo lançamento, sabendo que ocorreu a face cara no primeiro? $\left(\frac{1}{2}\right)$
- Qual é a probabilidade de ocorrer a face cara no segundo lançamento, sabendo que ocorreu a face coroa no primeiro? $\left(\frac{1}{2}\right)$

Assim, o evento "ocorrer a face cara no segundo lançamento" é independente dos eventos "ocorrer a face cara no primeiro lançamento" e "ocorrer a face coroa no primeiro lançamento".

Ressalte que, da definição de eventos independentes, prova-se: se $P(B/A) = P(B)$, então $P(A/B) = P(A)$. Assim, basta que se verifique uma dessas igualdades para se afirmar que dois eventos são independentes.

Dizemos que dois eventos são **dependentes** se a condição $P(B/A) = P(B)$ ou $P(A/B) = P(A)$ não for obedecida.

Resolva, passo a passo, os exercícios **a** e **b**, a seguir, que serão de grande utilidade para o entendimento do teorema da multiplicação de probabilidades.

a. Uma urna contém 5 bolas vermelhas e 4 azuis. Retira-se uma bola dessa urna, registra-se sua cor e repõe-se a bola na urna. A seguir, misturam-se as bolas e retira-se uma segunda bola, registrando-se sua cor. Sendo $E = \{(x, y) \mid x \text{ é a primeira bola retirada e } y \text{ é a segunda}\}$ o espaço amostral desse experimento, mostre que os eventos A e B, a seguir, são independentes.

$A = \{(x, y) \in E \mid x \text{ é bola vermelha}\}$

$B = \{(x, y) \in E \mid y \text{ é bola vermelha}\}$

b. Uma urna contém 5 bolas vermelhas e 4 azuis. Retira-se uma bola dessa urna, registra-se sua cor e não se repõe a bola na urna. A seguir, retira-se uma segunda bola, registrando-se sua cor. Sendo $E = \{(x, y) \mid x \text{ é a primeira bola retirada e } y \text{ é a segunda}\}$ o espaço amostral desse experimento, mostre que os eventos A e B, a seguir, são dependentes.

$A = \{(x, y) \in E \mid x \text{ é bola vermelha}\}$

$B = \{(x, y) \in E \mid y \text{ é bola vermelha}\}$

Generalize as conclusões obtidas nas questões **a** e **b** (considerando uma urna com objetos distintos). Sorteando-se dois ou mais objetos sucessivamente e considerando-se cada sorteio como um evento, esses eventos serão **independentes** se houver reposição de cada objeto sorteado, e serão **dependentes** se não houver reposição de cada objeto sorteado.

O **exercício complementar 14** explora assuntos relacionados à saúde, assunto que pode ser abordado junto aos professores de Educação Física e de Biologia. Comente que atividades físicas regulares ajudam a prevenir e tratar doenças crônicas. Comente também sobre os cuidados com a osteoporose, que está mais associada ao envelhecimento, mas também pode afetar os jovens. Essa atividade permite um trabalho com a **competência específica 2** e a habilidade **EM13CNT207** da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias.

Referência suplementar

LOPES, J. M.; TEODORO, J. V.; REZENDE, J. de C. Uma proposta para o estudo de probabilidade no ensino médio. **Zetetiké**, Campinas, v. 19, n. 2, p. 75-93, jul./dez. 2011.

No artigo, o autor apresenta resultados acerca do uso de jogos associado à metodologia de resolução de problemas no ensino de probabilidade indicando que os estudantes assumem, nesse contexto, uma participação mais ativa no processo de aprendizagem.

CAPÍTULO 2 Estatística

Objetivos

Ao final do capítulo, espera-se que o estudante esteja apto a:

- Conceituar população, amostra, frequência e frequência relativa.
- Separar uma amostra de números em classes.
- Construir tabelas de distribuição de frequência.
- Representar uma distribuição de frequência em gráfico de linha, gráfico de barras (horizontais e verticais) e gráfico de setores.
- Construir e interpretar histogramas de uma distribuição de frequência de classes não unitárias.
- Conceituar média aritmética, mediana e moda, e aplicar esses conceitos na resolução de problemas.
- Conceituar desvio absoluto médio, variância e desvio padrão, e aplicar esses conceitos na resolução de problemas.

Habilidades e competências específicas da BNCC

As habilidades **EM13MAT101** e **EM13MAT102** são desenvolvidas neste capítulo porque os estudantes precisarão interpretar criticamente situações em diferentes contextos pela análise de gráficos, tabelas e amostras de pesquisas estatísticas e, ainda, perceber a necessidade de avaliar inadequações em gráficos que podem induzir ao erro. Quanto à habilidade **EM13MAT104**, ela é desenvolvida por meio da análise de índices como o IDH. Esses contextos contribuem para a mobilização da **competência específica 1**.

A **competência específica 2** e as habilidades **EM13MAT202** e **EM13MAT203** são desenvolvidas por meio de atividades e conteúdos que envolvem o planejamento e execução de uma pesquisa amostral e a utilização de aplicativos ou planilhas eletrônicas para organizar as informações.

A **competência específica 3** e a habilidade **EM13MAT316** são desenvolvidas com a apresentação da definição de medidas de tendência central e de dispersão e por aplicações em contextos diversos e significativos.

No desenvolvimento da **competência específica 4**, as habilidades **EM13MAT406** e **EM13MAT407** podem ser ampliadas à medida que os estudantes precisarão, neste capítulo, construir tabelas e gráficos, interpretar e comparar conjuntos de dados estatísticos em diferentes representações.

Sugestões de encaminhamento dos conteúdos

1. Noções de Estatística

Neste tópico apresentamos os conceitos iniciais que se relacionam com a Pesquisa Estatística, como população estatística, pesquisa censitária, pesquisa amostral, instrumentos de coleta de dados e variáveis qualitativas e quantitativas. Esse será um momento essencial para que os estudantes compreendam a importância desses conceitos e sua aplicação nas diferentes áreas.

No **exercício proposto 4**, propomos aos estudantes a realização de uma pesquisa; eles deverão definir o tema e o instrumento de coleta dos dados que desejam pesquisar. Oriente-os na elaboração das perguntas de modo a obterem dados que possam ser organizados para uma análise posterior.

2. Distribuição de frequências – Tabelas e gráficos

Neste tópico exploramos a organização de dados em tabelas e gráficos. Destaque a importância de ler e interpretar as informações organizadas nesses suportes. Como veremos adiante, a construção inadequada de gráficos pode induzir o leitor a interpretações equivocadas dos dados de uma pesquisa.

No **exercício proposto 9**, propomos a realização de uma nova pesquisa; eles deverão coletar e organizar os dados em gráficos e tabelas. Pode-se aproveitar essa atividade como uma extensão do exercício 4.

3. Medidas estatísticas

Comente que as medidas estatísticas são indicadores usados para caracterizar determinado conjunto de dados numéricos quanto:

- à posição de cada elemento em um rol (medidas de posição);
- à dispersão dos elementos em relação a uma medida de posição (medidas de dispersão).

Por exemplo:

Pesquisou-se o custo quilograma de certo produto de uma mesma marca em oito supermercados, obtendo-se os seguintes preços, em real: 3,80; 3,70; 3,90; 3,90; 4,00; 4,10; 3,90; 4,30.

Dispondo esses valores em rol, temos: 3,70; 3,80; 3,90; 3,90; 3,90; 4,00; 4,10; 4,30.

Dividindo-se a soma desses valores por 8, obtém-se o número 3,95, chamado de média aritmética entre os oito valores. Ao localizar esse valor no rol, constatamos que há cinco elementos menores que 3,95 e três elementos maiores que 3,95. Nessa perspectiva, esse valor é uma medida de posição no rol.

No entanto, a diferença entre cada valor da amostra e a média aritmética, nessa ordem, é um número chamado desvio do respectivo valor da amostra; por exemplo, o desvio do valor 4,10 é 0,15, pois $4,10 - 3,95 = 0,15$, o que significa que 4,10 está 0,15 acima da média aritmética. Nessa perspectiva, temos que o desvio 0,15 é uma medida de afastamento (dispersão) do número 4,10.

No tópico **Medidas de posição**, depois de definir média aritmética, moda e mediana, discuta com a turma o problema a seguir, que mostra a importância da moda e da mediana.

Considere dois países *A* e *B*, de 100 milhões de habitantes cada um. As tabelas a seguir descrevem a distribuição de renda entre os habitantes desses países:

País *A*

Renda mensal por pessoa (R$)	Número de habitantes (em milhões)
1.400,00	90
7.400,00	10

Elaborado para fins didáticos.

País *B*

Renda mensal por pessoa (R$)	Número de habitantes (em milhões)
1.700,00	90
7.400,00	10

Elaborado para fins didáticos.

Calcule:

a. a renda mensal média por pessoa de cada país.
(R$ 2.000,00)

b. a mediana das rendas mensais dos habitantes de cada país. (*A*: R$ 1.400,00; *B*: R$ 1.700,00)

c. a moda das rendas mensais dos habitantes de cada país. (*A*: R$ 1.400,00; *B*: R$ 1.700,00)

Note que, ao analisarmos a renda mensal média, a mediana e a moda permitem a comparação da riqueza dos países e da riqueza individual de seus habitantes. A renda total da população assalariada nos dois países é a mesma, mas, como a mediana no país *A* é menor que no país *B*, conclui-se que a distribuição de renda em *B* é mais equitativa. Além disso, a moda revela que a maioria das rendas no país *B* é maior que a maioria das rendas de *A*.

Pode-se fazer um aprofundamento no estudo das médias.

- Acompanhe uma aplicação da **média geométrica** na Matemática Financeira:

Uma ação da Bolsa teve 44% de valorização em um ano e 21% de valorização no ano seguinte. Qual foi a taxa equivalente anual de valorização dessa ação no período considerado?

Na resolução dessa situação, para facilitar os cálculos, podemos atribuir o índice 100 ao preço da ação no início do primeiro ano. Assim, a evolução do índice, proporcionalmente ao preço da ação, pode ser descrita por: 100 (índice inicial); 144 (índice ao final do 1º ano); e 174,24 (índice ao final do 2º ano). Duas taxas são equivalentes quando aplicadas a um mesmo capital, durante um mesmo período de tempo, e produzem juros iguais. Assim, a taxa anual equivalente a 74,24% é a taxa constante t que, aplicada ao montante no fim de cada ano, reproduz, no fim dos dois anos, o mesmo montante produzido pela taxa bienal 74,24%. Assim, temos:

$100(1 + t)(1 + t) = 174,24$; ou seja: $(1 + t)^2 = 1,7424$

$(1 + t) = \sqrt{1,7424} \Rightarrow 1 + t = 1,32 \therefore t = 0,32 = 32\%$

Logo, a taxa equivalente anual de valorização foi de 32%.

Observe que $1 + t$ é a média geométrica entre $1 + 0,44$ e $1 + 0,21$. Essa conclusão pode ser generalizada da seguinte maneira: Se $t_1, t_2, t_3, ..., t_n$ são taxas percentuais aplicadas a um capital, sucessivamente em n períodos de tempo, então a taxa equivalente t por período de tempo é tal que $1 + t$ é a média geométrica entre $1 + t_1, 1 + t_2, 1 + t_3, ..., 1 + t_n$.

- Acompanhe uma aplicação da **média harmônica**: Uma pessoa viaja da cidade A para a cidade B à velocidade média de 60 km/h. Na viagem de volta, de B para A, pelo mesmo caminho, a pessoa viaja à velocidade média de 100 km/h. Determine a velocidade média de toda a viagem, considerando a ida e a volta.

Para resolver, pode-se considerar d a distância, em quilômetro, entre as cidades A e B. Assim, o tempo t_1, em hora, gasto na ida foi $t_1 = \frac{d}{60}$. O tempo t_2, em hora, gasto na volta foi $t_2 = \frac{d}{100}$. A velocidade média v_m é definida como $v_m = 75$ km/h. Logo, temos:

$$v_m = \frac{2d}{\frac{d}{60} + \frac{d}{100}} \Rightarrow v_m = 75$$

Note que v_m é a média harmônica entre as velocidades 60 km/h e 100 km/h.

Após o estudo do tópico **Os números não mentem**, se possível, proponha uma pesquisa estimulada e incentive os estudantes a elaborarem uma pesquisa estatística, desde as técnicas utilizadas para a coleta de informações até o tratamento dos dados. Auxilie-os a escolherem temas relevantes como eleições, saúde, meio ambiente etc.

Supondo como exemplo o tema "Gênero de música favorito na escola", comente que a quantidade de gêneros musicais é muito grande e, por isso, vamos nos restringir a apenas quatro.

Organize a turma em grupos com quatro ou cinco estudantes, diga que o instrumento adotado será a pesquisa estimulada, ou seja, o entrevistado deve escolher uma alternativa em uma lista, e oriente que cada grupo deve perguntar a quinze outros estudantes de outras turmas: "Qual o seu gênero de música favorito dentre as opções MPB, *Rap*, *Rock* e Sertanejo?".

As informações coletadas das amostras, em cada grupo, devem ser resumidas e interpretadas em um relatório e representadas em tabelas de distribuição de frequência e gráficos (barras verticais, horizontais ou setores circulares etc.) com as medidas de posição e de dispersão.

Referência suplementar

BARBERINO, M. R. B.; MAGALHÃES, M. N. Aprendizagem de Estatística por meio de projetos no Ensino Médio da escola pública. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 18, n. 3, p. 1223-1243, 2016.

O artigo apresenta uma proposta de ensino de Estatística por meio de projetos a fim de proporcionar uma participação ativa dos estudantes e pode servir como base inicial para o professor propor atividades desse tipo em sala de aula.

CAPÍTULO 3 Matrizes

Objetivos

Ao final do capítulo, espera-se que o estudante esteja apto a:

- Discorrer sobre o conceito de matriz.
- Representar genericamente uma matriz.
- Construir uma matriz a partir de uma lei de formação.
- Reconhecer uma matriz quadrada e identificar as diagonais principal e secundária.
- Reconhecer as matrizes identidade e nula.
- Transpor uma matriz.
- Identificar elementos correspondentes em matrizes de mesmo tipo.
- Reconhecer matrizes iguais.
- Identificar matrizes opostas.
- Adicionar, subtrair e multiplicar um número real por uma matriz.
- Multiplicar matrizes.

Habilidades e competências específicas da BNCC

Ao utilizar as noções de transformações isométricas e geométricas, contribuímos para o desenvolvimento da **competência específica 1** e da habilidade **EM13MAT105**. Ao trabalhar com algoritmos, contribuímos para o desenvolvimento da **competência específica 3** e da habilidade **EM13MAT315**. No boxe **Conectado**, utilizamos conceitos de linguagem de programação, favorecendo o desenvolvimento da **competência específica 4** e da habilidade **EM13MAT405**. A seção **Matemática sem fronteiras** trabalha com ladrilhamento do plano, o que favorece o desenvolvimento da **competência específica 5** e da habilidade **EM13MAT505**.

Sugestões de encaminhamento dos conteúdos

O tema apresentado na **abertura** fala das planilhas eletrônicas, ferramenta amplamente utilizada para organizar e analisar dados de maneira eficiente. As planilhas eletrônicas permitem o registro e a distribuição de informações em linhas e colunas, facilitando a busca por dados específicos. Além disso, por serem dinâmicas, possibilitam a atualização rápida e simples de informações, tornando-as úteis em diversas situações do cotidiano, desde o controle financeiro até a gestão de projetos e atividades empresariais. Ao trabalhar com esse tema, contribuímos para o desenvolvimento da **competência geral 5**, ao trabalhar com as tecnologias digitais de modo produtivo, crítico e ético.

2. O conceito de matriz

O tema explorado na apresentação do conceito propicia um trabalho com a área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas. Se possível, promova a participação do professor de Geografia para uma discussão sobre aspectos da malha rodoviária brasileira, analisando dados e características regionais que impactam o desenvolvimento econômico e social do país. Essa abordagem facilita a compreensão de fatores logísticos e territoriais e possibilita uma visão crítica sobre desigualdades regionais e infraestrutura. O trabalho com esse tema aborda o **ODS 9**, ao explorar como a infraestrutura de transportes é importante para o desenvolvimento sustentável das diferentes regiões do Brasil.

6. Multiplicação de um número real por uma matriz

Após conceituar multiplicação de número real por matriz, conforme é feito nas introduções desses tópicos, sugerimos uma incursão pelos vetores. Apresente o seguinte exemplo, que mostra a aplicação do produto de número real por matriz no estudo dos vetores. No plano cartesiano da Figura 1 está representado o vetor $\vec{u} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$, na Figura 2 está representado o vetor $2\vec{u}$.

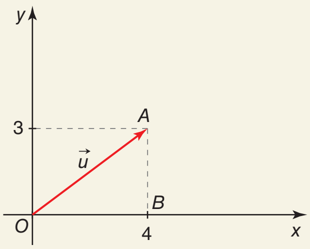


Figura 1

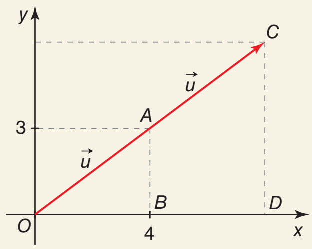


Figura 2

Indicando por x_c e y_c a abscissa e a ordenada do ponto C, respectivamente, temos, da semelhança entre os triângulos OAB e OCD:

$$\frac{x_c}{4} = \frac{y_c}{3} = \frac{2}{1} \Rightarrow x_c = 8 \text{ e } y_c = 6$$

Assim, a matriz representativa do vetor $2\vec{u}$ é $\begin{bmatrix} 8 \\ 6 \end{bmatrix}$. Note que essa matriz pode ser obtida por meio do produto do número 2 pela matriz representante de $\vec{u}$, isto é:

$$2 \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}}_{\vec{u}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 8 \\ 6 \end{bmatrix}}_{2\vec{u}}$$

Generalize: se a matriz representativa de um vetor qualquer $\vec{u}$ do plano cartesiano é A, então a matriz representativa do vetor $k\vec{u}$, com $k \in \mathbb{R}$, é o produto do número k pela matriz A.

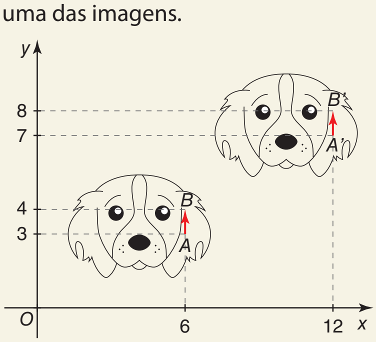
7. Multiplicação de matrizes

O boxe **Mentes brilhantes** aborda a computação gráfica e explica que ela envolve métodos e técnicas para converter dados numéricos em gráficos por meio de computadores, utilizando matrizes. Ao trabalhar com esse tema, pode-se contextualizar historicamente sua evolução e destacar o impacto que essa tecnologia teve em áreas como *design*, engenharia e indústria. Além disso, o boxe propicia um trabalho interdisciplinar, relacionando o conceito de matriz com a prática de criação de gráficos e imagens digitais.

8. As matrizes e as transformações geométricas

O tema explorado na apresentação do tópico aborda a relação entre computação gráfica e as transformações geométricas. Apresentamos um exemplo de translação:

Na figura a seguir, cada imagem do cachorro é uma translação da outra. Observe que o segmento orientado AB foi transformado no segmento orientado $A'B'$, tal que ambos são paralelos, têm o mesmo comprimento e a mesma orientação (de baixo para cima). Isso ocorre para qualquer segmento orientado considerado em uma das imagens.



Representando cada ponto $P(x_0, y_0)$ pela matriz $\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$, uma translação de P no plano cartesiano é obtida pela soma: $\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 + a \\ y_0 + b \end{bmatrix}$. Assim, no plano cartesiano anterior, cada ponto $\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$ da imagem mais próxima da origem O é transformado no ponto $\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 + 6 \\ y_0 + 4 \end{bmatrix}$ da outra imagem.

Agora, apresentamos um exemplo de rotação:

Determine as coordenadas do ponto B obtido pela rotação de 45° do ponto $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ em torno da origem do sistema, no sentido anti-horário.

Aplicando a equação matricial $\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\text{sen}\,\alpha \\ \text{sen}\,\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, obtemos uma rotação α do ponto $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ em torno da origem do sistema no sentido anti-horário. Assim, substituindo α por 45° e $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ por $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, obtém-se o ponto $B = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$:

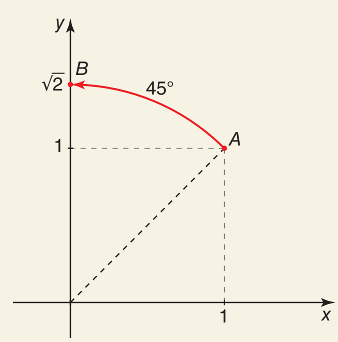
$$\begin{bmatrix} \cos 45° & -\text{sen}\, 45° \\ \text{sen}\, 45° & \cos 45° \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 1 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 1 & \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Logo, o ponto é $B = \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}$.

Observe a representação de A e B no plano cartesiano:



ILUSTRAÇÕES: ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

Matemática sem fronteiras

Nesta seção, exploramos as transformações geométricas e o ladrilhamento do plano, trazendo uma visão cultural e Matemática por meio de mosaicos.

Os mosaicos são uma arte milenar que se manifesta em diversas culturas ao redor do mundo. Um exemplo é a obra Murais do Abya Yala, localizado no Rio de Janeiro (RJ), que homenageia os povos indígenas da América Latina, mostrando como a arte pode unir culturas e histórias.

No contexto de ladrilhamento, as transformações geométricas como rotações, reflexões e translações desempenham um papel fundamental. Essas transformações geométricas contribuem para a criação de padrões esteticamente agradáveis e para o entendimento de conceitos fundamentais da Geometria, promovendo uma relação entre Arte e Matemática.

Ao trabalhar com essa seção, contribuímos com os **TCTs Diversidade Cultural** e **Educação para valorização do multiculturalismo nas matrizes históricas e culturais Brasileiras**. Além disso, favorecemos o desenvolvimento da **competência geral 1**, ao ampliar o conhecimento sobre as manifestações artísticas, como os mosaicos em diferentes culturas; da **competência geral 3**, ao discutir sobre mosaicos em diferentes culturas, como os *Murais do Abya Yala*, promovendo o respeito e a valorização das expressões artísticas de diversos povos, além de relacionar a matemática com as manifestações culturais; da **competência geral 4**, ao interpretar e comunicar representações visuais, descrever transformações geométricas e compartilhar interpretações culturais e artísticas; da **competência geral 5**, ao abordar conceitos como computação gráfica, que utiliza princípios de Geometria e Álgebra para criar imagens digitais; e da **competência geral 10**, ao discutir e refletir como a Matemática e a Arte podem se unir para construir pontes culturais, valorizando o patrimônio cultural e buscando soluções criativas para os diferentes desafios sociais.

O conteúdo do boxe **Trabalho e juventudes** aborda a relação entre a Matemática e a criação de jogos eletrônicos, destacando como conceitos matemáticos e computacionais são essenciais para o sucesso e realismo dos videogames, e a profissão de *designer* de *games*. Solicite aos estudantes que relatem o que sabem sobre essa profissão. Incentive-os a participar e a argumentar para justificar suas opiniões. Pode-se aprofundar o assunto, propondo aos estudantes que pesquisem mais informações sobre a profissão de *designer* de *games*, façam um resumo da pesquisa e compartilhem-na com os colegas. Ao explorar o conteúdo desse boxe, contribuímos para o desenvolvimento dos **TCTs Trabalho** e **Ciência e Tecnologia** e da **competência geral 6**, pois os estudantes podem se apropriar de procedimentos adotados no mundo do trabalho. Além disso, ao refletirem sobre a evolução dos videogames e o uso de tecnologia avançada para criar jogos envolventes, os estudantes irão conversar sobre questões relacionadas ao **ODS 9**.

Referência suplementar

SILVA, T. S. **Matemática inclusiva**: ensinando matrizes a deficientes visuais. 2015. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 2015.

Neste trabalho o autor relata um processo de ensino-aprendizagem procurando introduzir o conceito de matrizes e suas operações elementares para um aluno com deficiência visual utilizando-se de material concreto simples.

CAPÍTULO 4 Sistemas lineares e determinantes

Objetivos

Ao final do capítulo, espera-se que o estudante esteja apto a:

- Reconhecer uma equação linear e classificá-la quanto ao número de soluções.
- Resolver e classificar um sistema linear pelo método do escalonamento.
- Resolver problemas que envolvam sistemas de equações lineares.
- Calcular determinantes de ordens 2 e 3.
- Discutir um sistema linear em função de um ou mais parâmetros.
- Reconhecer e resolver um sistema linear homogêneo.
- Discutir um sistema linear homogêneo em função de um ou mais parâmetros.

Habilidades e competências específicas da BNCC

Ao longo do capítulo, resolvemos e elaboramos problemas que envolvem equações lineares simultâneas, funções polinomiais, cálculo de áreas e elaboração de um fluxograma, contribuindo para o desenvolvimento da **competência específica 3** e das habilidades **EM13MAT301**, **EM13MAT302**, **EM13MAT307** e **EM13MAT315**. Ao trabalhar com conversão de representações algébricas de funções polinomiais em representações geométricas no plano cartesiano, contribuímos para o desenvolvimento da **competência específica 4** e da habilidade **EM13MAT401**.

Sugestões de encaminhamento dos conteúdos

O tema apresentado na **abertura** fala da importância de estudar os conceitos básicos do mercado financeiro para começar a investir de maneira simples e correta. Ele explica que existem diferentes tipos de investimentos, como renda fixa e renda variável, e que é fundamental conhecer as características de cada tipo antes de aplicar o dinheiro. Além disso, o texto destaca a necessidade de escolher investimentos de curto, médio ou longo prazo, de acordo com o retorno esperado, para garantir uma vida financeira mais saudável e confortável no futuro. Ao trabalhar esse tema, os estudantes abordam assuntos relacionados com a Educação financeira, desenvolvendo o **TCT Educação Financeira**. Além disso, o tema contribui para o desenvolvimento da **competência geral 1**, ao explorar conceitos básicos do mercado financeiro; da **competência geral 2**, ao analisar, comparar e avaliar diferentes formas de investimento, bem como a refletir sobre as melhores estratégias financeiras para alcançar objetivos; da **competência geral 6**, ao refletir sobre investimentos e planejamento financeiro, ajudando a pensar no futuro e a planejar ações que favoreçam sua vida financeira e projetos pessoais; e da **competência geral 10**, ao promover a consciência sobre o uso responsável do dinheiro.

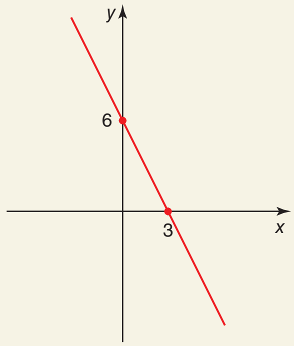
2. Equação linear

Aproveite o problema do tópico anterior e pergunte: “Quais são os termos desconhecidos no sistema de equações do exemplo anterior? (a e b.)”. Convencione que os termos desconhecidos são chamados de incógnitas ou variáveis do sistema. (Não é preciso diferenciar os conceitos de incógnita do sistema e de variável do sistema. Atualmente, as duas terminologias são aceitas.); “Quais são os coeficientes das incógnitas e o termo independente na segunda equação do sistema anterior? (Os coeficientes das incógnitas a e b são 1,08 e 1,09, respectivamente, e o termo independente é 10.845.)”; “Qual é o grau de cada equação do sistema anterior? (1º grau)”.

Após conceituar solução de uma equação linear, pergunte: “Quantas soluções possui a equação: $2x + y - 3z = 4$? (Infinitas.)”;

"Quantas soluções possui a equação: $0x + 0y + 0z = 0$? (Infinitas.)"; "Quantas soluções possui a equação: $0x + 0y + 0z = 4$? (Nenhuma.)". Peça aos estudantes que representem no plano cartesiano xOy todas as soluções (x, y) da equação $2x + y = 6$.

ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA



3. Sistema linear

No tópico **Interpretação gráfica de um sistema linear com duas equações e duas incógnitas**, apresente a interpretação geométrica dessa classificação para o caso particular de um sistema linear possível e indeterminado com duas variáveis e pergunte: "Quais as posições relativas possíveis de duas retas coplanares? (Duas retas contidas em um mesmo plano podem ser concorrentes, paralelas distintas ou paralelas coincidentes.)"; "Quantos pontos podem ter em comum duas retas coplanares? (Duas retas coplanares podem ter: um único ponto em comum se forem concorrentes; nenhum ponto em comum se forem paralelas distintas; ou infinitos pontos em comum se forem paralelas coincidentes.)".

Considere que em cada equação do sistema linear de variáveis x e y representada a seguir, pelo menos um dos coeficientes das variáveis é diferente de zero. Assim, o gráfico cartesiano de cada equação é uma reta.

$$\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$$

Continue perguntando: "De acordo com esse fato, quantas soluções pode ter esse sistema? (Como essas retas podem ser concorrentes, paralelas distintas ou paralelas coincidentes, deduzimos que o sistema pode ter uma única solução (SPD) ou nenhuma solução (SI) ou infinitas soluções (SPI).)".

Enfatize que um sistema linear possível e indeterminado, com qualquer número de variáveis, tem infinitas soluções. Demonstre essa propriedade para o caso particular de um sistema linear possível e indeterminado com duas variáveis: Se (x_1, y_1) e (x_2, y_2), com $(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2)$, são soluções de um sistema linear com duas equações e duas incógnitas, então o par ordenado $\left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}, \dfrac{y_1 + y_2}{2}\right)$ também é solução desse sistema.

Demonstração

Consideremos o sistema linear S nas incógnitas x e y, $S\colon \begin{cases} ax + by = p \\ cx + dy = q \end{cases}$, com $\{a, b, c, d, p, q\} \subset \mathbb{R}$, tal que (x_1, y_1) e (x_2, y_2) sejam suas soluções, com $(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2)$. Nessas condições temos:

$$\begin{cases} ax_1 + by_1 = p \quad (1) \\ cx_1 + dy_1 = q \quad (2) \end{cases} \text{ e } \begin{cases} ax_2 + by_2 = p \quad (3) \\ cx_2 + dy_2 = q \quad (4) \end{cases}$$

Adicionando membro a membro as equações (1) e (3) e as equações (2) e (4), obtemos:

$$\begin{cases} a(x_1 + x_2) + b(y_1 + y_2) = 2p \\ c(x_1 + x_2) + d(y_1 + y_2) = 2q \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a \cdot \dfrac{(x_1 + x_2)}{2} + b \cdot \dfrac{(y_1 + y_2)}{2} = p \\ c \cdot \dfrac{(x_1 + x_2)}{2} + d \cdot \dfrac{(y_1 + y_2)}{2} = q \end{cases}$$

Assim, concluímos que o par ordenado $\left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}, \dfrac{y_1 + y_2}{2}\right)$ é solução do sistema S. Note que esse par ordenado é diferente de (x_1, y_1) e de (x_2, y_2), pois por hipótese: $x_1 \neq x_2$ ou $y_1 \neq y_2$. Como esse raciocínio pode ser repetido indefinidamente para duas soluções distintas quaisquer, concluímos que o sistema tem infinitas soluções distintas. (O procedimento utilizado nessa demonstração, apesar de provar que o sistema S tem infinitas soluções, não descreve todas elas, pois há outras soluções de S que não são obtidas por esse procedimento.)

4. Resolução de um sistema linear

Após estudarem alguns métodos de resolução de um sistema linear, organize os estudantes em duplas e proponha que coloquem as mesas de maneira que possam se sentar um de frente para o outro. Solicite que retomem alguns dos exemplos indicados neste tópico e no anterior (**Sistema linear**) e que apliquem um método de resolução a fim de solucionar cada problema proposto em tais exemplos. Em seguida, ainda em duplas, eles podem resolver os **exercícios propostos 10** a **14**.

O boxe **Mentes brilhantes** conta um pouco da história de Diofanto de Alexandria, matemático grego do século III a.C., conhecido por suas contribuições fundamentais à Aritmética e à Álgebra. Diofanto inovou ao introduzir notações algébricas com símbolos, em vez de palavras, para resolver equações. Suas pesquisas focaram equações diofantinas, que buscam soluções inteiras, como a equação linear e a quadrática. O texto apresenta um enigma inscrito em sua lápide, que pode ser utilizado para desafiar os estudantes a calcular a idade de Diofanto com base em descrições numéricas de sua vida.

5. Os sistemas lineares e o conceito de determinante

O **exercício proposto 19** menciona o teorema de Laplace, que consiste em um método prático de calcular determinantes de matrizes de ordem n, com $n \in \mathbb{Z}$, e é muito utilizado para cálculos de determinantes de ordens maiores que 3. Para aplicar esse teorema, escolhe-se uma linha (ou coluna) e efetua-se a adição dos produtos dos elementos da linha (ou coluna) escolhida aos seus respectivos cofatores.

O cofator C_{ij} de um elemento a_{ij} de uma matriz é dado por: $C_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot D_{ij}$ (em que D_{ij} é o determinante da matriz formada eliminando-se a linha i e a coluna j). Exemplo: Calcular o determinante da matriz M dada:

$$M = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 & 7 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & -4 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Escolhemos a primeira coluna; então, pelo teorema de Laplace, temos:

$$\det M = a_{11} \cdot C_{11} + a_{21} \cdot C_{21} + a_{31} \cdot C_{31} + a_{41} \cdot C_{41}$$
$$\det M = (-2) \cdot C_{11} + \underbrace{\cancel{0 \cdot C_{21}}}_{=0} + 3 \cdot C_{31} + 1 \cdot C_{41}$$

Calculando os cofatores referentes aos elementos da coluna escolhida:

$$C_{11} = (-1)^{1+1} \cdot D_{11} \Rightarrow C_{11} = (-1)^2 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -4 & 5 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{vmatrix}}_{=3} = 1 \cdot 3 = 3$$

$$C_{31} = (-1)^{3+1} \cdot D_{31} \Rightarrow C_{31} = (-1)^4 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 7 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{vmatrix}}_{=13} = 1 \cdot 13 = 13$$

$$C_{41} = (-1)^{4+1} \cdot D_{41} \Rightarrow C_{41} = (-1)^5 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 7 \\ -1 & 2 & 1 \\ -4 & 5 & 1 \end{vmatrix}}_{=9} = (-1) \cdot 9 = -9$$

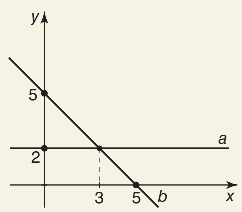
Portanto, o determinante da matriz M pelo teorema de Laplace é dado pela expressão:

$$\det M = (-2) \cdot C_{11} + 0 \cdot C_{21} + 3 \cdot C_{31} + 1 \cdot C_{41} =$$
$$= (-2) \cdot 3 + 0 + 3 \cdot 13 + 1 \cdot (-9)$$
$$\det M = -6 + 39 + (-9) = 24$$

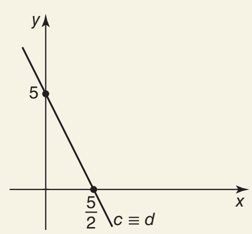
6. Discussão de um sistema linear

Peça aos estudantes que representem no plano cartesiano os gráficos das equações de cada um dos sistemas:

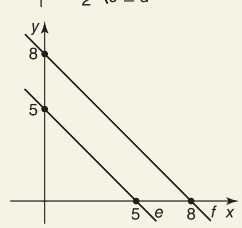
$$\begin{cases} y = -x + 5 \\ y = 2 \end{cases}$$



$$\begin{cases} y = -2x + 5 \\ y = -2x + 5 \end{cases}$$



$$\begin{cases} y = -x + 5 \\ y = -x + 8 \end{cases}$$



Pergunte: "Se duas retas do plano cartesiano têm um único ponto em comum, como podemos classificar o sistema formado pelas equações dessas retas? (SPD)"; "Se duas retas do plano cartesiano têm todos os seus pontos em comum (retas coincidentes), como podemos classificar o sistema formado pelas equações dessas retas? (SPI)"; "Se duas retas do plano cartesiano não têm ponto em comum (retas paralelas distintas), como podemos classificar o sistema formado pelas equações dessas retas? (SI)". O objetivo dessa introdução é dar significado geométrico à discussão de um sistema linear.

Com a participação dos estudantes, refaça os **exercícios resolvidos** de **5** a **8**, em que são feitas discussões de sistemas com número de equações igual ao número de incógnitas.

Ressalte que a discussão de um sistema linear com número de equações diferente do número de incógnitas não pode ser feita com base no determinante dos coeficientes, pois não existe esse determinante. Destaque que uma boa alternativa para a discussão desse tipo de sistema é o escalonamento.

Comente com os estudantes que, no boxe **Reflexão** da página 118, o determinante, no caso de sistemas lineares com número de equações igual ao número de incógnitas, é uma ferramenta auxiliar que, em muitos casos, facilita significativamente a discussão. Observe a discussão do sistema do exercício resolvido 8 aplicando-se apenas o escalonamento:

$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ ax + 4y = b \end{cases} \sim \begin{cases} x + 2y = 3 \\ 0x + (4 - 2a)y = b - 3a \end{cases}$$

(1) Se $4 - 2a \neq 0$, então o sistema é possível e determinado.

(2) Se $4 - 2a = 0$, devemos analisar duas alternativas: $b - 3a \neq 0$ ou $b - 3a = 0$.

- Para $4 - 2a = 0$ e $b - 3a \neq 0$, o sistema é impossível.
- Para $4 - 2a = 0$ e $b - 3a = 0$, o sistema é possível e indeterminado.

Resumindo: $a \neq 2 \Rightarrow$ SPD; $a = 2$ e $b \neq 6 \Rightarrow$ SI; $a = 2$ e $b = 6 \Rightarrow$ SPI

7. Sistema linear homogêneo

Após apresentar a propriedade do tópico **Classificação de um sistema linear homogêneo com número de equações igual ao número de incógnitas**, demonstre o método do escalonamento para a obtenção da inversa de uma matriz.

No capítulo anterior, definimos matriz inversa e mostramos como obter a inversa de uma matriz pela definição. Neste capítulo, é possível apresentar um método para a obtenção da matriz inversa fundamentado no escalonamento. Acompanhe o exemplo.

A matriz A a seguir tem o determinante diferente de zero e, portanto, admite inversa.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ 3 & 7 & 11 \end{pmatrix}$$

Sendo $A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$, devemos ter:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ 3 & 7 & 11 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Efetuando a multiplicação e aplicando o conceito de igualdade de matrizes, poderíamos separar as equações assim obtidas em três sistemas lineares: um nas incógnitas a, b e c; outro nas incógnitas d, e e f; e o terceiro nas incógnitas g, h e i, que poderiam ser resolvidos por escalonamento. Porém, em vez de efetuar a multiplicação, vamos aplicar o escalonamento na forma matricial de tal modo a transformar a matriz A na matriz I, que aparece no primeiro membro da igualdade, isto é:

$$(-3)\ (-2)\quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ 3 & 7 & 11 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$(-1)\quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$(-2)\quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Logo, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

8. Os determinantes e os levantamentos topográficos

A situação introdutória explora um texto sobre levantamentos topográficos, destacando a importância da Topografia, uma ciência que utiliza conceitos da Geometria e da Trigonometria. O levantamento topográfico é fundamental para fornecer informações sobre áreas, dimensões e formas, sendo uma etapa inicial importante para diversas obras de engenharia. Além disso, o uso de cálculos de determinantes em Geometria analítica desempenha um papel importante na determinação de áreas em levantamentos topográficos. O trabalho com esse assunto contribui para o **ODS 9**.

Educação midiática

O objetivo da seção é promover uma reflexão sobre as mudanças históricas relacionadas ao mundo do trabalho diante das revoluções tecnológicas, evidenciando a necessidade de se atualizar no que se refere às novas demandas sociais, a fim de se adequar às novas profissões. Aproveite e proponha aos estudantes o **Infográfico clicável: Profissões envolvidas na produção de um robô**, que apresenta um pouco dos profissionais necessários para a produção de um robô aspirador. Assim, é possível refletir e desenvolver os **TCTs Ciência e Tecnologia** e **Trabalho** ao ampliar seu conhecimento em relação a novas tendências de trabalho e se sentir instigado para desenvolver novas habilidades que lhe sejam de interesse. Além disso, o tema favorece o desenvolvimento da **competência geral 2**, ao refletir sobre o impacto da tecnologia no mercado de trabalho e na sociedade; da **competência geral 3**, ao entender a história das revoluções tecnológicas e seu impacto no trabalho humano; da **competência geral 5**, ao compreender e utilizar as tecnologias digitais de forma responsável e crítica, associando os conceitos de inteligência artificial e automação ao cotidiano e ao futuro do trabalho; e da **competência geral 7**, ao expor pontos de vista e opiniões, argumentando sobre as mudanças nas profissões, os avanços tecnológicos e os impactos socioeconômicos.

Comente com a turma que, com a inteligência artificial se desenvolvendo cada vez mais, as necessidades da sociedade estão passando, mais uma vez, por uma transformação. Com isso, novas habilidades e competências precisam ser desenvolvidas por aqueles que desejam ocupar cargos nas novas profissões. Exemplos dessas habilidades e competências são pensamento crítico, inteligência emocional, resolução de problemas complexos, flexibilidade cognitiva, capacidade de negociação, adaptabilidade, curiosidade, iniciativa, criatividade e tomada de decisões.

Organize os estudantes em semicírculo a fim de explorar essas questões com a participação deles em uma roda de conversa, de modo a sistematizar as ideias debatidas. Por fim, auxilie-os a organizarem a elaboração de conteúdo, que pode ser em etapas (pesquisa, escrita e produção). Se possível, agende um dia para a troca de ideias sobre os trabalhos ainda não finalizados, para que os grupos possam sugerir ajustes nos textos dos colegas antes da confecção dos cartazes.

Referência suplementar

VALENTE, J. Inteligência artificial e o impacto nos empregos e profissões. **Agência Brasil**, Brasília, 1º set. 2020. Disponível em: https://agenciabrasil.ebc.com.br/geral/noticia/2020-08/inteligencia-artificial-e-o-impacto-nos-empregos-e-profissoes. Acesso em: 2 maio 2024.

O artigo apresenta o impacto da inteligência artificial na demanda de empregos, apontando que a automação poderá extinguir alguns trabalhos e criar outros.

CAPÍTULO 5 Geometria analítica: ponto e reta

Objetivos

Ao final do capítulo, espera-se que o estudante esteja apto a:

- Calcular a distância entre dois pontos do plano cartesiano.
- Determinar o ponto médio de um segmento de reta.
- Reconhecer o alinhamento de três pontos.
- Determinar a equação de uma reta por dois pontos distintos ou por um ponto e o coeficiente angular.

Habilidades e competências específicas da BNCC

A **competência específica 1** é mobilizada a partir de atividades que favorecem o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT101**, pois os estudantes poderão estudar a variação de grandezas e analisar gráficos de funções em contextos diversos, como a taxa anual de variação da temperatura, a pressão exercida em um mergulhador de acordo com a profundidade, entre outros. Ao trabalhar com o coeficiente angular das retas, os estudantes também criam subsídios para ampliar o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT104**.

A **competência específica 2** e a habilidade **EM13MAT203** são mobilizadas neste capítulo a partir do uso de *softwares* para compor e analisar gráficos, pois os estudantes poderão mobilizar esses conhecimentos para propor ou analisar ações do cotidiano.

Ao estudar a equação da reta e construir modelos empregando conhecimentos relacionados às funções polinomiais do 1º grau, os estudantes desenvolvem a **competência específica 3** e a habilidade **EM13MAT302**. Ainda, podem mobilizar conhecimentos relacionados à habilidade **EM13MAT308** ao associarem o coeficiente angular de uma reta à tangente de um ângulo. Por fim, os estudantes poderão recorrer à habilidade **EM13MAT314** para resolver problemas em contextos que envolvem grandezas que se relacionam, como o tempo e o valor de um imóvel ou a pressão e a profundidade.

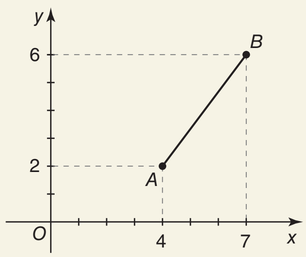
No contexto da **competência específica 4**, os estudantes mobilizam e ampliam as habilidades **EM13MAT401** e **EM13MAT404** neste capítulo, pois, relacionando-se à reta, precisarão converter representações algébricas de funções polinomiais do 1º grau em representações geométricas no plano cartesiano e analisar funções definidas por mais de uma sentença, como o consumo anual de etanol anidro no Brasil ou a população estimada residente no Brasil.

A **competência específica 5** e a habilidade **EM13MAT510** são desenvolvidas a partir da investigação de conjuntos de dados em diferentes contextos e a análise de como as variáveis numéricas referentes a tais conjuntos se comportam.

Sugestões de encaminhamento dos conteúdos

2. Distância entre dois pontos

Revise o teorema de Pitágoras e peça aos estudantes que calculem a medida do segmento $\overline{AB}$ na figura a seguir.



ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

Após a discussão, apresente a fórmula para o cálculo da distância entre dois pontos. Enfatize que essa fórmula também pode ser aplicada no caso em que o segmento é paralelo a um dos eixos coordenados.

3. Ponto médio de um segmento de reta

O boxe **Mentes brilhantes** traz um texto sobre etnoastronomia, apresentando o conhecimento astronômico de povos tradicionais por meio de estudos antropológicos. Aproveite esse momento para conversar com os estudantes explicando que a construção do conhecimento não se dá por uma só pessoa ou por um só grupo étnico; ela é um processo dinâmico e multifacetado, influenciado por diversas culturas e sociedades ao longo da história. Cada povo desenvolveu as próprias formas de entender e interagir com o mundo, resultando em uma rica diversidade de saberes.

4. Reta

Peça aos estudantes duas formas diferentes para determinar uma reta no plano cartesiano. Uma resposta possível é dois pontos distintos ou por um ponto e um ângulo com um dos eixos coordenados.

Defina inclinação e coeficiente angular de uma reta, destacando as retas vertical e horizontal.

No tópico **Condição de alinhamento de três pontos**, pergunte:

- O que significa dizer que três pontos são colineares?
  (Significa que os três pontos pertencem a uma mesma reta.)
- Dados três pontos, A, B e C, tais que as retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{BC}$ sejam paralelas, esses pontos são ou não colineares? Por quê?
  (As retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{BC}$ são paralelas e têm em comum o ponto B; logo, $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{BC}$ são retas coincidentes e, portanto, os pontos A, B e C são colineares.)
- Dados três pontos distintos, A, B e C, tais que as retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{BC}$ sejam concorrentes, esses pontos são ou não colineares? Por quê?
  (Os pontos não são colineares, pois, se fossem, as retas seriam coincidentes, e não concorrentes.)

Após essa discussão, pergunte se os pontos A, B e C da figura apresentada nesse item são colineares. Conclua que sim, pois os coeficientes angulares das retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{BC}$ são iguais. Generalize a condição de alinhamento de três pontos.

5. Equação fundamental da reta

Em relação à figura apresentada no início desse tópico, pergunte:

- O ponto $Q(8, 7)$ pertence à reta r? Por quê?
  (Sim, o ponto Q pertence à reta r, pois o coeficiente angular calculado através dos pontos P e Q é igual ao coeficiente angular de r.)
- O ponto $T(9, 15)$ pertence à reta r? Por quê?
  (Não, o ponto T não pertence à reta r, pois o coeficiente angular calculado através dos pontos P e T é diferente do coeficiente angular de r.)
- Sob que condição o ponto $G(x, y)$ pertence à reta r?
  (O ponto G pertence à reta r se $G \equiv P$ ou se o coeficiente angular calculado através de P e G for igual ao coeficiente angular de r.)

Após essa discussão, deduza a equação fundamental da reta.

Referências suplementares

SILVA, G. M. **Um estudo sobre o uso do GeoGebra na aprendizagem de geometria analítica no Ensino Médio**. 2016. Dissertação (Mestrado em Educação), Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2016.

A dissertação apresenta uma investigação sobre o uso de recursos tecnológicos na aprendizagem de conteúdos de Geometria analítica, indicando que tais ferramentas foram relevantes na aprendizagem de conteúdos acerca de ponto e reta e favoreceram a representação desses objetos em diferentes registros.

VERÍSSIMO, T. E. O. *et al.* Decolonialidade e Educação Matemática: uma interlocução possível na formação de professores?. **Educação Matemática em Revista**, Brasília, DF, v. 29, n. 83, p. 1-18, abr./jun. 2024.

No artigo os autores apresentam alguns aspectos de uma interlocução entre a perspectiva da decolonialidade e a Educação Matemática.

CAPÍTULO 6 Complementos sobre o estudo da reta

Objetivos

Ao final do capítulo, espera-se que o estudante esteja apto a:

- Representar qualquer reta do plano cartesiano por meio de uma equação geral.
- Determinar as coordenadas do ponto de intersecção de duas retas concorrentes.
- Representar qualquer reta não vertical do plano cartesiano por meio da equação reduzida, interpretando, geometricamente, o coeficiente de x (coeficiente angular) e o termo independente (coeficiente linear).
- Transitar entre a equação geral e a equação reduzida de uma reta.
- Reconhecer a posição relativa de duas retas não verticais a partir de seus coeficientes angulares.

- Reconhecer a perpendicularidade entre duas retas a partir de suas equações.
- Determinar uma equação de uma reta perpendicular a uma reta dada por um ponto.
- Expressar as equações paramétricas de uma reta na forma geral ou na reduzida.
- Calcular a distância de um ponto a uma reta.
- Calcular, por meio de um determinante de terceira ordem, a área de um triângulo, conhecidas as coordenadas de seus vértices.
- Verificar, por meio de um determinante de terceira ordem, se três pontos estão alinhados ou não.
- Obter, por meio de um determinante de terceira ordem, a equação de uma reta a partir de dois de seus pontos.
- Representar graficamente uma inequação do 1º grau e as soluções de um sistema de inequações do 1º grau.

Habilidades e competências específicas da BNCC

Ao trabalhar com fatos relativos às Ciências da Natureza que envolvem variação de grandezas, contribuímos para o desenvolvimento da **competência específica 1** e da habilidade **EM13MAT101**. Ao resolver problemas que envolvem posições relativas entre duas retas e cálculo de áreas de superfícies, contribuímos para o desenvolvimento da **competência específica 3** e das habilidades **EM13MAT301** e **EM13MAT307**. Ao trabalhar com atividades que convertem representações algébricas de funções polinomiais em representações geométricas no plano cartesiano, contribuímos para o desenvolvimento da **competência específica 4** e da habilidade **EM13MAT401**. Ao utilizar uma reta para descrever a relação observada ente duas variáveis numéricas, contribuímos para o desenvolvimento da **competência específica 5** e da habilidade **EM13MAT510**.

Sugestões de encaminhamento dos conteúdos

2. Equação geral da reta

Com a colaboração dos estudantes, refaça o **exercício resolvido 1**. Esse problema requer um procedimento que vai se repetir diversas vezes ao longo da Geometria analítica: trata-se da representação de um ponto genérico de uma reta. Enfatize que, para essa representação, atribui-se um valor genérico à variável *x*, obtendo-se o correspondente valor genérico da variável *y*.

4. Equações paramétricas da reta

Inicie o assunto com um exemplo prático. O nosso dia a dia é permeado desse tipo de equação. O contexto apresentado trata da variação do comprimento em função da temperatura nos metais. É uma oportunidade de integração com o professor de Física ao discutir características dos materiais e seu uso em áreas como Física, Química, Engenharia, entre outras. Caso prefira uma introdução com um problema diferente do exposto no livro, sugerimos o seguinte: um corretor da bolsa de valores avaliou que o preço p, em reais, de determinada ação em certo dia, em função do tempo t, em horas, poderia ser estimado pela equação $p = 20 + 0{,}05t$. Simultaneamente, projetou que o número n dessas ações vendidas nesse dia, em função do tempo t, em horas, poderia ser estimado pela equação $n = 100t$. Assim, obteve o sistema de equações:

$$\begin{cases} p = 20 + 0{,}05t \\ n = 100t \end{cases}$$

A partir desse sistema, o corretor avaliou, também, o preço p em função do número n de ações vendidas. Para isso, isolou a variável t na segunda equação e substituiu o valor assim obtido na primeira:

$$\begin{cases} p = 20 + 0{,}05t \\ t = \dfrac{n}{100} \end{cases} \Rightarrow p = 20 + 0{,}05 \cdot \dfrac{n}{100}$$

$$\therefore p = 20 + 0{,}0005n$$

As equações $p = 20 + 0{,}05t$ e $n = 100t$ são chamadas de **equações paramétricas** associadas à equação $p = 20 + 0{,}0005n$. A variável t é chamada de **parâmetro** das equações paramétricas. Generalizando, para qualquer equação que relacione apenas as variáveis x e y, podemos apresentá-las em função de um parâmetro t:

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$$

Se essas equações têm como gráfico uma reta r, então são chamadas de equações **paramétricas da reta *r***.

5. Distância entre ponto e reta

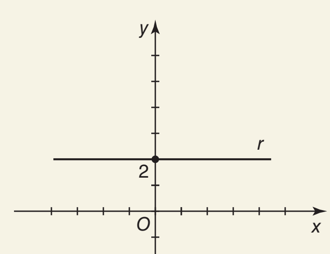
Comente que a Geometria analítica plana estuda as figuras geométricas quanto a forma, posição e medidas de comprimento e área, além de medidas angulares. Por isso, nesse estudo, o conceito de distância é fundamental. Já estudamos a distância entre dois pontos do plano cartesiano. Agora, vamos estudar o conceito de distância entre ponto e reta. A discussão a seguir é essencial para o cálculo da distância e para mostrar que, com o conhecimento que os estudantes já têm, essa distância já pode ser calculada. Pergunte: "Como você calcularia a distância entre o ponto $P(1, 5)$ e a reta de equação $y = x - 2$?". Após a discussão, faça o cálculo na lousa, conforme é feito na introdução deste tópico. Enfatize que a aplicação dessa fórmula requer a equação da reta na forma geral.

6. Aplicação de determinantes na Geometria analítica

O conteúdo do boxe **Trabalho e juventudes** aborda a atuação de um agrimensor. Além disso, destaca a crescente presença e o sucesso das mulheres em profissões tradicionalmente dominadas por homens, exemplificado pela trajetória de Gabriela Mesquita, uma engenheira cartógrafa e agrimensora. O texto enfatiza como essas mulheres desafiam estereótipos e preconceitos, quebrando barreiras no mercado de trabalho. Pode-se aprofundar o assunto propondo aos estudantes que pesquisem sobre a trajetória de mulheres que se destacaram em profissões dominadas por homens e compartilhem os resultados da pesquisa com os colegas. Ao explorar esse tema, contribuímos para o desenvolvimento do **TCT Trabalho** e da **competência geral 6**, pois os estudantes podem se apropriar de procedimentos adotados no mundo do trabalho. Além disso, favorecemos o desenvolvimento do **ODS 5**, ao discutir a importância da igualdade de gênero e de criar oportunidades para que mulheres possam se destacar em todas as áreas profissionais, contribuindo para um ambiente de trabalho mais inclusivo e equitativo.

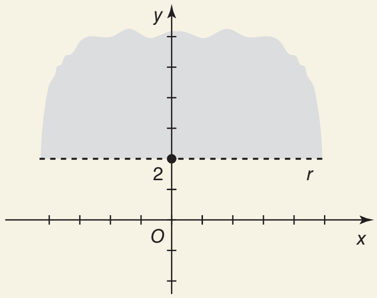
8. Representação gráfica de uma inequação do 1º grau

Considerando a reta horizontal de equação $y = 2$, representada a seguir, pergunte: "O ponto $A(3, 5)$ está acima ou abaixo de r? (Acima.)"; "O ponto $B(5, 1)$ está acima ou abaixo de r? (Abaixo.)"; "Qual é a expressão geral dos pontos G que estão acima de r? ($G(x, y)$, com $y > 2$.)".

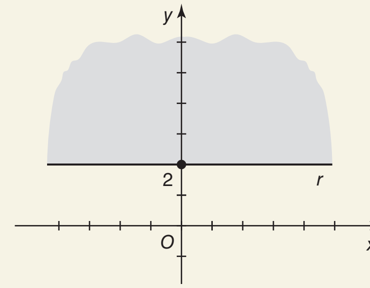


ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

Assim, deduza que a inequação $y > 2$ tem como gráfico o semiplano de origem r e acima de r. Como, nesse caso, a reta não faz parte do semiplano, ela deve aparecer tracejada no gráfico.



Comente que o gráfico da inequação $y \geqslant 2$ é o gráfico anterior unido com a reta r. Nesse caso, a reta aparece no gráfico como uma linha contínua.



CAPÍTULO 7 Equações da circunferência

Objetivos

Ao final do capítulo, espera-se que o estudante esteja apto a:

- Obter a equação reduzida de uma circunferência, conhecendo o centro e o raio.
- Determinar o raio e o centro de uma circunferência a partir da equação reduzida.
- Obter a equação geral (normal) de uma circunferência, conhecendo o centro e o raio.
- Determinar o raio e o centro de uma circunferência a partir da equação geral (normal).
- Reconhecer uma circunferência em uma equação do 2º grau em duas variáveis.
- Identificar a posição relativa entre um ponto e uma circunferência e entre uma reta e uma circunferência.
- Determinar a intersecção entre uma reta e uma circunferência.

Habilidades e competências específicas da BNCC

Ao trabalhar com a equação da circunferência, os estudantes mobilizam aspectos da habilidade **EM13MAT302** e da habilidade **EM13MAT402**, pois precisam aplicar conhecimentos acerca de equações do 2º grau. Assim, as **competências específicas 3** e **4** também são favorecidas, pois os estudantes precisam utilizar estratégias, conceitos e definições para compreender e utilizar, com flexibilidade, diferentes registros no contexto de Geometria e Álgebra.

Sugestões de encaminhamento dos conteúdos

3. Equação geral de uma circunferência

No tópico **Identificação de uma circunferência por uma equação do 2º grau**, comente que uma equação do 2º grau nas variáveis x e y tem a forma $Ax^2 + By^2 - Cxy - Dx + Ey + F = 0$, com $\{A, B, C, D, E, F\} \subset \mathbb{R}$, e A, B e C não são simultaneamente nulos.

Ressalte que, dependendo dos valores de A, B, C, D, E e F, essa equação pode representar várias figuras geométricas diferentes, por exemplo, para $A = 1$, $B = C = D = E = 0$ e $F = -1$, a equação se reduz a $x^2 - 1 = 0$, de onde se obtém $x = 1$ ou $x = -1$, que representam um par de retas verticais no plano cartesiano.

4. Posições relativas entre um ponto e uma circunferência

Defina ponto interior e ponto exterior à circunferência em um plano. O conjunto dos pontos interiores é o interior da circunferência, e o conjunto dos pontos exteriores é o exterior da circunferência.

Antes da teoria, explore os conhecimentos prévios dos estudantes com a questão seguinte.

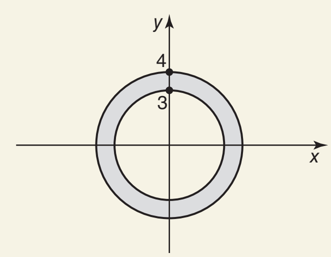
- Em relação à circunferência λ de equação $(x - 7)^2 + (x - 2)^2 = 100$, peça a classificação de cada um dos pontos a seguir como interior, exterior ou pertencente a λ: $M(19, 7)$, $N(13, 10)$ e $P(10, 6)$.

  (M é exterior a λ, N pertence a λ, e P é interior a λ.)

  Após a discussão, generalize.

Sugerimos que seja proposto o seguinte exercício:

- Represente no plano cartesiano os pontos (x, y), que são soluções do sistema: $\begin{cases} x^2 + y^2 \geq 9 \\ x^2 + y^2 \leq 16 \end{cases}$



5. Posições relativas entre uma reta e uma circunferência

No tópico **Intersecção de uma reta com uma circunferência**, pergunte: "Conhecendo-se as equações de duas curvas do plano cartesiano, como podemos obter a intersecção delas? (Basta resolver o sistema formado por essas equações.)".

Após essa discussão, proponha a questão seguinte.

Obtenha a intersecção da reta s de equação $x - y = 0$ com a circunferência λ de equação $x^2 + y^2 = 9$.

($s \cap \lambda = \{(3, 3), (23, 23)\}$)

Referência suplementar

AZEVEDO, G. T.; MALTEMPI, M. V. Metodologias ativas de aprendizagem nas aulas de Matemática: equação da circunferência e construção criativa de pontes. **Educação Matemática Debate**, Montes Claros, v. 3, n. 9, p. 236-254, set./dez. 2019.

No artigo, é apresentada uma proposta didática em que os estudantes de uma turma projetam, calculam e desenham a superfície de uma ponte a partir do modelo de arco de circunferência. A proposta apresenta o uso das metodologias ativas em sala de aula.

CAPÍTULO 8 As cônicas: elipse, hipérbole e parábola

Objetivos

Ao final do capítulo, espera-se que o estudante esteja apto a:

- Identificar cada figura cônica como a intersecção de um plano com uma superfície cônica.
- Definir elipse com base em uma propriedade comum a todos os seus pontos.
- Obter a equação reduzida de uma elipse a partir dos focos e medidas dos semieixos.
- Esboçar o gráfico de uma elipse a partir de sua equação.
- Definir hipérbole com base em uma propriedade comum a todos os seus pontos.
- Obter a equação reduzida de uma hipérbole a partir dos focos e das medidas dos semieixos.
- Esboçar o gráfico de uma hipérbole a partir de sua equação.
- Definir parábola com base em uma propriedade comum a todos os seus pontos.
- Obter a equação reduzida de uma parábola a partir do vértice e do parâmetro.
- Esboçar o gráfico de uma parábola a partir de sua equação.

Habilidades e competências específicas da BNCC

Ao trabalhar com construção de hipérboles, contribuímos para o desenvolvimento da **competência específica 1** e da habilidade **EM13MAT105**. Ao empregar funções polinomiais na resolução de problemas envolvendo parábolas, favorecemos o desenvolvimento da **competência específica 3** e da habilidade **EM13MAT302**. Ao converter representações algébricas em geométricas, contribuímos para o desenvolvimento da **competência específica 4** e da habilidade **EM13MAT402**.

Sugestões de encaminhamento dos conteúdos

A **abertura** apresenta a imagem de um dos maiores fornos solares do mundo, que opera desde 1970. Um grande benefício dessa tecnologia é a utilização de uma forma de energia renovável e limpa, que deverá se tornar competitiva em médio prazo. O funcionamento da tecnologia utilizada no forno solar pode ser tema de uma pesquisa envolvendo a área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias, com a contribuição do professor de Física. A aplicação prática envolvendo uma superfície parabólica na construção de fornos solares será retomada no **exercício proposto 18**, que explora o mesmo princípio aplicado na construção de antenas parabólicas. Essa pode ser mais uma oportunidade de integração com Física.

Se considerar adequado, verifique se os estudantes conhecem outras fontes de energia renovável, como a eólica (obtida do vento), a hidráulica (obtida dos rios e correntes de água doce), a maremotriz (obtida das marés e oceanos) e a geotérmica (obtida do calor da Terra). Esse estudo pode ser ampliado com a participação do professor de Geografia, promovendo uma discussão sobre a matriz energética brasileira e os impactos econômicos e socioambientais causados pelo uso de fontes de energia limpa. Para isso, os estudantes podem trazer para a discussão dados referentes a essas tecnologias no Brasil e no mundo. O tema contribui para a conscientização dos estudantes a respeito do consumo responsável em diversos níveis, contemplando o trabalho com a competência de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas. Além disso, favorece o desenvolvimento dos **TCTs Ciência e Tecnologia** e **Educação Ambiental** e das **competências gerais 1** e **10**.

1. O que é uma figura cônica

Para responder o boxe **Reflexão** da página 200, explique que a intersecção de plano α e uma superfície cônica de duas folhas S pode ser: um ponto quando as geratrizes de S são secantes a α em V (Figura 1); uma reta quando α contém uma única geratriz de S (Figura 2); e um par de retas quando α contém duas geratrizes distintas de S; por exemplo, quando α contém o eixo e do cone (Figura 3).

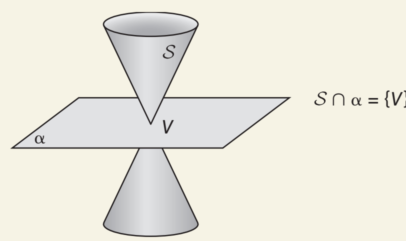


Figura 1

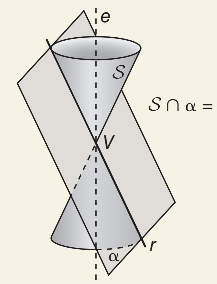


Figura 2

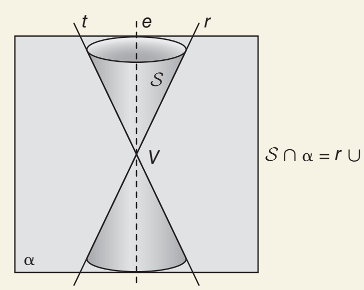


Figura 3

Enfatize que, além da elipse, hipérbole e parábola, a intersecção de um plano com uma superfície cônica de duas folhas pode ser um ponto, uma reta ou um par de retas concorrentes.

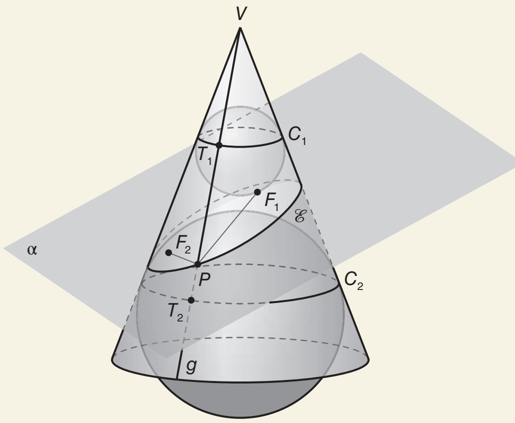
2. Elipse

A abordagem contextualizada das elipses e, mais adiante, das hipérboles e parábolas, possibilita o trabalho com Ciências da Natureza e suas Tecnologias ao propor uma reflexão sobre a dinâmica da vida, analisar fenômenos naturais e relacioná-los aos elementos matemáticos que os descrevem por meio da Geometria analítica. Se possível, promova a participação do professor de Física para complementar essa contextualização. Se houver possibilidade, demonstre aos estudantes a propriedade que define uma elipse por meio do seguinte problema:

Seja α um plano que não passa pelo vértice de um cone circular reto $\mathscr{E}$ e intercepta todas as geratrizes desse cone, obliquamente ao seu eixo e. O conjunto $\mathscr{E}$, intersecção do plano com a superfície lateral do cone, é uma elipse. Provar que todo ponto P, pertencente a $\mathscr{E}$, satisfaz a condição $PF_1 + PF_2 = 2a$, em que F_1 e F_2 são dois pontos distintos de α, e $2a$ é uma medida maior que F_1F_2.

Na resolução desse problema, consideremos as duas esferas tangentes a todas as geratrizes do cone e ao plano α nos pontos

F_1 e F_2. Os pontos de tangência das geratrizes na esfera menor formam uma circunferência C_1 e os pontos de tangência das geratrizes na esfera maior formam uma circunferência C_2. Consideremos, ainda, uma geratriz g qualquer do cone que intercepta C_1, $\mathscr{E}$ e C_2 nos pontos T_1, P e T_2, respectivamente, conforme mostra a figura a seguir.



Temos:

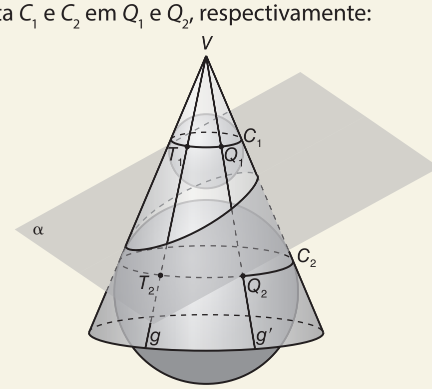
(1) Os segmentos $\overline{PF_1}$ e $\overline{PT_1}$ são tangentes à mesma esfera; logo: $PF_1 = PT_1$

(2) Os segmentos $\overline{PF_2}$ e $\overline{PT_2}$ são tangentes à mesma esfera; logo: $PF_2 = PT_2$

Adicionando, membro a membro, (1) e (2), temos:

$PF_1 + PF_2 = PT_1 + PT_2 = T_1T_2$ (3)

Vamos provar que a medida T_1T_2 é constante para qualquer geratriz g considerada. Para isso, tracemos outra geratriz g' que intercepta C_1 e C_2 em Q_1 e Q_2, respectivamente:



ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

Temos:

(4) Os segmentos $\overline{VT_2}$ e $\overline{VQ_2}$ são tangentes à mesma esfera e, portanto: $VT_2 = VQ_2$

(5) Os segmentos $\overline{VT_1}$ e $\overline{VQ_1}$ são tangentes à mesma esfera e, portanto: $VT_1 = VQ_1$

Subtraindo (4) e (5), membro a membro, obtemos:

$VT_2 - VT_1 = VQ_2 - VQ_1$

Portanto: $T_1T_2 = Q_1Q_2$

Assim, de (3) concluímos que a soma $PF_1 + PF_2 = k$, com k constante.

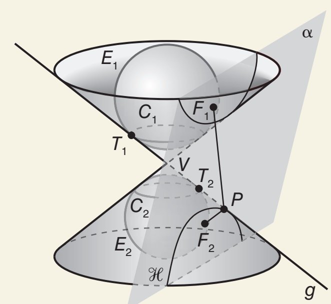
Essa constante é a medida do eixo maior da elipse, que é maior que a distância entre os pontos (focos) F_1 e F_2.

3. Hipérbole

A exemplificação do uso da forma hiperboloide na construção de torres de resfriamento de usinas nucleares possibilita a contribuição do professor de Física, explorando os processos tecnológicos envolvidos. Essa contextualização favorece uma discussão a respeito dos impactos socioambientais relacionados às usinas nucleares em âmbito local, regional e global e pode ser explorada nesse momento. Se for possível, demonstre a propriedade que define a hipérbole por meio do seguinte problema:

Sejam C uma superfície cônica circular reta de duas folhas de geratrizes ilimitadas e vértice V e um plano α que não passa por V e intercepta as duas folhas de C. O conjunto $\mathscr{H}$, intersecção do plano com essa superfície, é uma hipérbole. Provar que todo ponto P, pertencente a $\mathscr{H}$, satisfaz a condição $|PF_1 - PF_2| = 2a$, em que F_1 e F_2 são dois pontos distintos de α e $2a$ é uma medida menor que F_1F_2.

Na resolução desse problema, consideremos as esferas E_1 e E_2 tangentes a todas as geratrizes do cone e ao plano α nos pontos F_1 e F_2, respectivamente. Os pontos de tangência das geratrizes na esfera E_1 formam uma circunferência C_1, e os pontos de tangência das geratrizes na esfera E_2 formam uma circunferência C_2. Consideremos, ainda, uma geratriz g qualquer do cone que intercepta C_1, C_2 e $\mathscr{H}$ nos pontos T_1, T_2 e P, respectivamente, com $PF_1 > PF_2$, conforme mostra a figura abaixo.



Temos:

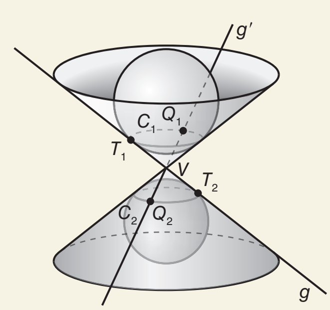
(1) Os segmentos $\overline{PF_1}$ e $\overline{PT_1}$ são tangentes à mesma esfera; logo: $PF_1 = PT_1$

(2) Os segmentos $\overline{PF_2}$ e $\overline{PT_2}$ são tangentes à mesma esfera; logo: $PF_2 = PT_2$

Subtraindo, membro a membro, (1) e (2), temos:

$PF_1 - PF_2 = PT_1 - PT_2 = T_1T_2$ (3)

Vamos provar que a medida T_1T_2 é constante para qualquer geratriz g considerada. Para isso, tracemos outra geratriz g' que intercepta C_1 e C_2 em Q_1 e Q_2, respectivamente. Veja a figura:



Então:

(4) Os segmentos $\overline{VT_1}$ e $\overline{VQ_1}$ são tangentes à mesma esfera e, portanto: $VT_1 = VQ_1$

(5) Os segmentos $\overline{VT_2}$ e $\overline{VQ_2}$ são tangentes à mesma esfera e, portanto: $VT_2 = VQ_2$

Adicionando (4) e (5), membro a membro, obtemos:

$VT_1 + VT_2 = VQ_1 + VQ_2$

Portanto: $T_1T_2 = Q_1Q_2$

Assim, de (3) concluímos que a diferença $PF_1 - PF_2 = k$, com k constante.

Essa constante é a medida $2a$ do eixo real da hipérbole, que é menor que a distância entre os pontos (focos) F_1 e F_2. Se admitíssemos que a geratriz g interceptasse o outro ramo da hipérbole e, portanto, $PF_2 > PF_1$, teríamos, de forma análoga: $PF_2 - PF_1 = T_1T_2$

Assim, concluímos que: $|PF_1 - PF_2| = T_1T_2 \Rightarrow |PF_1 - PF_2| = 2a$

Para facilitar a obtenção das equações das assíntotas de uma hipérbole, a partir da equação reduzida, sugerimos que sejam explorados outros teoremas. Acompanhe:

I. As assíntotas da hipérbole ($\mathscr{H}$) $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$ formam o conjunto de pontos (x, y) que satisfazem à equação $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 0$, com $\{x_0, y_0, a, b\} \subset \mathbb{R}$, $a > 0$ e $b > 0$.

II. As assíntotas da hipérbole ($\mathscr{H}$) $\frac{(y-y_0)^2}{a^2} - \frac{(x-x_0)^2}{b^2} = 1$ formam o conjunto de pontos (x, y) que satisfazem à equação $\frac{(y-y_0)^2}{a^2} - \frac{(x-x_0)^2}{b^2} = 0$, com $\{x_0, y_0, a, b\} \subset \mathbb{R}$, $a > 0$ e $b > 0$.

Por exemplo, as equações das assíntotas da hipérbole $\mathscr{H}$ de equação $x^2 - y^2 = 1$ são dadas por: $x^2 - y^2 = 0$; logo, as assíntotas têm equações $x = y$ ou $x = -y$.

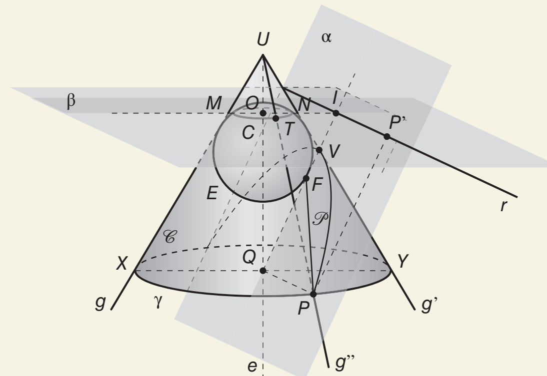
4. Parábola

O exemplo apresentado para trabalhar a parábola favorece mais uma vez a participação do professor de Física. Se possível, promova uma contextualização a respeito da órbita dos cometas explorando a dinâmica da Terra e do cosmos. Se possível, demonstre a propriedade que define a parábola por meio do seguinte problema:

Sejam $\mathscr{C}$ uma superfície cônica circular reta de geratrizes ilimitadas e vértice U e um plano α que intercepta $\mathscr{C}$ paralelamente a uma geratriz g. O conjunto $\mathscr{P}$, intersecção do plano α com essa superfície cônica, é uma parábola. Provar que todo ponto P, pertencente a $\mathscr{P}$, equidista de um ponto F e de uma reta r, com $F \in a$, $r \subset a$ e $F \notin r$.

Na resolução desse problema, consideremos a esfera E tangente a todas as geratrizes do cone e ao plano α no ponto F. Os pontos de tangência das geratrizes na esfera formam uma circunferência C de centro O, contida no plano β, com $\alpha \cap \beta = r$.

Sejam: γ o plano que contém o eixo e do cone, com $\gamma \perp \alpha$; M e N os pontos de intersecção de C com γ; I a intersecção de $\overleftrightarrow{MN}$ com α; g a geratriz que passa por M; g' a geratriz que passa por N; V o ponto de intersecção de g' com $\mathscr{P}$; g'' a geratriz que tangencia a esfera em T, com $T \neq N$, e intercepta em P a parábola; λ o plano que passa por P, paralelamente a β, interceptando o eixo do cone em Q; X e Y os pontos de intersecção de λ com γ; e P' a projeção ortogonal de P sobre r.



ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

Temos:

(1) $\overline{PT}$ e $\overline{PF}$ são tangentes à esfera; logo: $PT = PF$

(2) Das congruências $\triangle UQP \cong \triangle UQY$ e $\triangle UOT \cong \triangle UON$, obtemos:

$$\begin{cases} PU = YU \\ TU = NU \end{cases} \Rightarrow \underbrace{PU - TU}_{PT} = \underbrace{YU - NU}_{YN}$$

$\therefore PT = YN$

De (1) e (2), deduzimos que: $PT = PF = YN$ (3)

(4) Os triângulos $\triangle VQY$ e $\triangle VIN$ são isósceles, pois ambos são semelhantes ao triângulo $\triangle UXY$, que é isósceles; logo: $YN = QI$

Pelas congruências $\triangle UOM \cong \triangle UON \cong \triangle UOT$ e pelo fato de $\widehat{UOM}$ e $\widehat{UON}$ serem ângulos coplanares e complementares, deduzimos que $\widehat{UOM}$, $\widehat{UON}$ e $\widehat{UOT}$ são ângulos retos e, portanto, o eixo e é perpendicular ao plano β:

$$\begin{cases} e \subset \gamma \\ e \perp b \end{cases} \Rightarrow \gamma \perp \beta$$

$\gamma \perp \beta$, $\gamma \perp \alpha$ e r é a reta comum a α e β; logo: $r \perp \gamma$

$r \perp \gamma$; $\overleftrightarrow{QI} \subset \gamma$ e r concorre com $\overleftrightarrow{QI}$; logo: $r \perp \overleftrightarrow{QI}$

(5) P' é projeção ortogonal de P sobre r; logo: $r \perp P''$

Deduzimos, então, que: $\overline{PP'} // \overline{QI}$

(6) $r \subset \alpha$ e $\overleftrightarrow{QP} \subset \alpha$, β e λ são planos paralelos distintos, $r \subset \beta$ e $\overleftrightarrow{QP} \subset \lambda$; logo: $r \cap \overleftrightarrow{QP} = \varnothing$

Concluímos, então, que r e $\overleftrightarrow{QP}$ são retas paralelas, pois são coplanares que não têm ponto em comum; logo: $\overleftrightarrow{IP'} // \overleftrightarrow{QP}$ (7)

(8) De (5) e (7) deduzimos que o quadrilátero $PQIP'$ é um paralelogramo (observe que ele é um retângulo); logo: $QI = PP'$

Assim, concluímos, de (1), (4) e (7), que $PF = PP'$, ou seja, qualquer ponto P da parábola, distinto de V, equidista de F e r. Para finalizar, vamos provar que V também equidista de F e r. De fato:

$\overline{VN}$ e $\overline{VF}$ são tangentes à esfera; logo: $VN = VF$

$\triangle VNI$ é isósceles de base $\overline{NI}$; logo: $VN = VI$

Deduzimos, então, que: $VN = VF = VI$ e, portanto, V equidista de F e r.

Referências suplementares

AMBIENTE ENERGIA. **Caminhos da Energia**: Soluções em eficiência energética e sustentabilidade. 2012. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=q3VDUt_swN4. Acesso em: 2 out. 2024.

O vídeo aborda algumas soluções em eficiência energética e sustentabilidade.

CASA DAS CIÊNCIAS. **Cortando cônicas**. Disponível em: https://www.casadasciencias.org/recurso/8704. Acesso em: 2 out. 2024.

O vídeo mostra como obter as diferentes cônicas (elipse, parábola e hipérbole) por cortes de um cone.

CAPÍTULO 9 Conjunto dos números complexos

Objetivos

Ao final do capítulo, espera-se que o estudante esteja apto a:

- Conceituar número complexo e representá-lo nas formas algébrica e trigonométrica.
- Operar com números complexos nas formas algébrica e trigonométrica.
- Calcular potências de expoente inteiro de i e de números complexos na forma $a + bi$, sendo a e b números reais.
- Representar geometricamente um número complexo.
- Calcular o módulo de um número complexo e aplicar as propriedades dos módulos.
- Determinar o lugar geométrico dos afixos dos números complexos que satisfazem determinada propriedade.
- Representar um número complexo na forma trigonométrica.
- Aplicar o teorema De Moivre.

Habilidade e competência específica da BNCC

Neste capítulo, os estudantes poderão mobilizar a habilidade **EM13MAT306** ao associar conceitos de trigonometria à representação de números complexos na forma trigonométrica e, ainda, a **competência específica 3** ao interpretar os números complexos representados nessa forma e no plano complexo.

Sugestões de encaminhamento dos conteúdos

1. Número complexo

Defina número complexo esclarecendo que, embora historicamente tenha-se usado o radical $\sqrt{-1}$ para representar a unidade imaginária i, é preferível não usá-lo, pois a radiciação em $\mathbb{C}$ não é uma operação (por exemplo, há três raízes cúbicas complexas distintas de 8 e, portanto, como o resultado não é único, a radiciação não é operação em $\mathbb{C}$); por isso, não se deve usar o símbolo $\sqrt[n]{a}$ para indicar as raízes complexas n-ésimas de a. Por exemplo, se escrevermos:

$$\sqrt[3]{8} = 2, \sqrt[3]{8} = -1 + i\sqrt{3} \text{ e } \sqrt[3]{8} = -1 - i\sqrt{3}$$

poderemos concluir, equivocadamente, que:

$$2 = -1 + i\sqrt{3} = -1 - i\sqrt{3}$$

(pela propriedade transitiva da igualdade). Assim, o símbolo $\sqrt[3]{8}$ só deve ser usado para indicar a raiz cúbica real de 8. Se quisermos indicar todas as raízes complexas, devemos escrever por extenso: “as raízes cúbicas de 8”.

2. Operações elementares com números complexos

No **Mentes brilhantes**, enfatize que as necessidades, práticas ou teóricas, de cada época provocaram o surgimento de novos números. A insuficiência dos números naturais para a subtração, por exemplo, originou o conjunto dos números inteiros; e a insuficiência destes para a divisão originou o conjunto dos números racionais, e assim por diante. Se julgar conveniente, detalhe um pouco mais o texto apresentado com a sugestão do problema a seguir que mostrará a insuficiência dos números reais diante de certas situações concretas ou abstratas.

Um engenheiro projetou duas caixas-d’água de mesma altura: uma em formato de cubo e a outra em formato de um paralelepípedo reto-retângulo com 6 m² de área da base. O volume da caixa cúbica deve ter 4 m³ a menos que o volume da outra caixa. Qual deve ser a medida, em metro, da aresta da caixa cúbica?

Indicando por x a medida da aresta da caixa cúbica, temos que o valor de x é raiz da equação $x^2 = 6x - 4$, que é equivalente a $x^3 - 6x + 4 = 0$.

Essa equação pode ser resolvida pelo método proposto por volta de 1535 pelo matemático italiano Niccolò Fontana (c. 1500-1557), conhecido como Tartaglia. Esse método consiste em substituir x por $u - v$, de modo que o produto uv seja igual à terça parte do coeficiente de x, ou seja, $uv = -\frac{6}{3} = -2$. Assim:

$$\begin{cases} (u - v)^3 - 6(u - v) + 4 = 0 \\ uv = -2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u^3 - 3u^2v + 3uv^2 - v^3 - 6u + 6v + 4 = 0 \\ uv = -2 \end{cases}$$

De onde obtemos a equação: $u^6 + 4u^3 + 8 = 0$

Fazendo a mudança de variável $u^3 = t$, obtemos a equação do 2º grau $t^2 + 4t + 8 = 0$, em que $\Delta = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8 = -16$ e, portanto: $t = \frac{-4 \pm \sqrt{-16}}{2}$

Assim: $u^3 = \frac{-4 \pm \sqrt{-16}}{2}$

Nesse momento poderíamos ser levados a concluir que a equação $x^3 - 6x + 4 = 0$ não tem raiz real, pois não existe no conjunto $\mathbb{R}$ o número $\sqrt{-16}$. Porém, essa conclusão é equivocada, uma vez que o número real 2 é raiz da equação, como se constata pela substituição de x por 2: $2^3 - 6 \cdot 2 + 4 = 0$

Essa constatação nos leva a admitir a possibilidade da existência do número **não real** $\sqrt{-16}$.

Historicamente, Girolamo Cardano (1501-1576), médico e matemático italiano, após ter aprendido com Tartaglia esse método, foi o primeiro a admitir a existência de números não reais durante a resolução de uma equação cúbica, como essa que discutimos. Após tal descoberta, um matemático contemporâneo de Cardano, Rafael Bombelli (c. 1526-1573), teve o que considerou uma “ideia louca”: começou a operar com os números não reais estudados por Cardano. Bombelli admitiu, por exemplo, a identidade: $2 + \sqrt{-1} + 3 - \sqrt{-1} = 5$; fornecendo, assim, subsídios para o início da construção do **conjunto dos números complexos**.

5. Módulo de um número complexo

Defina módulo de um número complexo como uma extensão do conceito de módulo de um número real. Pela facilidade dos procedimentos, sugerimos que sejam demonstradas as propriedades dos módulos, de M1 a M5. Acompanhe a seguir.

M1. Seja $z = x + yi$, com $\{x, y\} \subset \mathbb{R}$.

Como $x^2 \geqslant 0$ e $y^2 \geqslant 0$, temos que $x^2 + y^2 \geqslant 0$ e, portanto, $\sqrt{x^2+y^2} \geqslant 0$, isto é, $|z| \geqslant 0$.

M2. Sendo $z = x + yi$, com $\{x, y\} \subset \mathbb{R}$, temos:

$$z \cdot \overline{z} = (x + yi)(x - yi) = x^2 + y^2 = \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2 = |z|^2$$

M3. $$|z_1 \cdot z_2|^2 \overset{M2}{=} (z_1 \cdot z_2) \cdot \overline{(z_1 \cdot z_2)} = (z_1 \cdot z_2) \cdot (\overline{z}_1 \cdot \overline{z}_2) =$$

$$= (z_1 \cdot \overline{z}_1) \cdot (z_2 \cdot \overline{z}_2) \overset{M2}{=} |z_1|^2 \cdot |z_2|^2$$

$$\therefore |z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$$

M4. $$\left|\frac{z_1}{z_2}\right|^2 \overset{M2}{=} \frac{z_1}{z_2} \cdot \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{\overline{z}_1}{\overline{z}_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z}_1}{z_2 \cdot \overline{z}_2} \overset{M2}{=} \frac{|z_1|^2}{|z_2|^2}$$

$$\therefore \frac{|z_1|}{|z_2|} = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

M5. $$|z^n|^2 \overset{M2}{=} z^n \cdot \overline{z^n} = z^n \cdot (\overline{z})^n = (z \cdot \overline{z})^n \overset{M2}{=} (|z|^2)^n = (|z|^n)^2$$

$$\therefore |z^n| = |z|^n$$

Referência suplementar

BERNARDI, A. A. **GeoPlexo**: um material manipulável para o ensino dos números complexos. 2015. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Pato Branco, 2015.

A dissertação trata do desenvolvimento de um material didático manipulável para auxiliar no ensino e aprendizagem dos números complexos. O objetivo principal é facilitar a visualização geométrica e a compreensão desse conceito matemático.

CAPÍTULO 10 Polinômios e equações polinomiais

Objetivos

Ao final do capítulo, espera-se que o estudante esteja apto a:

- Dominar os conceitos básicos sobre polinômios em uma variável, tais como: valor numérico, grau, identidade e operações elementares.
- Dividir polinômios pelo método da chave.
- Aplicar o teorema do resto e o de D'Alembert.
- Verificar se um polinômio $P(x)$ é divisível por $kx - a$, com $k \neq 0$.
- Aplicar o dispositivo prático de Briot-Ruffini na divisão de um polinômio $P(x)$ por $kx - a$, com $k \neq 0$.
- Dominar os conceitos básicos sobre equações polinomiais em uma variável, tais como conjunto universo, raiz, conjunto solução.
- Resolver uma equação polinomial, sob as restrições apresentadas no capítulo.
- Aplicar o teorema fundamental da Álgebra e o teorema da decomposição.
- Determinar a multiplicidade de uma raiz de uma equação polinomial.
- Aplicar o teorema das raízes imaginárias e o teorema das raízes racionais.
- Aplicar as relações de Girard em equações polinomiais.

Habilidades e competências específicas da BNCC

Nesse capítulo, exploramos os polinômios e as equações polinomiais para resolver problemas em diversos contextos, favorecendo o trabalho com a habilidade **EM13MAT302**, além da **competência específica 3**.

Sugestões de encaminhamento dos conteúdos

1. Polinômios! Para quê?

O boxe **Mentes brilhantes** aborda a importância de Katherine Johnson para o sucesso da missão que levou o homem à Lua em 1969. Ele destaca como Johnson, junto com outras mulheres afro-americanas da Nasa, desempenhou um papel crucial ao efetuar cálculos precisos para o lançamento e retorno das naves espaciais. O texto também menciona seu trabalho em missões anteriores, a confiança que astronautas e colegas depositavam nela e a falta de computadores na época, mostrando como essas mulheres, com seus conhecimentos matemáticos, foram essenciais para a exploração espacial. Esse assunto favorece o desenvolvimento da **competência geral 1**, ao abordar o conhecimento matemático para resolver problemas complexos, como os cálculos necessários para o sucesso das missões espaciais; e da **competência geral 6**, ao abordar a importância do trabalho em equipe.

2. Polinômio com uma variável

Antes de apresentar a definição de polinômio em uma variável, fale para os estudantes que esse estudo está intimamente relacionado à expansão de números naturais em determinada base, por exemplo:

Observe a expansão do número 235 na base 10:

$235 = 2 \times 10^2 + 3 \times 10^1 + 5 \times 10^0$

Note também a expansão do número 235 na base 2:

$235 = 1 \times 2^7 + 1 \times 2^6 + 1 \times 2^5 + 0 \times 2^4 + 1 \times 2^3 +$
$+ 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0$

De modo geral, podemos representar o número 235 em qualquer base natural x, não nula, obtendo uma expansão da forma: $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + a_{n-3} x^{n-3} + \ldots + a_1 x^1 + a_0 x^0$ com $\{n, a_i\} \subset \mathbb{R}$ e $a_i < x$, para todo i com $0 \leqslant i \leqslant n$.

Se ampliarmos para o conjunto dos números complexos os valores de x e a_i, com $0 \leqslant i \leqslant n$, essa expressão passa a ser chamada de **polinômio complexo de variável complexa *x***.

Essa introdução procura partir de um conhecimento prévio do estudante.

3. Divisão de polinômios por binômios do 1º grau

Sempre que possível, faça uma analogia entre as propriedades dos polinômios e as propriedades dos números inteiros. Por exemplo, para dividir 48 por 6, podemos dividir, sucessivamente, 48 pelos fatores primos de 6:

$$
\begin{array}{l|l}
48 & 2 \\ \hline
0 & 24 \;\; \begin{array}{|l} 3 \\ \hline \end{array} \\
 & 0 \quad\;\; 8
\end{array}
$$

Fatores de 6

Quociente da divisão de 48 por 6

Um raciocínio análogo pode ser usado na divisão de polinômios. Por exemplo, para dividir o polinômio $P(x) \equiv x^3 - 2x^2 - x + 2$ por $D(x) \equiv x^2 - 1$, podemos dividir sucessivamente $P(x)$ pelos fatores do 1º grau de $D(x)$:

Fatores de $x^2 - 1$

$$
\begin{array}{r|l}
x^3 - 2x^2 - \;\; x + 2 & x + 1 \\ \cline{2-2}
x^3 + \;\; x^2 \qquad\qquad & x^2 - 3x + 2 \\ \cline{1-1}
-3x^2 - \;\; x + 2 & x^2 - x \\ \cline{2-2}
-3x^2 - 3x \quad & -2x + 2 \\ \cline{1-1}
2x + 2 & -2x + 2 \\ \cline{2-2}
2x + 2 & \quad 0 \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{|l}
x - 1 \\ \hline
x - 2
\end{array}
$$

$Q(x)$

Conclua que a importância do estudo da divisão de um polinômio $P(x)$ por binômios do 1º grau se deve ao fato de que todo polinômio não constante $D(x)$ pode ser decomposto em fatores do 1º grau e, portanto, a divisão de $P(x)$ por $D(x)$ pode ser efetuada por meio de divisões sucessivas pelos fatores do 1º grau de $D(x)$.

7. Teorema das raízes imaginárias

Enuncie o teorema das raízes imaginárias: "Se um número imaginário é raiz de uma equação polinomial com coeficientes reais, então seu conjugado também é raiz dessa equação".

Demonstração do teorema

Seja $P(x) \equiv a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_0$ um polinômio com coeficientes reais tal que o número imaginário $z = a + bi$, com $a \in \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}^*$, seja raiz da equação $P(x) = 0$.

Temos que $P(z) = 0$, ou seja:

$a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + a_{n-2}z^{n-2} + \ldots + a_0 = 0$

Se dois complexos são iguais, então seus conjugados são iguais. Por isso, podemos concluir da sentença anterior que:

$\overline{a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + a_{n-2}z^{n-2} + \ldots + a_0} = \overline{0}$

Pelas propriedades do conjugado de um complexo, podemos escrever:

$\overline{a_n z^n} + \overline{a_{n-1}z^{n-1}} + \overline{a_{n-2}z^{n-2}} + \ldots + \overline{a_0} = \overline{0}$

$\overline{a_n}\,\overline{z^n} + \overline{a_{n-1}}\,\overline{z^{n-1}} + \overline{a_{n-2}}\,\overline{z^{n-2}} + \ldots + \overline{a_0} = \overline{0}$

$a_n \overline{z^n} + a_{n-1}\overline{z^{n-1}} + a_{n-2}\overline{z^{n-2}} + \ldots + a_0 = 0$

$a_n (\overline{z})^n + a_{n-1}(\overline{z})^{n-1} + a_{n-2}(\overline{z})^{n-2} + \ldots + a_0 = 0$

Assim, $P(\overline{z}) = 0$; e, portanto, $\overline{z}$ é raiz da equação $P(x) = 0$. Enfatize as consequências desse teorema:

- Se um número imaginário z é raiz de multiplicidade k de uma equação polinomial de coeficientes reais, então o conjugado de z também é raiz de multiplicidade k dessa equação.
- O número de raízes imaginárias de uma equação polinomial de coeficientes reais é necessariamente par.
- Se uma equação polinomial de coeficientes reais tem grau ímpar, então essa equação tem pelo menos uma raiz real.

8. Teorema das raízes racionais

Como a demonstração do teorema das raízes racionais é longa e de difícil entendimento, sugerimos que seja demonstrado apenas para o caso particular de uma equação polinomial do 2º grau, apresentado a seguir.

Se $\frac{p}{q}$, com p e q inteiros primos entre si e $q \neq 0$, é raiz da equação do 2º grau com coeficientes inteiros $ax^2 + bx + c = 0$, então p é divisor de c, e q, divisor de a.

Justificativa: temos que $a\left(\frac{p}{q}\right)^2 + b\left(\frac{p}{q}\right) + c = 0$.

Essa igualdade é equivalente a: $p(ap + bq) = 2cq^2$ (1)

De (1) temos que p é divisor de $2cq^2$. Como p e q são primos entre si, concluímos que p é divisor de c.

De (1) temos, ainda, que q é divisor de $p(ap + bq)$.

Como p e q são primos entre si, podemos garantir que q é divisor de $ap + bq$.

Como q é divisor de bq e q é divisor de $ap + bq$, temos que q é divisor de ap.

Como p e q são primos entre si e q é divisor de ap, temos que q é divisor de a.

Referências suplementares

COUTINHO, S. C. **Polinômios e computação algébrica**. Rio de Janeiro: IMPA, 2012.

Em sua primeira parte, o livro apresenta uma revisão tradicional sobre Álgebra, sobretudo polinômios. Na segunda, mostra aplicações da computação no estudo dos polinômios.

MILIES, C. P. A solução de Tartaglia para a equação do terceiro grau. Disponível em: http://www.rpm.org.br/cdrpm/25/4.htm. Acesso em: 2 out. 2024.

O artigo apresenta a solução de Tartaglia para a equação do 3º grau.

ANDRADE, L. N. Raízes racionais de uma equação algébrica de coeficientes inteiros. Disponível em: http://www.rpm.org.br/cdrpm/14/8.htm. Acesso em: 2 out. 2024.

O texto traz mais informações sobre raízes racionais de uma equação algébrica de coeficientes inteiros.

Resoluções de exercícios

Neste suplemento para o professor, as respostas de todos os exercícios, atividades e problemas estão indicadas na reprodução do livro do estudante. Nesta seção, apresentaremos o encaminhamento das resoluções dos exercícios e das atividades que demandam cálculos e/ou orientações para sua resolução.

CAPÍTULO 1 Probabilidade

ALÉM DA TEORIA

3. Pelo enunciado, das 300 pessoas infectadas, espera-se que 85% tenham apresentado o resultado positivo no teste e que 15% tenham apresentado o resultado negativo (falso-negativo).

Positivo: $300 \cdot 85\,\% = 255$

Falso-negativo: $300 \cdot 15\,\% = 45$

Como foram realizados 500 testes, e 300 pessoas estavam infectadas, então 200 pessoas não estavam infectadas. Pelo enunciado, das 200 pessoas não infectadas, espera-se que 94% tenham apresentado o resultado negativo no teste e que 6% tenham apresentado o resultado positivo (falso-positivo).

Negativo: $200 \cdot 94\,\% = 188$

Falso-positivo: $200 \cdot 6\,\% = 12$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. alternativa **d**

Indicando por C e K as faces "cara" e "coroa", respectivamente, temos o espaço amostral $E = \{(C, C), (C, K), (K, C), (K, K)\}$, $n(E) = 4$, e o evento $A = \{(C, K), (K, C)\}$, $n(A) = 2$.

Logo: $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(E)} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2} = 50\%$

2. **b.** O evento A formado pelos ternos ordenados com pelo menos duas "caras" é: $A = \{(C, C, C), (C, C, K), (C, K, C), (K, C, C)\}$, $n(A) = 4$

Logo: $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(E)} = \dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2}$

c. O evento B formado pelos ternos ordenados com no máximo duas "caras" é: $B = \{(C, C, K), (C, K, C), (K, C, C), (C, K, K) (K, C, K), (K, K, C), (K, K, K)\}$, $n(B) = 7$. Logo:

$P(B) = \dfrac{n(B)}{n(E)} = \dfrac{7}{8}$

3. Pelo espaço amostral E desse experimento, temos $n(E) = 36$.

a. $A = \{(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)\}$, $n(A) = 6$

Logo: $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(E)} = \dfrac{6}{36} = \dfrac{1}{6}$

b. Análogo ao item **a**: $P(B) = \dfrac{n(B)}{n(E)} = \dfrac{5}{36}$

c. $C = \varnothing$, $n(C) = 0$. Logo: $P(C) = \dfrac{n(C)}{n(E)} = \dfrac{0}{36} = 0$

d. Análogo ao item **a**: $P(D) = \dfrac{n(D)}{n(E)} = \dfrac{6}{36} = \dfrac{1}{6}$

e. $P(E) = \dfrac{n(E)}{n(E)} = \dfrac{36}{36} = 1$

4. **a.**

lançamento	1º	2º	3º	
	6	· 6	· 6	= 216

b. $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(E)} = \dfrac{6}{216} = \dfrac{1}{36}$

5. Sejam:

- E o espaço amostral das crianças examinadas;
- A o evento das crianças examinadas com deficiência de vitamina A;
- C o evento das crianças examinadas com deficiência de vitamina C.

Indicando por x o número de crianças que apresentam deficiência dos dois tipos de vitamina, A e C, temos:

$(385 - x) + x + (428 - x) + 47 = 800 \Rightarrow x = 60$

Assim, a probabilidade P de a criança selecionada ter deficiência das duas vitaminas é dada por:

$P(A \cap C) = \dfrac{n(A \cap C)}{n(E)} \Rightarrow P(A \cap C) = \dfrac{60}{800} = \dfrac{3}{40} = 7{,}5\%$

6. **a.** Como não há três pontos colineares entre os pontos A, B, C, D, E, F, G e H, qualquer escolha de três vértices do cubo determina um triângulo. Logo, o número de triângulos que ficam determinados é dado por $C_{8,\,3} = 56$.

b. O espaço amostral E é o conjunto cujos elementos são todos os determinados pelos vértices do cubo; logo, $n(E) = 56$. O evento A que interessa é aquele cujos elementos são os triângulos do espaço E nas faces do cubo. Assim: $n(A) = 6 \cdot C_{4,\,3} = 24$

Concluímos, então, que a probabilidade P de o triângulo escolhido estar contido em uma das faces do cubo é dada por: $P = \dfrac{24}{56} = \dfrac{3}{7}$

8. Indicando por x o número de carpas do tanque, temos que a probabilidade de retirarmos, aleatoriamente, uma carpa do tanque e que ela esteja marcada é $\dfrac{90}{x}$. Por outro lado, como, após a retirada aleatória dos 50 peixes, 12 estavam marcados, temos que a probabilidade de se escolher um peixe marcado dentre esses 50 é $\dfrac{12}{50}$. As duas probabilidades calculadas tendem a ser iguais, ou seja: $\dfrac{90}{x} = \dfrac{12}{50} \Rightarrow x = 375$

9. O espaço amostral E do experimento é: $E = \{(1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 1, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2), (3, 2, 1)\}$, $n(E) = 6$

a. $A = \{(1, 2, 3)\}$, $n(A) = 1$. Logo: $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(E)} = \dfrac{1}{6}$

b. O evento B, considerado nesse item, é vazio.

Logo: $P(B) = \dfrac{n(\varnothing)}{n(E)} = \dfrac{0}{6} = 0$

10. $0 \leqslant \dfrac{n - 8}{20} \leqslant 1 \Rightarrow 0 \leqslant n - 8 \leqslant 20 \ \therefore 8 \leqslant n \leqslant 28$

11. Indicando por A o evento formado pelos requerimentos deferidos, o complementar de A é o evento $\overline{A}$ dos requerimentos indeferidos. Como $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$, temos:

$P(\overline{A}) = 1 - \dfrac{5}{27} = \dfrac{22}{27}$

12. Ao retirar uma etiqueta da urna, o espaço amostral E é o conjunto: $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; $n(E) = 6$

a. $M = \{x \in E \mid x \text{ é múltiplo de 3 e de 5}\} = \varnothing$,

$\therefore P(M) = \dfrac{n(M)}{n(E)} = \dfrac{0}{6} = 0$

b. $D = \{y \in E \mid y \text{ é divisor de 720}\}$

$D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = E \Rightarrow n(D) = n(E) = 6$

$\therefore P(D) = \dfrac{n(D)}{n(E)} = \dfrac{6}{6} = 1$

13. a.

$$\underbrace{\boxed{1^{\text{a}}\text{ bola}}}_{9} \cdot \underbrace{\boxed{2^{\text{a}}\text{ bola}}}_{9} \cdot \underbrace{\boxed{3^{\text{a}}\text{ bola}}}_{9} = 729$$

c. Para que o produto de três números seja ímpar, os três números devem ser ímpares: 1, 3, 5, 7 ou 9.

$$\underbrace{\boxed{1^{\text{a}}\text{ bola}}}_{5} \cdot \underbrace{\boxed{2^{\text{a}}\text{ bola}}}_{5} \cdot \underbrace{\boxed{3^{\text{a}}\text{ bola}}}_{5} = 125$$

d. $P(P) = 1 - \dfrac{125}{729} = \dfrac{604}{729}$

14. Sendo E o espaço amostral formado pelas pessoas do grupo de turistas, consideremos os eventos $A = \{x \in E \mid x \text{ é alemão}\}$ e $B = \{y \in E \mid y \text{ é brasileiro}\}$. Temos que $P(A) = 3P(B)$ e que A e B são eventos complementares. Assim, a resposta é obtida por meio da resolução do sistema:

$$\begin{cases} P(A) = 3P(B) \\ P(A) + P(B) = 1 \end{cases} \Rightarrow 3P(B) + P(B) = 1 \Rightarrow 4P(B) = 1$$

$\therefore P(B) = \dfrac{1}{4} = 25\%$

A probabilidade de ser escolhido um brasileiro é 25%.

15. alternativa **e**

Os eventos A e B determinados por "a partícula é desviada ou repelida" e "a partícula não sofre alteração em sua trajetória", respectivamente, são complementares. Logo:

$P(B) = 1 - P(A) = 1 - \dfrac{1}{10^5} = 99{,}999\%$

16. alternativa **d**

Os eventos A e B determinados por "conseguir o emprego" e "não conseguir o emprego", respectivamente, são complementares e, portanto, $P(A) + P(B) = 1$:

$\dfrac{x}{2} + \dfrac{x + 2}{8} = 1 \Rightarrow x = \dfrac{6}{5}$

Assim, a probabilidade $P(A)$ de que Pedro consiga o emprego é dada por: $P(A) = \dfrac{\frac{6}{5}}{2} = \dfrac{6}{10} = 0{,}6 = 60\%$

17. **1º modo** (aplicando o teorema da adição de probabilidades)

O espaço amostral E do experimento é:

$E = \{1, 2, 3, ..., 20\}$, com $n(E) = 20$; o evento A formado pelos números pares pertencentes a E é:

$A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\}$, com $n(A) = 10$, e o evento B formado pelos números múltiplos de 3 pertencentes a E é: $B = \{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$, com $n(B) = 6$

Observando que $A \cap B = \{6, 12, 18\}$, com $n(A \cap B) = 3$, concluímos que:

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow$

$\Rightarrow P(A \cup B) = \dfrac{10}{20} + \dfrac{6}{20} - \dfrac{3}{20} = \dfrac{13}{20}$

2º modo (aplicando apenas a definição de probabilidade)

Com o mesmo E do primeiro modo, o evento A formado pelos números pares ou múltiplos de 3 pertencentes a E é:

$A = \{2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20\}$, com $n(A) = 13$.

Assim: $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(E)} = \dfrac{13}{20}$

18. Sejam:

$E = \{x \mid x \text{ é filme do acervo da locadora}\}$, $n(E) = 1.600$

$A = \{y \in E \mid y \text{ é filme policial}\}$, $n(A) = 410$

$B = \{z \in E \mid z \text{ é filme nacional}\}$, $n(B) = 470$

$A \cap B = \{w \in E \mid w \text{ é filme policial nacional}\}$, $n(A \cap B) = 80$

Assim, temos:

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow$

$\Rightarrow P(A \cup B) = \dfrac{410}{1.600} + \dfrac{470}{1.600} - \dfrac{80}{1.600} = 50\%$

19. O espaço amostral E desse experimento é formado por todas as retas determinadas pelos 8 vértices do cubo; logo: $n(E) = C_{8,\,2} = 28$

Sendo A o evento de E formado pelas retas que contêm aresta do cubo, temos $n(A) = 12$. Sendo B o evento de E formado pelas retas que passam pelo vértice K, temos $n(B) = 7$. Observando que $n(A \cap B) = 3$, concluímos que:

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \dfrac{4}{7}$

20. Sendo E o espaço amostral dos ingressos colocados à venda, consideremos os eventos A e B tais que $n(A) \geqslant 46.000$ e $n(B) \leqslant 46.000$, com $P(A) = 70\%$ e $P(B) = 55\%$.

Observando que $A \cup B = E$, temos que $P(A \cup B) = 100\%$

Assim:

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow$

$\Rightarrow 100\% = 70\% + 55\% - P(A \cap B) \therefore P(A \cap B) = 25\%$

21. Indicando por E o espaço amostral dos refrigeradores expostos na loja, temos que:

o evento A dos refrigeradores da marca X é tal que $P(A) = \dfrac{3}{5}$; o evento B dos refrigeradores brancos é tal que $P(B) = \dfrac{3}{4}$; o evento $A \cap B$ dos refrigeradores da marca X que são brancos é tal que $P(A \cap B) = \dfrac{7}{10}$.

Assim, podemos calcular:

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow$

$\Rightarrow P(A \cup B) = \dfrac{3}{5} + \dfrac{3}{4} - \dfrac{7}{10} \therefore P(A \cup B) = \dfrac{13}{20}$

22. Sendo E o espaço amostral das pessoas entrevistadas, vamos considerar os eventos:

$A = \{x \in E \mid x \text{ é leitor do jornal A}\}$ e $B = \{y \in E \mid y \text{ é leitor do jornal B}\}$. Assim, $P(A \cup B) = 1$, pois cada uma das pessoas entrevistadas é leitora de pelo menos um dos jornais A ou B. Devemos calcular $P(A \cap B)$.

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow$

$\Rightarrow 1 = \dfrac{7}{10} + \dfrac{5}{8} - P(A \cap B)$

$\therefore P(A \cap B) = \dfrac{7}{10} + \dfrac{5}{8} - 1 \Rightarrow P(A \cap B) = \dfrac{13}{40}$ ou 32,5%

24. $P(B/A) = \dfrac{n(A \cap B)}{n(A)} = \dfrac{30}{120} = \dfrac{1}{4}$

25. $P(B/A) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)} = \frac{\frac{4}{25}}{\frac{1}{5}} = \frac{4}{5}$

26. $E = \{x \mid x$ é participante do congresso$\}$, $n(E) = 147$

$A = \{y \in E \mid y$ é mulher$\}$, $n(A) = 81$

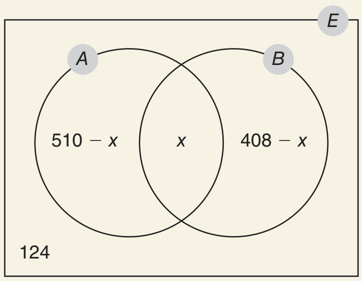
$B = \{z \in E \mid z$ é psiquiatra$\}$, $n(B) = 48$

$A \cap B = \{w \in E \mid w$ é mulher e psiquiatra$\}$, $n(A \cap B) = 18$

Logo: $P(B/A) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)} = \frac{18}{81} = \frac{2}{9}$

27. Indicando por E o espaço amostral dos candidatos que participaram desse concurso, sejam: A o evento dos candidatos mineiros, $n(A) = 510$, e B o evento dos candidatos que moram em Belo Horizonte, $n(B) = 408$.

Assim, sendo x o número de elementos de $A \cap B$, temos o diagrama:



ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

Como $n(E) = 702$, deduzimos que:

$510 - x + x + 408 - x + 124 = 702 \Rightarrow x = 340$

Portanto, calculando $P(B/A)$, temos:

$P(B/A) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)} = \frac{340}{510} = \frac{2}{3}$

28. alternativa **e**

Sejam os eventos do espaço amostral formado pelos indivíduos que se submeteram ao teste:

Evento A: paciente ESTÁ com a doença, $n(A) = 100$;

Evento B: resultado do teste POSITIVO;

Evento $A \cap B$: paciente está com a doença, e o resultado do teste foi positivo, $n(A \cap B) = 95$.

Estamos interessados nos casos em que o resultado do teste deu POSITIVO dado que o paciente ESTÁ com a doença, isto é, estamos interessados na probabilidade de B dado A, assim:

$P(B/A) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)} \Rightarrow P(B/A) = \frac{95}{100}$

29. $P(A) = \frac{3}{5}$ e $P(B) = \frac{2}{3}$

Como os eventos são independentes, temos:

$P(B/A) = P(B)$ e $P(A/B) = P(A)$

a. $P(A/B) = P(A) = \frac{3}{5}$

b. $P(B/A) = P(B) = \frac{2}{3}$

c. $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \therefore P(A \cap B) = \frac{2}{5}$

d. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{13}{15}$

32. Indicando por V, P e A as cores verde, preta e azul, respectivamente, temos:

a. A probabilidade P de sair VPA, nessa ordem, é dada por:

$P = \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{10} \cdot \frac{5}{10} = \frac{3}{100}$

b. Há seis sequências diferentes de cores: VPA, VAP, APV, AVP, PAV e PVA, todas com a mesma probabilidade de ocorrer. Assim, a probabilidade P de sair três bolas de cores diferentes é dada por:

$P = 6 \cdot \left(\frac{3}{10} \cdot \frac{2}{10} \cdot \frac{5}{10}\right) = \frac{9}{50}$

c. A probabilidade P de sair AAA é dada por:

$P = \frac{5}{10} \cdot \frac{5}{10} \cdot \frac{5}{10} = \frac{125}{1.000} = \frac{1}{8}$

33. Indicando por V, P e A as cores verde, preta e azul, respectivamente, temos:

a. A probabilidade P de sair VPA, nessa ordem, é dada por:

$P = \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{5}{8} = \frac{1}{24}$

b. Há seis sequências diferentes de cores: VPA, VAP, APV, AVP, PAV e PVA, todas com a mesma probabilidade de ocorrer. Assim, a probabilidade P de sair três bolas de cores diferentes é dada por:

$P = 6 \cdot \left(\frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{5}{8}\right) = \frac{1}{4}$

c. A probabilidade P de sair AAA é dada por:

$P = \frac{5}{10} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} = \frac{1}{12}$

34. Indicando por A e V as cores azul e vermelha, respectivamente, temos:

a. Há cinco sequências possíveis de cores: AAAAV, AAAVA, AAVAA, AVAAA e VAAAA, todas com a mesma probabilidade de ocorrer. Assim, a probabilidade P de sair quatro canetas de tinta azul e uma de tinta vermelha é dada por:

$P = 5 \cdot \left(\frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6}\right) = \frac{10}{63}$

b. O número de permutações das letras A, A, A, V, V é dado por: $P_5^{(3,\,2)} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = 10$

Assim, a probabilidade P de sair três canetas de tinta azul e duas de tinta vermelha é dada por:

$P = 10 \cdot \left(\frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5}\right) = \frac{10}{21}$

c. A probabilidade P de ocorrer AAAAA é dada por:

$P = \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{126}$

d. Os eventos F e G determinados por "pelo menos uma de tinta vermelha" e "todas de tinta azul", respectivamente, são complementares; logo:

$P(F) = 1 - P(G) = 1 - \frac{1}{126} = \frac{125}{126}$

35. Há seis sequências possíveis contendo 5 caras e 1 coroa: CCCCCK, CCCCKC, CCCKCC, CCKCCC, CKCCCC e KCCCCC, todas com a mesma probabilidade de ocorrer. Logo, a probabilidade P de sair 5 caras e 1 coroa é dada por:

$P = 6 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\right) = \frac{6}{64} = \frac{3}{32}$

36. Cada face do cubo formado será composta de nove cubinhos. Numerando de 1 a 9 cada cubinho das faces, sendo 1, 2 e 3, respectivamente, os cubinhos da primeira linha; 4, 5 e 6, da segunda linha; e 7, 8 e 9, da terceira linha.

No centro do cubo formado, há um cubinho que não terá nenhuma das faces pintadas; o cubinho 5 de cada face do cubo formado terá uma única face pintada; os cubinhos 2, 4, 8 e 6 que compõem cada face do cubo formado terão exatamente duas faces pintadas; os cubinhos 1, 3, 7 e 9 que compõem cada face do cubo formado terão exatamente três faces pintadas.

A probabilidade de se retirarem três cubinhos simultaneamente é igual à probabilidade de retirá-los um a um, sucessivamente e sem reposição. Nesse caso, se as retiradas dos três cubinhos forem sucessivas e sem reposição, devemos levar em consideração a ordem de retiradas. Assim, temos:

a. Indicando, respectivamente, por N e F o cubinho sem face pintada e cada cubinho com pelo menos uma face pintada, temos as seguintes sequências possíveis: NFF, FNF e FFN. Logo a probabilidade P_a pedida é dada por:

$$P_a = 3 \cdot \left(\frac{1}{27} \cdot \frac{26}{26} \cdot \frac{25}{25}\right) = \frac{1}{9}$$

b. O evento "cada um dos cubinhos retirados ter pelo menos uma face pintada" é complementar do evento "pelo menos um dos cubinhos retirados não ter nenhuma face pintada", assim utilizando o resultado do item **a** e a propriedade dos eventos complementares, temos que a probabilidade P_b pedida é dada por:

$$P_b = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$$

c. Indicando, respectivamente, por A e B cada cubinho com três faces pintadas e cada cubinho com exatamente duas faces pintadas, temos as seguintes sequências possíveis: ABB, BAB e BBA. Assim, a probabilidade P_c pedida é dada por:

$$P_c = 3 \cdot \left(\frac{8}{27} \cdot \frac{12}{26} \cdot \frac{11}{25}\right) = \frac{\cancel{1.056}}{\cancel{5.850}} = \frac{528}{2.925}$$

d. Indicando, respectivamente, por K, L e M os cubinhos com exatamente uma face pintada, exatamente duas faces pintadas e três faces pintadas, temos 6 sequências possíveis: KLM, KML, LKM, LMK, MLK e MKL. Assim, a probabilidade P_d pedida é dada por:

$$P_d = 6 \cdot \left(\frac{6}{27} \cdot \frac{12}{26} \cdot \frac{8}{25}\right) = \frac{\cancel{3.456}}{\cancel{17.550}} = \frac{576}{2.925}$$

37. Vamos resolver o problema equivalente, que considera as retiradas das moedas, uma a uma, sucessivamente e sem reposição. Lembre-se de que essa forma de resolução considera a ordem de retirada.

Indicando por *H*, *C* e *D* cada moeda de R$ 1,00, R$ 0,50 e R$ 0,10, respectivamente, temos:

a. Multiplicamos o número de permutações das letras *H*, *C* e *D*, que é 3!, pela probabilidade de ocorrer uma das sequências dessas letras. Por exemplo, a probabilidade P_1 de ocorrer a sequência *HCD* é dada por:

$$P_1 = \frac{2}{9} \cdot \frac{4}{8} \cdot \frac{3}{7} = \frac{1}{21}$$

Assim, a probabilidade *P* de ocorrer qualquer uma das sequências das letras *H*, *C* e *D* é calculada por:

$$P = 3! \cdot P_1 \Rightarrow P = 6 \cdot \frac{1}{21} = \frac{2}{7}$$

b. Multiplicamos o número de permutações das letras *C*, *C* e *D*, que é 3, pela probabilidade de ocorrer uma das sequências dessas letras. Por exemplo, a probabilidade P_1 de ocorrer a sequência CCD é dada por:

$$P_1 = \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{3}{7} = \frac{1}{14}$$

Assim, a probabilidade *P* de ocorrer qualquer uma das sequências das letras *C*, *C* e *D* é calculada por:

$$P = 3 \cdot P_1 \Rightarrow P = 3 \cdot \frac{1}{14} = \frac{3}{14}$$

c. Nas condições do enunciado, o conjunto de moedas retiradas totalizará R$ 1,20 se tiver exatamente uma moeda de R$ 1,00 e duas de R$ 0,10.

Assim, multiplicamos o número de permutações das letras *H*, *D* e *D*, que é 3, pela probabilidade de ocorrer uma das sequências dessas letras. Por exemplo, a probabilidade P_1 de ocorrer a sequência *HDD* é dada por:

$$P_1 = \frac{2}{9} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} = \frac{1}{42}$$

Assim, a probabilidade *P* de ocorrer qualquer uma das sequências das letras *H*, *D* e *D* é calculada por:

$$P = 3 \cdot P_1 \Rightarrow P = 3 \cdot \frac{1}{42} = \frac{1}{14}$$

38. Os eventos *A*: *faltar energia elétrica* e $\overline{A}$: *não faltar energia elétrica* são complementares; logo, $P(A) + P(\overline{A}) = 1$

Portanto, ao longo de cada mês, temos que $P(A) = 10\%$ e $P(\overline{A}) = 90\%$.

Assim, calculando a probabilidade *P* de não faltar energia em janeiro e não faltar em fevereiro e faltar em março, obtemos: $P = 90\% \cdot 90\% \cdot 10\% \Rightarrow P = 8{,}1\%$

39. Indicando por N e S cada pessoa nutrida e subnutrida, respectivamente, devemos calcular a probabilidade de ocorrer qualquer uma das permutações das letras N, N, S, S e S, em que $P(S) = 20\%$ e $P(N) = 80\%$.

Para isso, multiplicamos o número de permutações das letras N, N, S, S e S, que é 10, pela probabilidade de ocorrer uma das sequências dessas letras. Por exemplo, a probabilidade P_1 de ocorrer a sequência NNSSS é dada por:

$P_1 = 80\% \cdot 80\% \cdot 20\% \cdot 20\% \cdot 20\% \Rightarrow P = 0{,}512\%$

Assim, a probabilidade *P* de ocorrer qualquer uma das sequências das letras N, N, S, S e S é calculada por:

$P = 10 \cdot 0{,}512\% = 5{,}12\%$

40. alternativa **c**

A probabilidade *P* de esse morador se atrasar para o serviço no dia para o qual foi dada a estimativa de chuva é calculada por:

$P = P(\text{chover}) \cdot P(\text{atraso quando chove}) + P(\text{não chover}) \cdot P(\text{atraso quando não chove}) \Rightarrow$

$\Rightarrow P = 30\% \cdot 50\% + 70\% \cdot 25\%$

$\therefore P = 0{,}3 \cdot 0{,}5 + 0{,}7 \cdot 0{,}25 \Rightarrow P = 0{,}325$

42. a. O espaço amostral *E* desse experimento é formado por todos os conjuntos formados por dois vértices do cubo; logo, $n(E) = C_{8,\,2} = 28$. Sendo *H* o evento de *E* formado pelos vértices *A* e *B*, isto é, $H = \{\{A, B\}\}$, em que $n(H) = 1$, concluímos que: $P(H) = \frac{1}{28}$

Outro modo:

Vamos supor que a escolha dos vértices seja feita um a um e sem reposição (não se esqueça de que, ao escolher os vértices um a um, devemos considerar a ordem de retirada). Assim, devemos calcular a probabilidade de ocorrer uma das sequências *AB* ou *BA*. Como ambas têm a mesma probabilidade de ocorrer, podemos calcular a probabilidade de ocorrer uma delas, por exemplo, *AB*, e multiplicar por 2 o resultado obtido. Assim, a probabilidade *P* pedida é dada por: $P = 2 \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{7} = \frac{1}{28}$

b. O espaço amostral *U* desse experimento é formado por todos os conjuntos formados por três vértices do cubo; logo, $n(U) = 5C_{8,\,3} = 56$.

Sendo *G* o evento de *U* formado pelos vértices *A*, *B* e *C*, isto é, $G = \{\{A, B, C\}\}$, em que $n(G) = 1$, concluímos que:

$P(G) = \frac{1}{56}$

Outro modo:

Vamos supor que a escolha dos vértices seja feita um a um e sem reposição (não se esqueça de que, ao escolher os vértices um a um, devemos considerar a ordem de retirada). Assim, devemos calcular a probabilidade de ocorrer uma das 3! sequências formadas por *A*, *B* e *C*.

Como elas têm a mesma probabilidade de ocorrer, podemos calcular a probabilidade de ocorrer uma delas, por exemplo, *ABC*, e multiplicar por 3! o resultado obtido. Assim, a probabilidade *P* pedida é dada por:

$P = 3! \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{56}$

c. O espaço amostral *E* desse experimento é formado por todos os conjuntos formados por dois vértices do cubo; logo, $n(E) = C_{8,\,2} = 28$.

Sendo *M* o evento de *E* formado pelos conjuntos de vértices extremos de uma mesma aresta, temos $n(M) = 12$. Assim, concluímos que: $P(M) = \frac{12}{28} = \frac{3}{7}$

Outro modo:

Escolhido um vértice qualquer, a probabilidade de escolher o segundo em uma mesma aresta que o primeiro escolhido é a probabilidade *P* pedida, isto é: $P = \frac{3}{7}$

d. O espaço amostral *V* desse experimento é formado por todos os conjuntos formados por duas arestas do cubo; logo, $n(V) = C_{12,\,2} = 66$.

Sendo *L* o evento de *E* formado pelos conjuntos de duas arestas paralelas do cubo, temos $n(L) = 18$. Assim, concluímos que: $P(L) = \frac{18}{66} = \frac{3}{11}$

Outro modo:

Escolhida uma aresta qualquer, a probabilidade de escolher a segunda paralela à primeira escolhida é a probabilidade *P* pedida, isto é: $P = \frac{3}{11}$

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

1. alternativa **c**

Por $n(E) = 42 + 22 + 56 + 30 + 50 = 200$ e $n(A) = 22$.

Concluímos: $P(A) = \frac{n(A)}{n(E)} \Rightarrow P(A) = \frac{22}{200} = \frac{11}{100} = 11\%$

2. Sendo *n* a população brasileira no dia 15 de novembro de 2022, temos:

$$\frac{n}{8.000.000.000} = \frac{10,765}{400} \Rightarrow n = 215.300.000$$

3. Com $n(E) = 350$, *X* e *Y* os eventos de *E* formados, respectivamente, pelas fichas dos carros roubados das marcas *X* e *Y*. Indicando por *x* e *y* os números de carros roubados das marcas *X* e *Y*, respectivamente, temos: $n(X) = x$ e $n(Y) = y$, tal que:

$$\begin{cases} x = 1,1y \\ x + y = 0,6 \cdot 350 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1,1y \\ x + y = 210 \end{cases} \therefore x = 110 \text{ e } y = 100$$

Concluímos: $P(Y) = \frac{n(Y)}{n(E)} \Rightarrow P(Y) = \frac{100}{350} = \frac{2}{7}$

4. Como há 17 números naturais distintos no intervalo $120 \leqslant x \leqslant 136$, podemos ter, no máximo, 17 caixas com números distintos de tomates. Contudo, como há 18 caixas, concluímos que, certamente, pelo menos duas caixas terão o mesmo número de tomates.

Logo, a probabilidade pedida é 100%.

5. **b.** Se um trem parte para oeste às 8 h 20 min, então o próximo trem para oeste parte às 8 h 24 min. Entre esses dois horários, parte um trem para leste em um provável horário t tal que:

t − 8 h 20 min = 3(8 h 24 min − t) ⇒ t = 8 h 23 min

Assim, se às 8 h 20 min parte um trem para oeste, conclui-se que o provável horário do próximo trem para leste é 8 h 23 min.

6. Indicando por A_i e M_j as bolas azuis e amarelas, respectivamente, temos o espaço amostral:

$E = \{A_1, A_2, A_3, A_4, M_1, M_2, M_3, M_4, M_5\}$, $n(E) = 9$

$B = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$, $n(B) = 4$

$C = \{A_1, A_3, M_1, M_3, M_5\}$, $n(C) = 5$

$B \cap C = \{A_1, A_3\}$, $n(B \cap C) = 2$

$\therefore P(B \cap C) = P(B) + P(C) - P(B \cap C) = \frac{4}{9} + \frac{5}{9} - \frac{2}{9} = \frac{7}{9}$

Outro modo:

$D = \{x \in E \mid x$ é bola azul ou tem número ímpar$\}$, ou seja,

$D = \{A_1, A_2, A_3, A_4, M_1, M_3, M_5\}$, $n(D) = 7$

$\therefore P(D) = \frac{n(D)}{n(E)} = \frac{7}{9}$

7. Sendo *E* o espaço amostral, *A* o evento formado pelos carros com freio ABS e *B* o evento formado pelos carros com direção hidráulica, temos:

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{5}{6} = \frac{5}{8} + \frac{2}{3} - P(A \cap B) \therefore\ P(A \cap B) = \frac{11}{24}$

8. alternativa **a**

Sejam:

- *U* o espaço amostral dos 1.200 alunos entrevistados;
- *I* e *E* os eventos dos alunos que falam inglês e dos que falam espanhol, respectivamente;
- *x* o número de alunos que falam os dois idiomas.

Deduzimos então:

$600 - x + x + 500 - x + 300 = 1.200 \Rightarrow x = 200$

Como o escolhido não fala inglês, o espaço amostral fica reduzido a $U - I$, com $n(U - I) = 600$. Assim, a probabilidade P pedida é dada por:

$$P = \frac{n(E - I)}{n(U - I)} = \frac{300}{600} = \frac{1}{2}$$

9. Como a probabilidade de ser escolhida uma mulher é $\frac{1}{2}$, deduzimos que a probabilidade de ser escolhido um homem também é $\frac{1}{2}$, logo o número de homens é igual ao número de mulheres na reunião. Indicando por x o número de homens, que é igual ao número de mulheres. O número de pessoas que atuam em engenharia é $8 + x - 15$, ou seja, $x - 7$, das quais 8 são homens, temos:

$$\frac{8}{x - 7} = \frac{8}{13} \Rightarrow x = 20$$

Concluímos, assim, que há 20 mulheres e 20 homens.

10. a. $n(E) = 6 \cdot 6 = 36$

b. $P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

c. $P(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

d. $P(B/A) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)} = \frac{1}{6}$

e. Basta mostrar que $P(B/A) = P(B)$ ou $P(A/B) = P(A)$. Por exemplo: $P(B/A) = \frac{1}{6} = P(B)$

Logo, A e B são independentes.

11. O espaço amostral E formado pelas bolinhas do globo é dado por: $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, $n(E) = 10$. Nesse espaço, consideremos os eventos:

$A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, $n(A) = 5$;

$B = \{7, 8, 9, 10\}$, $n(B) = 4$;

$C = \{5, 10\}$, $n(C) = 2$;

$A \cap B = \{8, 10\}$, $n(A \cap B) = 2$;

$B \cap C = \{10\}$, $n(B \cap C) = 1$.

Assim, temos:

a. $P(B) = \frac{n(B)}{n(E)} \Rightarrow P(B) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$

e $P(B/A) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)} \Rightarrow P(B/A) = \frac{2}{5}$

Como $P(B/A) = P(B)$, concluímos que A e B são eventos independentes.

b. $P(C) = \frac{n(C)}{n(E)} \Rightarrow P(C) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$

e $P(C/B) = \frac{n(B \cap C)}{n(B)} \Rightarrow P(C/B) = \frac{1}{4}$

Como $P(C/B) \neq P(C)$, concluímos que B e C são eventos dependentes.

12. O evento A das possibilidades de o participante perder o carro e o evento B das possibilidades de o participante ganhar o carro são complementares; portanto, $P(A) + P(B) = 1$. Calculando $P(B)$, temos:

$$P(B) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{108} = \frac{1}{54}$$

Logo: $P(A) = 1 - P(B) = \frac{53}{54} \approx 98\%$

13. alternativa **a**

A probabilidade P de que os dois sorteados tenham feito suas compras em fevereiro do ano anterior é dada por:

$P = P$(A, comprado em fevereiro) $\cdot$ P(B, comprado em fevereiro) $\Rightarrow P = \frac{30}{100} \cdot \frac{20}{120} \therefore P = \frac{1}{20}$

14. a. A probabilidade P de que a pessoa escolhida seja homem e sofra de osteoporose é dada por:

$$P = \frac{50}{130} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{13} \Rightarrow P \approx 7{,}7\%$$

b. A probabilidade P de que a pessoa escolhida seja uma mulher que não sofra de osteoporose é dada por:

$$P = \frac{80}{130} \cdot \frac{2}{3} = \frac{16}{39} \Rightarrow P \approx 41\%$$

c. A probabilidade P de que a pessoa escolhida seja um homem que sofra de osteoporose ou uma mulher que não sofra dessa doença é:

$$P = \frac{1}{13} + \frac{16}{39} = \frac{19}{39} \Rightarrow P \approx 48{,}7\%$$

VERIFIQUE O QUE APRENDEU NO CAPÍTULO 1

1. alternativa **d**

No lançamento de dois dados, temos $n(E) = 36$

Os eventos J, L e A, formado pelos pares ordenados que interessam a José, Paulo e Antônio, respectivamente, são:

$J = \{(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)\}$, em que $n(J) = 6$;

$L = \{(1, 3), (2, 2), (3, 1)\}$, em que $n(L) = 3$;

$A = \{(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)\}$, em que $n(A) = 5$.

Calculando a probabilidade de cada um desses eventos, temos:

$P(J) = \frac{6}{36}$, $P(L) = \frac{3}{36}$ e $P(A) = \frac{5}{36}$

2. O espaço amostral E desse experimento é formado por todos os conjuntos de 4 pessoas que podem ser formados com os 5 homens e 4 mulheres; logo: $n(E) = C_{9,\,4} = 126$

Sendo A o evento de E formado pelos conjuntos de dois homens e duas mulheres, temos que:

$n(A) = C_{5,\,2} \cdot C_{4,\,2} = 10 \cdot 6 = 60$

Concluímos, assim, que: $P(A) = \frac{60}{126} = \frac{10}{21}$

3. alternativa **d**

Uma maneira de resolver é usando o teorema da adição de probabilidades.

Sendo E o espaço amostral desse experimento, temos que $n(E) = 30$.

Sendo A e B os eventos de E formados pelas bolas brancas e pelas bolas de número par, respectivamente, temos que $n(A) = 15$, $n(B) = 14$, $n(A \cup B) = 22$ e $n(A \cap B) = 7$.

Logo, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow P(A \cup B) = \frac{15}{30} + \frac{14}{30} - \frac{7}{30} \therefore P(A \cup B) = \frac{22}{30} = \frac{11}{15}$

Outra maneira de resolver é usando apenas a definição de probabilidade.

O espaço amostral E do experimento é formado por 30 elementos, isto é, $n(E) = 30$. O evento A cuja probabilidade P queremos calcular é formado pelas bolas brancas ou com número par, logo, $n(A) = 15 + 5 + 2 = 22$; portanto:

$$P = \frac{22}{30} = \frac{11}{15}$$

4. a. Aplicando a definição de probabilidade, temos:

$n(E) = C_{8,2} = 28$

Sendo A o evento de E formado pelos conjuntos de dois vértices que sejam extremos de um mesmo lado, temos que $n(A) = 8$. Assim, $P(A) = \frac{8}{28} = \frac{2}{7}$

Aplicando o teorema da multiplicação de probabilidades, temos:

Escolhido um vértice qualquer, a probabilidade de escolher o segundo é a probabilidade P procurada, ou seja, $P = \frac{2}{7}$.

b. Vamos fazer a escolha de dois vértices distintos um a um (não esqueça que, ao escolher os dois vértices distintos um a um, devemos considerar a ordem de escolha).

O número de diagonais do octógono é dado por $C_{8,\,2} - 8 = 20$. Para cada diagonal, existem duas sequências formadas pelas letras de seus extremos, por exemplo, AC e CA. Logo, temos 40 sequências possíveis. Qualquer uma dessas sequências tem a mesma probabilidade de ocorrer. Assim, calculamos a probabilidade de uma delas, por exemplo, da primeira, e multiplicamos o resultado por 40. Portanto, a probabilidade P pedida é dada por:

$$P = 40 \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{7} = \frac{5}{7}$$

MATEMÁTICA SEM FRONTEIRAS

1. a. $P = (1 - 0{,}015) \cdot (1 - 0{,}023) \approx 0{,}962$

b. $P = (1 - 0{,}023) \cdot (1 - 0{,}040) \approx 0{,}938$

c. É o complementar da probabilidade da pessoa estar viva entre 40 e 49 anos (92,4%), ou seja, $1 - 0{,}924 = 0{,}076$, aproximadamente 7,6%.

CAPÍTULO 2 Estatística

ALÉM DA TEORIA

1. Para calcular a taxa média de variação pelos pontos (2020; 5,8) e (2023; 3,9), temos: $\frac{3{,}9 - 5{,}8}{2023 - 2020} \approx -0{,}633$

A taxa de variação anual de inscritos no Enem de 2020 a 2023 foi de, aproximadamente, −633 mil candidatos.

2. De 2020 para 2021: $\frac{535{,}08 - 520{,}58}{520{,}58} \approx 2{,}8\%$

De 2021 para 2022: $\frac{542{,}5 - 535{,}08}{535{,}08} \approx 1{,}4\%$

De 2022 para 2023: $\frac{533{,}84 - 542{,}5}{542{,}5} \approx -1{,}6\%$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

5. a. Seja A a amplitude dessa amostra, temos:

$A = 1{,}02 - 0{,}98 = 0{,}04$

6. a. O número de acessos é a frequência total (F_t), que é a soma das frequências das classes:

$F_t = 85 + 75 + 80 + 70 + 110 + 80 = 500$

b. Calculando a frequência relativa das classes, temos:

Classe (data)	Frequência relativa	Medida do ângulo do setor
5/10	$\frac{85}{500} = 0{,}17$	$0{,}17 \cdot 360° = 61{,}2°$
6/10	$\frac{75}{500} = 0{,}15$	$0{,}15 \cdot 360° = 54°$
7/10	$\frac{80}{500} = 0{,}16$	$0{,}16 \cdot 360° = 57{,}6°$
8/10	$\frac{70}{500} = 0{,}14$	$0{,}14 \cdot 360° = 50{,}4°$
11/10	$\frac{110}{500} = 0{,}22$	$0{,}22 \cdot 360° = 79{,}2°$
12/10	$\frac{80}{500} = 0{,}16$	$0{,}16 \cdot 360° = 57{,}6°$

7. a. $51{,}42\% - 48{,}58\% = 2{,}84\%$

b. $\frac{48{,}53}{51{,}47} \approx 0{,}9429$

Logo, a população de homens representará, aproximadamente, 94,29%, da população de mulheres.

8. a. Uma das informações apresentadas no gráfico 1 é que o número n de habitantes do Paquistão representa 2,89% de 8 bilhões, ou seja,

$n = 0{,}0289 \cdot 8.000.000.000 \Rightarrow n = 231.200.000$

Assim, o número m de mulheres da população do Paquistão representa 49,2% de 231.200.000, ou seja,

$m = 0{,}492 \cdot 231.200.000 \Rightarrow m = 113.750.400$

10. d. Não. Os preços continuaram aumentando em relação aos preços do mês anterior, mas de uma forma desacelerada: em março, a taxa era de 1,62%; em abril, os preços médios aumentaram 1,06%; em maio, os preços médios aumentaram 0,47%.

e. O preço p do produto ao final de abril de 2022, em real, pode ser calculado por:

$p = 10 \cdot (1 + 0{,}0054) \cdot (1 + 0{,}0101) \cdot (1 + 0{,}0162) \cdot$
$\cdot (1 + 0{,}0106) \Rightarrow p \approx 10{,}43$

f. Pelo item anterior, o preço inicial do produto era R$ 10,00 e o preço final era R$ 10,43, aproximadamente. Assim, a taxa acumulada i de inflação, do início de janeiro de 2022 ao final de abril de 2022, é calculada, aproximadamente, por:

$i \approx \frac{10{,}43 - 10{,}00}{10{,}00} \Rightarrow i \approx 0{,}043$, ou seja, $i \approx 4{,}3\%$

11. a. Calculando o percentual de trabalhadoras domésticas negras e brancas, respectivamente, obtemos:

$\frac{3{,}8}{3{,}8 + 1{,}8} \approx 0{,}6786 \approx 67{,}86\%$

$\frac{1{,}8}{3{,}8 + 1{,}8} \approx 0{,}3214 \approx 32{,}14\%$

Logo: $67{,}86\% - 32{,}14\% = 35{,}72\%$

12. a. $410 - 250 = 160$

b. Vamos escolher um intervalo fechado de comprimento tal que seu quociente por 6 seja um número com representação decimal finita. Por exemplo, escolhemos o intervalo [249, 411], que tem amplitude 162.

Dividimos por 6 a amplitude 162 do intervalo escolhido, obtendo o comprimento 27 de cada um dos seis subintervalos em que será separada a amostra. Considerando esses subintervalos fechados à esquerda e abertos à direita, exceto o de extremos maiores deve ser fechado.

13. a. Verdadeira, pois o número de propriedades é a soma das alturas dos retângulos, observadas no eixo vertical, isto é: $23 + 69 + 92 + 116 = 300$

b. Verdadeira, pois o número de propriedades que têm menos de 600 ha cada uma é $69 + 92$, ou seja, 161; e o número de propriedades com 600 ha ou mais é $116 + 23$, ou seja, 139.

c. Falsa, pois 116 é o número de propriedades rurais da classe [600, 800[, ou seja, as 116 propriedades não têm necessariamente 600 ha cada uma.

d. Verdadeira, pois eventualmente todas as propriedades relativas à classe [600,800[podem ter mais de 600 ha.

15. b. $6{,}2 : 5 = 1{,}24$; logo, o crescimento médio diário foi de 1,24 cm.

16. alternativa **d**

Dispondo em rol as notas de cada candidato, K, L, M, N e P, e indicando por $Md(K)$, $Md(L)$, $Md(M)$, $Md(N)$ e $Md(P)$ as medianas de suas notas, respectivamente, temos:

K: 33, 33, 33, 34; $Md(K) = \dfrac{33 + 33}{2} = 33$

L: 32, 33, 34, 39; $Md(L) = \dfrac{33 + 34}{2} = 33{,}5$

M: 34, 35, 35, 36; $Md(M) = \dfrac{35 + 35}{2} = 35$

N: 24, 35, 37, 40; $Md(N) = \dfrac{35 + 37}{2} = 36$

P: 16, 26, 36, 41; $Md(P) = \dfrac{26 + 36}{2} = 31$

Logo, o candidato aprovado é N, pois a mediana de suas notas é maior que a dos demais candidatos.

17. Como o rol tem um número ímpar de termos, a mediana é o termo central x. Dessa maneira:

$$x = \frac{6 + 9 + 10 + x + x + 3 + x + 4 + 16}{7} \Rightarrow x = 12$$

Assim, temos o rol: 6, 9, 10, 12, 15, 16, 16

Logo, a moda da distribuição é 16.

18. alternativa **a**

A moda indica que a numeração de sapato que mais apresentou reclamação foi 38.

Representando a cor branca pelo número 0 e a cor preta pelo número 1 e sabendo que a média da distribuição é menor que 0,5 (0,45), concluímos que há mais "zeros" do que "uns", ou seja, os sapatos de cor branca recebem mais reclamações.

19. De acordo com a tabela do enunciado, temos:

$$\overline{x} = \left(\frac{3 \cdot 18 + 4 \cdot 19 + 2 \cdot 20 + 1 \cdot 21}{10}\right) = 19{,}1$$

Logo, a média horária de pontos de audiência da emissora nesse período de 10 horas foi 19,1.

20. alternativa **e**

Colocando os dados do histograma em uma tabela, temos:

População economicamente ativa

Classe (idade, em ano)	Média das idades	Frequência (nº de pessoas)
[16, 28[	22	20.400
[28, 40[	34	28.200
[40, 52[	46	21.300
[52, 64]	58	10.100
		$F_t = 80.000$

Elaborado para fins didáticos.

Logo:

$$\overline{x} = \left(\frac{20.400 \cdot 22 + 28.200 \cdot 34 + 21.300 \cdot 46 + 10.100 \cdot 58}{80.000}\right) \text{ anos} \therefore \overline{x} = 37{,}165 \text{ anos}$$

21. alternativa **c**

A média aritmética $\overline{x}$ é dada por:

$$\overline{x} = \frac{4 \cdot 30 + 5 \cdot 80 + 6 \cdot 90 + 8 \cdot 40 + 9 \cdot 10}{250} = 5{,}88$$

Escrevendo em rol as notas dos 250 estudantes temos: $\underbrace{4, 4, 4, ..., 4}_{\text{30 notas}}, \underbrace{5, 5, 5, ..., 5}_{\text{80 notas}}, \underbrace{6, 6, 6, ..., 6}_{\text{90 notas}}, \underbrace{8, 8, 8, ..., 8}_{\text{40 notas}}, \underbrace{9, 9, 9, ..., 9}_{\text{10 notas}}$

Nessa sequência, observamos que as 125ª e 126ª notas são iguais a 6. Logo: $Md = \dfrac{6 + 6}{2} = 6$

A moda Mo é a nota mais frequente; logo, $Mo = 6$.

Concluímos, então, que $Md = Mo$ e $\overline{x} < Md$.

22. A média m de idade por atleta é calculada por:

$$m = \frac{19 \cdot 2 + 21 \cdot 2 + 23 \cdot 3 + 25 \cdot 4 + 28 \cdot 4 + 30 \cdot 5}{20} = 25{,}55$$

Logo, os dois escolhidos devem ter idades: 25 e 28 anos; 25 e 30 anos ou 28 e 30 anos. Calculando a probabilidade de cada par de idades possíveis, temos:

$P(25 \text{ e } 28) = \dfrac{4}{20} \cdot \dfrac{4}{19} \cdot 2 = \dfrac{32}{380}$ $\quad P(25 \text{ e } 30) = \dfrac{4}{20} \cdot \dfrac{5}{19} \cdot 2 = \dfrac{40}{380}$ $\quad P(28 \text{ e } 30) = \dfrac{4}{20} \cdot \dfrac{5}{19} \cdot 2 = \dfrac{40}{380}$

A soma dessas probabilidades é a probabilidade P pedida, isto é: $P = \dfrac{32}{380} + \dfrac{40}{380} + \dfrac{40}{380} = \dfrac{112}{380} = \dfrac{28}{95}$

23. alternativa **b**

Sejam:

- a, b e c as alturas dos jogadores que não foram substituídos;
- x a média das alturas dos três jogadores que saíram;
- y a média das alturas dos três jogadores que entraram.

Assim, temos:

$$\begin{cases} \dfrac{3x + a + b + c}{6} = 1{,}92 \\ \dfrac{3y + a + b + c}{6} = 1{,}90 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b + c = 11{,}52 - 3x \\ a + b + c = 11{,}40 - 3y \end{cases}$$

Logo:

$11{,}52 - 3x = 11{,}40 - 3y \Rightarrow x = y + 0{,}04$

Portanto, a média das alturas dos jogadores que saíram supera a dos jogadores que entraram em 0,04 m.

24. A concentração é a média aritmética ponderada $\overline{x}$ entre os números 2,00, 1,50 e 2,80 com os respectivos pesos 25, 10 e 15:

$$\overline{x} = \frac{2{,}00 \cdot 25 + 1{,}50 \cdot 10 + 2{,}80 \cdot 15}{25 + 10 + 15} = 2{,}14$$

Logo, a concentração de hipoclorito de sódio na mistura dos conteúdos dos três recipientes A, B e C é de 2,14%.

27. a. Indicando por $\overline{x}$ a média pedida, em real, temos:

$$\overline{x} = \frac{2.000 \cdot 10 + 4.000 \cdot 5 + 6.000 \cdot 1 + 8.000 \cdot 9 + 20.000 \cdot 4 + 42.000 \cdot 1}{30} = 8.000$$

b. Indicando o desvio absoluto médio por *Dam*, temos:

$$Dam = \frac{|2.000 - 8.000| \cdot 10 + |4.000 - 8.000| \cdot 5 + |6.000 - 8.000| \cdot 1 + |8.000 - 8.000| \cdot 9 + |20.000 - 8.000| \cdot 4 + |42.000 - 8.000| \cdot 1}{30}$$

$\therefore Dam \approx 5.466{,}67$; logo, o desvio absoluto médio é de R$ 5.466,67, aproximadamente.

c. Indicando o desvio absoluto médio da nova distribuição por Dam_N, temos:

$$Dam_N = \frac{|2.000 - 8.000| \cdot 10 + |4.000 - 8.000| \cdot 5 + |6.000 - 8.000| \cdot 1 + |8.000 - 8.000| \cdot 11 + |20.000 - 8.000| \cdot 4 + |42.000 - 8.000| \cdot 1}{32}$$

$\therefore Dam_N \approx 5.125$

Logo, o desvio absoluto médio da nova distribuição seria de R$ 5.125,00.

28. a. Máquina A: $\overline{x}_A = 9{,}9$

$$Dam_A = \frac{|10{,}6 - 9{,}9| + |9{,}6 - 9{,}9| + |10 - 9{,}9| + |9{,}4 - 9{,}9|}{4}$$

$$\therefore Dam_A = \frac{0{,}7 + 0{,}3 + 0{,}1 + 0{,}5}{4} = \frac{1{,}6}{4} = 0{,}4$$

Máquina B: $\overline{x}_B = 9{,}9$

$$Dam_B = \frac{|10{,}2 - 9{,}9| + |10{,}6 - 9{,}9| + |9{,}6 - 9{,}9| + |9{,}2 - 9{,}9|}{4}$$

$$\therefore Dam_B = \frac{0{,}3 + 0{,}7 + 0{,}3 + 0{,}7}{4} = \frac{2}{4} = 0{,}5$$

b. Como $Dam_B > Dam_A$, concluímos que a máquina B teve maior dispersão.

29. a. Gustavo:

$$\overline{x} = \frac{7{,}0 + 7{,}5 + 8{,}0 + 7{,}0 + 6{,}0 + 7{,}0 + 6{,}5 + 7{,}0}{8} = 7{,}0$$

Lucas:

$$\overline{x} = \frac{7{,}0 + 6{,}5 + 8{,}0 + 6{,}5 + 7{,}5 + 7{,}5 + 6{,}0 + 7{,}0}{8} = 7{,}0$$

b. Gustavo:

$$\sigma^2 = \frac{(7{,}0 - 7{,}0)^2 - (7{,}5 - 7{,}0)^2 + (8{,}0 - 7{,}0)^2 + (7{,}0 - 7{,}0)^2 + (6{,}0 - 7{,}0)^2 + (7{,}0 - 7{,}0)^2 + (6{,}5 - 7{,}0)^2 + (7{,}0 - 7{,}0)^2}{8} = 0{,}3125$$

Lucas:

$$\sigma^2 = \frac{(7{,}0 - 7{,}0)^2 + (6{,}5 - 7{,}0)^2 + (8{,}0 - 7{,}0)^2 + (6{,}5 - 7{,}0)^2 + (7{,}5 - 7{,}0)^2 + (7{,}5 - 7{,}0)^2 + (6{,}0 - 7{,}0)^2 + (7{,}0 - 7{,}0)^2}{8} = 0{,}375$$

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

1. a. Sejam x e y os números de meninas e meninos, em milhões, respectivamente, que afirmaram ter sofrido *bullying*. Assim, temos:

$$\begin{cases} x + y = 11,8 \\ 0,265x + 0,195y = 0,23 \cdot 11,8 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + y = 11,8 \\ 0,265x + 0,195y = 2,714 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, obtemos: $x = y = 5,9$

Logo, 5,9 milhões de meninas e 5,9 milhões de meninos do universo considerado teriam admitido o constrangimento por *bullying* nos últimos 30 dias anteriores à pesquisa.

2. a. Dividindo a produção de petróleo dos Estados Unidos, que era de 12.900.000 barris diários, pelo total de petróleo produzido no mundo, que era de 82.800.000 barris diários, obtém-se:

$\dfrac{12.900.000}{82.800.000} \approx 0,16$, ou seja, 16%

Calculando 16% de 360°, chegamos a 57,6°. Assim, o setor circular correspondente à produção dos Estados Unidos deve ter ângulo central de 57,6°.

Repetindo esse raciocínio para os demais setores, obtemos: Rússia com 13% e ângulo central de 46,8°; Arábia Saudita com 12% e ângulo central de 43,2°; Canadá com 6% e ângulo central de 21,6°; Iraque com 5% e ângulo central de 18°; China com 5% e ângulo central de 18°; Irã com 5% e ângulo central de 18°; Outros com 38% e ângulo central de 136,8°.

3. a. Não houve *déficit* em nenhum desses meses, pois, em cada um deles, o valor monetário das exportações foi maior que o das importações.

b. Calculando os saldos, em milhões de dólares americanos, de janeiro a junho de 2024, temos:

Janeiro: 20.511,7 – 26.704,0 = 6.192,3

Fevereiro: 18.225,0 – 23.428,5 = 5.203,5

Março: 20.492,5 – 27.723,0 = 7.230,5

Abril: 21.886,2 – 30.454,7 = 8.568,5

Maio: 21.850,6 – 30.254,6 = 8.404,0

Junho: 22.332,8 – 29.043,7 = 6.710,9

Logo, o maior saldo da balança comercial ocorreu no mês de abril e foi de 8.568,5 milhões de dólares americanos.

c. Pelo item **b**, concluímos que o menor saldo da balança comercial ocorreu no mês de fevereiro e foi de 5.203,5 milhões de dólares americanos.

d. 6.192,3 + 5.203,5 + 7.230,5 + 8.568,5 + 8.404,0 + + 6.710,9 = 42.309,7

Logo, o saldo acumulado da balança comercial brasileira nesse período foi de 42.309,7 milhões de dólares americanos.

4. a. A amplitude da amostra é dada por: $10 - 0 = 10$

A amplitude das classes é dada por: $10 : 4 = 2,5$

5. Sendo x o número de pessoas que iniciaram a reunião, temos: $26,4x = 27(x - 5) + 24 \cdot 5 \Rightarrow x = 25$

6. Indicando por x o número de mulheres do grupo, o número de homens é $(120 - x)$. Assim, a idade média das pessoas é a média aritmética ponderada das idades 35 e 50 anos, com pesos x e $(120 - x)$, respectivamente, isto é:

$$\frac{35x + 50(120 - x)}{120} = 40 \Rightarrow x = 80$$

Logo, nesse grupo há 80 mulheres e 40 homens.

7. a. A amplitude da amostra é dada por:

250 min – 0 min = 250 min

c. Os valores médios das classes são 25, 75, 125, 175 e 225. O tempo médio de espera $\overline{x}$, em minuto, é a média aritmética entre esses valores médios, cujos pesos são as frequências das respectivas classes:

$$\overline{x} = \frac{(18 \cdot 25 + 24 \cdot 75 + 40 \cdot 125 + 20 \cdot 175 + 18 \cdot 225)}{(18 + 24 + 40 + 20 + 18)} \Rightarrow \overline{x} = \frac{(450 + 1.800 + 5.000 + 3.500 + 4.050)}{120} = \frac{14.800}{120}$$

$\therefore \overline{x} \approx 123,3$ min

8. alternativa **e**

Sendo (a, b, c, d) o rol, da menor para a maior altura das colunas, em metro, temos:

$$\begin{cases} \dfrac{b + c}{2} = 6,4 \\ \dfrac{a + b + c + d}{4} = 6,8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b + c = 12,8 \\ \dfrac{a + b + c + d}{4} = 6,8 \end{cases} \Rightarrow \frac{a + 12,8 + d}{4} = 6,8 \Rightarrow a + d = 14,4 \therefore \frac{a + d}{2} = 7,2$$

9. b. $\overline{x} = \dfrac{1,1 + 5,9 + 6,8 + 1,9 + 0,7 + 12,8}{6} \Rightarrow \overline{x} \approx 4,9$

c. $Dam = \dfrac{|1,1 - 4,9| + |5,9 - 4,9| + |6,8 - 4,9| + |1,9 - 4,9| + |0,7 - 4,9| + |12,8 - 4,9|}{6} = \dfrac{3,8 + 1 + 1,9 + 3 + 4,2 + 7,9}{6}$

$\therefore Dam \approx 3,6\%$

$\sigma = \dfrac{(1,1 - 4,9)^2 + (5,9 - 4,9)^2 + (6,8 - 4,9)^2 + (1,9 - 4,9)^2 + (0,7 - 4,9)^2 + (12,8 - 4,9)^2}{6} = 0,18$

$\therefore \sigma \approx 18\%$

10. b. Para os números da linha correspondente aos homens, vamos indicar a média aritmética, o desvio absoluto médio, a variância e o desvio padrão por $\bar{x}_H$, Dam_H, σ^2_H e σ_H, respectivamente. Assim, temos:

$$\bar{x}_H = \frac{4,5 + 4,5 + 3,9 + 3,4}{4} = 4,075$$

$$Dam_H = \frac{|4,5 - 4,075| + |4,5 - 4,075| + |3,9 - 4,075| + |3,4 - 4,075|}{4} = 0,425$$

$$\sigma^2_H = \frac{(4,5 - 4,075)^2 + (4,5 - 4,075)^2 + (3,9 - 4,075)^2 + (3,4 - 4,075)^2}{4} = 0,211875$$

$$\sigma_H = \sqrt{0,211875} \Rightarrow \sigma_H \approx 0,46030$$

Para os números da linha correspondente às mulheres, vamos indicar a média aritmética, o desvio absoluto médio, a variância e o desvio padrão por $\bar{x}_M$, Dam_M, σ^2_M e σ_M, respectivamente. Assim, temos:

$$\bar{x}_M = \frac{3 + 2,7 + 2,8 + 2,7}{4} = 2,8$$

$$Dam_M = \frac{|3 - 2,8| + |2,7 - 2,8| + |2,8 - 2,8| + |2,7 - 2,8|}{4} = 0,1$$

$$\sigma^2_M = \frac{(3 - 2,8)^2 + (2,7 - 2,8)^2 + (2,8 - 2,8)^2 + (2,7 - 2,8)^2}{4} = 0,015$$

$$\sigma_M = \sqrt{0,015} \Rightarrow \sigma_M \approx 0,122474$$

VERIFIQUE O QUE APRENDEU NO CAPÍTULO 2

1. I. alternativa **d**

O investimento, em dólares, no setor de petróleo e derivados será 0,49 · 803 bilhões, ou seja, 393,47 bilhões.

II. alternativa **b**

O investimento, em dólar, no setor de eletricidade será 0,35 · 803 bilhões, ou seja, 281,05 bilhões.

O investimento, em dólar, no setor de cana-de-açúcar será 0,04 · 803 bilhões, ou seja, 32,12 bilhões.

Logo, o investimento, em dólar, no setor de eletricidade e cana-de-açúcar será 313,17 bilhões.

III. alternativa **c**

A medida α do arco do setor circular que representa o investimento em cana-de-açúcar é calculada por:

$\alpha = 0,04 \cdot 360° = 14,4°$

2. alternativa **d**

Sendo x o número retirado e s a soma dos outros sete números, temos:

$$\frac{x + s}{8} = 4,5 \Rightarrow s = 36 - x$$

Dividindo por 7 ambos os membros, obtemos:

$$\frac{s}{7} = \frac{36 - x}{7}$$

Observando que, no primeiro membro, temos a média aritmética dos sete números restantes, depois de retirar o número x, concluímos:

$$\frac{36 - x}{7} = 4,2 \Rightarrow x = 6,6$$

3. alternativa **e**

A densidade populacional d, em número de peixes por metro cúbico, do reservatório formado pela união dos dois tanques é a média aritmética ponderada entre os números 190 e 170, com pesos 220 e 180, respectivamente. Portanto:

$$d = \frac{190 \cdot 220 + 170 \cdot 180}{220 + 180} = 181$$

4. alternativa **a**

A média aritmética $\bar{x}$ das idades das crianças relacionadas é dada por:

$$\bar{x} = \frac{2 \cdot 2 + 5 \cdot 1 + 8 \cdot 2 + 11 \cdot 1 + 14 \cdot 2}{2 + 1 + 2 + 1 + 2} = \frac{64}{8} = 8$$

Assim, o desvio padrão σ dessas idades é dado por:

$$\sigma = \sqrt{\frac{2 \cdot (2 - 8)^2 + (5 - 8)^2 + 2 \cdot (8 - 8)^2 + (11 - 8)^2 + 2 \cdot (14 - 8)^2}{2 + 1 + 2 + 1 + 2}} = \sqrt{\frac{162}{8}} = 4,5$$

CAPÍTULO 3 Matrizes

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

2. a. O faturamento da loja 3 no dia 2 corresponde ao elemento a_{32} da matriz.

b. O faturamento da rede no dia 3 é dado por:

$a_{13} + a_{23} + a_{33} + a_{43} + a_{53} = 10.580$

c. O faturamento da loja 1 nos quatro dias é dado por:

$a_{11} + a_{12} + a_{13} + a_{14} = 7.730$

4. a. A soma S_{20} dos termos dessa sequência é dada por:

$$S_{20} = \frac{(3 + 60) \cdot 20}{2} \Rightarrow S_{20} = 630$$

b. A soma S_{20} dos termos dessa sequência é dada por:

$$S_{20} = \frac{(22 + 41) \cdot 20}{2} \Rightarrow S_{20} = 630$$

5. $$\begin{pmatrix} x^2 - 3 & x + 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 3 = 1 \\ x + 2 = 0 \end{cases} \therefore \begin{cases} x = \pm 2 \\ x = -2 \end{cases}$$

Como o valor de x que satisfaz as duas igualdades ao mesmo tempo é -2, concluímos que $A = I_2$ se, e somente se, $x = -2$.

6. $$\begin{pmatrix} 0 & 3p - q & 0 \\ p + q - 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3p - q = 0 \\ p + q - 4 = 0 \end{cases} \therefore p = 1 \text{ e } q = 3$$

7. $$A = B^t \Rightarrow \begin{pmatrix} x^2 - 5x & 2 \\ 8 & x^2 - 16 \\ 6 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 8 & 0 \\ 6 & x^2 - x \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{cases} x^2 - 5x = -4 \\ x^2 - 16 = 0 \\ 12 = x^2 - x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 5x + 4 = 0 & (1) \\ x^2 - 16 = 0 & (2) \\ x^2 - x - 12 = 0 & (3) \end{cases}$$

De (1), temos: $x = 4$ ou $x = 1$
De (2), temos: $x = 4$ ou $x = -4$
De (3), temos: $x = 4$ ou $x = -3$
Como o valor de x que satisfaz (1), (2) e (3), simultaneamente, é 4, concluímos que $A = B^t$ se, e somente se, $x = 4$.

9. a. $$A + B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 8 \\ 1 & -4 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 5 & -9 \\ 6 & 2 & 7 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 6 & 8 & -1 \\ 7 & -2 & 7 \end{pmatrix}$$

b. $$2A - B = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 16 \\ 2 & -8 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 5 & -9 \\ 6 & 2 & 7 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 25 \\ -4 & -10 & -7 \end{pmatrix}$$

c. $$3A - \frac{1}{2} \cdot C^t = \begin{pmatrix} 6 & 9 & 24 \\ 3 & -12 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 3 & -5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & 5 & 26 \\ 3 & -15 & 5 \end{pmatrix}$$

11. a. $$A + 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 12 & 6 \\ 7 & -2 & 12 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A + \begin{pmatrix} 4 & 20 & -4 \\ 0 & 8 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 12 & 6 \\ 7 & -2 & 12 \end{pmatrix}$$

Adicionando a ambos os membros da igualdade a oposta da matriz $\begin{pmatrix} 4 & 20 & -4 \\ 0 & 8 & 12 \end{pmatrix}$, concluímos que:

$$A + \begin{pmatrix} 4 & 20 & -4 \\ 0 & 8 & 12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & -20 & 4 \\ 0 & -8 & -12 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 8 & 12 & 6 \\ 7 & -2 & 12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & -20 & 4 \\ 0 & -8 & -12 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 4 & -8 & 10 \\ 7 & -10 & 0 \end{pmatrix}$$

b. $$\begin{cases} X + Y = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 6 \end{pmatrix} \\ X - Y = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$2X + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 2 & 10 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Substituindo X por $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ na primeira:

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} + Y = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow Y = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

12. a. O número de placas do modelo 1 produzidas no dia 2 pela fábrica A é o elemento a_{12}.

b. O número de placas do modelo 1 produzidas no dia 2 pela fábrica B é o elemento b_{12}.

c. O número de placas do modelo 1 produzidas no dia 2 pelas duas fábricas juntas é a soma $a_{12} + b_{12}$.

d. O número de placas do modelo 2 produzidas pelas duas fábricas juntas no dia 1 é a soma do elemento a_{21} da matriz A com o elemento b_{21} da matriz B.

e. A matriz C é a soma das matrizes A e B:

$$C = \begin{pmatrix} 51 & 62 \\ 49 & 51 \\ 62 & 58 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 75 & 82 \\ 86 & 95 \\ 82 & 88 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 126 & 144 \\ 135 & 146 \\ 144 & 146 \end{pmatrix}$$

f. A matriz D pode ser a diferença entre A e B, nessa ordem:

$$D = \begin{pmatrix} 51 & 62 \\ 49 & 51 \\ 62 & 58 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 75 & 82 \\ 86 & 95 \\ 82 & 88 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -24 & -20 \\ -37 & -44 \\ -20 & -30 \end{pmatrix}$$

14. a. $$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 \\ -4 \end{pmatrix}$$

c. $$B \cdot C = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -8 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$$

d. $$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 12 \\ -2 & -6 \end{pmatrix}$$

16. a. Falsa; a multiplicação de matrizes não é comutativa, como podemos observar nos itens **a** e **b** do exercício 15.

b. Verdadeira; a matriz identidade é elemento neutro na multiplicação, como podemos observar nos itens **c** e **d** do exercício 15.

c. Falsa; observe o item **e** do exercício 15.

17. $\underbrace{A_{2\times 2} \cdot X_{p\times q}}_{p=2} = B_{2\times 1}$; sendo $X = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, temos:

$p = 2 \qquad q = 1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -15 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a + 2b \\ -3b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -15 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{cases} a + 2b = 6 \\ -3b = -15 \end{cases} \Rightarrow a = -4 \text{ e } b = 5$$

18. a. Sendo A a matriz "Fio $\times$ Tamanho", descrita pela tabela 1, e B a matriz "Tamanho $\times$ Mês", descrita pela tabela 2, temos $C = A \cdot B$, isto é:

$$C = \begin{pmatrix} 60 & 70 & 80 \\ 40 & 50 & 60 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 200 & 300 \\ 300 & 300 \\ 100 & 200 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 41.000 & 55.000 \\ 29.000 & 39.000 \end{pmatrix}$$

b. Pelo item **a**, temos $c_{11} = 41.000$; logo, 41 kg.

c. Pelo item **a**, temos $c_{11} + c_{12} = 96.000$; logo, 96 kg.

d. Pelo item **a**, temos $c_{12} + c_{22} = 94.000$; logo, 94 kg.

19. a. $CD = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Concluímos, então, que as matrizes C e D são inversas entre si, ou seja, $C = D^{-1}$

b. $EF = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 12 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$

Como $EF \neq I_2$, concluímos que as matrizes E e F não são inversas entre si.

c. Se existir, a inversa de G é da forma:

$G^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Assim, devemos ter:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a + 3c = 1 \\ b + 3d = 0 \\ a + 4c = 0 \\ b + 4d = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a + 3c = 1 \\ a + 4c = 0 \end{cases} \Rightarrow a = 4 \text{ e } c = -1$$

$$\begin{cases} b + 3d = 0 \\ b + 4d = 1 \end{cases} \Rightarrow b = -3 \text{ e } d = 1$$

Assim, a inversa de G é a matriz:

$$G^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Se existir, a inversa de H é da forma:

$H^{-1} = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$. Assim, devemos ter:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2e + 3g = 1 \\ 2f + 3h = 0 \\ 4e + 6g = 0 \\ 4f + 6h = 1 \end{cases}$$

A primeira e a terceira equações formam o sistema com duas incógnitas:

$$\begin{cases} 2e + 3g = 1 \\ 4e + 6g = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2e + 3g = 1 \\ 2e + 3g = 0 \end{cases}$$

Observando que as duas equações desse sistema são incompatíveis, concluímos que ele não tem solução. Logo, não existe a inversa da matriz H.

22. a. $M' = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ -1 \end{bmatrix}$

b. $P' = \begin{bmatrix} \cos 45° & -\text{sen } 45° \\ \text{sen } 45° & \cos 45° \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sqrt{2} \\ 5\sqrt{2} \end{bmatrix}$

23. a. $\cos 90° = 0$ e $\text{sen } 90° = 1$, logo:

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x \\ y \end{bmatrix}$$

b. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ -x \end{bmatrix}$

c. $\cos 180° = -1$ e $\text{sen } 180° = 0$, logo:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x \\ y \end{bmatrix}$$

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

1. a. De acordo com a tabela, a população de bactérias da cultura 1 no dia 2 de julho era $5{,}2 \cdot 10^9$ indivíduos.

b. Como o aumento da população foi de $0{,}4 \cdot 10^6$ indivíduos, a porcentagem de aumento da população é dada por:

$$\frac{8{,}4 - 8}{8} = 0{,}05 = 5\%$$

2. b. Indicando por x a população brasileira residente no Brasil, em milhões de pessoas, temos:

$1{,}076x = 212{,}7 \Rightarrow x \approx 197{,}7$

Assim, a população p, em milhões de pessoas residentes no Brasil com idade de 0 a 29 anos, em 2012, é calculada, aproximadamente, por:

$p = 0{,}499 \cdot 197{,}7 \Rightarrow p \approx 98{,}7$

3. alternativa **a**

Cada elemento a_{ij} corresponde ao total transferido por meio de TEDs do banco i para o banco j. A soma dos elementos da linha i é o valor total das transferências do banco i para os bancos 1, 2, 3, 4 e 5. Assim teremos:

- *Banco* 1: $0 + 2 + 0 + 2 + 2 = 6$
- *Banco* 2: $0 + 0 + 2 + 1 + 0 = 3$
- *Banco* 3: $1 + 2 + 0 + 1 + 1 = 5$
- *Banco* 4: $0 + 2 + 2 + 0 + 0 = 4$
- *Banco* 5: $3 + 0 + 1 + 1 + 0 = 5$

Logo, o banco 1 transferiu a maior quantia via TED.

4. b. $C = B - A = \begin{bmatrix} 27 & 28 \\ 29 & 28 \\ 29 & 31 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 25 & 25 \\ 28 & 27 \\ 27 & 28 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

d. Em janeiro de 2024, a produção da fábrica 1 foi de 25 t e, em janeiro de 2025, foi de 27 t; logo:

$$\frac{27 - 25}{25} = \frac{2}{25} = 0{,}08 = 8\%$$

e. As somas dos elementos da primeira linha das matrizes A e B representam a produção da fábrica 1, em tonelada, no primeiro bimestre de 2024 e no primeiro bimestre de 2025, respectivamente. Assim, no primeiro bimestre de 2024, a produção da fábrica 1 foi de 50 t e, no primeiro bimestre de 2025, foi de 55 t; logo:

$$\frac{55 - 50}{50} = \frac{5}{50} = 0{,}1 = 10\%$$

f. A soma dos elementos da matriz A e a soma dos elementos da matriz B representam a produção da indústria, em tonelada, no primeiro bimestre de 2024 e no primeiro bimestre de 2025, respectivamente. Logo:

$$\frac{172-160}{160}=\frac{12}{160}=0{,}075=7{,}5\%$$

5. a. $A\cdot B=\begin{pmatrix}4 & -3\\0 & 10\end{pmatrix}$ e $B\cdot A=\begin{pmatrix}4 & -3\\0 & 10\end{pmatrix}$

Como $AB = BA$, concluímos que as matrizes A e B se comutam na multiplicação.

b. $C\cdot D=D\cdot C\Rightarrow\begin{pmatrix}x & 0\\x & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\-x & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\-x & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x & 0\\x & 1\end{pmatrix}$

$\therefore\begin{pmatrix}x & 0\\0 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x & 0\\-x^2+4x & 4\end{pmatrix}\Rightarrow 4=-x^2+4x$

$\therefore x^2-4x+4=0\Rightarrow x=2$

6. a. $M^2=\begin{bmatrix}-1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}\Rightarrow M^2=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}=I_2$

b. $M^{17}=M^{16}\cdot M=(M^2)^8\cdot M=(I_2)^8\cdot M=\begin{bmatrix}-1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}=M$

7. alternativa **e**

$$\begin{bmatrix}0{,}006 & 0{,}033 & 0{,}108\\0{,}001 & 0{,}035 & 0{,}018\\0{,}084 & 0{,}052 & 0{,}631\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}200\\300\\600\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}75{,}90\\21{,}50\\411{,}00\end{bmatrix}$$

8. Sendo a, b e c o número de gols marcados por A, B e C, respectivamente, temos o sistema:

$$\begin{cases}a+b+c=26\\b=2c\\a=b-4\end{cases}\text{, que é equivalente a: }\begin{cases}a+b+c=26\\0a+b-2c=0\\a-b+0c=-4\end{cases}$$

Pela definição de multiplicação de matrizes, esse sistema pode ser representado pela equação matricial:

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\0 & 1 & -2\\1 & -1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}26\\0\\-4\end{pmatrix}$$

9. a. $C=A\cdot B\Rightarrow C=\begin{bmatrix}50 & 20 & 20\\40 & 10 & 30\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}10 & 20 & 15\\15 & 20 & 20\\30 & 20 & 30\end{bmatrix}=$

$=\begin{bmatrix}1.400 & 1.800 & 1.750\\1.450 & 1.600 & 1.700\end{bmatrix}$

10. alternativa **e**

Ao aplicar a transformação, cada ponto (x, y) será da forma $(-2x, 2y)$. Assim, o polígono A' não pode ser obtido por simples translação, ou reflexão ou rotação do polígono A.

VERIFIQUE O QUE APRENDEU NO CAPÍTULO 3

1. $\begin{cases}X+Y=\begin{bmatrix}0 & 1\\-6 & 4\end{bmatrix}\\X-Y=\begin{bmatrix}2 & -7\\4 & 6\end{bmatrix}\end{cases}$

Adicionando, membro a membro, as duas equações, temos: $2X=\begin{bmatrix}2 & -6\\-2 & 10\end{bmatrix}\Rightarrow X=\begin{bmatrix}1 & -3\\-1 & 5\end{bmatrix}$

Substituindo a matriz X na primeira, temos:

$\begin{bmatrix}1 & -3\\-1 & 5\end{bmatrix}+Y=\begin{bmatrix}0 & 1\\-6 & 4\end{bmatrix}\Rightarrow Y=\begin{bmatrix}-1 & 4\\-5 & -1\end{bmatrix}$

2. a. O elemento a_{23} da matriz A é 73, que representa o número de unidades do modelo 2 fabricadas pela filial A no dia 3 de março.

b. O elemento b_{12} da matriz B é 80, que representa o número de unidades do modelo 1 fabricadas pela filial B no dia 2 de março.

c. Cada elemento s_{ij} da matriz soma, $S = A + B =$ $=\begin{pmatrix}125 & 140 & 115\\183 & 108 & 123\end{pmatrix}$, representa o número de unidades do modelo i fabricadas pelas duas filiais A e B no dia j de março.

d. Cada elemento d_{ij} da matriz diferença, $D = A - B =$ $=\begin{pmatrix}-27 & -20 & 25\\-3 & -12 & 23\end{pmatrix}$, representa o número de unidades do modelo i que a filial A fabricou a mais ou a menos do que a filial B no dia j de março.

e. Cada elemento p_{ij} da matriz $P = 2(A + B) =$ $=\begin{pmatrix}250 & 280 & 230\\366 & 216 & 246\end{pmatrix}$ representa o dobro do número de unidades do modelo i fabricadas pelas duas filiais juntas no dia j de março do ano considerado nas matrizes A e B.

3. Sendo $M=\begin{pmatrix}m_{11} & m_{12} & m_{13}\\m_{21} & m_{22} & m_{23}\\m_{31} & m_{32} & m_{33}\end{pmatrix}$, temos:

$M\cdot C=P\Rightarrow\begin{pmatrix}m_{11} & m_{12} & m_{13}\\m_{21} & m_{22} & m_{23}\\m_{31} & m_{32} & m_{33}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\0 & -1 & 0\\0 & 2 & 1\end{pmatrix}=$

$=\begin{pmatrix}2 & -10 & 1\\18 & 38 & 17\\19 & 14 & 0\end{pmatrix}$

$\therefore\begin{pmatrix}m_{11} & m_{11}-m_{12}+2m_{13} & m_{13}\\m_{21} & m_{21}-m_{22}+2m_{23} & m_{23}\\m_{31} & m_{31}-m_{32}+2m_{33} & m_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -10 & 1\\18 & 38 & 17\\19 & 14 & 0\end{pmatrix}$

Assim, obtemos:

$\begin{cases}m_{11}=2\\m_{11}-m_{12}+2m_{13}=-10\\m_{13}=1\end{cases}\Rightarrow$

$\Rightarrow m_{11}=2, m_{12}=14$ e $m_{13}=1$

$\begin{cases}m_{21}=18\\m_{21}-m_{22}+2m_{23}=38\\m_{23}=17\end{cases}\Rightarrow$

$\Rightarrow m_{21}=18, m_{22}=14$ e $m_{23}=17$

$\begin{cases}m_{31}=19\\m_{31}-m_{32}+2m_{33}=14\\m_{33}=0\end{cases}\Rightarrow$

$\Rightarrow m_{31}=19, m_{32}=5$ e $m_{33}=0$

Logo, a mensagem é dada pela sequência de números (2) (14)(1)(18)(14)(17)(19)(5)(0), cujo significado é: boasorte!

CAPÍTULO 4 Sistemas lineares e determinantes

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. **a.** Para $x = 3$, temos: $4 \cdot 3 + 3y = 12 \Rightarrow y = 0$

b. Para $x = -7$, temos: $4 \cdot (-7) + 3y = 12 \Rightarrow y = \frac{40}{3}$

2. **a.** A massa de x pacotes de 1 kg é x kg, a massa de y pacotes de 2 kg é $2y$ kg, e a massa de z pacotes de 5 kg é $5z$ kg. Assim, temos a equação: $x + 2y + 5z = 15$

b. Temos que 3 pacotes de 1 kg, 1 pacote de 2 kg e 2 pacotes de 5 kg perfazem 15 kg; logo, uma solução da equação obtida no item **a** é (3, 1, 2).

Raciocinando de maneira análoga, obtemos as soluções: (8, 1, 1) e (4, 3, 1)

Assim, temos três soluções da equação: (3, 1, 2), (8, 1, 1) e (4, 3, 1.)

c. Da equação do item **a**, temos que: $x = 15 - 2y - 5z$. Como x, y e z devem assumir valores naturais não nulos, temos as seguintes possibilidades:

Quadro de possibilidades

y	z	x
1	1	8
1	2	3
2	1	6
2	2	1
3	1	4
4	1	2

Concluímos, assim, que a equação do item **a** tem 6 soluções no contexto do enunciado.

d. Pelo quadro construído no item **c**, concluímos que o maior número possível de pacotes de 2 kg que a pessoa pode ter adquirido é 4.

3. Temos que: $240x + 220y = 6.240 \Rightarrow x = 26 - \frac{11y}{12}$

Como x e y devem ser números naturais não nulos, deduzimos que y deve ser múltiplo não nulo de 12 e menor ou igual a 24, ou seja, y só pode assumir os valores 12 e 24. Assim:

Para $y = 12$, temos: $x = 26 - \frac{11 \cdot 12}{12} = 15$

Para $y = 24$, temos: $x = 26 - \frac{11 \cdot 24}{12} = 4$

Concluímos, então, que, no dia 23, podem ter sido vendidos 4 ou 15 relógios.

5. **a.** Verdadeira, pois (1, 2, 3) é solução das duas equações do sistema:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ 2x + y - 3z = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 + 2 \cdot 2 - 3 = 2 \\ 2 \cdot 1 + 2 - 3 \cdot 3 = -5 \end{cases}$$

b. Verdadeira, pois (−9, 4, −3) é solução das duas equações do sistema. Para verificar, raciocine de maneira análoga ao que foi feito no item **a**.

c. Falsa, pois (1, 0, −1) não é solução de uma das duas equações do sistema. Para verificar, raciocine de maneira análoga ao que foi feito no item **a**.

d. Verdadeira, pois $\left(\frac{28}{3}, \frac{1}{3}, 8\right)$ é solução das duas equações do sistema. Para verificar, raciocine de maneira análoga ao que foi feito no item **a**.

e. Falsa, pois o sistema S tem mais de uma solução, como se constata pelos itens **a**, **b** e **d**.

f. Falsa, pois, substituindo x, y e z por 3, 5 e k, respectivamente, temos:

$$\begin{cases} 3 + 2 \cdot 5 - k = 2 \\ 2 \cdot 3 + 5 - 3k = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = 11 \\ k = \frac{16}{3} \end{cases}$$

Como o valor de k não é o mesmo nas duas equações, concluímos que o sistema S não tem uma solução da forma (3, 5, k), com $k \in \mathbb{R}$. Logo, a afirmação é falsa.

6. alternativa **d**

O sistema linear formado pelas equações das retas r, s e t, representadas no gráfico, é impossível, pois não existe um ponto comum às retas, isto é, não existe um par ordenado (α, β) que seja solução das três equações simultaneamente.

7. Isolando a variável y em cada equação dos sistemas, obtemos:

$$S_1: \begin{cases} y = -\frac{3x}{4} + \frac{1}{4} \\ y = -\frac{3x}{4} + \frac{1}{8} \end{cases} \quad S_2: \begin{cases} y = -\frac{5x}{2} + \frac{3}{2} \\ y = -7x + 1 \end{cases} \quad S_3: \begin{cases} y = -2x + \frac{7}{2} \\ y = -2x + \frac{7}{2} \end{cases}$$

Assim, temos:

a. No sistema S_2, as funções afins representam retas concorrentes do plano cartesiano, pois os coeficientes de x são diferentes.

b. No sistema S_1, as funções afins representam retas paralelas distintas do plano cartesiano, pois os coeficientes de x são iguais, e os termos independentes são diferentes.

c. No sistema S_3, as funções afins representam retas paralelas coincidentes do plano cartesiano, pois os coeficientes de x são iguais, e os termos independentes são iguais.

d. O sistema S_1 é impossível (SI), pois as equações que o compõem representam retas paralelas distintas do plano cartesiano.

O sistema S_2 é possível e determinado (SPD), pois as equações que o compõem representam retas concorrentes do plano cartesiano.

O sistema S_3 é possível e indeterminado (SPI), pois as equações que o compõem representam retas paralelas coincidentes do plano cartesiano.

e. Devemos determinar o ponto comum às retas representadas pelas equações do sistema S_2.

$-7x + 1 = -\frac{5x}{2} + \frac{3}{2} \Rightarrow -14x + 2 = -5x + 3$

$\therefore 9x = -1 \Rightarrow x = -\frac{1}{9}$

Substituindo x por $-\frac{1}{9}$ em qualquer equação do sistema S_2, obtemos $y = \frac{16}{9}$

Concluímos, então, que o ponto comum às retas representadas pelas equações do sistema S_2 é $\left(-\frac{1}{9}, \frac{16}{9}\right)$

8. **a.** SPD, pois é um sistema linear escalonado do 1º tipo:

$$\begin{cases} x + 3y - 2z = -1 & (1) \\ \quad\; 4y + 5z = 19 & (2) \\ \qquad\quad 2z = 6 & (3) \end{cases}$$

De (3), temos: $z = 3$

Substituindo z por 3 em (2), obtemos:

$4y + 5 \cdot 3 = 19 \Rightarrow y = 1$

Substituindo z por 3 e y por 1 em (1), obtemos:

$x + 3 \cdot 1 - 2 \cdot 3 = -1 \Rightarrow x = 2$

$\therefore S = \{(2, 1, 3)\}$

b. SPI, pois é um sistema linear escalonado do 2º tipo:

$$\begin{cases} x - 5y + 3z = 2 & (1) \\ \quad\;\; y + 3z = 1 & (2) \end{cases}$$

De (2), temos: $y = 1 - 3z$

Substituindo y por $1 - 3z$ em (1), obtemos:

$x - 5(1 - 3z) + 3z = 2 \Rightarrow x = 7 - 18z$

$\therefore S = \{(7 - 18z, 1 - 3z, z), \text{ com } z \in \mathbb{R}\}$

c. SPI, pois é um sistema escalonado do 2º tipo:

$$\begin{cases} 2x - y + 4z = 1 & (1) \\ \qquad\quad\; 3z = 6 & (2) \end{cases}$$

De (2), temos: $z = 2$

Substituindo z por 2 em (1), obtemos:

$2x - y + 4 \cdot 2 = 1 \Rightarrow x = \dfrac{y - 7}{2}$

$\therefore S = \left\{\left(\dfrac{y - 7}{2}, y, 2\right), \text{ com } y \in \mathbb{R}\right\}$

9. Indicando por m, f e q o número de professores de Matemática, Física e Química, respectivamente, temos:

$$\begin{cases} m + f + q = 152 \\ f = 2q \end{cases} \Rightarrow m = 152 - 3q$$

O menor número natural m que satisfaz essa última igualdade é obtido fazendo-se $q = 50$. Logo, o menor número possível de professores de Matemática que participaram do congresso é 2.

10. a.
$$\begin{cases} x + 5y + 2z = 10 \\ 2x + y - 3z = -3 \\ 3x + 6y + 5z = 19 \end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{cases} x + 5y + 2z = 10 \\ -9y - 7z = -23 \\ -9y - z = -11 \end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{cases} x + 5y + 2z = 10 & (1) \\ -9y - 7z = -23 & (2) \\ 6x = 12 & (3) \end{cases}$$

De (3), temos: $z = 2$

Substituindo z por 2 em (2), obtemos: $y = 1$

Substituindo y por 1 e z por 2 em (1), obtemos: $x = 1$

Portanto: $S = \{(1, 1, 2)\}$

b.
$$\begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ 3x + y - z = 2 \\ 5x - y + 3z = 1 \end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ 4y - 7z = -1 \\ 4y - 7z = -4 \end{cases}$$

equações incompatíveis

Classificação: SI

Logo: $S = \varnothing$

c.
$$\begin{cases} 3x + 7y - 11z = 6 \\ x + 2y - 4z = 1 \\ x + 3y - 3z = 4 \end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{cases} x + 2y - 4z = 1 \\ 3x + 7y - 11z = 6 \\ x + 3y - 3z = 4 \end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{cases} x + 2y - 4z = 1 \\ y + z = 3 \\ y + z = 3 \end{cases} \sim \begin{cases} x + 2y - 4z = 1 & (1) \\ y + z = 3 & (2) \end{cases}$$

De (2), temos: $y = 3 - z$

Substituindo y por $3 - z$ em (1), obtemos:

$x + 2 \cdot (3 - z) - 4z = 1 \Rightarrow x = -5 + 6z$

Logo: $S = \{(6z - 5, 3 - z, z), \text{ com } z \in \mathbb{R}\}$

11. a.
$$\begin{cases} x + 3y = 1 \\ 4x - y = 2 \\ 3x - 4y = 0 \end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{cases} x + 3y = 1 \\ -13y = -2 \\ -13y = -3 \end{cases}$$

equações incompatíveis

Classificação: SI

Logo: $S = \varnothing$

b. Raciocinando de maneira análoga ao item **a**, obtemos:
Classificação: SPD; $S = \{(-2, 2)\}$

c. Raciocinando de maneira análoga ao item **a**, obtemos:
Classificação: SPI; $S = \{(2y + 3, y), \text{ com } y \in \mathbb{R}\}$

Raciocinando de maneira análoga ao item **a**, obtemos:
Classificação: SPD; $S = \left\{\left(\dfrac{11}{19}, \dfrac{1}{19}\right)\right\}$

12. Indicando, respectivamente, por x, y e z os números de estudantes dos níveis Educação Infantil, Ensino Fundamental e Ensino Médio, temos:

$$\begin{cases} x + y + z = 3.000 \\ y = 2z \\ x = y - 500 \end{cases}$$

Escalonando o sistema e substituindo os valores encontrados nas equações, obtemos $x = 900$, $y = 1.400$ e $z = 700$.

Logo, a escola apresenta 900 estudantes na Educação Infantil, 1.400 no Ensino Fundamental e 700 no Ensino Médio.

13. Indicando por a, b e c os números de passageiros dos aviões A, B e C, respectivamente, esquematizamos:

$$\begin{cases} a + b = c + 260 \\ a + c = 2b \\ b = 2a - 260 \end{cases}$$

$$\sim \begin{cases} a + b - c = 260 \\ a - 2b + c = 0 \\ 2a - b + 0c = 260 \end{cases} \sim$$

$$\sim\begin{cases} a+b-c=260 \\ 0a-3b+2c=-260 \\ 0a-3b+2c=-260 \end{cases}$$

$$\sim\begin{cases} a+b-c=260 \\ -3b+2c=-260 \end{cases}$$

O sistema é possível e indeterminado, portanto temos várias soluções, por exemplo (238, 216, 194), (230, 200, 170) e (235, 210, 185) são algumas soluções.

Logo, os dados fornecidos são insuficientes para determinar o número de passageiros de cada avião.

15. a. $\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = 5\cdot 7 - 4\cdot 3 = 23$

b. $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 3\cdot 1 - 0\cdot 1 = 3$

c. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0 + 2 - 12 - 0 + 4 - 6 = -12$

d. $\begin{vmatrix} 1 & \text{sen } 3 & -\cos 3 \\ 0 & \text{sen } 3 & -\cos 3 \\ 1 & \cos 3 & \text{sen } 3 \end{vmatrix} =$

$= \text{sen}^2\, 3 - \text{sen } 3 \cdot \cos 3 + \text{sen } 3 \cdot \cos 3 + \cos^2 3 =$
$= \text{sen}^2\, 3 + \cos^2 3 = 1$

16. alternativa **d**

O sistema será possível e determinado se, e somente se, o determinante da matriz dos coeficientes for diferente de zero, isto é:

$\begin{vmatrix} k & 3 \\ 10 & k+1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow k^2 + k - 30 \neq 0 \therefore k \neq 5 \text{ e } k \neq -6$

17. Para que o sistema seja possível e determinado, é necessário e suficiente que o determinante da matriz dos coeficientes seja diferente de zero, ou seja:

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & k \end{vmatrix} \neq 0$, de que obtemos $k \neq \frac{1}{4}$

18. a. $\begin{vmatrix} x & 3 \\ 9 & 3x \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 3x^2 - 27 = 0 \Rightarrow x = 3 \text{ ou } x = -3$

b. $\begin{vmatrix} 2\,\text{sen } x & 1 \\ \frac{1}{2} & \cos x \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2\,\text{sen } x \cos x - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$\therefore \text{sen } 2x = 1 \Rightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k\cdot 2\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$

$\therefore x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$

c. $\begin{vmatrix} x & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & x \end{vmatrix} = 8 \Rightarrow 5x^2 + 2 - 4x - 3x = 8$

$\therefore 5x^2 - 7x - 6 = 0 \Rightarrow x = 2 \text{ ou } x = -\frac{3}{5}$

d. $\begin{vmatrix} 3 & x & -2 \\ x+1 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -12 \Rightarrow -3 - 4(x+1) + 5x +$

$+ 10 - 6 + x(x+1) = -12 \therefore x^2 + 2x + 9 = 0$

Calculando o discriminante Δ dessa equação, obtemos:

$\Delta = 2^2 - 4\cdot 1\cdot 9 = -32$

Logo, a equação não tem raiz real.

20. a. Seja D o determinante da matriz dos coeficientes do sistema, isto é: $D = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & k \end{vmatrix}$

Impondo a condição $D \neq 0$, obtemos os valores de k para que o sistema seja possível e determinado:

$\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & k \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow k \neq 8$

Logo: $k \neq 8 \Rightarrow$ SPD

Para $k = 8$, temos $D = 0$, e, nesse caso, o sistema pode ser impossível ou possível e indeterminado. Para descobrir qual dessas duas alternativas ocorre, substituímos k por 8 e escalonamos o sistema:

$$\sim\begin{cases} x + 4y = 5 \\ 2x + 8y = 12 \end{cases} \quad (-2) \quad \sim\begin{cases} x + 4y = 5 \\ 0x + 0y = 2 \end{cases}$$

Logo: $k = 8 \Rightarrow$ SI

b. Seja D o determinante da matriz dos coeficientes do sistema, isto é: $D = \begin{vmatrix} k & 1 \\ 9 & k \end{vmatrix}$

Impondo a condição $D \neq 0$, obtemos os valores de k para que o sistema seja possível e determinado:

$\begin{vmatrix} k & 1 \\ 9 & k \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow k^2 - 9 \neq 0 \therefore k \neq 3 \text{ e } k \neq -3$

Logo: $k \neq 3$ e $k \neq -3 \Rightarrow$ SPD

Para $k = 3$, temos $D = 0$, e, nesse caso, o sistema pode ser impossível ou possível e indeterminado. Para descobrir qual dessas duas alternativas ocorre, substituímos k por 3 e escalonamos o sistema:

$$\sim\begin{cases} 3x + y = 1 \\ 9x + 3y = -3 \end{cases} \quad (-3) \quad \sim\begin{cases} 3x + y = 1 \\ 0x + 0y = -6 \end{cases}$$

Logo: $k = 3 \Rightarrow$ SI

Para $k = -3$ e raciocinando de maneira análoga, obtemos k = −3 ⇒ SPI

21. a. Seja: $D = \begin{vmatrix} m & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 3m + 3$

Impondo $D \neq 0$, teremos um sistema possível e determinado: $3m + 3 \neq 0 \Rightarrow m \neq -1 \Rightarrow$ SPD

Para $m = -1$, temos:

$$\begin{cases} -x - y + 2z = 1 \\ 2x + y + z = 2 \\ 5x + 2y + 5z = 7 \end{cases} \quad (2) \quad (5) \quad \sim$$

$$\begin{cases} -x - y + 2z = 1 \\ -y + 5z = 4 \\ -3y + 15z = 12 \end{cases} \quad (-3) \quad \sim\begin{cases} -x - y + 2z = 1 \\ -y + 5z = 4 \end{cases}$$

Portanto: $m = -1 \Rightarrow$ SPI

b. Raciocinando de maneira análoga ao item **a**, obtemos: $m \neq 2$ e $m \neq 1$, SPD e $m = 2$ ou $m = 1$, SI.

22. a. Seja $D = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ m & 9 \end{vmatrix} = 18 - 3m$. Impondo $D \neq 0$, teremos um sistema possível e determinado:

$18 - 3m \neq 0 \Rightarrow m \neq 6$

Portanto: $m \neq 6 \Rightarrow$ SPD

Para $m = 6$, temos:

$$\sim \begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 6x + 9y = n \end{cases} \xrightarrow{\times (-3),\ +} \sim \begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 0x + 0y = n - 3 \end{cases}$$

Logo: $n - 3 \neq 0 \Rightarrow$ SI, $n - 3 = 0 \Rightarrow$ SPI

b. Seja $D = \begin{vmatrix} m & -1 \\ 1 & -m \end{vmatrix} = -m^2 + 1$. Impondo $D \neq 0$, teremos um sistema possível e determinado:

$-m^2 + 1 \neq 0 \Rightarrow m \neq 1$ e $m \neq -1$

- Para $m = 1$, obtemos: $n - 1 \neq 0 \Rightarrow$ SI; $n - 1 = 0 \Rightarrow$ SPI
- Para $m = -1$, obtemos: $n + 1 \neq 0 \Rightarrow$ SI; $n + 1 = 0 \Rightarrow$ SPI

23. a. A reta r é o gráfico de uma função da forma $y = ax + b$. Como os pontos (0, 4) e (−2, 0) pertencem a r, temos:

$$\begin{cases} 4 = a \cdot 0 + b \\ 0 = a \cdot (-2) + b \end{cases} \Rightarrow a = 2 \text{ e } b = 4$$

Assim, a equação da reta r é $y = 2x + 4$

b. O sistema formado pelas equações de r e s é:

$$\begin{cases} y = 2x + 4 \\ y = kx + 1 \end{cases}, \text{ que é equivalente a: } \begin{cases} 2x - y = -4 \\ kx - y = -1 \end{cases}$$

O determinante D da matriz dos coeficientes desse sistema é dado por:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ k & -1 \end{vmatrix} = -2 + k$$

Impondo a condição $D \neq 0$, obtemos os valores de k para que o sistema seja possível e determinado:

$$D \neq 0 \Rightarrow -2 + k \neq 0 \therefore k \neq 2$$

Para $k = 2$, o determinante D é igual a zero. Nesse caso, o sistema pode ser impossível ou possível e indeterminado. Substituindo k por 2 e escalonando o sistema, temos:

$$\begin{cases} 2x - y = -4 \\ 2x - y = -1 \end{cases} \xrightarrow{\times (-1),\ +} \sim \begin{cases} 2x - \ y = -4 \\ 0x + 0y = 3 \end{cases}$$

Assim, deduzimos que, para $k = 2$, o sistema é impossível.

c. No item **b**, deduzimos que:

para $k \neq 2$, o sistema tem uma única solução. Isso significa que as retas r e s são concorrentes;

para $k = 2$, o sistema não tem solução. Isso significa que as retas r e s são paralelas distintas.

24. Indicando por t o tempo, em mês, temos que as equações que expressam, em função de t, os montantes acumulados, em real, nas dívidas dos empréstimos de R$ 8.000,00 e R$ 10.000,00 são $y = 8.000 + 8.000 \cdot 0{,}04t$ e $y = 10.000 + 10.000 \cdot \frac{k}{100} \cdot t$, respectivamente. Observando que o gráfico de cada uma delas é parte de uma reta, deduzimos que a diferença entre esses montantes será constante se essas retas forem paralelas.

Assim, o sistema linear formado por essas equações deve ser impossível. Esse sistema pode ser representado na forma:

$$\begin{cases} y - \ \ 320t = 8.000 \\ y - 100kt = 10.000 \end{cases}$$

Uma condição necessária para que esse sistema seja impossível é que o determinante D da matriz dos coeficientes seja zero:

$$D = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -320 \\ 1 & -100k \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow k = 3{,}2$$

A condição $D = 0$ é necessária, mas não é suficiente, pois, sob essa condição, o sistema pode ser impossível ou possível e indeterminado. Para ter certeza da classificação, substituímos k por 3,2 e escalonamos o sistema:

$$\begin{cases} y - 320t = 8.000 \\ y - 320t = 10.000 \end{cases} \xrightarrow{\times (-1),\ +} \sim \begin{cases} y - 320t = 8.000 \\ 0y + \ \ 0t = 2.000 \end{cases}$$

Assim, deduzimos que o sistema é impossível para $k = 3{,}2$.

Concluímos, então, que a diferença entre os montantes das duas dívidas será a mesma em qualquer instante do período do empréstimo se $k = 3{,}2$.

26. alternativa **e**

Indicando por x, y e z os preços de cada pacote de folhas de sulfite, de cada cartucho e de cada caneta, respectivamente, temos o sistema:

$$\begin{cases} 10x + 3y + \ \ 8z = 218 \\ 20x + 6y + 14z = 434 \\ 2kx + 3y + \ \ kz = 210 \end{cases}$$

Esse sistema deve ser possível, pois os pacotes de folhas de sulfite tiveram preços iguais, o mesmo acontecendo com os cartuchos de impressora e com as canetas. Assim, existe um terno ordenado (x, y, z) que satisfaz as três equações do sistema.

Vamos obter, inicialmente, os valores de k para que o sistema seja possível e determinado.

$$\begin{vmatrix} 10 & 3 & 8 \\ 20 & 6 & 14 \\ 2k & 3 & k \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow k \neq 5$$

Assim, o sistema é possível e determinado para $k \neq 5$.

Vejamos a classificação do sistema para $k = 5$:

$$\begin{cases} 10x + 3y + \ \ 8z = 218 \\ 20x + 6y + 14z = 434 \\ 2kx + 3y + \ \ kz = 210 \end{cases} \sim \begin{cases} 10x + 3y + 8z = 218 \\ \ \ 0x + 0y + \ \ z = 1 \\ \ \ 0x + 0y + 0z = 5 \end{cases}$$

Como esse último sistema é impossível, pois é um sistema escalonado do terceiro tipo, concluímos que k não pode assumir o valor 5.

27. a. Escalonando o sistema, obtemos:

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 2 \\ 0x + 0y + (m - 15)z = -5 \end{cases}$$

Se $m - 15 \neq 0$, o sistema é possível e indeterminado;

Se $m - 15 = 0$, o sistema é impossível.

b. Escalonando o sistema, obtemos:

$$\begin{cases} x + py + pz = 6 \\ 0x + 0y + (4 - 3p)z = q - 18 \end{cases}$$

Se $4 - 3p \neq 0$, o sistema será possível e indeterminado.

Se $4 - 3p = 0$, há duas alternativas: ou $q - 18 = 0$ ou $q - 18 \neq 0$. Analisando cada uma delas:

$4 - 3p = 0$ e $q - 18 = 0$, o sistema será possível e indeterminado; $4 - 3p = 0$ e $q - 18 \neq 0$, o sistema será impossível.

28. a. Escalonando o sistema, obtemos:

$$\begin{cases} \ \ x + 3y = -2 \\ 0x - 7y = 7 \\ 0x + 0y = 1 + a \end{cases}$$

Se $1 + a = 0 \Rightarrow a = -1 \Rightarrow$ SPD

Se $1 + a \neq 0 \Rightarrow a \neq -1 \Rightarrow$ SI

b. Escalonando o sistema, obtemos:

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 0x - \ \ y = -2 \\ 0x + 0y = -6 - 2a \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Se } -6 - 2a = 0 \Rightarrow a = -3 \Rightarrow \text{SPD} \\ \text{Se } -6 - 2a \neq 0 \Rightarrow a \neq -3 \Rightarrow \text{SI} \end{array}$$

29. Para que as retas representadas por essas funções concorram em um mesmo ponto, o sistema a seguir deve ser possível e determinado:

$$\begin{cases} y = \ 3x + 2 \\ y = \ 2x - 1 \\ y = mx - 4 \end{cases}, \text{ que é equivalente a: } \begin{cases} 3x - y = -2 \\ 2x - y = 1 \\ mx - y = 4 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema formado pelas duas primeiras equações, obtemos o ponto $P(-3, -7)$. Como queremos que a reta representada pela terceira equação também passe por P, devemos ter: $m \cdot (-3) - (-7) = 4 \Rightarrow m = 1$

Logo, as retas representadas pelas funções concorrem em um mesmo ponto para $m = 1$.

30. Indicando, respectivamente, por x, y e z os preços dos modelos 1, 2 e 3, temos o sistema:

$$\begin{cases} 12x + 10y + \ \ 8z = 122 \\ 18x + 15y + 12z = 61k \end{cases}, \text{ que é equivalente ao sistema}$$

escalonado $\begin{cases} 6x + 5y + 4z = 61 \\ 0x + 0y + 0z = 61k - 183 \end{cases}$

Esse sistema deve ser possível, pois não houve variação de preço em nenhum dos três modelos de camiseta.

Assim, existe um terno ordenado (x, y, z) que satisfaz as três equações do sistema. Para que esse sistema seja possível, devemos ter: $61k - 183 = 0 \Rightarrow k = 3$

31. a. $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -7$

Como o determinante da matriz dos coeficientes do sistema linear é diferente de zero, concluímos que o sistema é possível e determinado (SPD).

b. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 12 & 11 \end{vmatrix} = 0$

Como o determinante da matriz dos coeficientes do sistema linear homogêneo é igual a zero, concluímos que o sistema é possível e indeterminado (SPI).

32. a. Escalonando o sistema, temos:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ 3x + \ \ y = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ 0x + 7y = 0 \end{cases}$$

Concluímos, então, que $x = 0$ e $y = 0$.

b. Escalonando o sistema, obtemos:

$$\begin{cases} a + 2b + 3c = 0 \\ \quad - 5b - 4c = 0 \end{cases}$$

Resolvendo em função de c, temos:

$b = -\frac{4c}{5}$ e $a = -\frac{7c}{5}$

Logo: $S = \left\{ \left(-\frac{7c}{5}, \ -\frac{4c}{5}, c \right), \text{com } c \in \mathbb{R} \right\}$

33. a. A soma de quadrados de números reais é zero se, e somente se, cada parcela é zero; logo:

$$(x - y)^2 + (2y + z)^2 + (2x + z)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ 2y + z = 0 \\ 2x + z = 0 \end{cases}$$

Assim, o número de soluções da equação proposta é o número de soluções do sistema homogêneo acima. Calculando o determinante da matriz dos coeficientes desse sistema, temos:

$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$ Logo, o sistema é possível e indeterminado, ou seja, tem infinitas soluções.

b. Escalonando o sistema homogêneo do item **a**, temos:

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ 2y + z = 0 \\ 2x + z = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} x - \ \ y + 0z = 0 \xrightarrow{\times} -2 \\ 0x + 2y + \ \ z = 0 \\ 2x + 0y + \ \ z = 0 \xleftarrow{+} \end{cases}$$

Resolvendo em função de z, chegamos a:

$y = -\frac{z}{2}$ e $x = -\frac{z}{2}$

Logo: $S = \left\{ \left(-\frac{z}{2}, \ -\frac{z}{2}, z \right), \text{com } z \in \mathbb{R} \right\}$

34. a. O determinante D da matriz dos coeficientes é dado por: $D = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 10 & k \end{vmatrix} = 5k - 30$

Impondo $D \neq 0$, obtemos os valores de k para que o sistema seja possível e determinado:

$D \neq 0 \Rightarrow 5k - 30 \neq 0 \therefore k \neq 6$

Logo, se $k \neq 6$ o sistema é possível e determinado.

Para $k = 6$, obtemos $D = 0$. Como o sistema é homogêneo, temos que: $D = 0 \Rightarrow$ SPI. Logo, se $k = 6$, o sistema é possível e indeterminado.

b. O determinante D da matriz dos coeficientes é dado por:

$D = \begin{vmatrix} 2 & k \\ k & 8 \end{vmatrix} = 16 - k^2$

Impondo $D \neq 0$, obtemos os valores de k para que o sistema seja possível e determinado:

$D \neq 0 \Rightarrow 16 - k^2 \neq 0 \therefore k \neq 4$ e $k \neq -4$

Logo, se $k \neq 4$ e $k \neq -4$, o sistema é possível e determinado.

Para $k = 4$ ou $k = -4$, obtemos $D = 0$. Como o sistema é homogêneo, temos que: $D = 0 \Rightarrow$ SPI. Logo, se $k = 4$ ou $k = -4$, o sistema é possível e indeterminado.

35. a. O determinante D da matriz dos coeficientes é dado por:

$$D = \begin{vmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & n \\ 3 & -n & 0 \end{vmatrix} = 5n^2 + 12n$$

Impondo $D \neq 0$, obtemos os valores de n para que o sistema seja possível e determinado:

$D \neq 0 \Rightarrow 5n^2 + 12n \neq 0 \therefore n \neq 0$ e $n \neq -\frac{12}{5}$

Para $n = 0$ ou $n = -\frac{12}{5}$, obtemos $D = 0$. Como o sistema é homogêneo, temos que:

$D = 0 \Rightarrow$ SPI. Logo, se $n = 0$ ou $n = -\frac{12}{5}$, o sistema é possível e indeterminado.

b. Calculando o determinante D da matriz dos coeficientes do sistema, temos:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & n \\ 4 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & n \end{vmatrix} = -4n + 8n - 4n = 0$$

Como $D = 0$ para qualquer valor real de n, concluímos que o sistema homogêneo é possível e indeterminado para qualquer valor real de n.

36. $D = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ k & 0 & -2 \end{vmatrix} = 10 - 2k$

O sistema homogêneo admitirá somente a solução trivial se, e somente se, for possível e determinado, ou seja, $D \neq 0$.

$10 - 2k \neq 0 \Rightarrow k \neq 5$

37. $D = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 1 & 5 & a \end{vmatrix} = -52 - 13a$

O sistema homogêneo admitirá soluções além da trivial se, e somente se, for possível e indeterminado, ou seja, $D = 0$.

$-52 - 13a = 0 \Rightarrow a = -4$

38. Temos: $\dfrac{x}{18} = \dfrac{y}{6} = \dfrac{z}{2} \Rightarrow \begin{cases} 6x = 18y \\ 2x = 18z \\ 2y = 6z \end{cases}$

a. $\begin{cases} x - 3y = 0 \\ x - 9z = 0 \\ y - 3z = 0 \end{cases}$

b. $\begin{cases} x - 3y = 0 \\ x - 9z = 0 \\ y - 3z = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} x - 3y = 0 & (1) \\ 3y - 9z = 0 & (2) \end{cases}$

Da equação (2), temos: $y = 3z$

Substituindo y por $3z$ em (1), obtemos: $x = 9z$

Concluímos, então, que todos os ternos ordenados de números reais positivos que satisfazem o sistema do item **a** são da forma $(9z, 3z, z)$, com $z \in \mathbb{R}_+^*$.

40. Para a aplicação da fórmula $A = \dfrac{|D|}{2}$, em que $D = \begin{vmatrix} x_M & y_M & 1 \\ x_N & y_N & 1 \\ x_P & y_P & 1 \end{vmatrix}$, calculamos, inicialmente, o valor do determinante D:

$D = \begin{vmatrix} 2 & 8 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -4 & -3 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow D = -3$

Logo, a área A do triângulo é dada por:

$A = \dfrac{|-3|}{2} \Rightarrow A = 1{,}5$

41. A área do quadrilátero $EFGH$ é a soma das áreas dos triângulos EFG e GHE.

Para o cálculo da área A_1 do triângulo EFG, calculamos o determinante:

$D_1 = \begin{vmatrix} -3 & -2 & 1 \\ -4 & 5 & 1 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow D_1 = -43$

Logo: $A_1 = \dfrac{|-43|}{2}\ \text{km}^2 \Rightarrow A_1 = 21{,}5\ \text{km}^2$

Para o cálculo da área A_2 do triângulo GHE, calculamos o determinante:

$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 6 & -1 & 1 \\ -3 & -2 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow D_2 = -67$

Logo: $A_2 = \dfrac{|-67|}{2}\ \text{km}^2 \Rightarrow A_1 = 33{,}5\ \text{km}^2$

Concluímos, então, que $A = A_1 + A_2 \Rightarrow A = 55\ \text{km}^2$

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

1. b. Da equação do item **a**, temos: $x = 16 - 2y - 4z$. Como x, y e z devem assumir valores naturais não nulos, temos as possibilidades apresentadas no quadro.

Concluímos, assim, que a equação do item **a** tem 9 soluções no contexto do enunciado.

Quadro de possibilidades

y	z	x
1	1	10
1	2	6
1	3	2
2	1	8
2	2	4
3	1	6
3	2	2
4	1	4
5	1	2

2. a. Substituindo as variáveis x, y e z, respectivamente, por $3k - 5$, $5k - 14$ e k, temos:

$$\begin{cases} 3k - 5 - (5k - 14) + 2k = 9 \\ 2(3k - 5) - (5k - 14) - k = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9 = 9 \\ 4 = 4 \end{cases}$$

Assim, verificamos que, para qualquer valor real de k, o terno ordenado $(3k - 5, 5k - 14, k)$ é solução comum às duas equações do sistema S; logo, esse terno é solução do sistema para qualquer valor real k.

b. No terno ordenado $(3k - 5, 5k - 14, k)$, atribuindo valores distintos a k, obtemos soluções distintas de S; por exemplo:

Para $k = 0$, temos: $(-5, -14, 0)$

Para $k = 2$, temos: $(1, -4, 2)$

Para $k = -1$, temos: $(-8, -19, -1)$

4. a. $\begin{cases} 2x + y + z = 7 \\ 4x + y - 3z = 5 \\ 2x + 3y + 2z = 7 \end{cases}$ $\times(-2)$ $\times(-1)$ $\sim$

$\sim \begin{cases} 2x + y + z = 7 \\ -y - 5z = -9 \\ 2y + z = 0 \end{cases}$ $\times 2$ $\sim$

$$\begin{cases} 2x + y + z = 7 & (1) \\ -y - 5z = -9 & (2) \\ -9z = -18 & (3) \end{cases}$$

Classificação: SPD

De (3), temos: $z = 2$

Substituindo z por 2 em (2), obtemos: $y = -1$

Substituindo z por 2 e y por -1 em (1), obtemos: $x = 3$

Portanto: $S = \{(3, -1, 2)\}$

b. Raciocinando de maneira análoga ao item **a**, obtemos:

Classificação: SPI; $S = \left\{ \left(\dfrac{7 - 5z}{7}, -\dfrac{z}{7}, z \right), \text{com } z \in \mathbb{R} \right\}$

c. Permutando as duas primeiras equações, temos:

$$\begin{cases} x + 3y + 0z = 1 \\ 3x + 2y - 5z = 3 \\ 2x - \ \ y - 5z = 1 \end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{cases} x + 3y + 0z = 1 \\ 0x - 7y - 5z = 0 \\ 0x - 7y - 5z = -1 \end{cases}$$

equações incompatíveis

Classificação: SI

Logo: $S = \varnothing$

d. Raciocinando de maneira análoga ao item **a**, obtemos:
Classificação: SPD; $S = \{(1, -1)\}$

e. Raciocinando de maneira análoga ao item **a**, obtemos:
Classificação: SPD; $S = \{(1, 2, 0)\}$

5. Indicando, respectivamente, por x, y e z os números de ingressos de R$ 30,00, R$ 15,00 e gratuitos, temos:

$$\begin{cases} x + y + z = 300 \\ y = 2z \\ 30x + 15y + 0z = 6.120 \end{cases}$$

Escalonando o sistema, obtemos: $z = 48$, $y = 96$ e $x = 156$.
Logo, 156 espectadores pagaram R$ 30,00 por ingresso.

6. alternativa **c**

$$\begin{cases} 8p + 6m + 2g = 580 \\ 15p + 5m + 4g = 5850 \end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{cases} g + 3m + 4p = 290 \\ 4g + 5m + 15p = 850 \end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{cases} g + 3m + 4p = 290 & \text{(I)} \\ -7m - p = 310 & \text{(II)} \end{cases}$$

Da equação (2), obtemos $p = 310 - 7m$

Substituindo p por $310 - 7m$ em (1), obtemos:

$g + 3\,m + 4(310 - 7\,m) = 290 \Rightarrow g = 25\,m - 950$

Assim, observamos que:

$p + g = 310 - 7m + 25m - 950 \Rightarrow p + g = 18\,m - 640$

7. Atribuindo os valores 0, 4 e 5 a x, obtemos, respectivamente, os valores 0, 8,8 e 11,25 para y, ou seja:

$$\begin{cases} 0 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c \\ 8{,}8 = a \cdot 4^2 + b \cdot 4 + c \\ 11{,}25 = a \cdot 5^2 + b \cdot 5 + c \end{cases} \sim \begin{cases} c = 0 \\ 16a + 4b + c = 8{,}8 \\ 25a + 5b + c = 11{,}25 \end{cases}$$

Resolvendo esse sistema linear, temos: $a = 0{,}05$, $b = 2$ e $c = 0$.

Logo, a deformação y, em milímetro, em função da massa x, em tonelada, é dada por: $y = 0{,}05x^2 + 2x$.

Assim, para $x = 6$ obtemos $y = 13{,}8$, ou seja, a deformação no ponto médio da viga será de 13,8 mm.

8. alternativa **c**

Para cobrar a vizinha, "A" precisa saber quanto pagou por um quilo de arroz e dois quilos de macarrão. Sendo, respectivamente, a, f e m os preços, em reais, do arroz, feijão e macarrão, temos:

$$\begin{cases} 3a + 2f + 4m = 40 - 4 = 36 & (1) \\ 2a + 3f + 3m = 40 - 7{,}3 = 32{,}7 \\ 2a + 2f + 2m = 30 - 5{,}4 = 24{,}6 & (2) \end{cases}$$

Subtraindo (1) de (2), obtemos: $a + 2m = 11{,}4$

9. Indicando por x e y o número de leões e de zebras no ano de 1900, temos:

$$\begin{cases} x + y = 2.200 \\ 2x + y + 10n = 3.250 \Rightarrow x = 800,\ y = 1.400 \text{ e } n = 25 \\ 2x + 50 = y + 10n \end{cases}$$

Concluímos, assim, que o fato ocorreu em 1925, quando havia 1.600 leões e 1.650 zebras na região.

10. Sendo x, y e z as áreas dos três terrenos, em ordem decrescente, temos:

$$\begin{cases} x + y + z = 60 \\ y = 2x - 45 \\ x - z = 2y + 5 \end{cases} \sim \begin{cases} x + \ \ y + z = 60 \\ 2x - \ \ y \qquad = 45 \\ x - 2y - z = 5 \end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{cases} x + \ \ y + \ \ z = 60 \\ \ \ - 3y - 2z = -75 \\ \ \ \ \ 3y + 2z = 55 \end{cases}$$

equações incompatíveis

Como o sistema é impossível, concluímos que há erro nas informações.

11. Seja x o número de soldados de cada pelotão no início da partida, e seja y o número de soldados eliminados do pelotão de Maria ao final da partida. Assim, esquematizamos:

Quantidade de soldados

Número de soldados	João	Maria
Início da partida	x	x
Eliminados	$y + 6$	y
Remanescentes	$x - (y + 6)$	$x - y$

Como o número de soldados remanescentes do pelotão de Maria era o dobro do número de soldados remanescentes do pelotão de João, temos:

$x - y = 2(x - y - 6) \Rightarrow y = x - 12$

Como houve diminuição no pelotão de Maria, deduzimos que y é um número natural não nulo. Assim, o menor número natural x possível é 13.

12. **a.** $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 0$

Concluímos, assim, que ocorre apenas uma das alternativas: SPI ou SI. Para determinar qual delas ocorre, escalonamos o sistema:

$$\begin{cases} 2x - \ \ y = 1 \\ 4x - 2y = 3 \end{cases} \sim \begin{cases} 2x - \ \ y = 1 \\ 0x + 0y = 1 \end{cases}$$

Logo, o sistema é impossível (SI).

b. $\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -9 & 3 \end{vmatrix} = 0$

Concluímos, assim, que ocorre apenas uma das alternativas: SPI ou SI. Para determinar qual delas ocorre, escalonamos o sistema:

$$\begin{cases} 3x - \ \ y = 5 \\ -9x + 3y = -15 \end{cases} \sim \begin{cases} 3x - \ \ y = 5 \\ 0x + 0y = 0 \end{cases}$$

Logo, o sistema é possível e indeterminado (SPI).

c. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 9$

Logo, o sistema é possível e determinado (SPD).

13. a. $\begin{vmatrix} 2 & x-1 & 0 \\ -1 & x+1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 4 \Rightarrow 4x - 4 = 4 \therefore x = 2$

Logo, o conjunto solução da equação é: $S = \{2\}$

b. $\begin{vmatrix} 3 & x & -2 \\ x+1 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -12 \Rightarrow x^2 + 2x + 9 = 0$

$\Delta = -32$

Logo, o conjunto solução da equação é: $S = \varnothing$

c. $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 4 & x \\ 4 & 0 & x \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 4x - 8x + 4x = 0 \therefore 0 = 0$

Logo, a igualdade ocorre para qualquer valor real de x, e, portanto, o conjunto solução da equação é: $S = \mathbb{R}$

14. alternativa **d**

O sistema linear a seguir, nas incógnitas x e y, tem pelo menos uma solução, que é o par ordenado formado pelas temperaturas das duas regiões.

$$\begin{cases} 3x - 2y = -1 \\ 6x + ky = 6 \end{cases}$$

Escalonando-o, temos:

$$\begin{cases} 3x - 2y = -1 \\ 6x + ky = 6 \end{cases} \sim \begin{cases} 3x - 2y = -1 \\ 0x + (k+4)y = 8 \end{cases}$$

Como esse sistema é possível, concluímos que:

$k + 4 \neq 0$, ou seja, $k \neq -4$.

15. alternativa **e**

Indicando por x e y os preços, em real, do litro da gasolina e do etanol, respectivamente, temos:

$$\begin{cases} 20x + 10y = 144 \\ kx + 15y = 210 \end{cases}$$

Esse sistema deve ser possível, pois o preço de cada combustível foi o mesmo nos dois postos. Vejamos, então, os valores de k para que essa classificação ocorra. Calculando o determinante da matriz dos coeficientes desse sistema, temos:

$\begin{vmatrix} 20 & 10 \\ k & 15 \end{vmatrix} = 300 - 10k$

Se esse determinante for diferente de zero, o sistema será possível e determinado. Assim: $300 - 10k \neq 0 \Rightarrow k \neq 30$

Portanto, se $k \neq 30$, o sistema admite apenas uma solução. Logo, uma condição suficiente para que o preço dos combustíveis seja o mesmo nos dois postos é $k \neq 30$.

Agora, substituindo k por 30 e escalonando o sistema:

$$\begin{cases} 20x + 10y = 144 \\ 30x + 15y = 210 \end{cases} \sim \begin{cases} 20x + 10y = 144 \\ 0x + \ \ 0y = 12 \end{cases}$$

Temos que, se $k = 30$, o sistema é impossível. Assim, para que o preço de cada combustível seja o mesmo nos dois postos é $k \neq 30$, condicionado, é claro, à capacidade do tanque.

16. a. Calculando o determinante D da matriz dos coeficientes do sistema, temos:

$D = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ p & 4 \end{vmatrix} = 20 - 2p$

Impondo a condição $D \neq 0$, obtemos os valores de p para que o sistema seja possível e determinado:

$20 - 2p \neq 0 \Rightarrow p \neq 10$; logo: $p \neq 10 \Rightarrow$ SPD

Para $p = 10$, temos $D = 0$, e, nesse caso, o sistema pode ser impossível ou possível e indeterminado. Substituindo p por 10 no sistema e escalonando-o, temos:

$$\begin{cases} 5x + 2y = 2 \\ 10x + 4y = q \end{cases} \sim \begin{cases} 5x + 2y = 2 \\ 0x + 0y = q - 4 \end{cases}$$

Para $p = 10$ e $q = 4$, o sistema é possível e indeterminado.

Para $p = 10$ e $q \neq 4$, o sistema é impossível.

b. Calculando o determinante D da matriz dos coeficientes do sistema, temos:

$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & p & -1 \\ 1 & 0 & p \end{vmatrix} = p^2 - 1$

Impondo a condição $D \neq 0$, obtemos os valores de p para que o sistema seja possível e determinado:

$p^2 - 1 \neq 0 \Rightarrow p \neq 1$ e $p \neq -1 \Rightarrow$ SPD

Para $p = 1$ ou $p = -1$, temos $D = 0$, e, nesses casos, o sistema pode ser impossível ou possível e indeterminado.

Substituindo p por 1 no sistema e escalonando-o, obtemos:

$$\begin{cases} x + \ \ y - 2z = 3 \\ 0x - \ \ y + 3z = -6 \\ 0x + 0y + 0z = q + 3 \end{cases}$$

Para $p = 1$ e $q = -3$, o sistema é possível e indeterminado.

Para $p = 1$ e $q \neq -3$, o sistema é impossível.

Substituindo p por -1 no sistema e escalonando-o, obtemos:

$$\begin{cases} x + \ \ y - 2z = 3 \\ 0x - \ \ y + \ \ z = -2 \\ 0x - 0y + 0z = q - 1 \end{cases}$$

Para $p = -1$ e $q = 1$, o sistema é possível e indeterminado.

Para $p = -1$ e $q \neq 1$, o sistema é impossível.

17. alternativa **a**

O sistema é equivalente a: $\begin{cases} ax - \ \ y + 0z = 1 \\ 0x + \ \ y + \ \ z = 1 \\ x + 0y + \ \ z = m \end{cases}$

Calculando o determinante D da matriz dos coeficientes do sistema, temos:

$D = \begin{vmatrix} a & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = a - 1$

Impondo a condição $D \neq 0$, obtemos os valores de a para que o sistema seja possível e determinado:

$a - 1 \neq 0 \Rightarrow a \neq 1$

Para $a = 1$, temos $D = 0$, e, nesse caso, o sistema pode ser impossível ou possível e indeterminado. Substituindo a por 1 no sistema e escalonando-o, temos:

$$\begin{cases} x - y + 0z = 1 \\ 0x + y + z = 1 \\ 0x + 0y + 0z = m - 2 \end{cases}$$

Assim,

$m - 2 = 0 \Rightarrow$ Sistema possível e indeterminado

$m - 2 \neq 0 \Rightarrow$ Sistema impossível

Resumindo:

$A \neq 1 \Rightarrow$ SPD $\quad a = 1$ e $m = 2 \Rightarrow$ SPI $\quad a = 1$ e $m \neq 2 \Rightarrow$ SI

Concluímos, então, que, no caso em que $a = 1$, o sistema será possível se, e somente se, $m = 2$.

18. **a.** As retas r e t são concorrentes se, e somente se, o sistema $\begin{cases} y = 2x + 4 \\ y = mx + 2 \end{cases}$, que é equivalente a $\begin{cases} 2x - y = -4 \\ mx - y = -2 \end{cases}$, for possível e determinado. Para que isso ocorra, devemos ter:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ m & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow m \neq 2$$

b. As retas s e t serão paralelas distintas se, e somente se, o sistema $\begin{cases} y = 3x - p \\ y = mx + 2 \end{cases}$, que é equivalente a $\begin{cases} 3x - y = p \\ mx - y = -2 \end{cases}$, for impossível. Para que isso ocorra, é necessário (mas não suficiente) que o determinante D da matriz dos coeficientes seja nulo:

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ m & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow m = 3$$

Substituindo m por 3 e escalonando o sistema, temos:

$$\begin{cases} 3x - y = p \longrightarrow -1 \\ 3x - y = -2 \longleftarrow \end{cases} \sim \begin{cases} 3x - y = p \\ 0x + 0y = -2 - p \end{cases}$$

Esse sistema será impossível para qualquer valor real de $p \neq -2$.

c. As retas s e t serão paralelas coincidentes se, e somente se, o sistema $\begin{cases} y = 3x - p \\ y = mx + 2 \end{cases}$, que é equivalente a $\begin{cases} 3x - y = p \\ mx - y = -2 \end{cases}$, for possível e indeterminado. Para que isso ocorra, é necessário (mas não suficiente) que o determinante D da matriz dos coeficientes seja nulo:

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ m & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow m = 3$$

Substituindo m por 3 e escalonando o sistema, temos:

$$\begin{cases} 3x - y = p \longrightarrow -1 \\ 3x - y = -2 \longleftarrow \end{cases} \sim \begin{cases} 3x - y = p \\ 0x + 0y = -2 - p \end{cases}$$

Esse sistema será possível e indeterminado para $p = -2$.

d. Para $p = 2$, as retas r, s e t terão ponto comum se, e somente se, o sistema $\begin{cases} y = 2x + 4 \\ y = 3x - 2 \\ y = mx + 2 \end{cases}$, que é equivalente a $\begin{cases} 2x - y = -4 \\ 3x - y = 2 \\ mx - y = -2 \end{cases}$, for possível e determinado.

Resolvendo o sistema formado pelas duas primeiras equações, obtemos o ponto $P(6, 16)$, que é o ponto comum às três retas; logo:

$m \cdot 6 - 16 = -2 \Rightarrow m = \frac{7}{3}$

19. **a.** Para que as retas sejam paralelas distintas, o sistema a seguir deve ser impossível:

$$\begin{cases} 0{,}05x - y = -5.000 \\ (k - 0{,}05)x - y = 5.000 \end{cases}$$

Uma condição necessária para que esse sistema seja impossível é que o determinante da matriz dos coeficientes seja nulo:

$$\begin{vmatrix} 0{,}05 & -1 \\ k - 0{,}05 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow k = 0{,}1$$

Substituindo k por 0,1 no sistema, obtemos:

$$\begin{cases} 0{,}05x - y = -5.000 \\ 0{,}05x - y = 5.000 \end{cases} \quad \text{equações incompatíveis}$$

Logo, para $k = 0{,}1$, o sistema é impossível, e, portanto, as retas são paralelas distintas.

b. $L(x) > 0 \Rightarrow (0{,}1 - 0{,}05)x - 5.000 > 0 \Rightarrow x > 100.000$

20. alternativa **e**

Obtendo a solução comum à primeira e terceira equações temos:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ x - 6y = 8 \end{cases} \Rightarrow x = 2 \text{ e } y = -1$$

O sistema será impossível se, e somente se, o par $(2, -1)$ não for solução da segunda equação, isto é:

$p \cdot 2 + (-1) \neq q \Rightarrow q \neq 2p - 1$

21. Escalonando o sistema, obtemos: $\begin{cases} x + 2y - t + z = 5 \\ -y + 3t - 2z = -4 \\ (a - 3)t = -6 \end{cases}$

Observamos que:

- para $a - 3 = 0 \Rightarrow a = 3$, o sistema é impossível;
- para $a - 3 \neq 0 \Rightarrow a \neq 3$, o sistema é possível e indeterminado.

22. Escalonando o sistema, temos:

$$\begin{cases} x + ay + az = 6 \\ 0x + 0y + (4 - 3a)z = b - 18 \end{cases}$$

Assim, concluímos que:

Se $4 - 3a \neq 0 \Rightarrow a \neq \frac{4}{3}$, o sistema será possível e determinado.

Se $4 - 3a = 0 \Rightarrow a \neq \frac{4}{3}$, há duas alternativas:

$b - 18 = 0$ ou $b - 18 \neq 0 \Rightarrow b = 18$ ou $b \neq 18$

Analisando cada uma delas:

- $a = \frac{4}{3}$ e $b = 18$, o sistema será possível e indeterminado;
- $a = \frac{4}{3}$ e $b \neq 18$, o sistema será impossível.

23. alternativa **c**

Sendo x e y, respectivamente, os preços por quilograma do café e do açúcar, temos:

$$\begin{cases} x + 2y = 8 \\ 2x + ny = 15 \\ 3x + (n+1)y = 22 \end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{cases} x + 2y = 8 \\ (n-4)y = -1 \\ (n-5)y = -2 \end{cases} \sim \begin{cases} x + 2y = 8 \\ y = \dfrac{-1}{n-4} \\ y = \dfrac{-2}{n-5} \end{cases}$$

Para que o sistema seja possível e determinado, devemos ter:

$$\frac{-1}{n-4} = \frac{-2}{n-5} \Rightarrow n = 3$$

24. a. $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = -8$

Como $D \neq 0$, o sistema homogêneo admite apenas a solução trivial. Assim, concluímos que o conjunto solução é: $S = \{(0, 0)\}$

b. $\begin{cases} x + y = 0 \\ 2x + 2y = 0 \\ 3x + 3y = 0 \end{cases} \sim$

$$\sim \begin{cases} x + y = 0 \\ 0x + 0y = 0 \\ 0x + 0y = 0 \end{cases} \sim x + y = 0$$

Logo, o conjunto solução é: $S = \{(-y, y), \text{ com } y \in \mathbb{R}\}$

25. $D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & p \\ 1 & 5 & 2 \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 10 + 5p + 2 - 5p - 20 - 1 = -9$

Com $D \neq 0$ para qualquer valor real de p, concluímos que o sistema é possível e determinado para todo p, com $p \in \mathbb{R}$.

26. $D = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 3 & -k & 2 \\ k & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2k^2 - 5k - 2$

Para que o sistema admita soluções diferentes da trivial, devemos ter $D = 0$:

$$-2k^2 - 5k - 2 = 0 \Rightarrow k = -2 \text{ ou } k = -\frac{1}{2}$$

27. a. Como a velocidade foi constante, temos:

$$\frac{x}{4} = \frac{y}{3k} = \frac{z}{2k}; \text{ portanto: } \begin{cases} 3kx - 4y = 0 \\ 2kx - 4z = 0 \\ 2ky - 3kz = 0 \end{cases}$$

b. $D = \begin{vmatrix} 3k & -4 & 0 \\ 2k & 0 & -4 \\ 0 & 2 & -3k \end{vmatrix} = 0$

Como $D = 0$, o sistema homogêneo é possível e indeterminado para qualquer valor real positivo de k.

VERIFIQUE O QUE APRENDEU NO CAPÍTULO 4

1. alternativa **a**

Indicando por E e C a massa de cada esfera e de cada cubo, respectivamente, temos: $3E + 2C = 2E + 4C \Rightarrow E = 2C$

Logo, a massa de cada esfera é o dobro da massa de cada cubo.

2. a. A reta r passa pelos pontos $(-1, 0)$ e $(0, 1)$, e sua equação é da forma $y = ax + b$. Assim, temos:

$$\begin{cases} 0 = a \cdot (-1) + b \\ 1 = a \cdot 0 + b \end{cases} \Rightarrow a = 1 \text{ e } b = 1$$

Assim, a equação da reta r é $y = x + 1$

A reta s passa pelos pontos $(2, 0)$ e $(0, 4)$, e sua equação é da forma $y = cx + d$. Assim, temos:

$$\begin{cases} 0 = c \cdot 2 + d \\ 4 = c \cdot 0 + d \end{cases} \Rightarrow c = -2 \text{ e } d = 4$$

Assim, a equação da reta s é $y = -2x + 4$

c. Resolvendo o sistema formado pelas equações de r e s, temos:

$$\begin{cases} y = x + 1 \\ y = -2x + 4 \end{cases} \Rightarrow x + 1 = -2x + 4 \therefore x = 1$$

Substituindo x por 1 em qualquer uma das equações do sistema, por exemplo, na primeira, obtemos o valor de y: $y = 1 + 1 = 2$

Assim, concluímos: $r \cap s = \{(1, 2)\}$

3. Indicando por a, b e c os preços dos ingressos para os setores A, B e C, respectivamente, temos:

$$\begin{cases} a = \dfrac{b}{2} + 20 & (1) \\ c = b + 30 & (2) \\ 210a + 180b + 50c = 45.900 & (3) \end{cases}$$

Substituindo (1) e (2) em (3):

$$210\left(\frac{b}{2} + 20\right) + 180b + 50(b + 30) = 45.900 \Rightarrow b = 120$$

Substituindo b por 120 em (2), chegamos a: $c = 150$

Substituindo b por 120 em (1), concluímos: $a = 80$

4. Indicando por G, E e D as vendas, em hectolitros, de gasolina, etanol e diesel, respectivamente, temos:

$$\begin{cases} 15G + 30E + 45D = 17.850 \\ 24G + 24E + 48D = 19.608 \\ 18G + 27E + 45D = 16.470 \end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{cases} G + 2E + 3D = 1.190 \\ G + E + 2D = 817 \\ 2G + 3E + 5D = 1.830 \end{cases}$$

Escalonando o sistema, obtemos:

$$\begin{cases} G + 2E + 3D = 1.190 \\ 0G - E - D = -373 \\ 0G + 0E + 0D = -177 \end{cases}$$

Portanto, o sistema é impossível.

5. alternativa **e**

Para que o sistema seja impossível, devemos ter:

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \alpha = -2$$

Essa condição é necessária, mas não é suficiente para garantir que o sistema seja impossível. Devemos substituir α por -2 e escalonar o sistema, para verificar se é impossível ou possível e indeterminado para esse valor de α:

$$\begin{cases} x - 2y - 2z = 0 \\ x + y + z = 1 \\ x - y - z = 3 \end{cases} \sim \begin{cases} x - 2y - 2z = 0 \\ 0x + 3y + 3z = 1 \\ 0x + 0y + 0z = \dfrac{8}{3} \end{cases}$$

Assim, concluímos que, para $\alpha = -2$, o sistema é impossível.

6. alternativa **c**

Indicando, respectivamente, por u, p e b os números de medalhas de ouro, prata e bronze conquistadas pelos atletas desse país, temos:

$$\begin{cases} u + p + b = 36 \\ u = \dfrac{p + b}{2} \\ p = 2b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u + p + b = 36 \\ 2u - p - b = 0 \\ p - 2b = 0 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, concluímos que $u = 12$, $p = 16$ e $b = 8$, isto é, os atletas desse país conquistaram 12 medalhas de ouro, 16 de prata e 8 de bronze.

CAPÍTULO 5 Geometria analítica: ponto e reta

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. a. $AB = \sqrt{(6 - 6)^2 + (5 + 3)^2} = \sqrt{64} = 8$

b. $AB = \sqrt{(9 - 6)^2 + (11 - 7)^2} = \sqrt{25} = 5$

c. $AB = \sqrt{[3 - (-3)]^2 + (13 - 5)^2} = \sqrt{100} = 10$

d. $AB = \sqrt{[1 - (-1)]^2 + (-1 - 3)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

2. a. O ponto é da forma $P(0, k)$, com $k \in \mathbb{R}$. Assim, temos:

$PA = 10 \Rightarrow \sqrt{(0 - 6)^2 + (k - 4)^2} = 10$

$\therefore (0 - 6)^2 + (k - 4)^2 = 100$

$\therefore k^2 - 8k - 48 = 0 \Rightarrow k = 12$ ou $k = -4$

Existem dois pontos possíveis: $P(0, 12)$ e $P'(0, -4)$

b. O ponto é da forma $Q(m, 0)$, com $m \in \mathbb{R}$. Assim, temos:

$EQ = FQ \Rightarrow \sqrt{(m - 2)^2 + (0 - 3)^2} =$

$= \sqrt{(m - 4)^2 + (0 + 1)^2}$

$\therefore (m - 2)^2 + (0 - 3)^2 = (m - 4)^2 + (0 + 1)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow m^2 - 8m + 16 + 1 \therefore m = 1$

Concluímos, então, que $Q(1, 0)$.

3. a. Como o ponto C pertence ao eixo das ordenadas, sua abscissa é 0 (zero); logo, esse ponto é da forma $C(0, k)$, com $k \in \mathbb{R}$. Assim, temos: $CP = CQ$

$\sqrt{(0 - 4)^2 + (k - 10)^2} = \sqrt{(0 - 3)^2 + (k - 3)^2}$

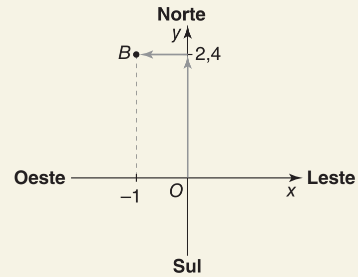
$\therefore (0 - 4)^2 + (k - 10)^2 = (0 - 3)^2 + (k - 3)^2 \Rightarrow k = 7$

Concluímos, então, que $C(0, 7)$

b. A medida r do raio da circunferência é dada por:

$r = CP \Rightarrow r = \sqrt{(0 - 4)^2 + (7 - 10)^2} = r = 5$

4. a. Representando o ponto B no plano cartesiano, temos:



FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

Logo, $B(-1; 2{,}4)$.

b. $d = |2{,}4| + |-1| = 3{,}4$

c. Se o submarino tivesse ido em linha reta de O até B, a distância percorrida seria o comprimento do segmento $\overline{OB}$. Calculando essa distância, em quilômetro, temos: $OB = \sqrt{(-1 - 0)^2 + (2{,}4 - 0)^2} = \sqrt{6{,}76} = 2{,}6$

5. a. $PE = \sqrt{[6 - (-6)]^2 + (-12 - 4)^2} = \sqrt{400} = 20$

$PE = 20$ km < 23 km

b. $ME = \sqrt{[14 - (-6)]^2 + (16 - 4)^2} = \sqrt{544} \approx 23{,}3$

$ME \approx 23{,}3$ km > 23 km

c. Devemos ter $GE \leqslant 23$ km, ou seja:

$\sqrt{(x + 6)^2 + (y - 4)^2} \leqslant 23$

7. a. $x_M = \dfrac{4 + 8}{2} = 6$ e $y_M = \dfrac{6 + 10}{2} = 8$; logo: $M(6, 8)$

b. $x_M = \dfrac{(-3) + 5}{2} = 1$ e $y_M = \dfrac{1 + (-7)}{2} = -3$; logo: $M(1, -3)$

8. a. Todos os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DE}$ têm a mesma medida; logo:

o ponto C é o ponto médio de $\overline{AE}$, assim,

$C\left(\dfrac{1 + 13}{2}, \dfrac{-3 + 9}{2}\right) \Rightarrow C(7, 3)$

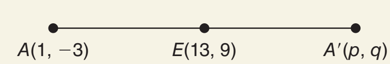
o ponto B é o ponto médio de $\overline{AC}$, assim,

$B\left(\dfrac{1 + 7}{2}, \dfrac{-3 + 3}{2}\right) \Rightarrow B(4, 0)$

o ponto D é o ponto médio de $\overline{CE}$, assim,

$D\left(\dfrac{7 + 13}{2}, \dfrac{3 + 9}{2}\right) \Rightarrow D(10, 6)$

b. Indicando por $A'(p, q)$ o simétrico de A em relação ao ponto E, esquematizamos:



Assim, E é o ponto médio do segmento $\overline{AA'}$; logo:

$$\begin{cases} \dfrac{p + 1}{2} = 13 \\ \dfrac{q + (-3)}{2} = 9 \end{cases} \Rightarrow p = 25 \text{ e } q = 21 \therefore A'(25, 21)$$

9. O ponto M, comum às duas diagonais de um paralelogramo, é ponto médio de cada uma delas. Como M é ponto médio de $\overline{AC}$, temos:

$x_M = \dfrac{x_A + x_C}{2} = \dfrac{0 + 4}{2} = 2$; $y_M = \dfrac{y_A + y_C}{2} = \dfrac{8 + 16}{2} = 12$

Como M também é ponto médio de $\overline{BD}$, temos:

$x_M = \dfrac{x_B + x_D}{2} = 2 \Rightarrow \dfrac{1 + x_D}{2} = 2 \therefore x_D = 3$

e

$y_M = \dfrac{y_B + y_D}{2} = 12 \Rightarrow \dfrac{7 + y_D}{2} = 12 \therefore y_D = 17$

Concluímos, então, que $D(3, 17)$.

10. a. Após 2 minutos, o astro estava no ponto médio M do segmento $\overline{AB}$.

Então: $\begin{cases} x = \dfrac{5+3}{2} = 4 \\ y = \dfrac{8+6}{2} = 7 \end{cases} \Rightarrow M(4, 7)$

b. Após 1 minuto, o astro estava no ponto médio N do segmento $\overline{AM}$.

Então: $\begin{cases} x = \dfrac{3+4}{2} = \dfrac{7}{2} \\ y = \dfrac{6+7}{2} = \dfrac{13}{2} \end{cases} \Rightarrow N\left(\dfrac{7}{2}, \dfrac{13}{2}\right)$

c. O astro estava no ponto simétrico de A em relação a B. Indicando esse ponto simétrico por $A'(x_A', y_A')$, temos:

Então: $\begin{cases} \dfrac{x_{A'} + 3}{2} = 5 \Rightarrow x_{A'} = 7 \\ \dfrac{y_{A'} + 6}{2} = 8 \Rightarrow y_{A'} = 10 \end{cases} \Rightarrow A'(7, 10)$

11. a. $\alpha = 135°$ e $m = \text{tg } 135° = -1$

b. $\alpha = 60°$ e $m = \text{tg } 60° = \sqrt{3}$

12. a. O eixo Ox determina nas retas paralelas r e s ângulos correspondentes congruentes; logo, a inclinação da reta r é a mesma da reta s, ou seja, 45°, e, portanto, $m_r = \text{tg } 45° = 1$.

13. a. $m = \dfrac{14 - 6}{4 - 2} = 4$

b. $m = \dfrac{5 - (-1)}{-3 - 1} = -\dfrac{3}{2}$

c. $m = \dfrac{3 - 3}{-2 - (-1)} = 0$

d. $m = \dfrac{6 - 1}{8 - 8} = \dfrac{5}{0}$. Não existe m, isto é, a reta $\overleftrightarrow{AB}$ é vertical.

14. Indicando por A e B os pontos de intersecção da reta r com os eixos Ox e Oy, respectivamente, temos: $A(6, 0)$ e $B(0, q)$. Como a inclinação da reta r é 135°, deduzimos que o coeficiente angular m de r é tg 135°. Assim:

$m = \text{tg } 135° \Rightarrow \dfrac{q - 0}{0 - 6} = -1 \therefore q = 6$

15. a. $m = \dfrac{50 - 32}{12 - 0} = \dfrac{18}{12} = 1{,}5$

16. a. $m = \dfrac{11{,}9 - 11{,}6}{2017 - 2016} \Rightarrow m = 0{,}3$

e. Seja m' o coeficiente angular da reta, temos:

$$m' = \dfrac{6{,}9 - 11{,}6}{2020 - 2016} \Rightarrow m' = -1{,}175$$

18. a. $m_{AB} = \dfrac{6 - 4}{1 - 0} = 2$; $m_{BC} = \dfrac{4 - 2}{0 - (-1)} = 2$

$m_{AB} = m_{BC}$, concluímos que A, B e C são colineares.

b. $m_{AB} = \dfrac{2 - 2}{5 - 1} = 0$; $m_{BC} = \dfrac{2 - 2}{6 - 5} = 0$

$m_{AB} = m_{BC}$; concluímos que A, B e C são colineares.

c. $m_{AB} = \dfrac{7 - 1}{4 - 4} =$ (não existe)

$m_{BC} = \dfrac{9 - 7}{4 - 4} =$ (não existe)

Não existem m_{AB} e m_{BC}; concluímos que A, B e C são colineares.

d. $m_{AB} = \dfrac{6 - 4}{3 - 1} = 1$; $m_{BC} = \dfrac{4 - 1}{1 - 4} = -1$

$m_{AB} \neq m_{BC}$; concluímos que A, B e C não são colineares.

19. a. $m_{AB} = m_{BC}$; ou seja $\Rightarrow \dfrac{11 - 8}{3 - 2} = \dfrac{-1 - 11}{x - 3} \Rightarrow x = -1$

b. Para que os pontos sejam vértices de um triângulo, basta que eles não sejam colineares. Para que isso ocorra, devemos ter $m_{DE} \neq m_{EF}$, ou seja:

$\dfrac{8 - 4}{3 - 1} \neq \dfrac{m - 8}{6 - 3} \Rightarrow m \neq 14$

20. alternativa **d**

Os pontos (0, 200.000), (2, 240.000) e $(10, y_1)$ são colineares; logo:

$\dfrac{240.000 - 200.000}{2 - 0} = \dfrac{y_1 - 200.000}{10 - 0} \Rightarrow y_1 = 400.000$

22. a. $y - 3 = 2(x - 6) \Rightarrow y = 2x - 9$

b. $y - (-5) = 1(x - 4) \Rightarrow y = x - 9$

c. $y - 0 = 8(x - 0) \Rightarrow y = 8x$

d. $y - \left(-\dfrac{1}{4}\right) = -\dfrac{5}{6}\left(x - \dfrac{3}{2}\right) \Rightarrow y = -\dfrac{5x}{6} + 1$

23. a. $r: \begin{cases} A(2, -5) \\ m = \text{tg } 135° = -1 \end{cases}$

$y + 5 = -1\,(x - 2)$ ou, ainda, por $y = -x - 3$.

b. $r: \begin{cases} A(4, 0) \\ m = \text{tg } 60° = \sqrt{3} \end{cases}$

$y - 0 = \sqrt{3}\,(x - 4)$ ou, ainda, por $y = \sqrt{3}\,x - 4\sqrt{3}$.

c. $r: \begin{cases} A(5, 2) \\ m = \text{tg } 45° = 1 \end{cases}$

$y - 2 = 1(x - 5)$ ou, ainda, por $y = x - 3$.

d. $r \begin{cases} A(0, 4) \\ m = \text{tg } 0° = 0 \end{cases}$

$y - 4 = 0(x - 0)$ ou, ainda, por $y = 4$.

24. a. O coeficiente angular é: $m = \dfrac{11 - 3}{6 - 2} = 2$

Assim, temos: $y - 3 = 2(x - 2) \Rightarrow y = 2x - 1$

b. O coeficiente angular é: $m = \dfrac{-1 - 5}{2 - (-1)} = -2$

Assim, temos: $y - (-1) = -2(x - 2) \Rightarrow y = -2x + 3$

c. Como A e B têm ordenadas iguais, tais pontos pertencem à reta de equação $y = 8$.

25. a. $m = \dfrac{6 - 2}{50 - 10} = -0{,}1$

Assim, obtemos: $y - 2 = 0{,}1(x - 10) \Rightarrow y = 0{,}1x + 1$

b. Atribuindo o valor 35 à variável x da equação obtida no item **a**, temos: $y = 0{,}1 \cdot 35 + 1 \Rightarrow y = 4{,}5$

Assim, concluímos que, a 35 m de profundidade, o mergulhador está submetido à pressão de 4,5 atm.

c. Atribuindo o valor 0 à variável x da equação obtida no item **a**, obtemos a pressão na superfície da água:

$y = 0{,}1 \cdot 0 + 1 \Rightarrow y = 1$

Ou seja, na superfície da água, a pressão é de 1 atm.

Logo, a 35 m de profundidade, a pressão hidrostática p_{hidro} é a diferença entre a pressão de 4,5 atm, obtida no item **b**, e a pressão sobre a superfície, que é de 1 atm:

$p_{hidro} = 4{,}5 \text{ atm} - 1 \text{ atm} \Rightarrow p_{hidro} = 3{,}5 \text{ atm}$

26. **a.** Como Q é um ponto da bissetriz dos quadrantes ímpares, ele tem abscissa e ordenada iguais. Do gráfico, a abscissa de Q é 8; portanto, sua ordenada também é 8. Logo, temos $Q(8, 8)$.

Além disso, M é ponto médio do segmento $\overline{OQ}$, em que $O(0, 0)$ e $Q(8, 8)$. Temos, então:

$x_M = \dfrac{0+8}{2} = 4; y_M = \dfrac{0+8}{2} = 4$

Logo, temos $M(4, 4)$.

Sabemos, também, que a reta s é perpendicular ao eixo y e, portanto, paralela ao eixo x.

Dessa forma, M e T têm a mesma ordenada, que vale 4. E, como T pertence à bissetriz dos quadrantes pares, sua abscissa é o oposto da sua ordenada, ou seja, -4. Finalmente, temos $T(-4, 4)$.

Portanto: $M(4, 4)$, $Q(8, 8)$ e $T(-4, 4)$

b. $(s)\ y = 4$ $\quad (r)\ x = 8$ $\quad (b_i)\ y = x$ $\quad (b_p)\ y = -x$

27. **a.** Todo ponto da bissetriz dos quadrantes ímpares possui coordenadas iguais; logo, podemos representar o ponto P por $P(a, a)$. Assim, temos:

$PQ = 10 \Rightarrow \sqrt{(a-1)^2 + (a-3)^2} = 10$

$\therefore (a-1)^2 + (a-3)^2 = 100 \Rightarrow a = 9$ ou $a = -5$

Concluímos que há dois pontos satisfazendo as condições enunciadas; são eles: $P(9, 9)$ e $P'(-5, -5)$.

b. Todo ponto da bissetriz dos quadrantes pares possui coordenadas opostas; logo, podemos representar o ponto S por $S(b, -b)$. Assim, temos:

$ST = 5 \Rightarrow \sqrt{(b-0)^2 + [-b-(-1)]^2} = 5$

$\therefore b^2 + (1-b)^2 = 25 \Rightarrow b = 4$ ou $b = -3$

Concluímos que há dois pontos satisfazendo as condições enunciadas; são eles: $S(4, -4)$ e $S(-3, 3)$.

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

1. A distância AB, em centímetro, é dada por:

$AB = \sqrt{[13-(-2)]^2 + [2-(-6)^2]} = \sqrt{289} = 17$

Como 3,4 km = 340.000 cm, a escala com base na qual foi desenhado o mapa é dada por:

$\dfrac{17}{340.000} = \dfrac{1}{20.000}$ ou 1 : 20.000

2. **a.** A medida do lado desse quadrado é o comprimento do segmento $\overline{CD}$, em que $C(3, -7)$ e $D(7, -4)$:

$CD = \sqrt{(7-3)^2 + (-4+7)^2} \Rightarrow CD = 5$

b. Como A e B pertencem aos eixos Ox e Oy, respectivamente, esses pontos são da forma: $A(k, 0)$ e $B(0, m)$. Assim, temos:

- $AD = CD \Rightarrow \sqrt{(k-7)^2 + (0+4)^2} = 5$

$\therefore (k-7)^2 + (0+4)^2 = 25 \Rightarrow (k-7)^2 = 9$

$\therefore k - 7 = \pm 3 \Rightarrow k = 4$ ou $k = 10$ (não convém, pois pelo gráfico observamos que $0 < k < 7$)

Logo, $A(4, 0)$.

- $BC = CD \Rightarrow \sqrt{(0-3)^2 + (m+7)^2} = 5$

$\therefore (0-3)^2 + (m+7)^2 = 25 \Rightarrow (m+7)^2 = 16$

$\therefore m + 7 = \pm 4 \Rightarrow m = -3$ ou $m = -11$ (não convém, pois pelo gráfico observamos que $-4 < m < 0$)

Logo, $B(0, -3)$.

Concluímos, então, que $A(4, 0)$ e $B(0, -3)$.

3. Temos: $\begin{cases} (PA)^2 + (PB)^2 = 8 \\ PC = \sqrt{2} \end{cases}$

$$\begin{cases} \left(\sqrt{(x-5)^2 + (y-1)^2}\right)^2 + \left(\sqrt{(x-3)^2 + (y+1)^2}\right)^2 = 8 \\ \sqrt{(x-4)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-5)^2 + (y-1)^2 + (x-3)^2 + (y+1)^2 = 8 \\ (x-4)^2 + (y-0)^2 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x^2 + 2y^2 - 16x + 28 = 0 \\ x^2 + y^2 - 8y + 14 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 8y + 14 = 0 \\ x^2 + y^2 - 8y + 14 = 0 \end{cases}$$

Chegamos a uma equação possível com duas incógnitas: $x^2 + y^2 - 8y + 14 = 0$. Observamos que essa equação admite infinitas soluções, por exemplo, $(1,3)$, $(-1,3)$, $(\sqrt{14}, 0)$ e $(-\sqrt{14}, 0)$ são algumas dessas soluções.

Concluímos, portanto, que faltam dados no enunciado para que se determine o ponto P.

4. alternativa **d**

Sendo S o ponto médio entre os pontos A e B, tem-se:

$x_S = \dfrac{x_A + x_B}{2} \Rightarrow 5 = \dfrac{1 + x_B}{2} \therefore x_B = 9$

$y_S = \dfrac{y_A + y_B}{2} \Rightarrow 10 = \dfrac{2 + y_B}{2} \therefore y_B = 18$

Concluímos, então, que $B(9, 18)$.

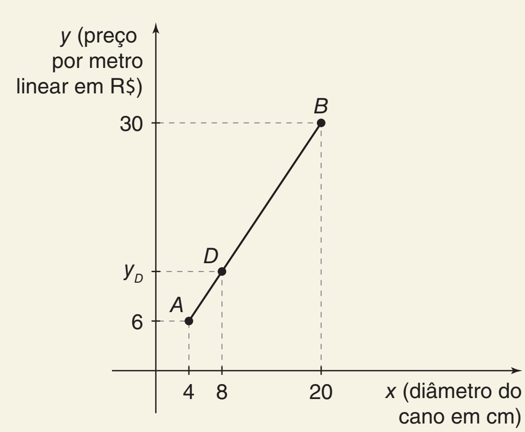
5. O ponto médio do segmento $\overline{AB}$ é o ponto

$C\left(\dfrac{4+20}{2}, \dfrac{6+30}{2}\right) = C(12, 18)$, e o ponto médio de $\overline{AC}$

é o ponto $D\left(\dfrac{4+12}{2}, \dfrac{6+18}{2}\right) = D(8, 12)$

Concluímos, então, que o preço de venda do metro de cano com 8 cm de diâmetro é R$12,00.

Outra maneira de resolver é por meio do teorema de Tales, que pode ser aplicado diretamente para a obtenção do ponto D:



ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

$$\begin{cases} \dfrac{AB}{AD} = \dfrac{20-4}{8-4} \\ \dfrac{AB}{AD} = \dfrac{30-6}{y_D-6} \end{cases} \Rightarrow \dfrac{20-4}{8-4} = \dfrac{30-6}{y_D-6} \therefore y_D = 12$$

Concluímos, então, que o preço de venda do metro de cano com 8 cm de diâmetro é R$ 12,00.

6. a. Pelo enunciado, o aumento da temperatura média é de 4,8 °C a cada 100 anos; logo, para aumentar 2,88 °C, temos:

48 ——— 100 anos
2,88 ——— x $\quad x = 60$

Logo, o ano será 2060.

b. Como a temperatura varia linearmente com o tempo, a taxa de variação anual é constante para qualquer período considerado. Assim, a taxa anual de variação em uma década ou em um século é a mesma; portanto, a razão $\dfrac{4{,}8}{100} = 0{,}048$ é a resposta à pergunta.

Logo, a taxa anual de variação da temperatura é 0,048 °C.

7. a. $m = \dfrac{20.639.454 - 20.434.221}{2028 - 2027} = 205.233$

e. $m_e = \dfrac{19.452.019 - 21.195.327}{2035 - 2025} = -174.330{,}8$

8. b. Calculando coeficiente angular m, temos:

$m = \dfrac{27-21}{0-100} = \dfrac{6}{-100} = -\dfrac{3}{50}$

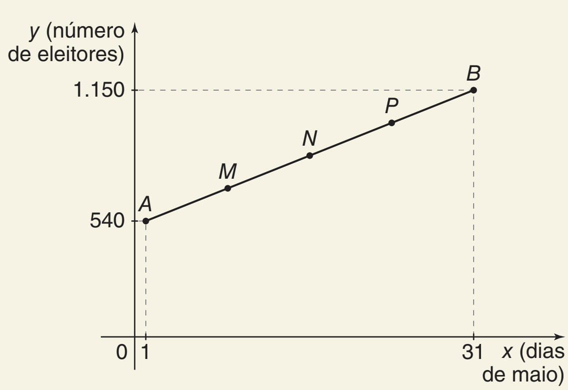
Assim, $y - 27 = -\dfrac{3}{50} \cdot (x - 0) \Rightarrow y = -\dfrac{3x}{50} + 27$

d. Fazendo $x = 40$ na equação $y = -\dfrac{3x}{50} + 27$, obtemos:

$y = -\dfrac{3 \cdot 40}{50} + 27 \Rightarrow y = 24{,}6$

VERIFIQUE O QUE APRENDEU NO CAPÍTULO 5

1. Além das pesquisas realizadas nos dias 1º e 31 de maio, foram realizadas mais três, dividindo o mês em intervalos iguais de tempo. Indicando por M, N e P os pontos associados às 2ª, 3ª e 4ª pesquisas realizadas no mês de maio, temos que esses pontos dividem $\overline{AB}$ em quatro segmentos congruentes:



ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

Observando que N é o ponto médio do segmento $\overline{AB}$, temos: $N\left(\dfrac{1+31}{2}, \dfrac{540+1.150}{2}\right) \Rightarrow N(16, 845)$

Observando que P é o ponto médio do segmento $\overline{NB}$, temos: $P\left(\dfrac{16+31}{2}, \dfrac{845+1.150}{2}\right) \Rightarrow P(23{,}5; 997{,}5)$

Concluímos, então, que:

a. A 4ª pesquisa foi realizada no dia 24 de maio.

b. Aproximadamente, 998 eleitores estavam dispostos a votar no candidato na 4ª pesquisa realizada em maio.

2. alternativa **c**

Calculando as distâncias AB, AC e BC, temos:

$AB = \sqrt{(m-1)^2 + [4-(-2)]^2} = \sqrt{(m-1)^2 + 36}$

$AC = \sqrt{(0-1)^2 + [6-(-2)]^2} = \sqrt{65}$

$BC = \sqrt{(m-0)^2 + (4-6)^2} = \sqrt{m^2+4}$

Como o triângulo ABC é retângulo em A, temos, pelo teorema de Pitágoras: $(AB)^2 + (AC)^2 = (BC)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(\sqrt{(m-1)^2+36}\right)^2 + (\sqrt{65})^2 = \left(\sqrt{m^2+4}\right)^2 \Rightarrow m = 49$

3. O coeficiente angular m da reta r é a tg α, que pode ser calculada por meio do cos α e do fato de α ser a medida de um ângulo agudo. Com esses dados e a relação fundamental da trigonometria, temos: sen $\alpha = \pm\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$

Como α é a medida de um ângulo agudo, deduzimos que sen α é positivo, ou seja: $\text{sen}\alpha = \dfrac{3\sqrt{10}}{10}$

Assim, o coeficiente angular m de r é dado por:

$m = \text{tg}\alpha = \dfrac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{\frac{3\sqrt{10}}{10}}{\frac{\sqrt{10}}{10}} \Rightarrow m = 3$

Com esse coeficiente angular e o ponto (0, −2), obtemos uma equação da reta r:

$y - (-2) = 3(x - 0) \Rightarrow y = 3x - 2$

MATEMÁTICA SEM FRONTEIRAS

3. O ponto (5,5; n) pertence ao segmento de reta $\overline{AB}$ se, e somente se, A, B e C são colineares; portanto:

$\dfrac{n-190}{5{,}5-5} = \dfrac{275-190}{6-5} \Rightarrow \dfrac{n-190}{0{,}5} = 85$

Assim, estimamos que, 5 horas e 30 minutos depois do início da experiência, a cultura tinha aproximadamente 233 bactérias.

CAPÍTULO 6 Complementos sobre o estudo da reta

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

2. a. O ponto de intersecção de r com s é solução do sistema:

$$\begin{cases} x + 2y - 1 = 0 \\ 2x - y + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y - 1 = 0 \\ 4x - 2y + 6 = 0 \end{cases}$$

Adicionando as equações, membro a membro, obtemos $x = -1$. Substituindo $x = -1$ em qualquer uma das equações, obtemos $y = 1$.

Logo, o ponto de intersecção das retas é (−1, 1).

b. O ponto de intersecção de r com s é solução do sistema:

$$\begin{cases} 5x + y - 3 = 0 \\ 2x - 3y + 17 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -15x + 3y + 9 = 0 \\ 2x - 3y + 17 = 0 \end{cases}$$

Adicionando as equações, membro a membro, obtemos $x = 2$. Substituindo $x = 2$ em qualquer uma das equações, obtemos $y = -7$.

Logo, o ponto de intersecção das retas é (2, −7).

3. a. A equação do eixo das abscissas é $y = 0$. Assim, o ponto M é a solução do sistema:

$$\begin{cases} 2x + 3y - 6 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 3 \therefore M(3, 0)$$

A equação do eixo das ordenadas é $x = 0$. Assim, o ponto N é a solução do sistema:

$$\begin{cases} 2x + 3y - 6 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow y = 2 \therefore N(0, 2)$$

Analogamente, para a reta s, obtemos: $Q(6,0)$ e $P(0, 9)$.

b. A área S do quadrilátero $MNPQ$ pode ser calculada como a diferença entre as áreas dos triângulos OPQ e ONM: $\frac{6 \cdot 9}{2}$ u $- \frac{3 \cdot 2}{2}$ u $= 24$ u

4. Os pontos A, B e C são, respectivamente, as soluções dos sistemas:

$$\begin{cases} x - 2y + 5 = 0 \\ x + 2y + 5 = 0 \end{cases}, \begin{cases} x - 2y + 5 = 0 \\ x - 3 = 0 \end{cases} \text{ e } \begin{cases} x + 2y + 5 = 0 \\ x - 3 = 0 \end{cases}$$

Resolvendo-os, obtemos: $A(-5, 0)$, $B(3,4)$ e $C(3, -4)$.

O ponto médio do lado $\overline{AC}$ é $D\left(\frac{-5+3}{2}, \frac{0+(-4)}{2}\right) =$
$= D(-1, -2)$. Assim, a reta suporte da mediana relativa ao lado $\overline{AC}$ é a reta $\overleftrightarrow{BD}$, com $B(3, 4)$ e $D(-1, -2)$.

Escolhendo um dos pontos, B ou D, e calculando o coeficiente angular de $\overleftrightarrow{BD}$, temos: $m = \frac{3}{2}$

Logo, uma equação de $\overleftrightarrow{BD}$ é dada por:

$y - 4 = \frac{3}{2} \cdot (x - 3) \Rightarrow 3x - 2y - 1 = 0$

5. b. Fazendo $x = k$ na equação $x + y - 1 = 0$, temos:

$k + y - 1 = 0 \Rightarrow y = 1 - k$

Logo, um ponto da reta com abscissa k tem ordenada $1 - k$.

c. Impondo a condição de que a distância entre os pontos $G(k, 1 - k)$ e $O(0, 0)$ seja igual a 5, temos:

$\sqrt{(k-0)^2 + (1-k-0)^2} = 5 \Rightarrow k^2 + (1-k)^2 = 25$

$\therefore 2k^2 - 2k - 24 = 0$

Resolvendo, obtemos: $k = 4$ ou $k = -3$

Logo, há dois pontos: (4, −3) e (−3, 4)

6. A reta r passa pelos pontos (0, 0) e (2, −3). Portanto, seu coeficiente angular é: $m = \frac{-3-0}{2-2} = -\frac{3}{2}$

Uma equação de r é: $y - 0 = -\frac{3}{2}(x - 0) \Rightarrow 3x + 2y = 0$

A reta s passa pelos pontos (−4, 0) e (−6, −4). Então, seu coeficiente angular é: $m = \frac{-4-0}{-6-(-4)} = 2$

Uma equação de s é:

$y - 0 = 2[x - (-4)] \Rightarrow 2x - y + 8 = 0$

O ponto de intersecção de r com s é solução do sistema:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 0 \\ 2x - y + 8 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = -\frac{16}{7} \text{ e } y = \frac{24}{7}$$

Logo, o ponto de intersecção das retas é $\left(-\frac{16}{7}, \frac{24}{7}\right)$.

9. b. Como a equação reduzida de r é $y = 2x + 6$, seu coeficiente angular é $m = 2$ e seu coeficiente linear é $q = 6$.

10. a. A equação $y = 20x + p$ expressa a quantidade y, em litro, de água contida no tanque T_1 a partir do instante em que foram abertas as torneiras; logo, a constante p é obtida para $x = 0$ e $y = 18$. Assim:

$18 = 20 \cdot 0 + p \Rightarrow p = 18$

Esse coeficiente linear indica a quantidade de água contida no tanque T_1, antes da abertura das torneiras.

A equação $y = 15x + q$ expressa a quantidade y, em litro, de água contida no tanque T_2 a partir do instante em que foram abertas as torneiras; logo, a constante q é obtida para $x = 0$ e $y = 24$. Assim:

$24 = 20 \cdot 0 + q \Rightarrow q = 24$

Esse coeficiente linear indica a quantidade de água contida no tanque T_2, antes da abertura das torneiras.

11. O coeficiente angular da reta s é $m_s = \text{tg } 135° = -1$. Como r é paralela à reta s, devemos ter $m_r = m_s = -1$. Além disso, r passa pelo ponto $P(5, 4)$; então: $(r)\ y - 4 = -1(x - 5)$

Logo, uma equação geral de r é: $x + y - 9 = 0$

12. O coeficiente angular da reta s, que passa pelos pontos (2, 0) e (0, 4), é: $m_s = \frac{4-0}{0-2} = -2$

Como r é paralela a s, seu coeficiente angular é $m_r = -2$. Além disso, r passa por $P(-3, 1)$; então:

$(r)\ y - 1 = -2[x - (-3)]$

Logo, a equação reduzida de r é: $y = -2x - 5$

13. a. A forma reduzida da equação de s é $y = -3x + 2$. Então, seu coeficiente angular é $m_s = -3$.

Como r é paralela a s e passa pelo ponto $P(2, 5)$, sua equação é dada por: $y - 5 = -3(x - 2)$

Portanto, a equação reduzida de r é: $y = -3x + 11$

b. O coeficiente angular de s é $m_s = -4$.

Como r é paralela a s, $m_r = -4$; além disso, r passa pelo ponto $P(0, 1)$. Logo, a equação de r é:

$y - 1 = -4(x - 0)$

Portanto, a equação reduzida de r é: $y = -4x + 1$

c. A forma reduzida da equação de s é $y = \frac{2x}{3} + \frac{1}{3}$. Então, seu coeficiente angular é $m_s = \frac{2}{3}$.

Como r é paralela a s, $m_r = m_s = \frac{2}{3}$; além disso, r passa pelo ponto $P(0, 0)$. Logo, a equação de r é:

$y - 0 = \frac{2}{3}(x - 0)$

Portanto, a equação reduzida de r é: $y = \frac{2x}{3}$

14. Na forma reduzida, as equações das retas são:

$(r)\ y = kx - k$ e $(s)\ y = \frac{9x}{k} + 3$

Comparando os coeficientes angulares e os coeficientes lineares de r e s, concluímos que:

a. r e s são concorrentes se seus coeficientes angulares são diferentes: $k \neq -\frac{9}{k} \Rightarrow k^2 \neq 9 \therefore k \neq 3$ e $k \neq -3$

Logo, $k \neq 0$ e $k \neq 3$ e $k \neq -3$.

b. r e s são paralelas distintas se seus coeficientes angulares são iguais e seus coeficientes lineares são diferentes:

$k = -\frac{9}{k}$ e $-k \neq 3 \Rightarrow k^2 = 9$ e $k \neq -3$

Logo, $k = 3$.

c. r e s são paralelas coincidentes se seus coeficientes angulares são iguais e seus coeficientes lineares são iguais:

$k = -\frac{9}{k}$ e $-k = 3 \Rightarrow k^2 = 9$ e $k = -3$

$\therefore (k = 3$ ou $k = -3)$ e $k = -3 \Rightarrow k = -3$

Logo, as retas r e s são coincidentes para $k = -3$.

15. a. Verdadeira, pois os coeficientes angulares p e r e os coeficientes lineares q e s são dados por:

$p = \frac{105 - 100}{1 - 0} = 5$, $r = \frac{104 - 99}{1 - 0} = 5$, $q = 100$ e $s = 99$

Logo, $p = r = 5$ e $q = s + 1$

b. Verdadeira, pois cada um dos coeficientes angulares, p e q, calculado no item **a**, é a razão entre a distância percorrida por cada carro, e o tempo transcorrido nesse percurso. Logo, cada um desses coeficientes é a velocidade do respectivo carro, em quilômetro por minuto.

c. Falsa, pois os coeficientes angulares p e q, obtidos no item **a**, representam a velocidade dos dois carros, em quilômetro por minuto. Assim, os dois carros mantiveram a mesma velocidade, 5 km/min, durante o monitoramento do engenheiro.

d. Verdadeira, pois as distâncias percorridas por A e B no início do monitoramento são as medidas, em quilômetro, expressas pelos coeficientes lineares q e s, respectivamente, citados no item **a**.

e. Verdadeira, pois os coeficientes angulares p e q, obtidos no item **a**, representam a velocidade dos dois carros, em quilômetro por minuto; logo, a velocidade de cada um deles era de 5 km/min. A diferença entre os coeficientes lineares q e s, citados no item **a**, é a distância, em quilômetro, que se manteve constante entre os carros; logo, a distância entre eles se manteve em 1 km. Assim, depois de o carro A cruzar a linha de chegada, o carro B percorreu mais 1 km à velocidade de 5 km/min; logo, o carro B chegou em segundo lugar, 0,2 min, ou seja 12 s, depois do carro A.

17. a. A forma reduzida da equação de r é: $y = -\frac{x}{2} + 5$

Assim: $m_r = -\frac{1}{2}$

Como s é a reta perpendicular a r, temos:

$m_r = -\frac{1}{m_s} \Rightarrow m_r \cdot m_s = -1 \Rightarrow m_s = 2$

Portanto, como s passa por $P(2, 4)$:

$(s)\ y - 4 = 2(x - 2)$

Logo, uma equação de s é: $y = 2x$

b. A forma reduzida da equação de r é: $y = -\frac{5x}{4}$

Assim: $m_r = -\frac{5}{4}$

Como s é perpendicular a r, temos:

$m_r = -\frac{1}{m_s} \Rightarrow m_r \cdot m_s = -1 \Rightarrow m_s = \frac{4}{5}$

Portanto, como s passa por $P(0, -4)$:

$(s)\ y - (-4) = \frac{4}{5}(x - 0)$

Logo, uma equação de s é: $4x - 5y - 20 = 0$

18. A reta r passa pelos pontos $(8, 0)$ e $(0, 4)$. Assim, seu coeficiente angular é: $m_r = \frac{4 - 0}{0 - 8} = -\frac{1}{2}$

Como a reta r deve ser perpendicular a s, devemos ter:

$m_s = -\frac{1}{-\frac{1}{2}} = 2$

Portanto, como s passa por $P(2, 6)$: $(s)\ y - 6 = 2(x - 2)$

Logo, uma equação da reta s é: $y = 2x + 2$

19. a. O coeficiente angular de r é: $m_r = \text{tg } 135° = -1$

Assim, o coeficiente angular de s, perpendicular a r, passando por $P(0, 4)$, é: $m_r = -\frac{1}{m_s} \Rightarrow m_s = 1$

Temos, então: $(s)\ y - 4 = 1(x - 0)$

Logo, uma equação de s é: $x - y + 4 = 0$

b. Como r é vertical, o coeficiente angular de s, perpendicular a r, passando por $P(7, 4)$, é $m_s = 0$.

Logo, uma equação de s é $y = 4$.

20. a. $r: \begin{cases} (-1, 0) \\ m_r = \frac{-2 - 0}{0 + 1} = -2 \end{cases} \Rightarrow \quad y - 0 = -2(x + 1)$

Logo, uma equação da reta r é: $2x + y + 2 = 0$

b. $s: \begin{cases} P(5, -2) \\ m_s = -\frac{1}{m_r} = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \quad y + 2 = \frac{1}{2}(x - 5)$

Logo, uma equação da reta s é: $x - 2y - 9 = 0$

c. $\begin{cases} 2x + y + 2 = 0 \\ x - 2y - 9 = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad x = 1$ e $y = -4$

Logo: $A(1, -4)$

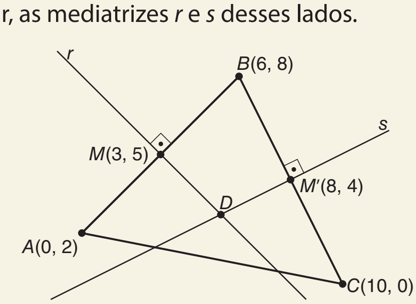
d. O ponto A é o ponto médio do segmento $\overline{PP'}$:

$P(5, -2)$ $\qquad A(1, -4)$ $\qquad P'(x, y)$

Logo: $\begin{cases} \frac{x + 5}{2} = 1 \\ \frac{y - 2}{2} = -4 \end{cases} \Rightarrow \quad x = -3$ e $y = -6$

$\therefore P'(-3, -6)$

21. a. Sendo M e M' os pontos médios dos lados $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$, respectivamente, representamos no esquema a seguir, as mediatrizes r e s desses lados.



ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

Como o coeficiente angular m_{AB} da reta $\overleftrightarrow{AB}$ é dado por $m_{AB} = \frac{8 - 2}{6 - 0} = 1$, temos que o coeficiente angular m_r da reta r é o oposto do inverso de 1, ou seja, $m_r = -1$. Assim, a equação de r é: $y - 5 = -1(x - 3)$, ou seja, $x + y - 8 = 0$.

Como o coeficiente angular m_{BC} da reta $\overleftrightarrow{BC}$ é dado por $m_{BC} = \frac{8-0}{6-10} = -2$, temos que o coeficiente angular m_s da reta s é o oposto do inverso de -2, ou seja, $m_s = \frac{1}{2}$.

Assim, a equação de s é: $y - 4 = \frac{1}{2}(x - 8)$, ou seja, $x - 2y = 0$.

b. O ponto D, comum a r e s, é a solução do sistema:

$$\begin{cases} x + y - 8 = 0 \\ x - 2y = 0 \end{cases}, \text{ ou seja, } D\left(\frac{16}{3}, \frac{8}{3}\right)$$

c. A medida R do raio da circunferência circunscrita ao triângulo ABC é a distância entre o ponto $D\left(\frac{16}{3}, \frac{8}{3}\right)$ e um vértice do triângulo, por exemplo, o vértice $A(0, 2)$:

$$R = \sqrt{\left(\frac{16}{3} - 0\right)^2 + \left(\frac{8}{3} - 2\right)^2} \Rightarrow R = \frac{2\sqrt{65}}{3}$$

22. $\begin{cases} x = 2t - 5 \\ y = 3 - t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2t - 5 \\ t = 3 - y \end{cases}$

Resolvendo o sistema, obtemos a equação reduzida de r:
$y = -\frac{x}{2} + \frac{1}{2}$

23. Isolando S em uma das equações, por exemplo, na primeira, obtemos:

$$\begin{cases} S = \frac{C - 12.000}{100} \\ L = 70S - 12.000 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, concluímos que:

$$L = 70\left(\frac{C - 12.000}{100}\right) - 12.000 \Rightarrow L = \frac{7C}{10} - 20.400$$

24. O gráfico 1 passa pelos pontos (0, 1.000) e (10; 1.001,8). Assim, o coeficiente angular da reta que contém esse gráfico é: $m = \frac{1.001{,}8 - 1.000}{10 - 0} = 0{,}18$

Uma equação da reta é:

$V - 1.000 = 0{,}18(T - 0) \Rightarrow T = \frac{V - 1.000}{0{,}18}$ (1)

O gráfico 2 passa por (0, 40) e (10, 90). Assim, o coeficiente angular da reta que contém esse gráfico é:

$m = \frac{90 - 40}{10 - 0} = 5$

Uma equação da reta é: $c - 40 = 5(T - 0) \Rightarrow T = \frac{c - 40}{5}$ (2)

De (1) e (2), temos:

$\frac{V - 1.000}{0{,}18} = \frac{c - 40}{5} \Rightarrow 5V - 5.000 = 0{,}18c - 7{,}2$

$\therefore V = 0{,}036c + 998{,}56$

Portanto, uma equação que expressa V em função de c é $V = 0{,}036c + 998{,}56$, para $c \in \mathbb{R}$, com $40 \leqslant c \leqslant 90$.

26. a. $d_{Pr} = \frac{|5 \cdot 1 + 12 \cdot 3 - 2|}{\sqrt{5^2 + 12^2}} = \frac{39}{13} = 3$

b. Uma equação geral da reta r é $x - y - 8 = 0$; logo:

$$d_{Pr} = \frac{|-2 - (-4) - 8|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{6}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$$

c. Uma equação geral da reta r é $x + 0y - 4 = 0$;

logo: $d_{Pr} = \frac{|9 + 0 \cdot 6 - 4|}{\sqrt{1^2 + 0^2}} = \frac{5}{1} = 5$

d. Uma equação geral da reta r é $0x + y - 3 = 0$;

logo: $d_{Pr} = \frac{|0 \cdot 5 - 2 - 3|}{\sqrt{0^2 + 1^2}} = \frac{5}{1} = 5$

27. a. Para provar que P pertence a uma das bissetrizes, basta mostrar que P equidista de r e s. Assim, temos:

$d_{Pr} = \frac{|3 + 2 \cdot 5 - 3|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} \Rightarrow d_{Pr} = \frac{10}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}$

e

$d_{Ps} = \frac{|2 \cdot 3 + 5 - 1|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} \Rightarrow d_{Ps} = \frac{10}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}$

Como $d_{Pr} = d_{Ps}$, concluímos que P pertence a uma das bissetrizes dos ângulos formados pelas retas r e s.

b. Considerando um ponto genérico $G(x, y)$ do plano cartesiano, temos que G pertence a uma das bissetrizes dos ângulos formados pelas retas r e s se, e somente se, $d_{Gr} = d_{Gs}$. Assim, temos:

$d_{Gr} = d_{Gs} \Rightarrow \frac{|x + 2y - 3|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{|2x + y - 1|}{\sqrt{2^2 + 1^2}}$

$\therefore |x + 2y - 3| = |2x + y - 1| \Rightarrow$

$\Rightarrow x + 2y - 3 = 2x + y - 1$ ou

$x + 2y - 3 = -2x - y + 1$

$\therefore x - y + 2 = 0$ ou $3x + 3y - 4 = 0$

Concluímos, então, que as equações das retas que contêm as bissetrizes são: $x - y + 2 = 0$ e $3x + 3y - 4 = 0$

28. a. $\overleftrightarrow{AB}$: $\begin{cases} B(5, 0) \\ m = \frac{3 - 0}{1 - 5} = -\frac{3}{4} \end{cases} \Rightarrow y - 0 = -\frac{3}{4}(x - 5)$

Logo, uma equação geral da reta $\overleftrightarrow{AB}$ é:

$3x + 4y - 15 = 0$

b. A medida d da altura pedida é a distância entre C e $\overleftrightarrow{AB}$:

$d = \frac{|3 \cdot 0 + 4 \cdot 5 - 15|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{5}{5} = 1$

c. Temos que: $AB = \sqrt{(5 - 1)^2 + (0 - 3)^2} \Rightarrow AB = 5$

Logo, a área S do triângulo ABC é dada por: $S = \frac{5 \cdot 1}{2} = \frac{5}{2}$

29. a. Todo ponto do eixo das abscissas é da forma $A(a, 0)$. Assim, devemos ter:

$\frac{|4a - 3 \cdot 0 - 12|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = 4 \Rightarrow |4a - 12| = 20$

$\therefore 4a - 12 = 20$ ou $4a - 12 = -20$

$\therefore a = 8$ ou $a = -2 \therefore A(8, 0)$ e $A'(-2, 0)$

b. Todo ponto da bissetriz dos quadrantes ímpares é da forma $B(b, b)$. Assim, devemos ter:

$\frac{|4b - 3b - 12|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = 2 \Rightarrow |b - 12| = 10$

$\therefore b - 12 = 10$ ou $b - 12 = -10$

$\therefore b = 22$ ou $b = 2 \therefore B(22, 22)$ e $B'(2, 2)$

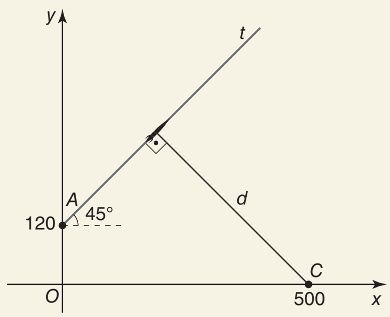
c. Todo ponto da reta s de equação $y = x + 2$ é da forma $C(c, c + 2)$. Assim, devemos ter:

$\frac{|4c - 3(c + 2) - 12|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = 3 \Rightarrow |c - 18| = 15$

$\therefore c - 18 = 15$ ou $c - 18 = -15$

$\therefore c = 33$ ou $c = 3 \therefore C(33, 35)$ e $C'(3, 5)$

30. Sendo O o ponto de intersecção da vertical r com a planície, vamos considerar um sistema cartesiano xOy, adotando o metro como unidade, em que o eixo Oy, orientado para cima, coincida com r; e o eixo Ox passe por C, orientado de O para C. Assim, indicando por d a menor distância entre o míssil e a central C; e por t a reta que contém a trajetória do míssil, esquematizamos:



A reta t passa pelo ponto (0, 120) e tem coeficiente angular m dado por: $m = \text{tg } 45° = 1$. Assim, a equação de t é obtida por: $y - 120 = 1(x - 0) \Rightarrow x - y + 120 = 0$

A distância d é a distância entre C e t; logo:

$$d = \frac{|500 - 0 + 120|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{620}{\sqrt{2}} \Rightarrow d = 310\sqrt{2}$$

Concluímos, então, que a menor distância entre o míssil e a central C é $310\sqrt{2}$ m.

31. A medida R do raio do círculo é a distância entre o ponto C e a reta t. Para calcular essa distância, escrevemos a equação da reta t na forma geral, obtendo: $3x + 4y = 0$.

Assim, temos: $R = \dfrac{|3 \cdot 3 + 4 \cdot 4|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 5$

Logo: $A = \pi \cdot 5^2 \Rightarrow A = 25\pi$

33. a. $D = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 6 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4 + 15 + 6 - 12 - 1 - 30 = -18$

Logo:

$A = \dfrac{|D|}{2} \Rightarrow A = \dfrac{|-18|}{2} = 9$

A área A do triângulo MNP é 9 unidades de área.

b. $D = \begin{vmatrix} -2 & -3 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 8 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -8 - 24 - 32 + 3 = -61$

Logo:

$A = \dfrac{|D|}{2} \Rightarrow A = \dfrac{|-61|}{2} = 30{,}5$

A área A do triângulo MNP é 30,5 unidades de área.

34. alternativa **b**

Resolvendo os sistemas formados por essas equações tomadas duas a duas, obtemos os vértices do triângulo:

$\begin{cases} y = x \\ y = 2x \end{cases} \Rightarrow x = 0 \text{ e } y = 0; (0, 0)$

$\begin{cases} y = x \\ x + y = 6 \end{cases} \Rightarrow x = 3 \text{ e } y = 3; (3, 3)$

$\begin{cases} y = 2x \\ x + y = 6 \end{cases} \Rightarrow x = 2 \text{ e } y = 4; (2, 4)$

A área A do triângulo é dada por: $A = \dfrac{|D|}{2}$

$D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 6$; logo: $A = \dfrac{|6|}{2} = 3$

35. Os pontos da bissetriz dos quadrantes pares são da forma $P(a, -a)$, com $a \in \mathbb{R}$. Assim, os vértices do triângulo são $M(1, 1)$, $N(3, 3)$ e $P(a, -a)$.

$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ a & -a & 1 \end{vmatrix} = -4a$

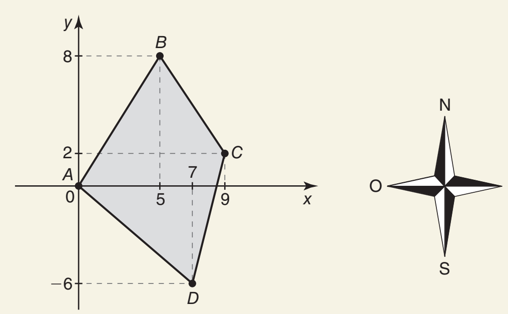
Como a área do triângulo MNP é dada por $\dfrac{|D|}{2}$, temos:

$\dfrac{|D|}{2} = 4 \Rightarrow |-4a| = 8$

$\therefore -4a = 8$ ou $-4a = -8 \Rightarrow a = -2$ ou $a = 2$

Logo, os pontos P da bissetriz dos quadrantes pares tal que a área do triângulo MNP é 4 são $P(-2, 2)$ ou $P(2, -2)$.

36. Consideremos um sistema cartesiano com origem no ponto A, eixo das ordenadas orientado no sentido sul-norte, eixo das abscissas orientado no sentido oeste-leste e com o quilômetro adotado como unidade nos eixos. Nesse sistema, temos a seguinte representação do quadrilátero $ABCD$:



A área S_{ABCD} desse quadrilátero é a soma das áreas S_{ABC} e S_{ACD} dos triângulos ABC e ACD, respectivamente.

Calculando a área S_{ABC} pelo determinante D_{ABC}, temos:

$D_{ABC} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 5 & 8 & 1 \\ 9 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -62$

Assim, a área S_{ABC}, em quilômetro quadrado, é dada por:

$S_{ABC} = \dfrac{|D_{ABC}|}{2} = \dfrac{|-62|}{2} = 31$

Calculando o determinante D_{ACD}, temos:

$D_{ACD} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 9 & 2 & 1 \\ 7 & -6 & 1 \end{vmatrix} = -68$

Assim, a área S_{ACD}, em quilômetro quadrado, é dada por:

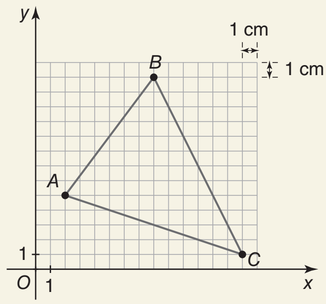
$S_{ACD} = \dfrac{|D_{ACD}|}{2} = \dfrac{|-68|}{2} = 34$

Portanto, a área do quadrilátero $ABCD$, em quilômetro quadrado, é dada por: $S_{ABCD} = 31 + 34 = 65$

37. Sim, é possível calcular a área desse triângulo por meio de um determinante. Para isso, basta associar um sistema cartesiano de eixos ao plano do papel. Por exemplo, podemos associar o sistema cartesiano mostrado na figura a seguir.

ILUSTRAÇÕES: ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA



De acordo com esse sistema, as coordenadas dos vértices desse triângulo são $A(2, 5)$, $B(8, 13)$ e $C(14, 1)$. Com esses pontos, calculamos o determinante:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 8 & 13 & 1 \\ 14 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -120$$

A área S do triângulo ABC é dada por: $S = \dfrac{|D|}{2}$

$S = \dfrac{|-120|}{2}\ \text{cm}^2 = 60\ \text{cm}^2$

39. a. $D = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -5 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

Como $D = 0$, concluímos que A, B e C são colineares.

b. $D = \begin{vmatrix} 1 & 7 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 22$

Como $D \neq 0$, concluímos que A, B e C não são colineares.

c. $D = \begin{vmatrix} \frac{1}{4} & -4 & 1 \\ \frac{1}{2} & -3 & 1 \\ \frac{5}{4} & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$

Como $D = 0$, concluímos que A, B e C são colineares.

40. a. Para que os pontos A, B e C sejam colineares, devemos ter:

$\begin{vmatrix} x & 5 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ -1 & -2x & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 3x^2 - x - 10 = 0$

$\therefore x = 2$ ou $x = -\dfrac{5}{3}$

b. Para que C, D e E sejam vértices de um triângulo, devemos ter: $\begin{vmatrix} 0 & k & 1 \\ 1 & -k & 1 \\ k & 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$, ou seja,

$k^2 + 1 + k^2 - k \neq 0 \Rightarrow 2k^2 - k + 1 \neq 0$

$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 \Rightarrow \Delta = -7$

Como o discriminante da equação é negativo, concluímos que, para qualquer valor real de k, tem-se: $2k^2 - k + 1 \neq 0$

Logo os pontos C, D e E são vértices de um triângulo para qualquer valor real de k.

41. a. $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 4 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x - y + 1 = 0$

b. $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 6 & -8 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x + y + 2 = 0$

c. $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x = 2$

d. $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 4 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow y = -2$

42. a. Como os pontos $(0, 600)$, $(a, 602)$ e $(2a + 1, 608)$ são colineares, temos:

$$\begin{vmatrix} 0 & 600 & 1 \\ a & 602 & 1 \\ 2a + 1 & 608 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$608a + 600(2a + 1) - 602(2a + 1) - 600a = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow a = 0{,}5$

b. O consumo do aparelho, em kWh por hora, é numericamente igual ao coeficiente angular m da reta que contém o gráfico. Como essa reta passa pelos pontos $(0, 600)$ e $(0{,}5; 602)$, temos: $m = \dfrac{602 - 600}{0{,}5 - 0} = 4$

Logo, o consumo do aparelho é de 4 kWh por hora.

43. No instante em que P cruzou a reta $\overleftrightarrow{AB}$, os três pontos $A(3, 2)$, $B(5, 1)$ e $P(t^2 + 4, t)$ estavam alinhados. Logo:

$$\mathrm{D} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \\ t^2 + 4 & t & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow t = 1 \text{ ou } t = -3$$

Como t representa o tempo, só convém $t = 1$. Assim, o ponto P cruzou a reta determinada pelos pontos A e B 1 minuto depois de iniciado o movimento.

45. a. A reta origem tem equação: $x = 3$

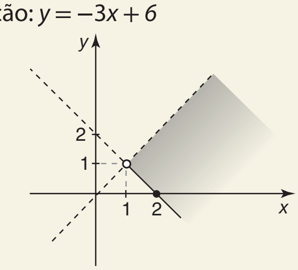
b. A reta origem tem equação: $y = 4$

c. A reta origem tem equação: $y = x - 5$

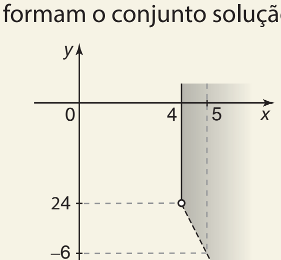
d. A reta origem tem equação: $y = -3x + 6$

46. a. $\begin{cases} y < x & (1) \\ y \geqslant 2 - x & (2) \end{cases}$

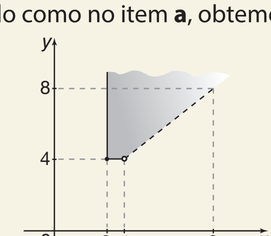
Os pontos (x, y) que satisfazem (1) e (2) simultaneamente são obtidos pela intersecção dos semiplanos (1) e (2), isto é:



b. Representamos em um mesmo plano cartesiano cada um dos semiplanos determinados pelas inequações $x \geqslant 4$ e $2x + y - 4 > 0$. Os pontos comuns aos dois semiplanos formam o conjunto solução do sistema:



c. Raciocinando como no item **a**, obtemos:

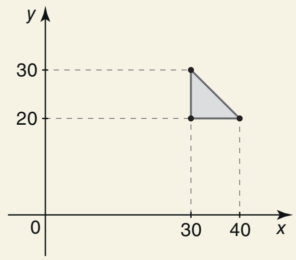


ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

47. De acordo com a estimativa da construtora, temos que:

$$\begin{cases} x + y \leqslant 60 \\ x \geqslant 30 \\ y \geqslant 20 \end{cases}$$

A representação gráfica das soluções (x, y) desse sistema é a intersecção dos três semiplanos representados por suas inequações:



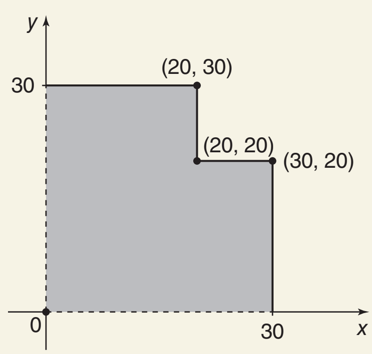
FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

48. Temos:

$$\begin{cases} x \leqslant 0{,}6 \cdot 50 \\ y \leqslant 0{,}4 \cdot 50 \\ x > 0 \\ y > 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x \leqslant 0{,}4 \cdot 50 \\ y \leqslant 0{,}6 \cdot 50 \\ x > 0 \\ y > 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \leqslant 30 \\ y \leqslant 20 \\ x > 0 \\ y > 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x \leqslant 20 \\ y \leqslant 30 \\ x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$$

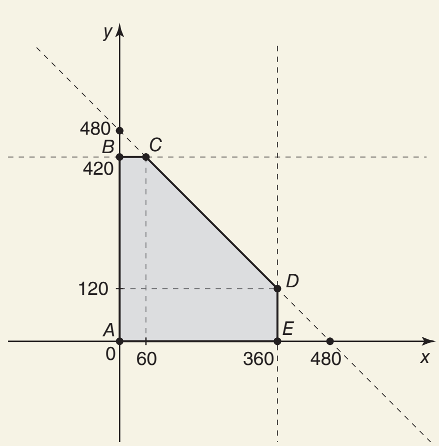
A representação gráfica dos pontos (x, y) que satisfazem essas condições é a reunião do conjunto de pontos que satisfazem o primeiro sistema com o conjunto de pontos que satisfazem o segundo, isto é:



49. a. As restrições sobre x e y podem ser expressas pelo sistema de inequações:

$$\begin{cases} x + y \leqslant 480 \\ 0 \leqslant x \leqslant 360 \\ 0 \leqslant y \leqslant 420 \end{cases}$$

Representando os pontos (x, y) no plano cartesiano, obtemos o pentágono $ABCDE$:



ILUSTRAÇÕES: ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

b. O lucro L, em real, obtido pela colheita é dado por $L = 2.700x + 2.400y$

Calculando o valor de L em cada vértice do pentágono representado no item **a**, temos:

- No vértice $A(0, 0)$:
  $L = 2.700 \cdot 0 + 2.400 \cdot 0 = 0$
- No vértice $B(0, 420)$:
  $L = 2.700 \cdot 0 + 2.400 \cdot 420 = 1.008.000$
- No vértice $C(60, 420)$:
  $L = 2.700 \cdot 60 + 2.400 \cdot 420 = 1.170.000$
- No vértice $D(360, 120)$:
  $L = 2.700 \cdot 360 + 2.400 \cdot 120 = 1.260.000$
- No vértice $E(360, 0)$:
  $L = 2.700 \cdot 360 + 2.400 \cdot 0 = 972.000$

Observando que o maior valor de L foi obtido no vértice $D(360, 120)$, concluímos que o lucro máximo será obtido com a plantação de 360 ha de milho e 120 ha de soja.

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

1. a. O coeficiente angular m da reta $\overleftrightarrow{PQ}$ é dado por:

$$m = \frac{5 - 0}{-3 - 9} \Rightarrow m = -\frac{5}{12}$$

Com o ponto $Q(9, 0)$ e o coeficiente angular $-\frac{5}{12}$, obtemos a equação da reta $\overleftrightarrow{PQ}$:

$$y - 0 = -\frac{5}{12}(x - 9) \Rightarrow 5x + 12y - 45 = 0$$

b. Fazendo $x = 0$ na equação obtida no item **a**, obtemos:
$5 \cdot 0 + 12y - 45 = 0 \Rightarrow y = 3{,}75$

Logo, o projétil estava a 3,75 m de altura quando cruzou o eixo das ordenadas.

c. A distância PQ, em metro, é dada por:

$$PQ = \sqrt{(9 - (-3)^2 + (0 - 5)^2)} \Rightarrow PQ = 13$$

Logo, a velocidade média v do projétil, no trajeto $\overleftrightarrow{PQ}$, é dada por: $v = \frac{13}{0{,}5}$ m/s $\Rightarrow v = 26$ m/s $= 93{,}6$ km/h

2. a. Indicando por $C(x)$ o custo, em real, de x kg de sorvete e por $R(x)$ a receita, em real, obtida com a venda de toda a produção de x kg de sorvete no período considerado, temos: $C(x) = 1.000 + 40x$ e $R(x) = 65x$, para $x \geqslant 0$

Logo, os gráficos de C e R são segmentos de reta e x_F representa a produção de sorvete, em quilograma, no período considerado.

b. O *break-even point* é o ponto de intersecção dos dois gráficos C e R, representados no item **a**. Esse ponto é a solução do sistema:

$$\begin{cases} y = 1.000 + 40x \\ y = 65x \end{cases}$$

que é o ponto (40, 2.600).

Logo, o *break-even point* é (40, 2.600).

c. Observando o *break-even point*, obtido no item **b**, concluímos que o fabricante terá lucro se a quantidade de sorvete produzida e vendida no período considerado for maior que 40 kg.

3. a. Como o consumo da colheitadeira A é constante, o gráfico que expressa o consumo y em função do tempo x, em 8 horas, é um segmento de reta.

b. Como o consumo da colheitadeira B também é constante, o gráfico que expressa o consumo y em função do tempo x, em 6 horas, é um segmento de reta.

c. Indicando por r_A e r_B as retas que contêm, respectivamente, os gráficos A e B do item anterior, temos:

$$r_A: \begin{cases} (0, 0) \\ m_{r_A} = \dfrac{128 - 0}{8 - 0} = 16 \end{cases} \Rightarrow \quad y - 0 = 16(x - 0)$$

Logo: r_A: $y = 16x$

$$r_B: \begin{cases} (2, 0) \\ m_{r_B} = \dfrac{144 - 0}{8 - 2} = 24 \end{cases} \Rightarrow \quad y - 0 = 24(x - 2)$$

Logo: r_B: $y = 24x - 48$

Resolvendo o sistema formado pelas equações de r_A e r_B, temos:

$$\begin{cases} y = 16x \\ y = 24x - 48 \end{cases} \Rightarrow \quad x = 6 \text{ e } y = 96$$

Portanto, 6 horas depois de ligada a colheitadeira A, as duas máquinas haviam consumido a mesma quantidade de óleo, que era de 96 L cada máquina.

4. a.
$$s: \begin{cases} P(3, 1) \\ m_s = m_{AB} = \dfrac{4 - 0}{0 - (-2)} = 2 \end{cases}$$

$\therefore y - 1 = 2(x - 3) \Rightarrow y = 2x - 5$

b. Fazendo $x = k$ na equação $y = 2x - 5$, obtemos: $y = 2k - 5$. Logo, o ponto G tem ordenada $2k - 5$.

c. Um ponto genérico da reta s é $G(k, 2k - 5)$.

Impondo $GO = GB$, temos:

$$\sqrt{(k - 0)^2 + (2k - 5 - 0)^2} = \sqrt{(k - 0)^2 + (2k - 5 - 4)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4k^2 - 20k + 25 = 4k^2 - 36k + 81 \therefore k = \frac{7}{2}$$

Concluímos, então, que $G\left(\dfrac{7}{2}, 2\right)$.

5. a. Vamos resolver este item de dois modos diferentes:

1º modo

Sendo s a reta, perpendicular a r, que passa pelo ponto P, temos que o coeficiente angular m_s da reta s é o oposto do inverso do coeficiente angular m_r da reta r. Como $m_r = -\dfrac{3}{1} = -3$, deduzimos que: $m_s = -\dfrac{1}{(-3)} = \dfrac{1}{3}$.

Substituindo x_0, y_0 e m, respectivamente, por 1, 4, e $\dfrac{1}{3}$ na equação fundamental, $y - y_0 = m(x - x_0)$, obtemos a equação de s: $y - 4 = \dfrac{1}{3}(x - 1)$

Logo, a equação da reta s é $x - 3y + 11 = 0$.

As coordenadas do ponto P' formam a solução do sistema linear:

$$\begin{cases} x - 3y + 11 = 0 \\ 3x + y + 3 = 0 \end{cases}, \text{ que é equivalente a}$$

$$\begin{cases} x - 3y = -11 \\ 3x + y = -3 \end{cases}$$

Escalonando, obtemos:

$$\begin{cases} x - 3y = -11 \quad \times(-3) \\ 3x + y = -3 \quad + \end{cases} \sim \begin{cases} x - 3y = -11 & (1) \\ 0x + 10y = 30 & (2) \end{cases}$$

De (2), temos: $y = 3$

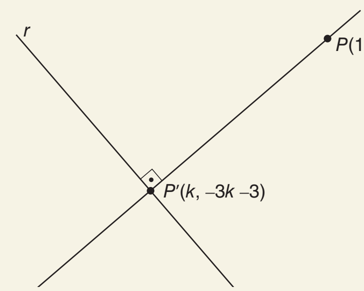
Substituindo y por 3 em (1), obtemos:

$x - 3 \cdot 3 = -11 \Rightarrow x = -2$

Logo, $P'(-2, 3)$.

2º modo

Atribuindo um valor genérico k à variável x da equação da reta r, obtemos: $y = -3k - 3$. Assim, a projeção ortogonal P' do ponto P sobre a reta r é da forma $P'(k, -3k - 3)$.

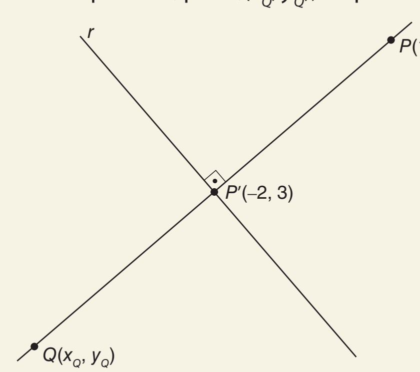


O coeficiente angular $m_{PP'}$ da reta $\overleftrightarrow{PP'}$ é o oposto do inverso do coeficiente angular m_r da reta r. Como $m_r = -3$, temos:

$$m_{PP'} = -\frac{1}{m_r} \Rightarrow \frac{-3k - 3 - 4}{k - 1} = \frac{1}{3} \therefore k = -2$$

Assim, o ponto $P'(k, -3k - 3)$ é $P'(-2, 3)$.

b. O simétrico de P em relação a r é o simétrico de P em relação ao ponto $P'(-2, 3)$, obtido no item anterior; logo P' é o ponto médio do segmento $\overline{PQ}$. Assim, indicando o ponto Q por $Q(x_Q, y_Q)$, esquematizamos:



Portanto:

$$\begin{cases} \dfrac{1 + x_Q}{2} = -2 \\ \dfrac{4 + y_Q}{2} = 3 \end{cases} \Rightarrow x_Q = -5 \text{ e } y_Q = 2$$

Logo, o ponto Q é dado por $Q(-5, 2)$

6. a. Indicando por p a pressão do gás, em atmosfera, no final do período considerado, a proporcionalidade entre a pressão e a temperatura nos garante que:

$$\frac{5}{200} = \frac{p}{200 + 2 \cdot 20} \Rightarrow p = 6$$

Logo, a pressão no interior do recipiente, ao final do período considerado, era de 6 atm.

b. No instante 0, a pressão era de 200 K; e no instante 20, a pressão era 240 K; logo, devido à proporcionalidade entre T e p, o gráfico formado pelos pontos (T, p) é um segmento de reta.

c. A temperatura aumentou 40 K em 20 min; logo, o aumento da temperatura por minuto foi de 2 K, o que nos leva a generalizar que em t minutos o aumento da temperatura, em Kelvin, foi de $2t$. Assim, a temperatura, em Kelvin, pode ser expressa em função de t, em minuto, por: $T = 200 + 2t$

Em 20 min, a pressão aumentou em 1 atm; logo, o aumento da pressão, por minuto, foi de $\frac{1}{20}$ atm, motivo pelo qual deduzimos que, em t minutos, a pressão aumentou $\frac{t}{20}$ atm. Assim, a medida, em atmosfera, da pressão p, pode ser expressa por:

$p = 5 + \frac{t}{20}$

Concluímos, assim, que as equações paramétricas pedidas são: $\begin{cases} T = 200 + 2t \\ p = 5 + \frac{t}{20} \end{cases}$, com $0 \leqslant t \leqslant 20$

7. Qualquer ponto que pertença a uma das bissetrizes dos ângulos formados por r e s equidista dessas retas. Assim:

$$d_{Pr} = d_{Ps} \Rightarrow \frac{|3 \cdot 4 + 4 \cdot a - 2|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|4 \cdot 4 - 3 \cdot a + 1|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}}$$

$\therefore 4a + 10 = 17 - 3a$ ou $4a + 10 = -17 + 3a$

$\therefore a = 1$ ou $a = -27$

8. alternativa **c**

Sendo $M(3, 4)$, $N(6, -1)$, $P(0, 3)$ e $Q(2, 0)$, a área A do desmatamento é dada pela soma das áreas dos triângulos MNP e NPQ. Sejam:

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 6 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -3 + 18 - 9 - 24 \Rightarrow D = -18$$

$$D' = \begin{vmatrix} 6 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 18 - 2 - 6 \Rightarrow D' = 10$$

A área A do desmatamento é dada por:

$$A = \frac{|D|}{2} + \frac{|D'|}{2} \Rightarrow A = \frac{|-18|}{2} + \frac{|10|}{2} \Rightarrow A = 14$$

Logo, a área do desmatamento descoberta pelos geólogos foi de 14 km^2.

9. Os pontos da reta r são da forma $P(a, 2a - 6)$, com $a \in \mathbb{R}$. Assim, os vértices do triângulo são $M(2, 0)$, $N(0, 4)$ e $P(a, 2a - 6)$.

Calculando o determinante $D = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ a & 2a - 6 & 1 \end{vmatrix}$,

obtemos: $D = 20 - 8a$

Como a área do triângulo MNP é dada por $\frac{|D|}{2}$, temos:

$\frac{|D|}{2} = 10 \Rightarrow |20 - 8a| = 20$

$\therefore 20 - 8a = 20$ ou $20 - 8a = -20 \Rightarrow a = 0$ ou $a = 5$

Logo, os pontos P da reta r tal que a área do triângulo MNP é 10 são $P(0, -6)$ ou $P(5, 4)$.

10. Para que A, B e O sejam colineares, devemos ter:

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha & \text{sen}\,\alpha & 1 \\ 1 & \sqrt{3} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Desenvolvendo esse determinante, temos:

$\sqrt{3} \cdot \cos\alpha - \text{sen}\,\alpha = 0 \Rightarrow \text{sen}\,\alpha = \sqrt{3} \cdot \cos\alpha$

Observamos que $\cos\alpha \neq 0$, pois se $\cos\alpha$ fosse zero, teríamos $\text{sen}\,\alpha = \pm 1$, com o que a igualdade anterior não ocorreria. Assim sendo, podemos dividir ambos os membros dessa igualdade por $\cos\alpha$, obtendo:

$\text{tg}\,\alpha = \sqrt{3} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{3}$ ou $\alpha = \frac{4\pi}{3}$

Logo, $\alpha = \frac{\pi}{3}$ ou $\alpha = \frac{4\pi}{3}$.

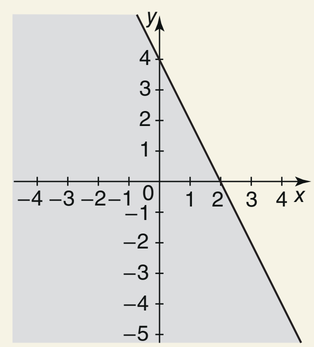
11. $AB + BC$ é mínimo se, e somente se, A, B e C são colineares.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ a & 7 & 1 \\ a - 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow a = 2$$

CONECTADO

Página 178:

a. Considerando a reta $2x + y - 4 = 0$ representada no plano cartesiano e substituindo-se o ponto $(0, 0)$ na equação, obtemos $-4 < 0$; portanto, a região pintada (incluindo a reta) representa a inequação $2x + y - 4 \leqslant 0$.

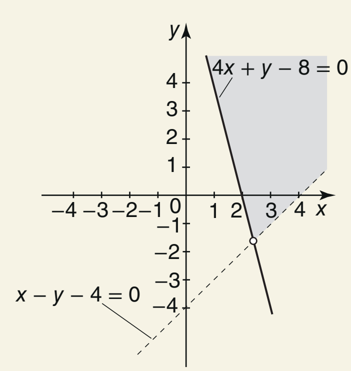


b. Considere as retas $4x + y - 8 = 0$ e $x - y - 4 = 0$ representada no plano cartesiano.

Substituindo-se o ponto $(0, 0)$ na 1ª equação, obtemos $-8 < 0$; portanto, a região que representa a inequação $4x + y - 8 \geqslant 0$ é acima dessa reta, incluindo-a.

Substituindo-se o ponto $(0, 0)$ na 2ª equação, obtemos $-4 < 0$; portanto, a região que representa a inequação $x - y - 4 < 0$ é acima dessa reta, não incluindo essa reta.

A intersecção das regiões de cada inequação está representada no plano cartesiano a seguir.



ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

VERIFIQUE O QUE APRENDEU NO CAPÍTULO 6

1. a. A medida h da altura desse triângulo é a distância entre o ponto $A(1, 8)$ e a reta $\overleftrightarrow{BC}$, isto é:

$$h = \frac{|3 \cdot 1 + 4 \cdot 8 + 10|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 9$$

b. Sendo a a medida o lado do triângulo, temos que:

$$\frac{a\sqrt{3}}{2} = 9 \Rightarrow a = 6\sqrt{3}$$

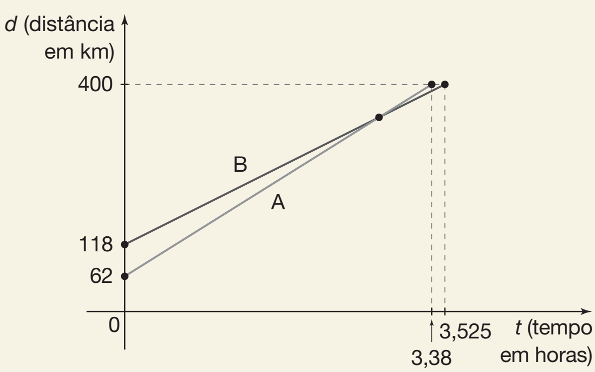
Concluímos, então, que a área S do triângulo é dada por:

$$S = \frac{6\sqrt{3} \cdot 9}{2} = 27\sqrt{3}$$

2. a. No instante $t = 0$, o automóvel e o ônibus estavam a 62 km e 118 km do início da estrada (km 0). Assim, as distâncias d_A e d_B percorridas por eles são dadas por:

$$d_A = 62 + 100t \text{ e } d_B = 118 + 80t$$

b. Observamos que as funções polinomiais $d_A(t)$ e $d_B(t)$ são do primeiro grau; logo, o gráfico de cada uma é um segmento de reta (não é toda a reta porque os valores de t são limitados pelo instante $t = 0$ e pelo instante em que cada veículo chega ao final da estrada).



c. Observando os gráficos do item **b**, constatamos que existe um ponto P de intersecção entre eles. Esse ponto é a solução do sistema:

$$\begin{cases} d = 62 + 100t \\ d = 118 + 80t \end{cases} \Rightarrow t = 2{,}8 \text{ e } d = 342$$

Logo, $P(2{,}8; 342)$

3. a. Como 800 m = 0,8 km, vamos indicar por $(0{,}8; t)$ o ponto do gráfico correspondente à temperatura t, em grau Celsius, a 0,8 km de profundidade. Esse ponto é colinear com os pontos $(0{,}1; 25)$ e $(1; 52)$; logo:

$$\begin{vmatrix} 0{,}8 & t & 1 \\ 0{,}1 & 25 & 1 \\ 1 & 52 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow t = 46$$

Logo, a 800 m de profundidade, a temperatura era de 46 °C.

b. O ponto da reta $\overleftrightarrow{AB}$ associado à temperatura T, em grau Celsius, na superfície, é $(0, T)$. Esse ponto é colinear com os pontos $(0{,}1; 25)$ e $(1; 52)$; logo:

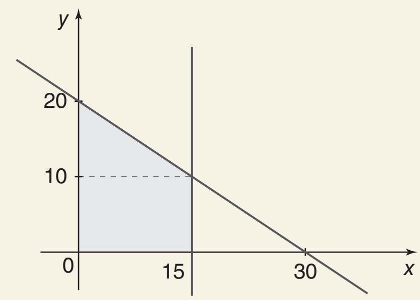
$$\begin{vmatrix} 0 & T & 1 \\ 0{,}1 & 25 & 1 \\ 1 & 52 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow T = 22$$

Logo, na superfície, a temperatura era de 22 °C.

4. Representando por x e y as quantidades de desinfetantes A e B, respectivamente, o sistema de inequações que representa a região citada é:

$$\begin{cases} 20x + 30y \leqslant 600 \\ 20x \leqslant 300 \\ x \geqslant 0 \\ y \geqslant 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \leqslant -\frac{2x}{3} + 20 \\ x \leqslant 15 \\ x \geqslant 0 \\ y \geqslant 0 \end{cases}$$

Representando essa região no plano cartesiano, temos:



5. alternativa **b**

Obtendo as equações reduzidas das retas r e s, temos:

$(r)\ y = \frac{1}{4}x + \frac{3}{2}$ e $(s)\ y = -\frac{a}{b}x - \frac{a}{c}$

Como $r \perp s$, então:

$$m_r \cdot m_2 = -1 \Rightarrow \frac{1}{4} \cdot \left(-\frac{a}{b}\right) = -1 \Rightarrow a - 4b = 0 \quad (1)$$

Como $P(2, 2) \in s$, então as coordenadas de P satisfazem a equação da reta s. Logo:

$$a \cdot 2 + b \cdot 2 + c = 0 \Rightarrow 2a + 2b + c = 0 \quad (2)$$

Os valores de a, b e c são tais que satisfazem (1) e (2).

- Para $a = 4$, temos em (1):
  $4 - 4b = 0 \Rightarrow b = 1$
  Substituindo b por 1 em (2):
  $2 \cdot 4 + 2 \cdot 1 + c = 0 \Rightarrow c = -10$
  Concluímos que $a = 4$, $b = 1$ e $c = -10$ são possíveis valores corretos.
- Para $a = -4$, temos em (1):
  $-4 - 4b = 0 \Rightarrow b = -1$
  Substituindo b por -1 em (2):
  $2 \cdot (-4) + 2 \cdot (-1) + c = 0 \Rightarrow c = 10$
  Concluímos que $a = -4$, $b = -1$ e $c = 10$ são possíveis valores corretos.

6. alternativa **c**

Indicamos por r_f e r_g as retas que representam graficamente as funções f e g, respectivamente.

A reta r_f contém os pontos $(0, 15)$ e $(5, 0)$. Obtendo a equação da reta r_f pelo determinante, temos:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 0 & 15 & 1 \\ 5 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 15x + 5y - 75 = 0 \Rightarrow (r_f)\ 3x + y - 15 = 0$$

A reta r_g contém os pontos $(0, 1)$ e $(-1, 0)$. Obtendo a equação da reta r_g pelo determinante, temos:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x - y + 1 = 0 \Rightarrow (r_g)\ x - y + 1 = 0$$

As coordenadas do ponto P formam a solução do sistema linear:

$$\begin{cases} 3x + y - 15 = 0 \\ x - y + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + y = 15 \\ x - y = -1 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, obtemos:

$$\begin{cases} 3x + y = 15 \\ x - y = -1 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{7}{2} \text{ e } y = \frac{9}{2}$$

Logo, temos $P\left(\frac{7}{2}, \frac{9}{2}\right)$. Portanto, o valor da abscissa é $\frac{7}{2}$.

CAPÍTULO 7 Equações da circunferência

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. A equação reduzida de uma circunferência de centro $C(a, b)$ e raio R é dada por: $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$

Assim, para cada item, temos:

a. $C(4, 6)$ e $R = 10$

$(x - 4)^2 + (y - 6)^2 = 10^2$

b. $C(7, 0)$ e $R = \sqrt{3}$

$(x - 7)^2 + (y - 0)^2 = (\sqrt{3})^2$

c. $C(0, -1)$ e $R = \frac{2}{3}$

$(x - 0)^2 + (y + 1)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2$

d. $C(0, 0)$ e $R = 4$

$(x - 0)^2 + (y - 0)^2 = 4^2$

2. Vamos comparar as equações dadas com a equação $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$ em cada caso:

a. $C(6, 2)$ e $R = 7$

b. $(x - 4)^2 + y^2 = 5 \Rightarrow (x - 4)^2 + (y - 0)^2 = 5$

$C(4, 0)$ e $R = \sqrt{5}$

c. $(x + 1)^2 + (y + 2)^2 = \frac{16}{25} \Rightarrow$

$\Rightarrow [x - (-1)]^2 + [y - (-2)]^2 = \frac{16}{25}$

$C(-1, -2)$ e $R = \frac{4}{5}$

3. a. Substituindo x por 1 e y por 4 na equação da circunferência, temos:

$(1 - 2)^2 + (4 + 6)^2 = 25 \Rightarrow 101 = 25$ (Falso!)

Logo, o ponto $A(1, 4)$ não pertence a λ.

Substituindo x por 6 e y por -3 na equação da circunferência, temos:

$(6 - 2)^2 + (-3 + 6)^2 = 25 \Rightarrow 25 = 25$ (Verdadeiro!)

Logo, o ponto $B(6, -3)$ pertence a λ.

b. Substituindo x por -1 e y por k na equação da circunferência, temos:

$(-1 - 2)^2 + (k + 6)^2 = 25 \Rightarrow 9 + (k + 6)^2 = 25$

$\therefore k = -2$ ou $k = -10$

Logo, o ponto $P(-1, k)$ pertence a λ se, e somente se, $k = -2$ ou $k = -10$.

4. a. A medida do lado do quadrado é o comprimento do segmento $\overline{DE}$: $DE = 5 - 1 = 4$

Logo, $F(5, 3 + 4)$ e $G(1, 3 + 4)$, ou seja, $F(5, 7)$ e $G(1, 7)$.

b. O centro C da circunferência é o ponto médio do segmento $\overline{DF}$: $C\left(\frac{1 + 5}{2}, \frac{3 + 7}{2}\right) = C(3, 5)$

A medida R do raio da circunferência é o comprimento do segmento $\overline{CD}$:

$R = CD = \sqrt{(3 - 1)^2 + (5 - 3)^2} \Rightarrow R = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

Assim, a equação reduzida da circunferência é:

$(x - 3)^2 + (y - 5)^2 = 8$

c. A abscissa do ponto P é a soma da abscissa do centro C com o raio da circunferência, isto é, $3 + 2\sqrt{2}$; e a ordenada de P é a mesma de C. Assim, concluímos que $P(3 + 2\sqrt{2}, 5)$.

d. A ordenada do ponto Q é a diferença entre a ordenada do centro C e a medida do raio da circunferência, isto é, $5 - \sqrt{2}$; e a abscissa de Q é a mesma de C. Assim, concluímos que $Q(3, 5 - 2\sqrt{2})$.

5. A circunferência λ_1 tem centro $C_1(8, 3)$ e passa pelo ponto $A(0, 9)$; logo, a medida R_1 de seu raio é o comprimento do segmento $\overline{C_1A}$:

$R_1 = C_1A = \sqrt{(8 - 0)^2 + (3 - 9)^2} \Rightarrow R_1 = \sqrt{100} = 10$

Assim, a equação reduzida de λ_1 é:

$(x - 8)^2 + (y - 3)^2 = 100$

O centro C_2 da circunferência λ_2 é o ponto médio do segmento $\overline{DF}$, com $D(-4, 0)$ e $F(10, 0)$; logo:

$C_2\left(\frac{-4 + 10}{2}, \frac{0 + 0}{2}\right) \Rightarrow C_2(3, 0)$

A medida R_2 do raio de λ_2 é o comprimento do segmento $\overline{C_2F}$: $R_2 = C_2F = 10 - 3 = 7$

Assim, a equação reduzida de λ_2 é: $(x - 3)^2 + y^2 = 49$

6. Como todo ponto da reta bissetriz dos quadrantes ímpares tem a abscissa igual a ordenada, podemos indicar o centro de λ por $C(k, k)$. Assim:

$CP = 5 \Rightarrow \sqrt{(k - 6)^2 + (k + 1)^2} = 5$

$\therefore k^2 - 5k + 6 = 0 \Rightarrow k = 2$ ou $k = 3$

Deduzimos, portanto, que há duas circunferências que satisfazem as condições do enunciado: uma de centro $C(2, 2)$ e outra de centro $C'(3, 3)$. Logo, a equação reduzida de λ pode ser $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 25$ ou $(x - 3)^2 + (y - 3)^2 = 25$.

7. a. A equação representa uma circunferência se, e somente se: $k - 4 > 0 \Rightarrow k > 4$

b. A equação representa um único ponto se, e somente se: $k - 4 = 0 \Rightarrow k = 4$

c. A equação representa o conjunto vazio se, e somente se: $k - 4 < 0 \Rightarrow k < 4$

8. O centro de λ é a intersecção das mediatrizes das cordas $\overline{EF}$ e $\overline{FG}$.

- Equação da mediatriz de $\overline{EF}$:

  $\sqrt{(x - 4)^2 + (y - 2)^2} = \sqrt{(x - 6)^2 + [y - (-2)]^2}$

  $\therefore x - 2y - 5 = 0$

- Equação da mediatriz de $\overline{FG}$:

  $\sqrt{(x - 6)^2 + [y - (-2)]^2} = \sqrt{[x - (-2)]^2 + [y - (-6)]^2}$

  $\therefore 2x + y = 0$

Assim, as coordenadas do centro de λ são soluções do sistema:

$$\begin{cases} x - 2y - 5 = 0 \\ 2x + y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 1 \text{ e } y = -2$$

Temos, então, $C(1, -2)$.

O raio r da circunferência é igual à distância entre C e E, ou seja:

$r = \sqrt{(1-4)^2 + (-2-2)^2} \therefore r = 5$

Logo, uma equação de λ é: $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 25$

9. alternativa **a**

Sendo R a medida do raio da órbita, temos:

$2 \cdot 3{,}14 \cdot R = 12.560 \cdot 5 \Rightarrow R = 10.000$

Logo, a equação da órbita é:

$(x-0)^2 + (y-0)^2 = 10.000^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 10^8$

11. a. Comparando a equação $x^2 + y^2 - 10x - 2y + 17 = 0$ com a equação geral

$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - R^2 = 0$, temos:

$$\begin{cases} a = 5 & (1) \\ b = 1 & (2) \\ a^2 + b^2 - R^2 = 17 & (3) \end{cases}$$

Substituindo (1) e (2) em (3), obtemos:

$5^2 + 1^2 - R^2 = 17$

$\therefore R = 3$ e $C(5, 1)$

b. Comparando a equação $x^2 + y^2 - 8x + 6y + 19 = 0$ com a equação geral

$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - R^2 = 0$, temos:

$$\begin{cases} a = 4 & (1) \\ b = -3 & (2) \\ a^2 + b^2 - R^2 = 19 & (3) \end{cases}$$

Substituindo (1) e (2) em (3), obtemos:

$4^2 + (-3)^2 - R^2 = 19$

$\therefore R = \sqrt{6}$ e $C(4, -3)$

c. Comparando a equação $x^2 + y^2 - 14x + 44 = 0$ com a equação geral

$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - R^2 = 0$, temos:

$$\begin{cases} a = 7 & (1) \\ b = 0 & (2) \\ a^2 + b^2 - R^2 = 44 & (3) \end{cases}$$

Substituindo (1) e (2) em (3), obtemos:

$7^2 + 0^2 - R^2 = 44$

$\therefore R = \sqrt{5}$ e $C(7, 0)$

d. Comparando a equação $x^2 + y^2 - 3 = 0$ com a equação geral $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - R^2 = 0$, temos:

$$\begin{cases} a = 0 & (1) \\ b = 0 & (2) \\ a^2 + b^2 - R^2 = -3 & (3) \end{cases}$$

Substituindo (1) e (2) em (3), obtemos:

$0^2 + 0^2 - R^2 = -3$

$\therefore R = \sqrt{3}$ e $C(0, 0)$

e. $5x^2 + 5y^2 - 10x + 10y - 10 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 + y^2 - 2x + 2y - 2 = 0$

Comparando a equação $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 2 = 0$ com a equação geral

$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - R^2 = 0$, temos:

$$\begin{cases} a = 1 & (1) \\ b = -1 & (2) \\ a^2 + b^2 - R^2 = -2 & (3) \end{cases}$$

Substituindo (1) e (2) em (3), obtemos:

$1^2 + (-1)^2 - R^2 = -2$

$\therefore R = 2$ e $C(1, -1)$

12. a. $x^2 + y^2 - 6x - 2y - 26 = 0$

$\therefore (x^2 - 6x + 9) + (y^2 - 2y + 1) = 26 + 9 + 1$

Assim, a equação reduzida da circunferência é:

$(x-3)^2 + (y-1)^2 = 36$

Logo, $C(3, 1)$ e $R = 6$.

b. $x^2 + y^2 + 4x - 8y + 19 = 0$

$\therefore (x^2 + 4x + 4) + (y^2 - 8y + 16) = -19 + 4 + 16$

Assim, a equação reduzida da circunferência é:

$(x+2)^2 + (y-4)^2 = 1$

Logo, $C(-2, 4)$ e $R = 1$.

c. $x^2 + y^2 + 10x + 23 = 0 \Rightarrow (x^2 + 10x) + y^2 = -23$

$\therefore (x^2 + 10x + 25) + y^2 = -23 + 25$

Assim, a equação reduzida da circunferência é:

$(x+5)^2 + y^2 = 2$

Logo, $C(-5, 0)$ e $R = \sqrt{2}$.

d. Trabalhando com os coeficientes de x^2 e y^2 unitários, temos:

$x^2 + y^2 - \frac{2x}{3} - y + \frac{1}{9} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(x^2 - \frac{2x}{3}\right) + (y^2 - y) = -\frac{1}{9}$

$\therefore \left(x^2 - 2x \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{9}\right) + \left(y^2 - 2y \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) =$

$= -\frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{4}$

Assim, a equação reduzida da circunferência é:

$\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

Logo, $C\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$ e $R = \frac{1}{2}$.

13. O centro C da circunferência pertence ao eixo das abscissas; logo, é da forma $C(c, 0)$. Como a circunferência passa pelos pontos $A(3, 1)$ e $B(6, 2)$, devemos ter:

$AC = BC \Rightarrow \sqrt{(c-3)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{(c-6)^2 + (0-2)^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow c^2 - 6c + 9 + 1 = c^2 - 12c + 36 + 4$

$\therefore 6c = 30 \Rightarrow c = 5$

Dessa maneira, o centro da circunferência que queremos é $C(5, 0)$ e seu raio R é a distância entre $A(3, 1)$ e $C(5, 0)$. Logo:

$R = \sqrt{(5-3)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$

Assim, uma equação dessa circunferência é:

$(x-5)^2 + (y-0)^2 = (\sqrt{5})^2 \Rightarrow x^2 - 10x + 25 + y^2 = 5$

$\therefore x^2 + y^2 - 10x + 20 = 0$

14. O centro C da circunferência λ é o ponto de intersecção entre a mediatriz de $\overline{AB}$ e a bissetriz dos quadrantes ímpares, cuja equação é: $x - y = 0$

Lembrando que todos os pontos $P(x, y)$ da mediatriz de um segmento $\overline{AB}$ equidistam de A e B, a equação da mediatriz de $\overline{AB}$ é dada por:

$d_{PA} = d_{PB} \Rightarrow \sqrt{(x-2)^2 + (y-8)^2} =$

$= \sqrt{(x-4)^2 + [y - (-2)]^2}$

$\therefore x^2 - 4x + 4 + y^2 - 16y + 64 =$

$= x^2 - 8x + 16 + y^2 + 4y + 4$

$\therefore x - 5y + 12 = 0$

Então, as coordenadas de C são a solução do sistema:

$$\begin{cases} x - 5y + 12 = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 3 \text{ e } y = 3$$

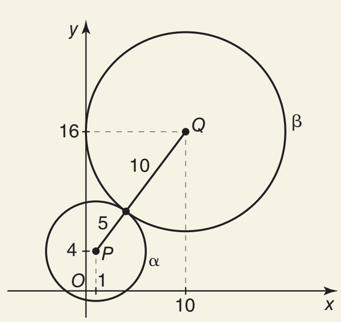
Dessa maneira, o centro da circunferência λ é $C(3, 3)$, e seu raio R é a distância entre $A(2, 8)$ e $C(3, 3)$. Então:

$R = \sqrt{(3-2)^2 + (3-8)^2} = \sqrt{1^2 + (-5)^2} = \sqrt{26}$

Logo, uma equação dessa circunferência é:
$(x-3)^2+(y-3)^2=(\sqrt{26})^2$
$\therefore x^2+y^2-6x-6y-8=0$

15. O centro C da circunferência λ é o ponto de intersecção entre a mediatriz de $\overline{AB}$ e a reta de equação $y=x-5$.
Lembrando que todos os pontos $P(x, y)$ da mediatriz de um segmento $\overline{AB}$ equidistam de A e B, a equação da mediatriz de $\overline{AB}$ é dada por:
$d_{PA}=d_{PB}\Rightarrow$
$\Rightarrow\sqrt{(x-1)^2+(y-3)^2}=\sqrt{(x-7)^2+[y-(-5)]^2}$
$\therefore x^2-2x+1+y^2-6y+9$
$\therefore 3x-4y-16=0$
Então, as coordenadas de C são a solução do sistema:
$$\begin{cases}3x-4y-16=0\\ y-x=-5\end{cases}\Rightarrow x=4 \text{ e } y=-1$$
Dessa maneira, o centro da circunferência λ é $C(4, -1)$, e seu raio R é a distância $A(1, 3)$ e $C(4, -1)$. Então:
$R=\sqrt{(4-1)^2+(-1-3)^2}=\sqrt{3^2+(-4)^2}=5$
Logo, uma equação dessa circunferência é:
$(x-4)^2+[y-(-1)]^2=5^2\Rightarrow$
$\Rightarrow x^2-8x+16+y^2+2y+1=25$
$\therefore x^2+y^2-8x+2y-8=0$

16. Calculando a distância entre P e Q, temos:
$PQ=\sqrt{(10-1)^2+(16-4)^2}=15$
Como a velocidade da onda β produzida em Q é o dobro da velocidade da onda α produzida em P, deduzimos que a distância percorrida por β é o dobro da distância percorrida por α, em um mesmo intervalo de tempo. Assim, no instante em que as ondas se tocaram, tínhamos a situação:



ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

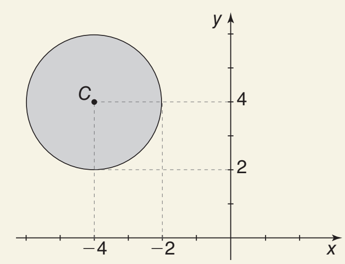
Logo, no instante em que as ondas se tocaram:
- a equação da onda α produzida em P é $(x+1)^2+(y-4)^2=25$, ou na forma geral, $x^2+y^2-2x-8y-8=0$.
- a equação da onda β produzida em Q é $(x-10)^2+(y-16)^2=100$, ou na forma geral, x^2+y^2- $-20x-32y+256=0$.

18. alternativa **e**
As equações das alternativas **a**, **b** e **c** não representam uma circunferência, pois em **a** e em **b** os coeficientes de x^2 e y^2 são diferentes e em **c** o coeficiente de xy é diferente de zero.
Na equação da alternativa **d**, temos:
$x^2-2x+1+y^2+4y+4=-6+1+4\Rightarrow$
$\Rightarrow(x-1)^2+(y+2)^2=-1$, que representa o conjunto vazio.
Na equação da alternativa **e**, temos:
$x^2-8x+16+y^2=-7+16\Rightarrow(x-4)^2+y^2=9$

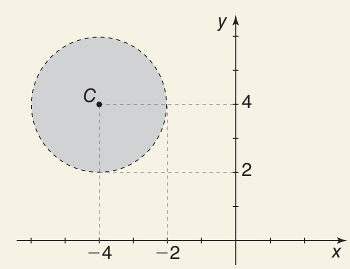
19. alternativa **e**
A equação $x^2+y^2+4x-6y+m=0$ satisfaz as condições (1) e (2) necessárias para que ela represente uma circunferência, isto é, os coeficientes de x^2 e y^2 são iguais e não nulos, e o coeficiente de xy é zero. Essas duas condições não bastam; além delas, deve ser obedecida a condição (3), isto é, na equação reduzida $(x-a)^2+(y-b)^2=k$, o número k deve ser positivo.
Escrevendo a equação na forma reduzida, temos:
$x^2+y^2+4x-6y+m=0\Rightarrow(x+2)^2+(y-3)^2=13-m$
Impondo a condição (3), temos: $13-m>0\Rightarrow m<13$

20. **a.** $(1-2)^2+(2-2)^2<5$; logo, P é interior à circunferência.
b. $1^2+5^2-8\cdot1+6>0$; logo, P é um ponto exterior à circunferência.
c. $4^2+(-2)^2-2\cdot4-6\cdot(-2)-24=0$; logo, P pertence à circunferência.

21. **a.** Os pontos $P(x, y)$ que satisfazem a inequação $(x+4)^2+(y-4)^2\leqslant4$ são todos os pontos do círculo de centro $C(-4, 4)$ e raio 2.

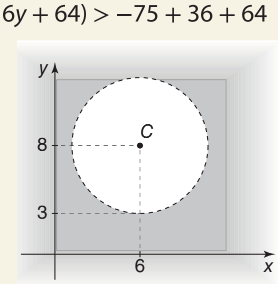


b. Os pontos que satisfazem a inequação $(x+4)^2+(y-4)^2<4$ são os pontos interiores à circunferência de centro $(-4, 4)$ e raio 2.

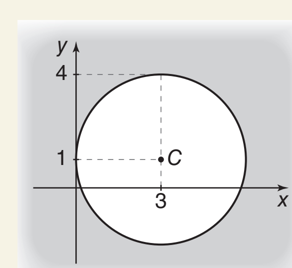


ILUSTRAÇÕES: NEIDE TOYOTA/ARQUIVO DA EDITORA

c. $x^2+y^2-12x-16y+75>0\Rightarrow$
$\Rightarrow(x^2-12x+36)+(y^2-16y+64)>-75+36+64$
$\therefore(x-6)^2+(y-8)^2>25$
Portanto, as soluções (x, y) da inequação $x^2+y^2-12x-16y+75>0$ são os pontos exteriores à circunferência de centro $C(6, 8)$ e raio 5.



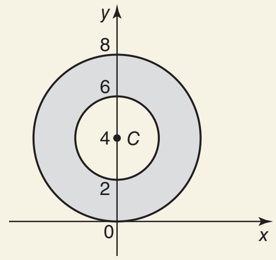
d. $x^2+y^2-6x-2y+1\geqslant0\Rightarrow$
$\Rightarrow(x^2-6x+9)+(y^2-2y+1)\geqslant-1+9+1$
$\therefore(x-3)^2+(y-1)^2\geqslant9$
Portanto, as soluções (x, y) da inequação $x^2+y^2-6x-2y+1\geqslant0$ são os pontos que pertencem à circunferência de centro $C(3, 1)$ e raio 3 e os pontos exteriores a ela.



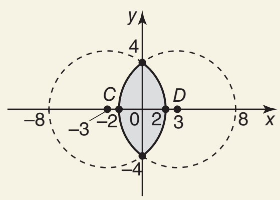
ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

ILUSTRAÇÕES: ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

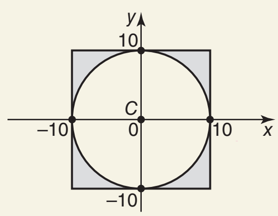
22. a. A representação gráfica dos pontos (x, y) é a intersecção dos gráficos das inequações que compõem o sistema. Essa representação é a coroa circular a seguir, de centro C.



b. A representação gráfica dos pontos (x, y) é a intersecção dos gráficos das inequações que compõem o sistema. Essa representação é a região colorida a seguir, em que C e D são os centros das circunferências que contêm os arcos que limitam a região.



c. A representação gráfica dos pontos (x, y) é a intersecção dos gráficos das inequações que compõem o sistema. Essa representação é a região colorida a seguir, em que C é o centro da circunferência que limita a região.



23. alternativa **d**

$x^2 + y^2 - 2x - 4y - 31 \leqslant 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 - 2x + y^2 - 4y \leqslant 31 \Rightarrow$

$(x^2 - 2x + 1) + (y^2 - 4y + 4) \leqslant 31 + 1 + 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x - 1)^2 + (y - 2)^2 \leqslant 36$

Os pontos $P(x, y)$ que satisfazem a inequação $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 \leqslant 36$ são todos os pontos do círculo de centro $R(1, 2)$ e raio 6, ou seja, a distância do estabelecimento até a rádio comunitária deve ser menor ou igual ao raio de cobertura do sinal emitido. Calculando as distâncias dos estabelecimentos até a rádio:

$d_{AR} = \sqrt{20} \Rightarrow d_{AR} < 6$

$d_{BR} = \sqrt{17} \Rightarrow d_{BR} < 6$

$d_{CR} = \sqrt{9} \Rightarrow d_{CR} < 6$

$d_{DR} = \sqrt{50} \Rightarrow d_{DR} > 6$

Concluímos, então, que os estabelecimentos que conseguem ouvir a rádio são apenas A, B e C.

24. a. O centro C e o raio R de λ são: $C(1, 2)$ e $R = 2$

$$d_{Cs} = \frac{|3 \cdot 1 - 4 \cdot 2 + 15|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = 2$$

$d_{Cs} = R$; logo, s é tangente a λ.

b. O centro C e o raio R de λ são: $C(-1, 4)$ e $R = 3$

$$d_{Cs} = \frac{|2 \cdot (-1) - 1 \cdot 4 + 1|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \sqrt{5}$$

$d_{Cs} < R$; logo, s é secante a λ.

c. O centro C e o raio R de λ são: $C(-1, 2)$ e $R = 1$

$$d_{Cs} = \frac{|4 \cdot (-1) + 3 \cdot 2 + 8|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = 2$$

$d_{Cs} > R$; logo, s é exterior a λ.

25. a. $s: \begin{cases} (0, 4) \\ m_s = \dfrac{4 - 0}{0 + 2} = 2 \end{cases} \Rightarrow y - 4 = 2(x - 0)$

Logo, uma equação geral da reta s é: $2x - y + 4 = 0$

b. O raio R da circunferência é a distância entre C e s:

$$R = d_{Cs} = \frac{|2 \cdot 1 - 1 + 4|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

Logo, a equação reduzida da circunferência é:

$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 5$

26. b. $x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 5 \therefore C(2, 1)$ e $R = \sqrt{5}$

c. Como a reta tangente t é perpendicular ao raio $\overline{CB}$ no ponto B de tangência, deduzimos que o coeficiente angular m_t da reta t é o oposto do inverso do coeficiente angular m_{BC} da reta $\overleftrightarrow{BC}$.

$$m_{BC} = \frac{2 - 1}{4 - 2} = \frac{1}{2} \Rightarrow m_t = -\frac{1}{m_{BC}} = -2$$

Na equação fundamental da reta $y - y_0 = m(x - x_0)$, substituímos x_0, y_0 e m por 4, 2 e -2, respectivamente.

$y - 2 = -2(x - 4) \Rightarrow 2x + y - 10 = 0$

d. Todo ponto sobre o eixo Ox tem ordenada zero. Substituindo x por zero na equação da reta t, obtemos:

$2x + 0 - 10 = 0 \Rightarrow x = 5 \therefore A(5, 0)$

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 4 + 5 - 10 - 4 = -5$$

$$S = \frac{|D|}{2} \Rightarrow S = \frac{|-5|}{2} = 2{,}5$$

27. Uma equação geral de qualquer reta g, não vertical, que passa pela origem $O(0, 0)$ tem a forma $mx - y = 0$, com $m \in \mathbb{R}$.

A reta g será tangente à circunferência λ se, e somente se, a distância entre C e g for igual ao raio de λ, isto é:

$$\frac{|m \cdot \sqrt{2} - 0|}{\sqrt{m^2 + 1^2}} = 1 \Rightarrow \sqrt{2}\, m = \sqrt{m^2 + 1}$$

$$|\sqrt{2}\, m|^2 = \left(\sqrt{m^2 + 1}\right)^2 \Rightarrow m^2 = 1 \Rightarrow m = \pm 1$$

a. A reta s que passa por $O(0, 0)$, tangenciando λ no primeiro quadrante, tem coeficiente angular m_s positivo; logo, $m_s = 1$. Temos, portanto, a equação da reta s: $y = x$

b. A reta t que passa por $O(0, 0)$, tangenciando λ no quarto quadrante, tem coeficiente angular m_t negativo; logo, $m_t = -1$. Temos, portanto, a equação da reta t: $y = -x$

c. Qualquer reta u que passa por $O(0, 0)$ e é secante a λ tem coeficiente angular m_u obedecendo a condição: $-1 < m_u < 1$

d. Qualquer reta v que passa por $O(0, 0)$ e é exterior a λ tem coeficiente angular m_v obedecendo a condição: $m_v < -1$ ou $m_v > 1$

28. A reta r passa pelos pontos $(-2, 0)$ e $(0, 4)$; calculando seu coeficiente angular, obtemos $m = 2$.

Como todas as retas r' do plano cartesiano, paralelas a r, têm coeficiente angular 2, suas equações são da forma: $y = 2x + k$, com $k \in \mathbb{R}$, ou, na forma geral, $2x - y + k = 0$.

O raio da circunferência λ mede $PC = 4$.

Como as retas r' são tangentes a λ, a distância $d_{Cr'}$ é igual ao raio 4 de λ.

Assim: $d_{Cr'} = 4 \Rightarrow \dfrac{|2 \cdot 8 - 6 + k|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = 4$

$\therefore k = 4\sqrt{5} - 10$ ou $k = -4\sqrt{5} - 10$

Logo, as equações são $2x - y + 4\sqrt{5} - 10 = 0$ e $2x - y - 4\sqrt{5} - 10 = 0$.

29. a. $\begin{cases} y = 6 - x & (1) \\ (x + 1)^2 + y^2 = 25 & (2) \end{cases}$

Substituindo (1) em (2), obtemos:

$(x + 1)^2 + (6 - x)^2 = 25 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 + 2x + 1 + 36 - 12x + x^2 - 25 = 0$

$\therefore x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow x = 2$ ou $x = 3$

Para $x = 2$, a equação (1) nos dá $y = 4$.

Para $x = 3$, a equação (2) nos dá $y = 3$.

Logo: $s \cap \lambda = \{(2, 4), (3, 3)\}$

b. O comprimento dessa corda é a distância entre os pontos $A(2, 4)$ e $B(3, 3)$:

$AB = \sqrt{(3 - 2)^2 + (3 - 4)^2} = \sqrt{2}$

30. a. $\begin{cases} x = 1 - y & (1) \\ x^2 + y^2 - 2x - 4y + 3 = 0 & (2) \end{cases}$

Substituindo (1) em (2), obtemos:

$(1 - y)^2 + y^2 - 2(1 - y) - 4y + 3 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 1 - 2y + y^2 + y^2 - 2 + 2y - 4y + 3 = 0$

$\therefore y^2 - 2y + 1 = 0 \Rightarrow y = 1$

Para $y = 1$, a equação (1) nos dá $x = 0$.

Logo: $s \cap \lambda = \{(0, 1)\}$

b. $\begin{cases} x = 4 - 3y & (1) \\ x^2 + y^2 - 8x - 6y + 22 = 0 & (2) \end{cases}$

Substituindo (1) em (2), obtemos:

$(4 - 3y)^2 + y^2 - 8(4 - 3y) - 6y + 22 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 16 - 24y + 9y^2 + y^2 - 32 + 24y - 6y + 22 = 0$

$\therefore 5y^2 - 3y + 3 = 0$

Observamos que $\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 3 = -51$, isto é, $\Delta < 0$; assim, concluímos que $s \cap \lambda = \varnothing$.

31. a. A equação do eixo das abscissas é $y = 0$; logo, a intersecção desse eixo com a circunferência λ é o conjunto solução do sistema:

$\begin{cases} y = 0 & (1) \\ x^2 - 8x + y^2 - 9 = 0 & (2) \end{cases}$

Substituindo (1) em (2), obtemos:

$x^2 - 8x - 9 = 0 \Rightarrow x = -1$ ou $x = 9$

Logo, $(-1, 0)$ e $(9, 0)$.

b. A equação do eixo das ordenadas é $x = 0$; logo, a intersecção desse eixo com a circunferência λ é o conjunto solução do sistema:

$\begin{cases} x = 0 & (1) \\ x^2 - 8x + y^2 - 9 = 0 & (2) \end{cases}$

Substituindo (1) em (2), obtemos:

$y^2 - 9 = 0 \Rightarrow y = 3$ ou $y = -3$

Logo, $(0, 3)$ e $(0, -3)$.

c. A forma reduzida da equação da circunferência λ é $(x - 4)^2 + y^2 = 25$; logo, a abscissa do centro de λ é 4. Assim, deduzimos que a reta vertical que passa pelo centro de λ tem equação $x = 4$. A intersecção dessa reta com λ é o conjunto solução do sistema:

$\begin{cases} x = 4 & (1) \\ x^2 - 8x + y^2 - 9 = 0 & (2) \end{cases}$

Substituindo (1) em (2), obtemos:

$y^2 - 25 = 0 \Rightarrow y = 5$ ou $y = -5$

Logo, $(4, 5)$ e $(4, -5)$.

32. Uma reta r de equação $y = k$, com $k \in \mathbb{R}$, é horizontal e passa pelo ponto $(0, k)$.

a. r é exterior a λ se, e somente, $k < -2$ ou $k > 2$.

b. r é tangente a λ se, e somente se, $k = -2$ ou $k = 2$.

c. r é secante a λ se, e somente, $-2 < k < 2$.

33. a. Como a reta s passa pelo ponto $P(1, 0)$ e tem 45° de inclinação, então s tem coeficiente angular 1; logo, a reta s é do tipo $y = 1 \cdot x + b$. Assim: $0 = 1 + b \Rightarrow b = -1$

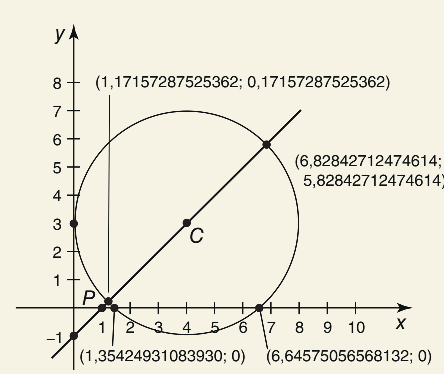
O gráfico que representa a reta s: $y = x - 1$ passa pelo ponto $(1, 0)$ e possui inclinação 45°.

b. Para que a reta tangencie o eixo Oy no ponto $(0, 3)$ e o centro $C(x_c, x_c - 1)$ pertença à reta s, devemos ter centro $(x_c, 3)$; logo: $x - 1 = 3 \Rightarrow x = 4$

Portanto, a circunferência λ tem centro $(4, 3)$, raio 4 e equação $(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 16$.

c. Crie a reta de equação $y = 0$. Em seguida, clique na aba "Dois", em "Interseções", e, selecionando equações da reta $y = 0$ e da circunferência $(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 16$, obtemos os pontos (1.35424931083930; 0) e (6.64575056568132; 0).

d. Clicando na aba "Dois", em "Interseções", e, selecionando equações da reta $y = x - 1$ e da circunferência $(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 16$, obtemos os pontos (1,17157287525362; 0,17157287525362) e (6,82842712474614; 5,82842712474614).



FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

34. a. A reta s passa pelos pontos $(-3, 0)$ e $(0, 6)$; logo, seu coeficiente angular m_s é: $m_s = \dfrac{6 - 0}{0 - (-3)} = 2$

Assim, $y = 2x + q$, com $q \in \mathbb{R}$.

b. Discutindo o sistema formado pelas equações de s' e λ, temos:

$$\begin{cases} y = 2x + q & (1) \\ x^2 + y^2 = 4 & (2) \end{cases}$$ Substituímos (1) em (2), obtendo: $5x^2 + 4qx + q^2 - 4 = 0$

Para que a reta s seja tangente a λ, o discriminante dessa equação polinomial do 2º grau, na variável x, deve ser 0: $\Delta = 0 \Rightarrow (4q)^2 - 4 \cdot 5 \cdot (q^2 - 4) = 0 \therefore q = \pm 2\sqrt{5}$

Assim, no plano cartesiano, uma reta paralela a s é tangente a λ se, e somente se, seu coeficiente linear for: $2\sqrt{5}$ ou $-2\sqrt{5}$

c. Para que a reta s seja secante a λ, o discriminante da equação polinomial do 2º grau, $5x^2 + 4qx + q^2 - 4 = 0$, na variável x, deve ser positivo: $\Delta > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (4q)^2 - 4 \cdot 5 \cdot (q^2 - 4) > 0 \therefore -2\sqrt{5} < q < 2\sqrt{5}$

Assim, no plano cartesiano, uma reta paralela a s é secante a λ se, e somente se, seu coeficiente linear obedecer a condição: $-2\sqrt{5} < q < 2\sqrt{5}$

d. Para que a reta s seja exterior a λ, o discriminante da equação polinomial do 2º grau, $5x^2 + 4qx + q^2 - 4 = 0$, na variável x, deve ser negativo: $\Delta < 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (4q)^2 - 4 \cdot 5 \cdot (q^2 - 4) < 0 \therefore q < -2\sqrt{5}$ ou $q > 2\sqrt{5}$

Assim, concluímos que, no plano cartesiano, uma reta paralela a s é exterior a λ se, e somente se, seu coeficiente linear obedecer a condição: $q < -2\sqrt{5}$ ou $q > 2\sqrt{5}$

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

1. Todo ponto da bissetriz dos quadrantes ímpares tem abscissa igual à ordenada; logo, o centro C é da forma $C(k, k)$. Assim: $CA = 5 \Rightarrow \sqrt{(k-6)^2 + (k-(-1))^2} = 5$

$\therefore (k-6)^2 + (k+1)^2 = 25 \Rightarrow$

$\Rightarrow k^2 - 12k + 36 + k^2 + 2k + 1 - 25 = 0$

$\therefore 2k^2 - 10k + 12 = 0 \Rightarrow k^2 - 5k + 6 = 0 \therefore k = 2$ ou $k = 3$

Logo, há duas circunferências possíveis: uma de centro $C(2, 2)$ e raio $R = 5$, cuja equação reduzida é $(x-2)^2 - (y-2)^2 = 25$, e outra de centro $C(3, 3)$ e raio $R = 5$, cuja equação reduzida é $(x-3)^2 - (y-3)^2 = 25$.

2. a. $\begin{cases} x = 3\cos t \\ x = 3\,\text{sen}\, t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{3} = \cos t \\ \dfrac{y}{3} = \text{sen}\, t \end{cases}$

Quadrando ambos os membros de cada equação do sistema, e adicionando membro a membro, temos:

$$\left(\frac{x}{3}\right)^2 + \left(\frac{y}{3}\right)^2 = \cos^2 t + \text{sen}^2 t \Rightarrow \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{9} = 1$$

$\therefore x^2 + y^2 = 9$

b. Pelas equações paramétricas, observamos que:

- para $t = 0$, temos $x = 3$ e $y = 0$; logo, no início da marcação de tempo, o elétron estava no ponto (3, 0).
- para $0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$, temos que x como função de t é decrescente e y como função de t é crescente; portanto, o elétron gira no sentido anti-horário; logo, para $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$, o elétron percorre os quadrantes na ordem I, II, III e IV. Assim, ele cruza a bissetriz dos quadrantes ímpares pela primeira vez no primeiro quadrante.

Nos pontos comuns à trajetória do elétron e à bissetriz dos quadrantes ímpares, temos $x = y$, de onde deduzimos, das equações paramétricas, que:

$3\cos t = 3\,\text{sen}\, t \Rightarrow \text{tg}\, t = 1 \therefore t = \frac{\pi}{4} + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}_+$

Note que k não pode ser negativo, pois t representa o tempo. Assim, para $k = 0$, obtemos $t = \frac{\pi}{4}$.

3. Seja t o tempo em hora. Como $R = 10$ km, temos:

$1.200 = \dfrac{10}{t} \Rightarrow t = \dfrac{10}{1.200} \therefore t = \dfrac{1}{120}$ h $= 30$ s

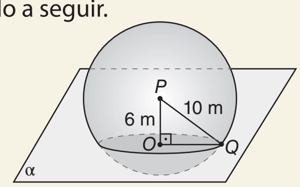
4. A região do espaço que está ao alcance do sensor é uma esfera de centro P e raio 10 m.

Associando-se ao plano α um sistema cartesiano xOy, a região do plano que está ao alcance do sensor é um círculo cujo centro é $O(0, 0)$ e cujo raio r é a medida do segmento $\overline{OQ}$, representado a seguir.

Assim:

$r^2 = 10^2 - 6^2 \Rightarrow r = 8$

Portanto, $x^2 + y^2 \leqslant 64$.



FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

5. Temos centro $C(1, -3)$ e raio $R = \sqrt{13}$.

Indicando por s uma reta de equação $3x + 2y + k = 0$, s é tangente a λ se, e somente se, $d_{Cs} = R$:

$$\frac{|3 \cdot 1 + 2 \cdot (-3) + k|}{\sqrt{3^2 + 2^2}} = \sqrt{13}$$

$\dfrac{|k-3|}{\sqrt{13}} = \sqrt{13} \Rightarrow |k-3| = 13 \Rightarrow k - 3 = 13$ ou $k - 3 = -13$

$\therefore k = 16$ ou $k = -10$

Logo, as retas do feixe tangentes a λ são:

$(s)\ 3x + 2y + 16 = 0$ e $(s')\ 3x + 2y - 10 = 0$

6. a. $s \cap \lambda$ é o conjunto solução do sistema:

$$\begin{cases} y = x - 2 & (1) \\ x^2 + (y-3)^2 = 17 & (2) \end{cases}$$

Resolvendo, obtemos: $x^2 - 5x + 4 = 0$

Resolvendo essa equação, obtemos: $x = 1$ ou $x = 4$

- Para $x = 1$, temos da equação (1): $y = -1$
- Para $x = 4$, temos da equação (1): $y = 2$

Logo, $s \cap \lambda = \{(1, -1), (4, 2)\}$.

7. a. A trajetória do asteroide está contida em uma reta horizontal que passa pelo ponto (0; 3,4); logo, uma equação dessa trajetória é $y = 3{,}4$.

b. A trajetória do satélite é uma circunferência de raio 4,2 cujo centro é a origem $O(0, 0)$; logo, uma equação dessa trajetória é $(x-0)^2 + (y-0)^2 = (4{,}2)^2$, ou seja, $x^2 + y^2 = 17{,}64$.

c. Os pontos P_1 e P_2 são as soluções do sistema:

$$\begin{cases} y = 3{,}4 & (1) \\ x^2 + y^2 = 17{,}64 & (2) \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ ($x \approx -2{,}5$ e $y = 3{,}4$) ou ($x \approx 2{,}5$ e $y = 3{,}4$)

Logo, com abscissas aproximadas, os pontos P_1 e P_2 são: $P_1(2{,}5; 3{,}4)$ e $P_2(-2{,}5; 3{,}4)$

d. A distância d, na unidade u, entre P_1 e P_2 é, aproximadamente, $|2{,}5 - (-2{,}5)|$, ou seja, $d \approx 5$ u. Como 1 u = 10.000 km, temos $d \geqslant 50.000$ km. Assim, o tempo t, em segundo, que o asteroide levou para percorrer a distância P_1P_2 é dado por: $50.000 \approx 7{,}8t \Rightarrow t \approx 6.410$
Logo, o asteroide percorreu a distância P_1P_2 em 6.410 s, aproximadamente, ou 1 h 47 min.

REFLEXÃO

Página 195: Para determinar a posição relativa de duas circunferências, λ_1 e λ_2, a partir de suas equações, basta comparar a distância entre os centros das circunferências com seus raios, conforme o resumo a seguir.

- λ_1 e λ_2 são **exteriores** se, e somente se, $d_{C_1C_2} > R_1 + R_2$.
- λ_1 e λ_2 são **tangentes exteriormente** se, e somente se, $d_{C_1C_2} = R_1 + R_2$.
- λ_1 e λ_2 são **tangentes interiormente** se, e somente se, $d_{C_1C_2} = |R_1 - R_2|$.
- λ_1 e λ_2 são **secantes** se, e somente se, $|R_1 - R_2| < d_{C_1C_2} < R_1 + R_2$.
- Supondo que as circunferências tenham raios de medidas diferentes, a de menor raio será **interior** à outra se, e somente se, $d_{C_1C_2} < |R_1 - R_2|$.
- As circunferências **coincidem** se, e somente se, $d_{C_1C_2} = 0$ e $R_1 = R_2$.

VERIFIQUE O QUE APRENDEU NO CAPÍTULO 7

1. A circunferência tem centro $C(4, -4)$ e passa por $P(4, 0)$.
$R = d_{CP} = \sqrt{(4-4)^2 + (-4-0)^2} = \sqrt{0+16} = 4$
Logo, $(x-4)^2 + (y+4)^2 = 16$.

2. Um ponto genérico da reta r é obtido atribuindo-se um valor genérico k para x na equação $y = x + 2$.
Para $x = k$, tem-se $y = k + 2$ e, portanto, o centro C da circunferência é da forma $C(k, k+2)$.
Como A e B pertencem à circunferência λ de centro C, devemos ter $AC = BC$, ou seja:
$\sqrt{(k-4)^2 + (k+2-2)^2} = \sqrt{(k-2)^2 + (k+2-6)^2}$
$\cancel{(k-4)^2} + k^2 = (k-2)^2 + \cancel{(k-4)^2} \Rightarrow k^2 = (k-2)^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow k^2 = k^2 - 4k + 4 \therefore k = 1$
Assim, o centro de λ é o ponto $C(1, 3)$ e o raio R é a distância entre C e A (ou entre C e B):
$R = CA = \sqrt{(4-1))^2 + (2-3)^2} = \sqrt{10}$
Logo: $\lambda\begin{cases} C(1,3) \\ R = \sqrt{10} \end{cases} \Rightarrow (x-1)^2 + (y-3)^2 = (\sqrt{10})^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow x^2 + y^2 - 2x - 6y = 0$

3. alternativa **a**
Os pontos A e B são as soluções do sistema:
$\begin{cases} x + y = 0 \\ x^2 + y^2 - 4x = 0 \end{cases} \Rightarrow (x = 0 \text{ e } y = 0) \text{ ou } (x = 2 \text{ e } y = -2)$
Como a abscissa de A é menor que a de B, temos que $A(0, 0)$ e $B(2, -2)$. Assim, devemos obter a equação da reta t tangente a λ no ponto $B(2, -2)$. Para isso, determinamos o centro C de $\lambda : x^2 + y^2 - 4x = 0 \Rightarrow (x^2 - 4x + 4) + y^2 = 4$
$\therefore (x-2)^2 + y^2 = 4$
Logo, $C(2, 0)$. Observamos, portanto, que a reta $\overleftrightarrow{CB}$ é vertical, pois C e B têm abscissas iguais. Como a reta t é perpendicular a $\overleftrightarrow{CB}$, deduzimos que a reta t é horizontal. Por ser horizontal e passar por $B(2, -2)$, a equação de t é $y = -2$.

CAPÍTULO 8 As cônicas: elipse, hipérbole e parábola

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. a. A medida do semieixo menor b e a semidistância focal c são 3 e 4, respectivamente. Assim, temos que a medida a do semieixo maior é dada por: $a^2 = 3^2 + 4^2 \Rightarrow a = 5$
$\therefore 2a = 10$

b. Como o centro C da elipse é o ponto médio do eixo maior $\overline{A_1A_2}$, deduzimos que $A_1(3, 0)$ e $A_2(13, 0)$.

c. Como o centro C da elipse é o ponto médio do eixo menor $\overline{B_1B_2}$, deduzimos que $B_1B_2 = 6$.

d. Como o centro C da elipse é o ponto médio do eixo menor $\overline{B_1B_2}$, deduzimos que $B_2(8, -3)$.

e. A excentricidade e da elipse é dada por: $e = \frac{c}{a}$; logo, $e = \frac{4}{5} = 0{,}8$.

f. Todo ponto P da elipse satisfaz a condição:
$PF_1 + PF_2 = 2a$, em que F_1 e F_2 são os focos e $2a$ é a medida do eixo maior. Assim, para mostrar que o ponto $P\left(4, \frac{9}{5}\right)$ pertence a $\mathscr{E}$, devemos constatar a condição: $PF_1 + PF_2 = 10$. Calculando $PF_1 + PF_2$, temos:
$PF_1 + PF_2 =$
$= \sqrt{(4-4)^2 + \left(\frac{9}{5} - 0\right)^2} + \sqrt{(4-12)^2 + \left(\frac{9}{5} - 0\right)^2} = 10$

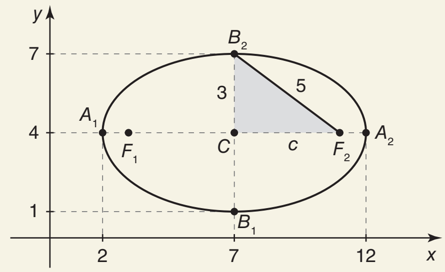
2. A medida do eixo maior é dada por:
$A_1A_2 = A_1F_1 + A_2F_1 =$
$= 1{,}47 \cdot 10^8 \text{ km} + 1{,}53 \cdot 10^8 \text{ km} = 3 \cdot 10^8 \text{ km}$
A distância focal é dada por:
$F_1F_2 = A_2F_1 - A_2F_2 = 1{,}53 \cdot 10^8 \text{ km} - 1{,}47 \cdot 10^8 \text{ km} =$
$= 0{,}06 \cdot 10^8 \text{ km} = 6 \cdot 10^6 \text{ km}$

4. a. O centro da elipse é o ponto $C(7, 4)$; a medida do semieixo maior (metade do eixo maior) é $a = 7 - 2 = 5$; a medida do semieixo menor (metade do eixo menor) é $b = 4 - 1 = 3$; o eixo maior é paralelo ao eixo das abscissas. Logo, a equação reduzida da elipse é:
$$\frac{(x-7)^2}{25} + \frac{(y-4)^2}{9} = 1$$

b. O centro da elipse é $C(7, -4)$, o semieixo menor mede $b = 7 - 5 = 2$ e o semieixo maior mede $a = -1 - (-4) = 3$. Além disso, o eixo maior é paralelo ao eixo Oy; logo, a equação reduzida da elipse é:
$$\frac{(x-7)^2}{2^2} + \frac{[y-(-4)]^2}{3^2} = 1 \Rightarrow \frac{(x-7)^2}{4} + \frac{(y+4)^2}{9} = 1$$

c. O centro da elipse é $C(0, 0)$, o semieixo menor mede $b = 6$ e o semieixo maior mede $a = 7$. Além disso, o eixo maior é paralelo ao eixo Oy; logo, a equação reduzida da elipse é:
$$\frac{(x-0)^2}{6^2} + \frac{(y-0)^2}{7^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{49} = 1$$

5. Sejam F_1 e F_2 os focos da elipse, com F_1 entre A_1 e C:



ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

Calculando a semidistância focal c, temos:

$c^2 + 3^2 = 5^2 \Rightarrow c = 4$

Logo: $e = \dfrac{c}{a} \Rightarrow e = \dfrac{4}{5}$; os focos são: $F_1(7 - 4, 4)$ e $F_2(7 + 4, 4)$, ou seja, $F_1(3, 4)$ e $F_2(11, 4)$.

6. a. $x^2 + 9y^2 - 4x + 18y + 4 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x^2 - 4x) + (9y^2 + 18y) = -4 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x^2 - 4x + 4) + 9(y^2 + 2y + 1) = -4 + 4 + 9$

$\therefore (x - 2)^2 + 9(y + 1)^2 = 9$

Dividindo por 9 ambos os membros dessa equação:

$$\frac{(x-2)^2}{9} + \frac{(y+1)^2}{1} = 1$$

b. Do item **a**, temos que a medida a do semieixo maior é: $a = 3$; e a medida b do semieixo menor é: $b = 1$.

De $a^2 = b^2 + c^2$, temos: $3^2 = 1^2 + c^2 \Rightarrow c = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

Logo, $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

c. Pela definição de elipse, temos que $AF_1 + AF_2 = 2a$ e $BF_1 + BF_2 = 2a$, em que $2a$ é a medida do eixo maior da elipse. Como, nesse caso, $2a = 6$, concluímos que o perímetro do quadrilátero AF_1BF_2 é 12.

Nota: O quadrilátero não precisa ser, necessariamente, convexo.

8. a. $2a = |TF_1 - TF_2|$, ou seja:

$$2a = \left|\sqrt{(6-0)^2 + (9-1)^2} + \sqrt{(6-0)^2 + (9-9)^2}\right| = 4$$

b. A distância focal $2c$ é o comprimento do segmento $\overline{F_1F_2}$; logo, $2c = 8$.

c. $c^2 = a^2 + b^2$; logo, $4^2 = 2^2 + b^2 \Rightarrow b = 2\sqrt{3}$

$\therefore 2b = 4\sqrt{3}$

d. $e = \dfrac{c}{a}$; logo, $e = \dfrac{4}{2} = 2$.

e. O centro C de $\mathscr{H}$ é o ponto médio do segmento $\overline{F_1F_2}$; logo, $C(0, 5)$.

h. Na assíntota $\overleftrightarrow{MP}$, temos $M(-2\sqrt{3}, 7)$ e $P(2\sqrt{3}, 3)$; logo, o coeficiente angular m dessa assíntota é dado por:

$$m = \frac{7 - 3}{-2\sqrt{3} - 2\sqrt{3}} = \frac{4}{-4\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Assim, a equação de $\overleftrightarrow{MP}$ é:

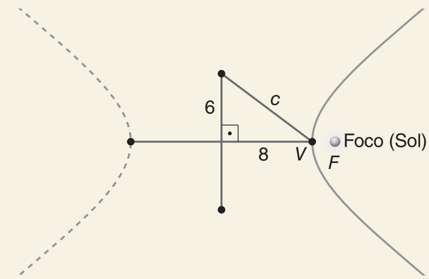
$y - 3 = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}(x - 2\sqrt{3})$, ou seja, $y = -\dfrac{\sqrt{3}\,x}{3} + 5$.

Analogamente, obtemos a equação da assíntota $\overleftrightarrow{NQ}$:

$y = \dfrac{\sqrt{3}\,x}{3} + 5$

9. A menor distância d entre o Sol e o cometa ocorre quando este atinge o vértice do ramo de hipérbole. Assim, a menor distância d é a diferença $c - a$, em que c é a semidistância focal e a é a medida do semieixo real.

Esquematizamos essa situação do seguinte modo:



NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Pelo teorema de Pitágoras, obtemos: $c = 10$

Logo, $d = 10 - 8 = 2$, ou seja, 2 ua.

10. a. $a = A_1C = |-3 - 0| = 3$ e $c = F_1C = |-5 - 0| = 5$

$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow 5^2 = 3^2 + b^2 \therefore b = 4$

Logo, como o eixo real é paralelo ao eixo x, a equação reduzida da hipérbole é:

$$\frac{(x-0)^2}{3^2} - \frac{(y-2)^2}{4^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{9} - \frac{(y-2)^2}{16} = 1$$

b. O centro da hipérbole é: $C\left(2, \dfrac{0+6}{2}\right) = C(2, 3)$

$a = A_1C = |1 - 3| = 2$ e $c = F_1C = |0 - 3| = 3$

$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow 3^2 = 2^2 + b^2 \therefore b = \sqrt{5}$

Logo, como o eixo real é paralelo ao eixo y, a equação reduzida da hipérbole é:

$$\frac{(y-3)^2}{2^2} - \frac{(x-2)^2}{(\sqrt{5})^2} = 1 \Rightarrow \frac{(y-3)^2}{4} - \frac{(x-2)^2}{5} = 1$$

11. b. Os vértices A_1 e A_2 são os pontos médios dos lados $\overline{MQ}$ e $\overline{NP}$ do retângulo referência da hipérbole. Assim: $A_1(-2, -1)$ e $A_2(6, -1)$. O centro C é o ponto médio do segmento $\overline{A_1A_2}$; logo, $C(2, -1)$.

Para determinar os focos F_1 e F_2, observamos que a medida a do semieixo real da hipérbole é 4 e que a medida b do semieixo imaginário é 3. Assim, a semidistância focal c pode ser calculada por: $c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow c^2 = 4^2 + 3^2 \therefore c = 5$

Assim, temos: $F_1(2 - 5, -1)$ e $F_2(2 + 5, -1)$, ou seja, $F_1(-3, -1)$ e $F_2(7, -1)$

c. O centro da hipérbole é $C(2, -1)$, as medidas do semieixo real e do semieixo imaginário são 4 e 3, respectivamente, e o eixo real é paralelo ao eixo das abscissas. Essas informações nos permitem concluir que a equação reduzida da hipérbole é: $\dfrac{(x-2)^2}{16} - \dfrac{(y+1)^2}{9} = 1$

d. As assíntotas de $\mathscr{H}$ são as retas que contêm as diagonais do retângulo referência. O coeficiente angular m_r da reta r que passa por $M(-2, 2)$ e $P(6, -4)$ é dado por:

$m_r = \dfrac{2 - (-4)}{-2 - 6} = -\dfrac{3}{4}$. Assim, a equação de r é:

$y - 2 = -\dfrac{3}{4}(x + 2)$, ou seja, $3x + 4y - 2 = 0$.

Analogamente, obtemos a equação da assíntota s, que passa pelos pontos $N(6, 2)$ e $Q(-2, -4)$: $3x - 4y - 10 = 0$.

12. **b.** O centro da hipérbole é $C(0, 0)$, as medidas do semieixo real e do semieixo imaginário são iguais a 3, e o eixo real é paralelo ao eixo das ordenadas. Assim, a equação reduzida da hipérbole é: $\dfrac{y^2}{9} - \dfrac{x^2}{9} = 1$

c. As assíntotas da hipérbole nessa nova posição serão os eixos Ox e Oy, cujas equações são: $y = 0$ e $x = 0$, respectivamente.

13. **a.** Agrupamos os termos em x e os termos em y e isolamos o termo independente em um dos membros da igualdade. Em seguida, fatoramos cada agrupamento, pondo em evidência os coeficientes de y^2 e de x^2. Depois, completamos os quadrados perfeitos nas expressões entre parênteses, adicionando um mesmo número a ambos os membros da igualdade:

$4(x^2 - 2x + 1) - 9(y^2 - 2y + 1) = 41 + 4 - 9 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4(x - 1)^2 - 9(y - 1)^2 = 36$

$\therefore \dfrac{(x - 1)^2}{9} - \dfrac{(y - 1)^2}{4} = 1$

c. A assíntota $\overleftrightarrow{MP}$ passa pelo ponto $P(4, -1)$ e tem coeficiente igual a: $\dfrac{3 - (-1)}{-2 - 4} = -\dfrac{4}{6} = -\dfrac{2}{3}$

Logo, a equação dessa assíntota é:

$y - (-1) = -\dfrac{2}{3}(x - 4) \Rightarrow y = -\dfrac{2x}{3} + \dfrac{5}{3}$

A assíntota $\overleftrightarrow{NQ}$ passa pelo ponto $N(4, 3)$ e tem coeficiente angular igual a: $\dfrac{3 - (-1)}{4 - (-2)} = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$

Logo, a equação dessa assíntota é:

$y - 3 = \dfrac{2}{3}(x - 4) \Rightarrow y = \dfrac{2x}{3} + \dfrac{1}{3}$

14. Indicando por a e b as medidas dos semieixos real e imaginário, respectivamente, e por c a semidistância focal, temos:

$$\begin{cases} a^2 = 25 \\ b^2 = 144 \\ c^2 = a^2 + b^2 \end{cases} \Rightarrow a = 5, b = 12 \text{ e } c = 13$$

Logo, $d = (13 - 5)$ cm $= 8$ cm

16. **a.** A diretriz é a reta horizontal r que passa pelo ponto $(0, 2)$; logo, sua equação é $y = 2$.

b. O parâmetro p da parábola é a distância entre o foco F e a diretriz r; logo, $p = 6 - 2 = 4$.

c. O eixo de simetria é a reta vertical e que passa pelo ponto $(5, 0)$; logo, sua equação é $x = 5$.

d. O vértice V é o ponto médio do segmento $\overline{FF'}$, em que F' é a projeção ortogonal de F sobre r. Como $F(5, 6)$ e $F'(5, 2)$, concluímos que $V\left(\dfrac{5 + 5}{2}, \dfrac{6 + 2}{2}\right)$, ou seja, $V(5, 4)$.

17. O ponto A pertence à parábola $\mathcal{P}$ se, e somente se, $AF = Ar$, isto é:

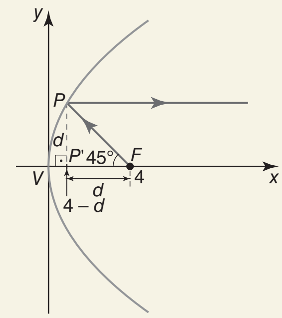
$\sqrt{(k - 5)^2 + (12 - 6)^2} = 12 - 2 \Rightarrow k = 13$ ou $k = -3$

Logo, o ponto A pertence à parábola $\mathcal{P}$ se, e somente se, $k = 13$ ou $k = -3$

18. **a.** Vamos associar um sistema cartesiano ao plano da parábola $\mathcal{P}$ geradora desse paraboloide, tal que:

- o vértice de $\mathcal{P}$ coincida com a origem O do sistema de eixos;
- o eixo de simetria de $\mathcal{P}$ esteja contido no eixo das abscissas;
- a concavidade de $\mathcal{P}$ esteja voltada para o sentido positivo do eixo das abscissas;
- a unidade adotada nos eixos seja o centímetro.

Assim, sendo P' a projeção ortogonal de P sobre o eixo das abscissas, temos que o triângulo retângulo FPP' é isósceles de base $\overline{FP}$. Logo, se d é a distância entre o raio refletido e o eixo de simetria de $\mathcal{P}$, então $PP' = FP' = d$ e, por consequência, o ponto P é da forma $P(4 - d, d)$.



NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Como a equação de $\mathcal{P}$ é $y^2 = 16x$ e $P(4 - d, d)$ pertence a $\mathcal{P}$, temos:

$d^2 = 16(4 - d) \Rightarrow d^2 + 16d - 64 = 0$

$\therefore d = 8(\sqrt{2} - 1)$ ou $d = -8(\sqrt{2} + 1)$ (não convém).

Concluímos, então, que a distância d entre o raio refletido e o eixo de simetria é: $d = 8(\sqrt{2} - 1)$ cm

b. No triângulo retângulo FPP', temos:

$d^2 + d^2 = (PF)^2$; logo, $PF = d\sqrt{2}$, ou seja:

$PF = 8(\sqrt{2} - 1) \cdot \sqrt{2}$ cm $\Rightarrow PF = 8(2 - \sqrt{2})$ cm

20. **a.** O vértice da parábola é $V(-2, 5)$, e o parâmetro da parábola é: $p = 2 \cdot |5 - 1| = 8$

Logo, a equação reduzida da parábola é:

$[x - (-2)]^2 = 2 \cdot 8(y - 5) \Rightarrow (x + 2)^2 = 16(y - 5)$

b. O vértice da párabola é $V\left(0, \dfrac{-4 + 2}{2}\right) = V(0, -1)$, e o parâmetro da parábola é: $p = |2 - (-4)| = 6$

Logo, a equação reduzida da parábola é:

$(x - 0)^2 = -2 \cdot 6[y - (-1)] \Rightarrow x^2 = -12(y + 1)$

c. O vértice da parábola é $V(1, 6)$, e o parâmetro é:

$p = 2 \cdot |-4 - 1| = 10$

Logo, a equação reduzida da parábola é:

$(y - 6)^2 = -2 \cdot 10(x - 1) \Rightarrow (y - 6)^2 = -20(x - 1)$

21. **a.** $y = 3x^2 + 6x - 5 \Rightarrow y = 3(x^2 + 2x) - 5$

$\therefore\ y + 5 + 3 = 3(x^2 + 2x + 1) \Rightarrow (x + 1)^2 = \dfrac{1}{3}(y + 8)$

b. $x = y^2 - 6y + 7 \Rightarrow x - 7 + 9 = y^2 - 6y + 9$

$\therefore\ (y - 3)^2 = x + 2$

c. $y = \dfrac{x^2}{4} - x - 3 \Rightarrow 4y = x^2 - 4x - 12$

$\therefore\ 4y + 12 + 4 = x^2 - 4x + 4 \Rightarrow (x - 2)^2 = 4(y + 4)$

22. $y = 2x^2 - 4x + 5 \Rightarrow 2x^2 - 4x = y - 5$

$\therefore 2(x^2 - 2x) = y - 5 \Rightarrow 2(x^2 - 2x + 1) = y - 5 + 2$

$\therefore 2(x - 1)^2 = y - 3 \Rightarrow (x - 1)^2 = \dfrac{1}{2} \cdot (y - 3)$

Disso, deduzimos que o eixo de simetria é vertical e que $\mathcal{P}$ tem a concavidade voltada para "cima". Assim: o vértice $V(1, 3)$; o parâmetro $p = \dfrac{1}{4}$;

o foco $F\left(1;\ 3 + \dfrac{1}{8}\right)$, ou seja, $F\left(1;\ \dfrac{25}{8}\right)$;

a equação da diretriz d: $y = 3 - \dfrac{1}{8}$, ou seja, $y = \dfrac{23}{8}$;

a equação do eixo de simetria e: $x = 1$

23. No plano da parábola que contém a trajetória da carga, fixemos um sistema cartesiano ortogonal xOy tal que o eixo Oy é orientado para cima e coincide com a vertical que passa por V e intercepta o solo no ponto $O(0,0)$; o eixo Ox passa por P e é orientado de O para P.

A equação da parábola que contém a trajetória da carga é da forma: $(x - 0)^2 = -2p(y - 400)$

Como o ponto (200, 0) pertence à parábola, determinamos o valor de p: $(200 - 0)^2 = -2p(0 - 400) \Rightarrow p = 50$

Lembrando que o vértice V é o ponto médio do segmento de reta com extremos no foco F e na diretriz d, deduzimos que o foco F é $F(0, 375)$ e a equação da diretriz d é $y = 425$.

a. Em relação ao solo, a diretriz d está a 425 m de altura.

b. Em relação ao solo, o foco F está a 375 m de altura.

24. A parábola $\mathscr{P}$ tem a concavidade voltada para a direita; portanto, sua equação é da forma:

$(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0)$, em que p é o parâmetro e x_0 e y_0 são as coordenadas do vértice V. Pelo gráfico, observamos que $y_0 = -1$; logo, a equação de $\mathscr{P}$ é da forma: $(y + 1)^2 = 2p(x - x_0)$.

Como os pontos $A(6, 3)$ e $B(11, 5)$ pertencem a $\mathscr{P}$, temos:

$$\begin{cases}(3+1)^2 = 2p(6 - x_0)\\(5+1)^2 = 2p(11 - x_0)\end{cases} \sim \begin{cases}p = \dfrac{8}{6 - x_0} & (1)\\[2mm] p = \dfrac{18}{1 - x_0} & (2)\end{cases}$$

De (1) e (2), deduzimos que: $\dfrac{8}{6 - x_0} = \dfrac{18}{11 - x_0} \Rightarrow x_0 = 2$

Substituindo x_0 por 2 na equação (1), obtemos: $p = 2$

A equação reduzida da parábola é: $(y + 1)^2 = 4(x - 2)$

25. a. Como o eixo de simetria é vertical, deduzimos que a diretriz r é horizontal. Sendo $y = k$, com $k \in \mathbb{R}$, a equação dessa diretriz r, temos $k < 7$, pois a parábola tem concavidade voltada para cima; logo:

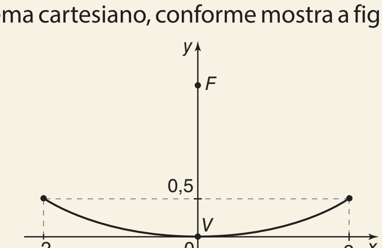
$PF = Pr \Rightarrow 6 = 7 - k \therefore k = 1$

O vértice V é o ponto médio do segmento de extremos (0, 1) e (0, 7); logo, $V(0, 4)$.

Como o vértice V é o ponto da parábola mais próximo do foco F, concluímos que a menor distância possível entre o cometa e o Sol é 3 u.

b. O parâmetro p da parábola é a distância entre o foco e a diretriz r; logo, $p = 6$. Assim, a equação reduzida da parábola é: $(x - 0)^2 = 2 \cdot 6 \cdot (y - 4) \Rightarrow x^2 = 12(y - 4)$

26. Uma secção plana que contém o eixo de simetria do paraboloide é um arco de parábola. A esse arco associamos um sistema cartesiano, conforme mostra a figura a seguir.



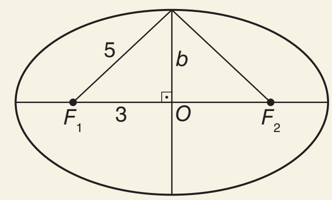
FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

A equação da parábola que contém esse arco é $x^2 = 2py$, em que p é o parâmetro. Como o ponto (2; 0,5) pertence a essa parábola, temos: $2^2 = 2p \cdot 0{,}5 \Rightarrow p = 4$

Logo, o receptor, que se localiza no foco F, dista 2 m do vértice V.

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

1. Sendo a a medida dos semieixo maior dessa elipse, temos que $2a = 10$ m, pois o comprimento da corda é a medida do eixo maior. Assim, sendo O o centro da elipse, F_1 e F_2 os focos, b a medida do semieixo menor e 6 m a distância focal $2c$, esquematizamos:



ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

Pelo teorema de Pitágoras, obtemos $b = 4$

$e = \dfrac{c}{a} \Rightarrow e = \dfrac{3}{5}$

Assim, o eixo maior mede 10 m, o eixo menor mede 8 m e a excentricidade é $\dfrac{3}{5}$.

2. a. O centro da elipse é $C\left(6, \dfrac{13 + 1}{2}\right) = C(6, 7)$, o semieixo menor mede $b = 9 - 6 = 3$ e o semieixo maior mede $a = 13 - 7 = 6$. Sabendo que o eixo maior é paralelo ao eixo Oy, a equação reduzida da elipse é dada por:

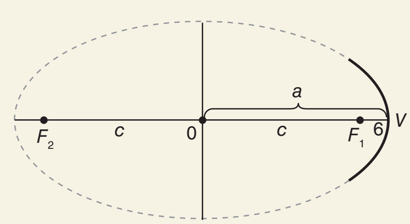
$$\frac{(x - 6)^2}{3^2} + \frac{(y - 7)^2}{6^2} = 1 \Rightarrow \frac{(x - 6)^2}{9} + \frac{(y - 7)^2}{36} = 1$$

b. O centro da elipse é $C\left(\dfrac{20}{2}, 0\right) = C(10, 0)$, o semieixo maior mede $a = \dfrac{20}{2} = 10$ e o semieixo menor mede $b = 8$. Como o eixo maior é paralelo ao eixo Ox, deduzimos que a equação reduzida da elipse é dada por:

$$\frac{(x - 10)^2}{10^2} + \frac{(y - 0)^2}{8^2} = 1 \Rightarrow \frac{(x - 10)^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$$

3. Esquematizando a elipse geradora da superfície do espelho, sejam:

- F_1 e F_2 os focos, estando a lâmpada em F_1 e o dente do paciente em F_2;
- V o vértice mais próximo de F_1;
- a a medida do semieixo maior;
- c a semidistância focal.



FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

Assim, temos: $\begin{cases}a = 6 + c\\ 0{,}85 = \dfrac{c}{a}\end{cases} \Rightarrow a = 40$ e $c = 34$

A distância entre a lâmpada e o dente iluminado é 68 cm.

4. O centro C da elipse é o ponto médio do segmento $\overline{F_1F_2}$, ou seja, $C(0, 5)$.

A semidistância focal c é o comprimento do segmento $\overline{CF_1}$; portanto, $c = 4$.

A medida $2a$ do eixo maior é dada por

$2a = PF_1 + PF_2$, ou seja:

$$2a = \sqrt{\left(\frac{12}{5} - 0\right)^2 + (2-1)^2} + \sqrt{\left(\frac{12}{5} - 0\right)^2 + (2-9)^2} \Rightarrow$$

$\Rightarrow 2a = 10$

A medida b do semieixo menor é dada por:

$a^2 = b^2 + c^2$; portanto: $5^2 = b^2 + 4^2 \Rightarrow b = 3$

O eixo maior é paralelo ao eixo das ordenadas.

Concluímos, então, que a equação reduzida da elipse $\mathscr{E}$ é:

$$\frac{x^2}{9} + \frac{(y-5)^2}{25} = 1$$

5. a. $16x^2 + 9y^2 + 64x - 54y + 1 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{(x+2)^2}{9} + \frac{(y-3)^2}{16} = 1$$

b. $x^2 + 9y^2 - 4x - 18y - 23 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{(x-2)^2}{36} + \frac{(y-1)^2}{4} = 1$$

c. $3x^2 + 5y^2 - 12x - 3 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{(x-2)^2}{5} + \frac{y^2}{3} = 1$$

d. $9x^2 + 4y^2 = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{\frac{1}{9}} + \frac{y^2}{\frac{1}{4}} = 1$

e. $3x^2 + 5y^2 = 2 \Rightarrow \frac{3x^2}{2} + \frac{5y^2}{2} = 1 \therefore \frac{x^2}{\frac{2}{3}} + \frac{y^2}{\frac{2}{5}} = 1$

6. a. Temos: $a = A_2C = |3 - 0| = 3$ e $c = F_2C = |5 - 0| = 5$

Assim: $c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow 5^2 = 3^2 + b^2 \therefore b = 4$

Logo, como o eixo real é paralelo ao eixo x, a equação reduzida da hipérbole é:

$$\frac{(x-0)^2}{3^2} - \frac{(y-0)^2}{4^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$$

b. O centro da hipérbole é: $C\left(-3, \frac{1+7}{2}\right) = C(-3, 4)$

Temos: $a = A_1C = |5 - 4| = 1$ e $c = F_1C = |7 - 4| = 3$

Assim: $c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow 3^2 = 1^2 + b^2 \therefore b = 2\sqrt{2}$

Logo, como o eixo real é paralelo ao eixo y, a equação reduzida da hipérbole é:

$$\frac{(y-4)^2}{1^2} - \frac{[x-(-3)]^2}{(2\sqrt{2})^2} = 1 \Rightarrow (y-4)^2 - \frac{(x+3)^2}{8} = 1$$

8. a. Vamos representar a equação de $\mathscr{H}$ na forma reduzida:

$$4x^2 - 9y^2 - 8x + 36y - 68 = 0 \Rightarrow \frac{(x-1)^2}{9} - \frac{(y-2)^2}{4} = 1$$

Assim, deduzimos que:

o eixo real da hipérbole é paralelo ao eixo Ox;

a medida a do semieixo real e a medida b do semieixo imaginário são dadas por:

$a^2 = 9 \Rightarrow a = 3$ e $b^2 = 4 \Rightarrow b = 2$

Como os pontos A e B pertencem à hipérbole, temos que: $|AF_1 - AF_2| = |BF_1 - BF_2| = 6$; logo,

$S = |AF_1 - AF_2| + |BF_1 - BF_2| = 6 + 6 \Rightarrow S = 12$

b. A semidistância focal c é calculada por

$c^2 = a^2 + b^2$; logo: $c^2 = 3^2 + 2^2 \Rightarrow c = \sqrt{13}$

A excentricidade é calculada por $e = \frac{c}{a}$; logo: $e = \frac{\sqrt{13}}{3}$

c. As assíntotas contêm as diagonais do retângulo referência de $\mathscr{H}$.

Sendo r a assíntota que passa pelos vértices (4, 4) e (−2, 0), temos que o seu coeficiente angular m_r é dado por:

$$m_r = \frac{4-0}{4-(-2)} = \frac{2}{3}$$

Assim, a equação de r é dada por:

$y - 0 = \frac{2}{3}(x + 2)$, ou seja, $2x - 3y + 4 = 0$.

Analogamente, obtemos a equação da assíntota s:

$2x + 3y - 8 = 0$

9. a. O vértice da parábola é $V(5, 4)$, e o parâmetro da parábola é $p = 2 \cdot |3 - 5| = 4$. Além disso, a diretriz é paralela ao eixo Oy e a concavidade é voltada para a direita; logo, a equação reduzida da parábola é:

$(y-4)^2 = 2 \cdot 4(x-5) \Rightarrow (y-4)^2 = 8(x-5)$

b. O vértice da parábola é $V(0, 0)$, e o parâmetro da parábola é $p = 2 \cdot |-2 - 0| = 4$. Além disso, a diretriz é paralela ao eixo Oy e a concavidade é voltada para a direita; logo, a equação reduzida da parábola é:

$(y-0)^2 = 2 \cdot 4(x-0) \Rightarrow y^2 = 8x$

10. a. $x = 2y^2 + 2y - 1 \Rightarrow x + 1 = 2(y^2 + y)$

$\therefore \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(x + \frac{3}{2}\right)$

b. $y = x^2 + 3x \Rightarrow y + \frac{9}{4} = x^2 + 3x + \frac{9}{4}$

$\therefore \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 = y + \frac{9}{4}$

c. $y = -3x^2 + 6x + 4 \Rightarrow y - 4 = -3(x^2 - 2x)$

$\therefore (x-1)^2 = -\frac{1}{3}(y-7)$

d. $x = 1 - y^2 \Rightarrow y^2 = -1(x-1)$

11. a. Sendo $M(x, y)$ temos que $A(2x, 2y)$.

Como A pertence à parábola $\mathscr{P}$ de equação $y = x^2$, temos que a ordenada de A é igual ao quadrado de sua abscissa, isto é: $2y = (2x)^2 \Rightarrow y = 2x^2$

VERIFIQUE O QUE APRENDEU NO CAPÍTULO 8

1. a. A medida a do semieixo maior e a semidistância focal c são 2 e 1, respectivamente. Como a, c e a medida b do semieixo menor satisfazem a equação $a^2 = b^2 + c^2$, temos:

$2^2 = b^2 + 1^2 \Rightarrow b = \sqrt{3}$

O centro C da elipse é o ponto médio do segmento $\overline{F_1F_2}$, isto é, $C\left(\frac{0+2}{2}, \frac{0+0}{2}\right) = C(1, 0)$

Com esses valores e o fato de o eixo maior ser paralelo ao eixo Ox, obtemos a equação reduzida:

$$\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$$

c. A excentricidade e dessa elipse é dada por: $e = \frac{c}{a} = \frac{1}{2}$

2. a. Sendo $G(x, y)$ um ponto genérico da hipérbole, temos:

$|GF_1 - GF_2| = 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \left|\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} - \sqrt{(x-4)^2 + (y-0)^2}\right| = 2$

$\therefore \left|\sqrt{x^2 + y^2} - \sqrt{(x-4)^2 + y^2}\right| = 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} - \sqrt{(x-4)^2 + y^2} = \pm 2$

Agora, isolamos um dos radicais, quadramos ambos os membros; isolamos o radical remanescente; e, por fim, quadramos ambos os membros novamente e obtemos: $3x^2 - y^2 - 12x + 9 = 0$

4. O vértice da parábola $\mathscr{P}$ é o ponto $V(2, 5)$, a diretriz é paralela ao eixo Oy e a concavidade é voltada para a direita. Assim, sendo p do parâmetro, temos que a equação de $\mathscr{P}$ é da forma: $(y - 5)^2 = 2p(x - 2)$
Como o ponto $P(3, 3)$ pertence a $\mathscr{P}$, temos:
$(3 - 5)^2 = 2p(3 - 2) \Rightarrow p = 2$
Concluímos, então, que a equação da parábola é:
$(y - 5)^2 = 2 \cdot 2 \cdot (x - 2)$, ou seja, $(y - 5)^2 = 4(x - 2)$

CAPÍTULO 9 Conjunto dos números complexos

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. **a.** Verdadeira, pois $\mathbb{R}$ está contido em $\mathbb{C}$.
b. Falsa, pois o número 5i, por exemplo, é complexo, mas não é real.
c. Falsa, pois $\mathbb{R}$ está contido em $\mathbb{C}$, e, portanto, $\mathbb{C} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$.
d. Verdadeira, pois $z = a + bi$, com $\{a, b\} \subset \mathbb{R}$ e $b \neq 0$, é um número complexo não pertencente a $\mathbb{R}$.
e. Falsa, pois, sendo $z = 3 + 4i$, seu conjugado é $\bar{z} = 3 - 4i$.
f. Verdadeira, pois o conjugado de $z = a + bi$ é $\bar{z} = a - bi$.
g. Verdadeira, pois: $a + 3i = 6 + bi \Rightarrow a = 6$ e $b = 3$
$\therefore a + b = 9$

2. **a.** $(x^2 - 9) + (x - 3)i$ será real se sua parte imaginária for nula, isto é: $x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$
b. $(x^2 - 9) + (x - 3)i$ será imaginário se:
$x - 3 \neq 0 \Rightarrow x \neq 3$
c. $(x^2 - 9) + (x - 3)i$ será imaginário puro se:
$$\begin{cases} x^2 - 9 = 0 \\ x - 3 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 9 \\ x \neq 3 \end{cases} \therefore\ x = -3$$

3. Na equação $2a + (a + 2)i = (b - a) + bi$, aplicamos a definição de igualdade de números complexos, obtendo:
$$\begin{cases} 2a = b - a \\ a + 2 = b \end{cases} \Rightarrow a = 1 \text{ e } b = 3$$

4. Pela definição de igualdade de números complexos, temos:
$$\begin{cases} x^2 - 1 = y \\ -3y^2 = -27 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 1 = y & (1) \\ y^2 = 9 & (2) \end{cases}$$
De (2), obtemos: $y = 3$ ou $y = -3$.
Substituindo y por 3, em (1), chegamos a:
$x^2 - 1 = 3 \Rightarrow x^2 = 4 \therefore x = 2$ ou $x = -2$
Substituindo y por -3, em (1), chegamos a:
$x^2 - 1 = -3 \Rightarrow x^2 = -2$
Logo, não existe x real para $y = -3$.
Concluímos, então, que: $x = 2$ e $y = 3$ ou
$x = -2$ e $y = 3$

5. **a.** $z_1 + z_2 = -4 + 2i + 5 + i = 1 + 3i$
b. $z_3 + \bar{z}_2 - z_4 = 6 + (5 - i) - (-3i) = 11 + 2i$

6. **a.** $z_1 \cdot z_2 = (5 + 3i) \cdot (6) = 30 + 18i$
b. $z_1 \cdot z_3 = (5 + 3i) \cdot (2i) = 10i + 6i^2 = -6 + 10i$
c. $z_1 \cdot z_4 = (5 + 3i)(2 - i) = 10 - 5i + 6i - 3i^2 = 13 + i$
d. $z_2 \cdot \bar{z}_4 = (6) \cdot (2 + i) = 12 + 6i$

7. **a.** $\dfrac{z_4}{z_1} = \dfrac{2}{2 + 3i} = \dfrac{2(2 - 3i)}{(2 + 3i)(2 - 3i)} = \dfrac{4}{13} - \dfrac{6i}{13}$
b. $\dfrac{z_3}{z_2} = \dfrac{4i}{2 - i} = \dfrac{4i(2 + i)}{(2 - i)(2 + i)} = -\dfrac{4}{5} + \dfrac{8i}{5}$
c. $(z_2)^{-1} = \dfrac{1}{z_2} = \dfrac{1}{2 - i} = \dfrac{1(2 + i)}{(2 - i)(2 + i)} = \dfrac{2}{5} + \dfrac{i}{5}$
d. $(z_3)^{-1} = \dfrac{i}{z^3} = \dfrac{1}{4i} = \dfrac{1(-4i)}{4i(-4i)} = \dfrac{-4i}{16} = -\dfrac{i}{4}$

8. **a.** $3 + 2i + (1 + 5i)(2 - i) = 10 + 11i$
b. $\dfrac{2 + i}{1 - 2i} + 2i(1 - 3i) =$
$= \dfrac{(2 + i)(1 + 2i)}{(1 - 2i)(1 + 2i)} + 2i - 6i^2 =$
$= \dfrac{2 + 4i + i + 2i^2}{1^2 - (2i)^2} + 6 + 2i = \dfrac{5i}{1 - 4i^2} + 6 + 2i =$
$= \dfrac{5i}{5} + 6 + 2i = i + 6 + 2i = 6 + 3i$

9. **a.** Sendo $z = x + yi$, com $\{x, y\} \subset \mathbb{R}$, temos:
$z + 4\bar{z} = 10 + 18i \Rightarrow x + yi + 4(x - yi) = 10 + 18i$
$\therefore 5x - 3yi = 10 + 18i$
$$\therefore \begin{cases} 5x = 10 \\ -3y = 18 \end{cases} \Rightarrow x = 2 \text{ e } y = -6$$
Assim, deduzimos que: $z = 2 - 6i$
Logo, o conjunto solução S da equação é: $S = \{2 - 6i\}$
b. Sendo $z = x + yi$, com $\{x, y\} \subset \mathbb{R}$, temos:
$z \cdot \bar{z} + 2z = 16 + 2i \Rightarrow$
$\Rightarrow (x + yi)(x - yi) + 2(x - yi) = 16 + 2i$
$\therefore x^2 + y^2 + 2x + 2yi = 16 + 2i$
$$\therefore \begin{cases} x^2 + y^2 + 2x = 16 \\ 2y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + 2x = 16 & (1) \\ y = 1 & (2) \end{cases}$$
Substituindo (2) em (1), temos: $x = 3$ ou $x = -5$
Assim, deduzimos que: $z = 3 + i$ ou $z = -5 + i$
Logo, o conjunto solução S da equação é: $S = \{3 + i, -5 + i\}$

10. $z = (a + 1)(a - 1 + i) = z = a^2 - 1 + (a + 1)i$
O número z é imaginário puro se, e somente se, forem obedecidas as condições:
$$\begin{cases} a^2 - 1 = 0 \\ a + 1 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \pm 1 \\ a \neq -1 \end{cases} \therefore a = 1$$

11. $z = \dfrac{i + \text{sen}\,\alpha}{1 - i} = \dfrac{(i + \text{sen}\,\alpha)(1 + i)}{(1 - i)(1 + i)} =$
$= \dfrac{-1 + \text{sen}\,\alpha}{2} + \dfrac{i(1 + \text{sen}\,\alpha)}{2}$
Para que o número z seja real, devemos ter
$1 + \text{sen}\,\alpha = 0$, ou seja, $\text{sen}\,\alpha = -1$.
Assim, todos os números reais α para os quais z é real são da forma: $\alpha = \dfrac{3\pi}{2} + k \cdot 2\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$

12. **a.** $i^{65} = i^1 = i$
b. $i^{36} = i^0 = 1$
c. $i^{22} = i^2 = -1$
d. $i^{51} = i^3 = -i$
e. $(2i)^7 = 2^7 \cdot i^7 = 2^7 \cdot i \cdot i^6 = 128i(i^2)^3 = -128i$
f. $(3i)^3 = 3^3 \cdot i^3 = 27 \cdot i \cdot i^2 = 27i(-1) = -27i$
g. $(1 + i)^{16} = [(1 + i)^2]^8 = (1 + 2i + i^2)^8 = (2i)^8 = 256$
h. $(1 + i)^{17} = (1 + i)^{16} \cdot (1 + i)$
Pelo item **g**, temos que $(1 + i)^{16} = 256$; logo:
$(1 + i)^{17} = 256(1 + i) = 256 + 256i$

13. a. $z^5 = z^2 \cdot z^3 = (3 + 4i)(2 + 11i) = 6 + 33i + 8i + 44i^2 = -38 + 41i$

b. $z^6 = (z^3)^2 = (2 + 11i)^2 = -117 + 44i$

c. $z^{-1} = z^2 : z^3 = \dfrac{3 + 4i}{2 + 11i} = z^{-1} = \dfrac{2}{5} - \dfrac{i}{5}$

14. a. $(1 - i)^2 = 1^2 - 2i + i^2 = 1 - 2i - 1 = -2i$

b. $(1 - i)^{12} = [(1 - i)^2]^6 = -64$

c. Será raiz da equação se, e somente se, a sentença $(1 - i)^{13} + 32(1 - i)^2 + 64 = 0$ é verdadeira.

Os valores de $(1 - i)^{13}$ e $(1 - i)^2$ são dados por:

$(1 - i)^{13} = (1 - i)^{12} \cdot (1 - i) = -64 + 64i$ e

$(1 - i)^2 = 1 - 2i + i^2 = 1 - 2i - 1 = -2i$

Assim, calculando o valor da expressão do primeiro membro da sentença, obtemos:

$(1 - i)^{13} + 32(1 - i)^2 + 64 = 0$

Portanto, $1 - i$ é raiz.

15. a. $(w_1)^2 = (\sqrt{2} + i\sqrt{2})^2 = 2 + 4i - 2 = 4i$

$(w_2)^2 = [-(\sqrt{2} + i\sqrt{2})]^2 = (\sqrt{2} + i\sqrt{2})^2 = 4i$

Logo, w_1 e w_2 são raízes quadradas de $4i$.

b. Sendo o número complexo z uma raiz quadrada de -36, temos que: $z^2 = -36 \Rightarrow z^2 = (6i)^2 \Rightarrow z = \pm 6i$

Logo, as raízes quadradas de -36 são $6i$ e $-6i$.

c. Calculando o discriminante da equação, temos:

$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10 = -36$

Como as raízes quadradas de -36 são $6i$ e $-6i$, temos:

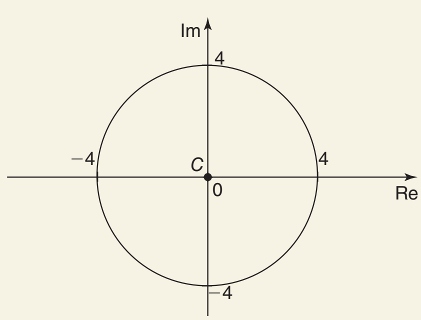
$x = \dfrac{2 \pm 6i}{2} \Rightarrow x = 1 + 3i$ ou $x = 1 - 3i$

Logo, o conjunto solução S da equação é: $S = \{1 + 3i, 1 - 3i\}$

17. Fazendo $z = x + yi$, com $\{x, y\} \subset \mathbb{R}$, temos:

$x - yi = \dfrac{16}{x + yi} \Rightarrow (x - yi)(x + yi) = 16 \Rightarrow x^2 + y^2 = 16$

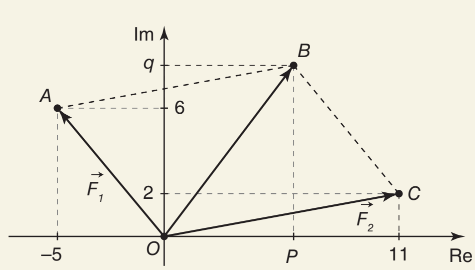
Assim, o lugar geométrico é a circunferência de centro $C(0, 0)$ e raio $R = 4$.



FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

18. a. A força resultante $\vec{F}$ é representada pela soma $(-5 + 6i) + (11 + 2i) = 6 + 8i$.

b. Consideremos o paralelogramo $OABC$, representado a seguir.



ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

Vamos mostrar que o ponto B é o afixo do número complexo $6 + 8i$, que representa a força $\vec{F}$.

Como os lados opostos do paralelogramo são congruentes, temos que:

As projeções ortogonais de $\overline{OA}$ e $\overline{BC}$ sobre o eixo real têm medida 5; logo, $p = 6$.

As projeções ortogonais de $\overline{OC}$ e $\overline{AB}$ sobre o eixo imaginário têm medida 2; logo, $q = 8$.

Portanto, o ponto B é o afixo do número complexo $6 + 8i$, que representa a força resultante $\vec{F}$.

19. a. $|4 + 3i| = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$

b. $|12 - 5i| = \sqrt{12^2 + (-5)^2} = \sqrt{144 + 25} = \sqrt{169} = 13$

c. $|4i| = \sqrt{4^2} = \sqrt{16} = 4$

d. $|-7i| = \sqrt{(-7)^2} = \sqrt{49} = 7$

e. $|9| = \sqrt{9^2} = \sqrt{81} = 9$

f. $|-6| = \sqrt{(-6)^2} = \sqrt{36} = 6$

20. Indicando z por $x + yi$, com $\{x, y\} \subset \mathbb{R}$, temos:

a. $|z - 3| = 6 \Rightarrow |x + yi - 3| = 6 \therefore (x - 3)^2 + y^2 = 36$

Logo, o L.G. é a circunferência de equação $(x - 3)^2 + y = 36$:

b. $|z - 2 + 5i| = 4 \Rightarrow |(x + yi) - 2 + 5i| = 4$

$\therefore |(x - 2) + (y + 5)i| = 4 \Rightarrow (x - 2)^2 + (y + 5)^2 = 16$

Logo, o L.G. é a circunferência de equação $(x - 2)^2 + (y + 5)^2 = 16$

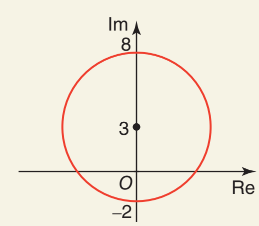
21. a. Sendo $z = x + yi$, com $\{x, y\} \subset \mathbb{R}$, temos:

$|z - 3i| = 5 \Rightarrow |(x + yi - 3i)| = 5$

$\therefore x^2 + (y - 3)^2 = 25$

Assim, deduzimos que o L.G. é a circunferência de centro $C(0, 3)$ e raio 5.

Observando que o ponto dessa circunferência mais distante da origem O é $(0, 8)$, concluímos que o número complexo de maior módulo que satisfaz a equação proposta é $z = 8i$.



b. Sendo $w = x + yi$, com $\{x, y\} \subset \mathbb{R}$, temos:

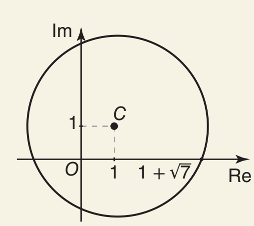
$|w - (1 + i)| = 2\sqrt{2} \Rightarrow |x + yi - (1 + i)| = 2\sqrt{2}$

$\therefore |(x - 1) + (y - 1)i| = 2\sqrt{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt{(x - 1)^2 + (y - 1)^2} = 2\sqrt{2}$

$\therefore (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 8$

Assim, deduzimos que o L.G. é a circunferência de centro $C(1, 1)$ e raio $2\sqrt{2}$.



ILUSTRAÇÕES: ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

Os pontos desse L.G. mais próximo e mais distante da origem O pertencem à reta r que passa pela origem $O(0, 0)$ e pelo centro $C(1, 1)$; essa reta tem equação $y = x$. Assim, para obter os pontos do L.G., basta resolver o sistema a seguir.

$$\begin{cases} y = x & (1) \\ (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 8 & (2) \end{cases}$$

Substituindo (1) em (2), temos $x = 3$ ou $x = -1$.

Para $x = 3$, obtemos $y = 3$

Para $x = -1$, obtemos $y = -1$

Assim, os pontos de intersecção da circunferência com a reta r são $(-1, -1)$ e $(3, 3)$. Um deles é o ponto do L.G. mais distante da origem O, e o outro é o ponto do L.G. mais próximo da origem O. Como a distância entre $(-1, -1)$ e $(0, 0)$ é $\sqrt{2}$, e a distância entre $(3, 3)$ e $(0, 0)$ é $3\sqrt{2}$, concluímos que o número complexo de menor módulo que satisfaz a equação proposta é $w = -1 - i$.

22. a. $|z| + |3z| = 4 \Rightarrow |z| + 3|z| = 4 \Rightarrow |z| = 1$

Logo, o L.G. das imagens dos complexos z é a circunferência de centro $C(0, 0)$ e raio 1.

b. $z \cdot \bar{z} = |4z| \Rightarrow |z|^2 = 4|z| \therefore |z| = 0$ ou $|z| = 4$

Logo, o L.G. das imagens de z é formado pelo ponto $(0, 0)$ e pela circunferência de centro $C(0, 0)$ e raio 2.

23. a. Sendo $z = x + yi$, com $\{x, y\} \subset \mathbb{R}$, temos:

$$|z|^2 + |z + \bar{z}|^2 = 1 \therefore 5x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{\frac{1}{5}} + y^2 = 1$$

Concluímos, então, que o lugar geométrico que satisfaz as condições do enunciado representa, no plano de Argand-Gauss, uma elipse com o centro na origem intersectando os eixos coordenados nos pontos: $\left(\frac{\sqrt{5}}{5}, 0\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}, 0\right)$, $(0, 1)$ e $(0, -1)$.

b. Como $z \cdot \bar{z} = |z|^2$, em que $z = x + yi$, com $\{x, y\} \subset \mathbb{R}$, temos:

$z \cdot \bar{z} - |z| - 2 = 0 \Rightarrow |z|^2 - |z| - 2 = 0$

Sendo $|z| = t$, temos: $t^2 - t - 2 = 0$

Resolvendo a equação do 2º grau, obtemos:

$$\Delta = 9 \therefore t = \frac{-(-1) \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 1} \Rightarrow t = 2 \text{ ou } t = -1$$

Como $t = |z|$, temos: $|z| = -1$ (não convém) e

$|z| = 2 \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 2 \therefore x^2 + y^2 = 4$

Logo, o lugar geométrico que satisfaz as condições do enunciado representa, no plano de Argand-Gauss, uma circunferência com o centro na origem e raio 2.

25. Lembrando que o módulo de um número complexo é a distância entre a sua imagem e a origem do plano complexo, temos: $|z_1| = 4$, $|z_2| = 5$, $|z_3| = 6$, $|z_4| = 3$

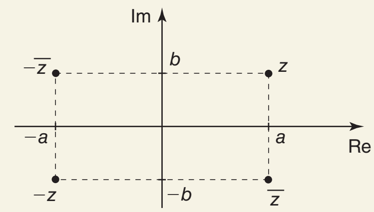
Sabendo que o argumento de um número complexo de imagem P é a medida φ do ângulo formado por OP e pelo semieixo positivo Ox, com $0° \leqslant \varphi < 360°$ ou $0 \leqslant \varphi < 2\pi$, no sentido anti-horário, temos:

$\varphi_1 = 90°$ ou $\frac{\pi}{2}$ $\qquad$ $\varphi_3 = 270°$ ou $\frac{3\pi}{2}$

$\varphi_2 = 180°$ ou π $\qquad$ $\varphi_4 = 0°$ ou 0 rad

em que φ_1, φ_2, φ_3 e φ_4 são os argumentos dos números z_1, z_2, z_3 e z_4, respectivamente.

26. Seja $z = a + bi$, com $\{a, b\} \subset \mathbb{R}^+$. Vamos representar no plano complexo $z = a + bi$, $\bar{z} = a - bi$, $-z = -a - bi$ e $-\bar{z} = -a + bi$:



FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

Assim, sendo φ_1, φ_2 e φ_3 os argumentos dos números complexos $\bar{z}$, $-z$ e $-\bar{z}$, respectivamente, temos:

a. $\varphi_1 = 2\pi - \frac{\pi}{7} = \frac{13\pi}{7}$

b. $\varphi_2 = \pi + \frac{\pi}{7} = \frac{8\pi}{7}$

c. $\varphi_3 = \pi - \frac{\pi}{7} = \frac{6\pi}{7}$

27. a. $z_1 = 1 + i \rightarrow \begin{cases} \text{parte real: } 1 \\ \text{parte imaginária: } 1 \end{cases}$

O módulo ρ e o argumento φ de z_1 são dados por:

$\rho = \sqrt{(1)^2 + (1)^2} = \sqrt{2}$

$$\begin{cases} \cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \text{sen } \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \varphi = 45° \left(\text{ou } \frac{\pi}{4} \text{ rad}\right)$$

b. $z_2 = 1 - \sqrt{3}\,i \rightarrow \begin{cases} \text{parte real: } 1 \\ \text{parte imaginária: } -\sqrt{3} \end{cases}$

O módulo ρ e o argumento φ de z_2 são dados por:

$\rho = \sqrt{(1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$

$$\begin{cases} \cos \varphi = \frac{1}{2} \\ \text{sen } \varphi = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \varphi = 300° \left(\text{ou } \frac{5\pi}{4} \text{ rad}\right)$$

c. $z_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{3}i \rightarrow \begin{cases} \text{parte real: } -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \text{parte imaginária: } \frac{\sqrt{2}}{3} \end{cases}$

O módulo ρ e o argumento φ de z_3 são dados por:

$$\rho = \sqrt{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{2}{4} + \frac{2}{4}} = 1$$

$$\begin{cases} \cos \varphi = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{1} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \text{sen } \varphi = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \varphi = 135° \left(\text{ou } \frac{3\pi}{4} \text{ rad}\right)$$

d. $z_4 = -5\sqrt{3} - 5i \rightarrow \begin{cases} \text{parte real: } -5\sqrt{3} \\ \text{parte imaginária: } -5 \end{cases}$

O módulo ρ e o argumento φ de z_4 são dados por:

$\rho = \sqrt{(-5\sqrt{3})^2 + (-5)^2} = \sqrt{75 + 25} = \sqrt{100} = 10$

$$\begin{cases} \cos \varphi = \frac{-5\sqrt{3}}{10} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \text{sen } \varphi = \frac{-5}{10} = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \varphi = 210° \left(\text{ou } \frac{7\pi}{6} \text{ rad}\right)$$

28. a. $z_1 = 1 + \sqrt{3}\,i \rightarrow \begin{cases} \text{parte real: } 1 \\ \text{parte imaginária: } \sqrt{3} \end{cases}$

O módulo ρ e o argumento φ de z_1 são dados por:

$\rho = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$

$\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{1}{2} \\ \operatorname{sen}\varphi = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \varphi = 60°$

Logo, a forma trigonométrica de z_1 é:

$z_1 = 2(\cos 60° + i \operatorname{sen} 60°)$ ou

$z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\right)$

b. $z_2 = 1 - i \rightarrow \begin{cases} \text{parte real: } 1 \\ \text{parte imaginária: } -1 \end{cases}$

O módulo ρ e o argumento φ de z_2 são dados por:

$\rho = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$

$\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \operatorname{sen}\varphi = \dfrac{-1}{\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \varphi = 315°$

Logo, a forma trigonométrica de z_2 é:

$z_2 = \sqrt{2}(\cos 315° + i \operatorname{sen} 315°)$ ou

$z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{7\pi}{4}\right)$

c. $z_3 = -\sqrt{3} + i \rightarrow \begin{cases} \text{parte real: } -\sqrt{3} \\ \text{parte imaginária: } 1 \end{cases}$

O módulo ρ e o argumento φ de z_3 são dados por:

$\rho = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + (1)^2} = \sqrt{3 + 1} = \sqrt{4} = 2$

$\begin{cases} \cos\varphi = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \operatorname{sen}\varphi = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \varphi = 150°$

Logo, a forma trigonométrica de z_3 é:

$z_3 = 2(\cos 150° + i \operatorname{sen} 150°)$ ou

$z_3 = 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i \operatorname{sen}\frac{5\pi}{6}\right)$

29. a. $z_1 = 2\,(\cos 90° + i \operatorname{sen} 90°) = 2[0 + i(1)] = 2i$

b. $z_2 = 6\,(\cos 30° + i \operatorname{sen} 30°) = 6\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 3\sqrt{3} + 3i$

c. $z_3 = \cos\frac{5\pi}{4} + \operatorname{sen} i\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$

30. Observando que $\overline{OP}$ é diagonal de um quadrado de lado 2, temos que o módulo e o argumento de z_1 são $2\sqrt{2}$ e 45°, respectivamente. Assim: $z_1 = 2\sqrt{2}\,(\cos 45° + i \operatorname{sen} 45°)$

No triângulo OPQ temos: $PQ = 6$, pois $|z_1 - z_2| = 6$, e $OP = 2\sqrt{2}$. Logo, o módulo de z_2, que é a medida OQ, pode ser calculado pelo teorema de Pitágoras:

$(OQ)^2 + (2\sqrt{2})^2 = 6^2 \Rightarrow OQ = 2\sqrt{7}$

Observando que o argumento de z_2 é a soma 45° + 90°, portanto, 135°, temos: $z_2 = 2\sqrt{7}\,(\cos 135° + i \operatorname{sen} 135°)$

Logo, a forma algébrica de z_2 é: $z_2 = 2\sqrt{7}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}\,i}{2}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow z_2 = -\sqrt{14} + \sqrt{14}\,i$

32. a. $z \cdot u = [2(\cos 45° + i \operatorname{sen} 45°)] \cdot [8(\cos 255° + i \operatorname{sen} 255°)] = 16\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 8 - 8\sqrt{3}\,i$

b. $\frac{u}{z} = \frac{8 \cdot (\cos 255° + i \operatorname{sen} 255°)}{2 \cdot (\cos 45° + i \operatorname{sen} 45°)} = -2\sqrt{3} - 2i$

c. $\frac{z}{u} = \frac{2 \cdot (\cos 45° + i \operatorname{sen} 45°)}{8 \cdot (\cos 255° + i \operatorname{sen} 255°)} = -\frac{\sqrt{3}}{8} + \frac{1}{8}i$

d. $\frac{uz}{w} = \frac{16 \cdot (\cos 255° + i \operatorname{sen} 255°)\,] \cdot (\cos 45° + i \operatorname{sen} 45°)}{[1 \cdot (\cos 120° + i \operatorname{sen} 120°)\,]} = 16 \cdot [\cos 180° + i \operatorname{sen} 180°) = 16\,(-1 + i \cdot 0) = -16$

33. Inicialmente, vamos representar o número $\sqrt{3} + i$ na forma trigonométrica: $\sqrt{3} + i \rightarrow \begin{cases} \text{parte real: } \sqrt{3} \\ \text{parte imaginária: } 1 \end{cases}$

O módulo ω e o argumento θ são dados por:

$\omega = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2$

$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \operatorname{sen}\theta = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = 30°$

Logo, a forma trigonométrica de $\sqrt{3} + i$ é:

$2(\cos 30° + i \operatorname{sen} 30°)$

Temos: $\frac{z}{w} = \sqrt{3} + i \Rightarrow z = w(\sqrt{3} + i)$

Substituindo as formas trigonométricas na igualdade anterior, obtemos:

$\rho\,(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi) =$

$= [7(\cos 18° + i \operatorname{sen} 18°)][2(\cos 30° + i \operatorname{sen} 30°)] =$

$= 14(\cos 48° + i \operatorname{sen} 48°)$

Logo, o módulo ρ é 14 e o argumento φ é 48°.

34. O módulo de z é: $|z| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

Sendo φ o argumento z, temos que o argumento de z' é $\varphi + 45°$. Como z e z' têm o mesmo módulo 5, deduzimos que $z' = 5[\cos(\varphi + 45°) + i \operatorname{sen}(\varphi + 45°)]$. Logo:

$$z' = 5\,(\underbrace{\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi}_{z}) \cdot (\cos 45° + i \operatorname{sen} 45°)$$

Assim, ao multiplicar o número complexo $z = 3 + 4i$, de imagem P, pelo número complexo cos 45° + i sen 45°, obtém-se o número complexo z' cuja imagem P' resulta de uma rotação de 45° do ponto P, no sentido anti-horário, em torno da origem O do sistema de eixos. Portanto, temos:

$z' = (3 + 4i) \cdot (\cos 45° + i \operatorname{sen} 45°) \Rightarrow$

$\Rightarrow z' = (3 + 4i)\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}\,i}{2}\right) \therefore z' = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{7\sqrt{2}\,i}{2}$

35. Sendo $z = 2\left(\cos\frac{\pi}{12} + \text{i sen}\frac{\pi}{12}\right)$ e aplicando o teorema de De Moivre, obtemos:

a. $z^8 = 2^8\left[\cos 8\left(\frac{\pi}{12}\right) + \text{i sen } 8\left(\frac{\pi}{12}\right)\right] =$

$= 256\left(\cos\frac{2\pi}{3} + \text{i sen}\frac{2\pi}{3}\right)$ ou

256 (cos 120° + i sen 120°)

b. $z^n = 2^n\left[\cos\frac{n\pi}{12} + \text{i sen}\frac{n\pi}{12}\right]$

Para z^n ser real, sua parte imaginária deve ser nula, ou seja:

$\text{sen}\frac{n\pi}{12} = 0 \Rightarrow \frac{n\pi}{12} = 0 + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$

$\therefore n = 12k$, com $k \in \mathbb{Z}$

Assim, para $k = 1$, obtemos $n = 12$, que é o menor valor inteiro positivo de n.

c. $z^n = 2^n\left[\cos\frac{n\pi}{12} + \text{i sen}\frac{n\pi}{12}\right]$

Para z^n ser imaginário puro, devemos ter:

$\cos\frac{n\pi}{12} = 0 \Rightarrow \frac{n\pi}{12} = \frac{\pi}{2} + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$

$\therefore\ n = 6 + 12k$, com $k \in \mathbb{Z}$

$\text{sen}\left(\frac{n\pi}{12}\right) \neq 0 \Rightarrow \frac{n\pi}{12} + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$

$\therefore n \neq 12k$, com $k \in \mathbb{Z}$

Logo, o menor valor inteiro positivo de n é 6.

36. a. Vamos representar $1 + \sqrt{3}\,\text{i}$ na forma trigonométrica:

parte real: 1; parte imaginária: $\sqrt{3}$

Sendo φ o argumento e ρ o módulo, temos:

$\rho = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$

$$\begin{cases}\cos\varphi = \frac{1}{2}\\ \text{sen}\,\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases} \Rightarrow \varphi = 60°$$

Logo: $1 + \sqrt{3}\,\text{i} = 2(\cos 60° + \text{i sen } 60°)$

Pela fórmula de De Moivre, temos:

$(1 + \sqrt{3}\,\text{i})^8 = 2^8[\cos(8 \cdot 60°) + \text{i sen}(8 \cdot 60°)] =$

$= 2^8(\cos 120° + \text{i sen } 120°) = -128 + 128\sqrt{3}\,\text{i}$

b. Vamos representar $-\sqrt{3} + \text{i}$ na forma trigonométrica:

parte real: $-\sqrt{3}$; parte imaginária: 1

Sendo ρ o módulo e φ o argumento, temos:

$\rho = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$

$$\begin{cases}\cos\varphi = -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \text{sen}\,\varphi = \frac{1}{2}\end{cases} \Rightarrow \varphi = 150°$$

Logo: $-\sqrt{3} + \text{i} = 2(\cos 150° + \text{i sen } 150°)$

Pela fórmula de De Moivre, temos:

$(-\sqrt{3} + \text{i})^{10} = 2^{10}[\cos(10 \cdot 150°) + \text{i sen}(10 \cdot 150°)] =$

$= 2^{10}(\cos 60° + \text{i sen } 60°) = 512 + 512\sqrt{3}\,\text{i}$

37. Vamos representar $z = \sqrt{3} + 3i$ na forma trigonométrica:

parte real: $\sqrt{3}$; parte imaginária: 3

Sendo ρ o módulo de z e φ o seu argumento, temos:

$\rho = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 3^2} = \sqrt{3+9} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

$$\begin{cases}\cos\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2}\\ \text{sen}\,\varphi = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{2 \cdot 3} = \frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases} \Rightarrow \varphi = 60°$$

Logo, $z = 2\sqrt{3}(\cos 60° + \text{i sen } 60°)$

Aplicando a fórmula de De Moivre, temos:

$z^n = (2\sqrt{3})^n[\cos(n \cdot 60°) + \text{i sen}(n \cdot 60°)]$

Para z^n ser real, sua parte imaginária deve ser nula, isto é:

$\text{sen}(n \cdot 60°) = 0 \Rightarrow n \cdot 60° = 0° + k \cdot 180°$, com $k \in \mathbb{Z}$

$\therefore\ n = 3k$, com $k \in \mathbb{Z}$

Como queremos o menor valor inteiro positivo, concluímos que $n = 3$.

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

1. O número $(3x - 12) + (x^2 - 16)\text{i}$ é real se, e somente se, sua parte imaginária é nula. Assim:

$x^2 - 16 = 0 \Rightarrow x = 4$ ou $x = -4$

2. $z = \overline{w} \Rightarrow x^2 + (2 + 3y)\text{i} = x - (x - y)\text{i}$

$$\therefore \begin{cases}x^2 = x\\ 2 + 3y = -x + y\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x^2 - x = 0 & (1)\\ 2y + x = -2 & (2)\end{cases}$$

De (1), temos: $x = 0$ ou $x = 1$

Substituindo x por 0, em (2), chegamos a $y = -1$.

Substituindo x por 1, em (2), chegamos a $y = -\frac{3}{2}$.

Concluímos, então, que ($x = 0$ e $y = -1$) ou

$\left(x = 1 \text{ e } y = -\frac{3}{2}\right)$.

3. $zw - 3\text{i}z + w^2 =$

$= (3 - 2\text{i})(4 - 3\text{i}) - 3\text{i}(3 - 2\text{i}) + (4 - 3\text{i})^2 = 7 - 50\text{i}$

4. a. Sendo $z = x + y\text{i}$, com $\{x, y\} \subset \mathbb{R}$, obtemos:

$2z - 4\overline{z} = 8 + 12\text{i} \Rightarrow 2(x + y\text{i}) - 4(x - y\text{i}) = 8 + 12\text{i}$

$\therefore -2x + 6y\text{i} = 8 + 12\text{i}$

$$\therefore \begin{cases}-2x = 8\\ 6y = 12\end{cases} \Rightarrow x = -4 \text{ e } y = 2 \therefore S = \{-4 + 2\text{i}\}$$

b. Sendo $z = x + y\text{i}$, com $\{x, y\} \subset \mathbb{R}$, obtemos:

$$\frac{z}{z - 2\text{i}} = \frac{\overline{z}}{\text{i}} \Rightarrow \frac{x + y\text{i}}{x + y\text{i} - 2\text{i}} = \frac{x - y\text{i}}{\text{i}}$$

$\therefore x^2 + y^2 - y - 3x\text{i} = 0$

$$\therefore \begin{cases}x^2 + y^2 - y = 0\\ -3x = 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x^2 + y^2 - y = 0 & (1)\\ x = 0 & (2)\end{cases}$$

Substituindo (2) em (1), chegamos a:

$0^2 + y^2 - y = 0 \Rightarrow y = 0$ ou $y = 1$

Assim, deduzimos que $z = 0 + 0\text{i}$ ou $z = 0 + 1\text{i}$.

Logo, o conjunto solução S da equação é: $S = \{0, \text{i}\}$.

5. alternativa **b**

Indicando por z esse produto, temos:

$z = (2 + m\text{i}) \cdot (3 + \text{i}) = 6 - m + (2 + 3m)\text{i}$

Assim, z é imaginário puro se, e somente se,

$$\begin{cases}6 - m\\ 2 + 3m \neq 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}m = 6\\ m \neq -\frac{2}{3}\end{cases} \therefore m = 6$$

6. $\text{i}^{13} = \text{i}^1 = \text{i}$; $\text{i}^9 = \text{i}^1 = \text{i}$ e $\text{i}^{23} = \text{i}^3 = -\text{i}$

Logo:

$$zw = \left(\frac{\text{i}^{13} + \text{i}^9}{2}\right)^{39} \cdot \frac{1}{2 + \text{i}^{23}} = \text{i}^{39} \cdot \frac{1}{2 - \text{i}}$$

Como $i^{39} = i^3 = -i$, concluímos:

$zw = -i \cdot \frac{1}{2 - i} = \frac{1}{5} - \frac{2i}{5}$

7. alternativa **e**

$(1 + i)^9 = (1 + i)^8(1 + i) = [(1 + i)^2]^4 \cdot (1 + i) = 16 + 16i$

$(1 - i)^4 = [(1 + i)^2]^2 = [1 - 2i + i^2]^2 = [-2i]^2 = -4$

$(1 - i)^9 + (1 - i)^4 = 16 + 16i - 4 = 12 + 16i$

8. **a.** Para $t = 1$, temos o número complexo:

$z = 1 + (1 - 1^2)i$, ou seja, $z = 1$.

b. Para $t = 2$, temos o número complexo:

$z = 2 + (1 - 2^2)i$, ou seja, $z = 2 - 3i$.

c. Sendo $z = x + yi$, com $\{x, y\} \subset \mathbb{R}$, os números complexos que descrevem a posição desse estilhaço para $0 \leqslant t \leqslant 2$, temos: $\begin{cases} x = t & (1) \\ y = 1 - t^2 & (2) \end{cases}$

Substituindo (1) em (2), chegamos a: $y = 1 - x^2$

Como $0 \leqslant t \leqslant 2$, deduzimos de (1) e (2), que:

$0 \leqslant x \leqslant 2$ e $-3 \leqslant y \leqslant 1$

Assim, a representação geométrica de todos os números complexos que descrevem a posição desse estilhaço é o arco de parábola de extremos (0, 1) e (2, −3).

9. Sendo $z = x + yi$, com $\{x, y\} \subset \mathbb{R}$, temos:

a. $|z - 3i| = 5 \Rightarrow |x + yi - 3i| = 5 \therefore x^2 + (y - 3)^2 = 25$

O L.G. é a circunferência de equação $x^2 + (y - 3)^2 = 25$.

b. $|z + 4 - 2i| = 3 \Rightarrow |x + yi + 4 - 2i| = 3$

$\therefore (x + 4)^2 + (y - 2)^2 = 9$

O L.G. é a circunferência de equação $(x + 4)^2 + (y - 2)^2 = 9$.

c. $|\bar{z} + z|^2 - 3 \cdot z \cdot \bar{z} = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow |x - yi + x + yi|^2 - 3(x + yi)(x - yi) = 1$

$\therefore x^2 - 3y^2 = 1 \Rightarrow x^2 - \frac{y^2}{\frac{1}{3}} = 1$

Logo, o lugar geométrico que satisfaz as condições do enunciado representa, no plano de Argand-Gauss, uma hipérbole com o centro na origem, focos $F_1\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}, 0\right)$ e $F_2\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, 0\right)$, eixo real contido no eixo das abscissas e intersectando esse eixo nos pontos (−1, 0) e (1, 0).

10. alternativa **b**

$|z - 5 - 5i| = 3 \Rightarrow |x + yi - 5 - 5i| = 3$

$\therefore (x - 5)^2 + (y - 5)^2 = 9$

Deduzimos, então, que a trajetória da partícula A é a circunferência λ de centro $C(5, 5)$ e raio 3.

O ponto de λ mais próximo de $O(0, 0)$ pertence à reta r que passa por O e por $C(5, 5)$; logo, a equação de r é $y = x$.

Concluímos, então, que a trajetória da partícula B é formada pelas imagens dos números complexos $w = x + yi$, com $\{x, y\} \subset \mathbb{R}$, tais que $y = x$.

11. **a.** $z_1 = -2 - 2i \rightarrow \begin{cases} \text{parte real: } -2 \\ \text{parte imaginária: } -2 \end{cases}$

O módulo ρ e o argumento φ são dados por:

$\rho = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$\begin{cases} \cos\varphi = -\frac{2}{2\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \text{sen}\,\varphi = \frac{-2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \varphi = 225°$

ou $\varphi = \frac{5\pi}{4}$

Logo, a forma trigonométrica de z_1 é:

$z_1 = 2\sqrt{2}(\cos 225° + i\,\text{sen}\,225°)$ ou

$z_1 = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\,\text{sen}\,\frac{5\pi}{4}\right)$

b. $z_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2} \rightarrow \begin{cases} \text{parte real: } \frac{\sqrt{3}}{1} \\ \text{parte imaginária: } -\frac{1}{2} \end{cases}$

O módulo ρ e o argumento φ são dados por:

$\rho = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = 1$

$\begin{cases} \cos\varphi = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \text{sen}\,\varphi = \frac{-\frac{1}{2}}{1} = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \varphi = 330°$ ou $\varphi = \frac{11\pi}{6}$

Logo, a forma trigonométrica de z_2 é:

$z_2 = \cos 330° + i\,\text{sen}\,330°$ ou $z_2 = \cos\frac{11\pi}{6} + i\,\text{sen}\,\frac{11\pi}{6}$

c. $z_3 = -2\sqrt{3} - 2i \rightarrow \begin{cases} \text{parte real: } -2\sqrt{3} \\ \text{parte imaginária: } -2 \end{cases}$

O módulo ρ e o argumento φ são dados por:

$\rho = \sqrt{(-2\sqrt{3})^2 + (-2)^2} = \sqrt{12 + 4} = \sqrt{16} = 4$

$\begin{cases} \cos\varphi = -\frac{2\sqrt{3}}{4} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \text{sen}\,\varphi = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \varphi = 210°$ ou $\varphi = \frac{7\pi}{6}$

Logo, a forma trigonométrica de z_3 é:

$z_3 = 4(\cos 210° + i\,\text{sen}\,210°)$ ou

$z_3 = 4\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\,\text{sen}\,\frac{7\pi}{6}\right)$

12. **a.** Representando $z = \sqrt{3} + i$ na forma trigonométrica, temos:

$z = \sqrt{3} + i \rightarrow \begin{cases} \text{parte real: } \sqrt{3} \\ \text{parte imaginária: } 1 \end{cases}$

O módulo ρ e o argumento φ são dados por:

$\rho = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (1)^2} = \sqrt{3 + 1} = \sqrt{4} = 2$

$\begin{cases} \cos\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \text{sen}\,\varphi = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \varphi = 30°$

$\therefore z = 2(\cos 30° + i\,\text{sen}\,30°)$

Portanto, o ponto P associado ao número z dista 2 unidades da origem O, e a semirreta $\overrightarrow{OP}$ forma um ângulo de 30° com o eixo real.

Como o triângulo está inscrito na circunferência, então todos os vértices do triângulo pertencem à circunferência. Sabendo que a circunferência tem centro na origem e $\overline{OP} = 2$, concluímos que a circunferência tem raio medindo 2.

Os outros vértices P_1 e P_2 do triângulo, associados respectivamente aos números complexos z_1 e z_2, também são pontos da circunferência. Logo: $|z| = |z_1| = |z_2| = 2$

Note que os pontos P_1 e P_2 podem ser obtidos pela rotação de P na origem. Como o triângulo é equilátero, as medidas dos ângulos formados entre as semirretas $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OP_1}$ e $\overrightarrow{OP_2}$ são iguais. Logo, a medida desse ângulo é dada por: $\frac{360°}{3} = 120°$. Portanto, temos:

$z_1 = 2(\cos(30°+120°) + i\,\text{sen}\,(30°+120°)) \Rightarrow$

$\Rightarrow z_1 = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = -\sqrt{3} + i$

$z_2 = 2(\cos(150°+120°) + i\,\text{sen}\,(150°+120°)) \Rightarrow$

$\Rightarrow z_2 = 2(0 + i \cdot 1) = -2i$

b. Dos números complexos z, z_1 e z_2 obtidos, temos $P(\sqrt{3}, 1)$, $P_1(-\sqrt{3}, 1)$ e $P_2(0, -2)$. Logo, a medida do lado desse triângulo é:

$d_{P_1P_2} = \sqrt{(-\sqrt{3} - 0)^2 + (1 - (-2))^2} = 2\sqrt{3}$

13. a. $\frac{z}{w} = \frac{20\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\,\text{sen}\,\frac{5\pi}{3}\right)}{5\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\,\text{sen}\,\frac{7\pi}{6}\right)} = 4i$

b. $\frac{w}{u} = \frac{5\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\,\text{sen}\,\frac{7\pi}{6}\right)}{1\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{6}\right)} = -5$

c. $\frac{wu}{z} = \frac{\left[5\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\,\text{sen}\,\frac{7\pi}{6}\right)\right]\left[1\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{6}\right)\right]}{20\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\,\text{sen}\,\frac{5\pi}{3}\right)} =$

$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2} - \frac{i \cdot \sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{8} - \frac{\sqrt{3}\,i}{8}$

d. $\frac{1}{u} = \frac{1(\cos 2\pi + i\,\text{sen}\,2\pi)}{1\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{6}\right)} =$

$= \left(\frac{1}{1}\right)\left[\cos\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right) + i\,\text{sen}\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right)\right] =$

$= 1\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\,\text{sen}\,\frac{11\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$

14. a. O centro de um hexágono regular é o centro da circunferência circunscrita, que também é o centro da circunferência inscrita nele. Como a medida do lado do hexágono regular é igual à medida do raio da circunferência circunscrita, deduzimos que $AO = AB = 3$. Assim, o módulo de z_A é 3 e o seu argumento é 10°, logo a forma trigonométrica é:

$z_A = 3(\cos 10° + i\,\text{sen}\,10°)$

b. O módulo de z_B é 3 e o seu argumento é 10° + 60°, pois o ângulo central do hexágono regular mede 60°. Assim, a forma trigonométrica de z_B é:

$z_B = 3(\cos 10° + i\,\text{sen}\,10°) \cdot \underbrace{1(\cos 60° + i\,\text{sen}\,60°)}_{w}$

$z_B = 3[\cos(10° + 60°) + i\,\text{sen}(10° + 60°)]$

Observando que:

$z_B = 3(\cos 10° + i\,\text{sen}\,10°) \cdot \underbrace{1(\cos 60° + i\,\text{sen}\,60°)}_{w}$

Concluímos que: $w = 1(\cos 60° + i\,\text{sen}\,60°)$

c. A rotação de 240° do ponto A, em torno da origem O, no sentido anti-horário resulta no ponto E. Assim, o ponto E é o afixo do número complexo k.

O módulo de k é 3 e o seu argumento é 10° + 240°. assim, a forma trigonométrica de k é:

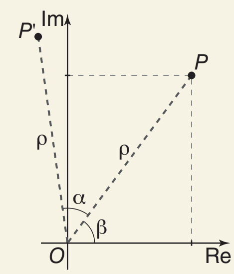
$k = 3[\cos(10° + 240°) + i\,\text{sen}(10° + 240°)]$

Observando que:

$k = 3(\cos 10° + i\,\text{sen}\,10°) \cdot \underbrace{1(\cos 240° + i\,\text{sen}\,240°)}_{k}$

Concluímos que: $k = 1(\cos 240° + i\,\text{sen}\,240°)$

d. Sendo ρ e β o módulo e o argumento de z_p, respectivamente, e sendo P' o ponto resultante da rotação de P, esquematizamos:



ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

$z_P = \rho(\cos\beta + i\,\text{sen}\,\beta)$ e o complexo $z_{P'}$ cujo afixo é P' na forma trigonométrica é $z_{P'} = \rho[\cos(\beta + \alpha) + i\,\text{sen}(\beta + \alpha)]$.

Sendo $z = x(\cos y + i\,\text{sen}\,y)$ o número complexo que multiplicado por z_P resulta em $z_{P'}$, temos:

$z_P \cdot z = z_{P'} \Rightarrow \rho(\cos\beta + i\,\text{sen}\,\beta) \cdot x(\cos y + i\,\text{sen}\,y) =$

$= \rho[\cos(\beta + \alpha) + i\,\text{sen}(\beta + \alpha)]$

$\therefore \rho \cdot x[\cos(\beta + y) + i\,\text{sen}(\beta + y)] =$

$= \rho[\cos(\beta + \alpha) + i\,\text{sen}(\beta + \alpha)] \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} \rho x = \rho \\ \cos(\beta + y) = \cos(\beta + \alpha) \\ \text{sen}(\beta + y) = \text{sen}(\beta + \alpha) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \rho x = \rho \\ \beta + y = \beta + \alpha \end{cases} \Rightarrow x = 1 \text{ e } y = \alpha$$

Logo, $z = 1(\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha)$.

Concluímos, então que o número que multiplicado por z_P provoca uma rotação α no ponto P' tem módulo 1 e argumento α.

15. a. Representando a base da potência na forma trigonométrica, temos:

$$z = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}\,i}{2} \rightarrow \begin{cases} \text{parte real: } -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \text{parte imaginária: } -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

O módulo ρ e o argumento φ são dados por:

$\rho = \sqrt{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{2}{4} + \frac{2}{4}} = \sqrt{1} = 1$

$$\begin{cases} \cos\varphi = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{1} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \text{sen}\,\varphi = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{1} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \varphi = 225°$$

Logo, a forma trigonométrica de z é dada por:

$z = \cos 225° + i\,\text{sen}\,225°$

Pela fórmula de De Moivre, temos:

$z^{100} = \cos(100 \cdot 225) + i\,\text{sen}\,(100° \cdot 225°)$

Reduzindo $(100 \cdot 225°)$ à primeira volta positiva, obtemos $180°$.

Assim: $z^{100} = \cos 180° + i \operatorname{sen} 180° = -1 + 0 = -1$

b. Dividindo 43 por 4, obtemos resto 3; logo $i^{43} = i^3$.

Assim: $z = 2\sqrt{3} + i - i^{43} = 2\sqrt{3} + i - i^3 = 2\sqrt{3} + i + i$

$\therefore z = 2\sqrt{3} + 2i \rightarrow \begin{cases} \text{parte real: } -\sqrt{3} \\ \text{parte imaginária: } 2 \end{cases}$

Sendo ρ e φ o módulo e o argumento de z, respectivamente:

$\rho = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + 2^2} = \sqrt{12 + 4} = \sqrt{16} = 4$

$$\begin{cases} \cos \varphi = \dfrac{2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \operatorname{sen} \varphi = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \varphi = 30°$$

Logo, a forma trigonométrica de z é dada por:

$z = 4(\cos 30° + i \operatorname{sen} 30°)$

Pela fórmula de De Moivre, temos:

$z^6 = 4^6[\cos(6 \cdot 30°) + i \operatorname{sen}(6 \cdot 30°)] =$

$= 4.096(\cos 180° + i \operatorname{sen} 180°) = 4.096(-1 + 0) = -4.096$

VERIFIQUE O QUE APRENDEU NO CAPÍTULO 9

1. a. $x^2 - 2x + 26 = 0$; $\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 26 = -100$

As raízes quadradas de -100 são $10i$ e $-10i$; assim:

$x = \dfrac{-(-2) \pm 10i}{2 \cdot 1} = 1 \pm 5i$

Logo, $S = \{1 + 5i, 1 - 5i\}$.

b. $x^2 + ix + 2 = 0$; $\Delta = (i)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = -9$

As raízes quadradas de -9 são $3i$ e $-3i$; assim:

$x = \dfrac{-i \pm 3i}{2 \cdot 1} \Rightarrow x = i$ ou $x = -2i$

Logo, $S = \{i, -2i\}$.

c. $x^2 - 4x + 5 = 0$; $\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = -4$

As raízes quadradas de -4 são $2i$ e $-2i$; assim:

$x = \dfrac{-(-4) \pm 2i}{2 \cdot 1} = 2 \pm i$

Logo, $S = \{2 + i, 2 - i\}$.

d. $z^3 - 8 = 0 \Rightarrow z^3 - 2^3 = 0$

$\therefore (z - 2)(z^2 + 2z + 2^2) = 0 \Rightarrow z = 0$ ou $z^2 + 2z + 4 = 0$

De $z^2 + 2z + 4 = 0$, temos: $\Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = -12$

As raízes quadradas de -12 são $2i\sqrt{3}$ e $-2i\sqrt{3}$; assim:

$z = \dfrac{-2 \pm 2i\sqrt{3}}{2} = 1 \pm i\sqrt{3}$

Logo, $S = \{2, -1 + i\sqrt{3}, -1 - i\sqrt{3}\}$.

2. Sendo $d = |z_1 - z_2|$ a distância entre as imagens de dois números complexos, z_1 e z_2, temos:

a. $d = |z_1 - z_2| = |(2 - 3i) - (7 + 15i)| = |-5 - 12i| =$

$= \sqrt{(-5)^2 + (-12)^2} = 13$

b. $d = |z_1 - z_2| = |(4 + i) - (2 - i)| = |2 + 2i| = \sqrt{(2)^2 + (2)^2}$

$= \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

3. Pela fórmula de De Moivre, temos:

$z^{36} = 1^{36}\left[\cos\left(36 \cdot \frac{\pi}{24}\right) + i \operatorname{sen}\left(36 \cdot \frac{\pi}{24}\right)\right] = -i$

$z^{12} = 1^{12}\left[\cos 12\left(\frac{\pi}{24}\right) + i \operatorname{sen} 12\left(\frac{\pi}{24}\right)\right] =$

$= \cos \frac{\pi}{2} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} = i$

Substituindo os valores obtidos na igualdade $z^{36} - z^{12} + 2i = 0$, obtemos:

$z^{36} - z^{12} + 2i = -i - i + 2i = 0$

Assim, mostramos que $\cos \frac{\pi}{24} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{24}$ é raiz da equação.

CAPÍTULO 10 Polinômios e equações polinomiais

ALÉM DA TEORIA

3. $h(3) = 30 \cdot 3 - 5 \cdot (3)^2 = 45$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Para que o polinômio $P(x)$ seja identicamente nulo devemos ter $P(x) \equiv 0$, ou seja, todos os coeficientes devem valer zero. Assim:

$P(x) \equiv 0 \Rightarrow (2a + 3b)x^4 - (a - b + 5)x^2 \equiv 0$

$\therefore \begin{cases} 2a + 3b = 0 \\ -(a - b + 5) = 0 \end{cases} \Rightarrow a = -3$ e $b = 2$

2. a. Observando que o coeficiente de x^2 é diferente de zero, deduzimos que $P(x)$ será do 2º grau se, e somente se, o coeficiente de x^3 for igual a zero, ou seja:

$3m - 12 = 0 \Rightarrow m = 4$

3. $P(-2) = 5 \Rightarrow (-2)^3 + (a + 4) \cdot (-2)^2 + 1 = 5 \therefore a = -1$

4. Indicando o polinômio do 2º grau por $P(x) \equiv ax^2 + bx + c$, temos:

$$\begin{cases} a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = 2 \\ a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = 3 \\ a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c = 8 \end{cases} \Rightarrow a = 2, b = -1 \text{ e } c = 2$$

$\therefore P(x) \equiv 2x^2 - x + 2$

5. a. $2x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$ ou $x = -\frac{1}{2}$

b. $x^3 + 1 = 0 \Rightarrow (x + 1)(x^2 - x + 1) = 0$

$\therefore x + 1 = 0$ ou $x^2 - x + 1 = 0$

$\therefore x = -1$ ou $x = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}\,i}{2}$ ou $x = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}\,i}{2}$

c. $T(x) \equiv x(x^2 + 1) - 4(x^2 + 1) \Rightarrow T(x) \equiv (x - 4)(x^2 + 1)$

$\therefore (x - 4)(x^2 + 1) = 0 \Rightarrow x = 4$ ou $x = i$ ou $x = -i$

6. $P(x) \equiv (2a - b)x^4 + ax^3 + (3b - 2a)x^2 + 1$ e que 1 e -1 são raízes.

- Se 1 é raiz, então $P(1) = 0$
- Se -1 é raiz, então $P(-1) = 0$

Assim:

$$\begin{cases} (2a - b) \cdot 1^4 + a \cdot 1^3 + (3b - 2a) \cdot 1^2 + 1 = 0 \\ (2a - b) \cdot (-1)^4 + a \cdot (-1)^3 + (3b - 2a) \cdot (-1)^2 + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \begin{cases} a + 2b = -1 \\ -a + 2b = -1 \end{cases} \therefore a = 0$ e $b = -\frac{1}{2}$

7. b. Para $x + 26 = 30$, temos que $x = 4$.

Do item **a**, para $x = 4$, obtemos:

$P(4) = 4^3 + 3 \cdot 4^2 + 4 + 26 = 142$

8. Para que $P(x) \equiv Q(x)$, devemos ter:

$$\begin{cases} k^2 - 1 = 8 \quad (1) \\ k - 3 = 0 \quad (2) \end{cases} \qquad \begin{array}{l} \text{De (1), temos: } k = 3 \text{ ou } k = -3 \\ \text{De (2), temos: } k = 3 \end{array}$$

O único valor de k que satisfaz (1) e (2) simultaneamente é 3.

9. $P(x) \equiv Q(x) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2 + c = a + b \\ -2a = -(b + 5) \\ a - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow a = 4,\ b = 3 \text{ e } c = 5$$

10. a. $P(x) + Q(x) \equiv$

$\equiv (3 + 0)x^3 + (2 + 1)x^2 + (-4 + 3)x + 0 - 1$

$\therefore P(x) + Q(x) \equiv 3x^3 + 3x^2 - x - 1$

b. $P(x) - Q(x) \equiv$

$\equiv (3 - 0)x^3 + (2 - 1)x^2 + (-4 - 3)x + [0 - (-1)]$

$\therefore P(x) - Q(x) \equiv 3x^3 + x^2 - 7x + 1$

c. $4P(x) \equiv 4 \cdot 3x^3 + 4 \cdot 2x^2 + 4 \cdot (-4x)$

$\therefore 4\,P(x) \equiv 12x^3 + 8x^2 - 16x$

d. $2P(x) - 5Q(x) \equiv 6x^3 + 4x^2 - 8x - 5x^2 - 15x + 5$

$\therefore 2P(x) - 5Q(x) \equiv 6x^3 - x^2 - 23x + 5$

e. $Q(x) \cdot T(x) + P(x) \equiv$

$\equiv (x^2 + 3x - 1) \cdot (4x - 2) + 3x^3 + 2x^2 - 4x \Rightarrow$

$\Rightarrow Q(x) \cdot T(x) + P(x) \equiv$

$\equiv 4x^3 - 2x^2 + 12x^2 - 6x - 4x + 2 + 3x^3 + 2x^2 - 4x$

$\therefore Q(x) \cdot T(x) + P(x) \equiv 7x^3 + 12x^2 - 14x + 2$

f. $[Q(x)]^2 \equiv Q(x) \cdot Q(x) \equiv$

$\equiv (x^2 + 3x - 1) \cdot (x^2 + 3x - 1) \equiv$

$\equiv x^4 + 3x^3 - x^2 + 3x^3 + 9x^2 - 3x - x^2 - 3x + 1$

$\therefore [Q(x)]^2 \equiv x^4 + 6x^3 + 7x^2 - 6x + 1$

11. $P(x) + 3Q(x) \equiv 2T(x)$, então $P(x) \equiv 2T(x) - 3Q(x)$.

$P(x) \equiv 2x^3 + 4x + 8 - 6x^4 + 12x^3 - 9x^2 + 3$

$\therefore P(x) \equiv -6x^4 + 14x^3 - 9x^2 + 4x + 11$

12. $(x^3 + x + 1)(ax + b) + 4x^2 - 3x - 1 \equiv 2x^4 + x^3 + 6x^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow ax^4 + bx^3 + ax^2 + bx + ax + b + 4x^2 - 3x - 1 \equiv$

$\equiv 2x^4 + x^3 + 6x^2$

$\therefore ax^4 + bx^3 + (a + 4)x^2 + (a + b - 3)x + b - 1 \equiv$

$\equiv 2x^4 + x^3 + 6x^2$

Assim:

$$\begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \\ a + 4 = 6 \\ a + b - 3 = 0 \\ b - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \\ a = 2 \\ a + b = 3 \\ b = 1 \end{cases} \quad \therefore a = 2;\ b = 1$$

13. O volume V do filtro, em centímetro cúbico, é dado por:

$V = \pi \cdot (x + 4)^2 \cdot x - \pi \cdot x^2 \cdot x \Rightarrow$

$\Rightarrow V = \pi \cdot (x^2 + 8x + 16) \cdot x - \pi \cdot x^2 \cdot x$

$\therefore V = \pi x^3 + 8\pi x^2 + 16\pi x - \pi x^3 \Rightarrow = 8\pi x^2 + 16\pi x$

15. a.

$$\begin{array}{rrrrr|l}
8x^4 & +\,4x^3 & +\,10x^2 & +\,14x & -\,1 & 2x^2 + 3 \\ \cline{6-6}
\ominus\ 8x^4 & & +\,12x^2 & & & \underbrace{4x^2 + 2x - 1}_{\text{Quociente}} \\ \cline{1-5}
 & 4x^3 & -\,2x^2 & +\,14x & -\,1 & \\
 & \ominus\ 4x^3 & & +\,6x & & \\ \cline{2-5}
 & & -2x^2 & +\,8x & -\,1 & \\
 & & \ominus\ -2x^2 & & -\,3 & \\ \cline{3-5}
 & & & \underbrace{8x + 2}_{\text{Resto}} & &
\end{array}$$

b.

$$\begin{array}{rrrrrr|l}
x^5 & +\,x^4 & +\,3x^3 & +\,x^2 & +\,4x & +\,2 & x^3 + 2x - 1 \\ \cline{7-7}
\ominus\ x^5 & & +\,2x^3 & -\,x^2 & & & x^2 + x + 1 \\ \cline{1-6}
 & x^4 & +\,x^3 & +\,2x^2 & +\,4x & +\,2 & \\
 & \ominus\ x^4 & & +\,2x^2 & -\,x & & \\ \cline{2-6}
 & & x^3 & +\,0x^2 & +\,5x & +\,2 & \\
 & & \ominus\ x^3 & & +\,2x & -\,1 & \\ \cline{3-6}
 & & & & 3x & +\,3 &
\end{array}$$

c.

$$\begin{array}{rrrrr|l}
x^4 & +\,0x^3 & +\,0x^2 & +\,0x & -\,1 & x - 1 \\ \cline{6-6}
\ominus\ x^4 & -\,x^3 & & & & x^3 + x^2 + x + 1 \\ \cline{1-5}
 & x^3 & +\,0x^2 & +\,0x & -\,1 & \\
 & \ominus\ x^3 & -\,x^2 & & & \\ \cline{2-5}
 & & x^2 & +\,0x & -\,1 & \\
 & & \ominus\ x^2 & +\,x & & \\ \cline{3-5}
 & & & x & -\,1 & \\
 & & & x & -\,1 & \\ \cline{4-5}
 & & & 0x & +\,0 &
\end{array}$$

16. Do enunciado, temos:

$2x^4 + 6x^3 - x^2 - 3x + 5 \equiv D(x) \cdot (2x^2 - 1) + 5$

$\text{gr}(Q) = \text{gr}(E) - \text{gr}(D) \Rightarrow \text{gr}(D) = 4 - 2 = 2$

Assim: $D(x) \equiv ax^2 + bx + c$

Logo:

$2x^4 + 6x^3 - x^2 - 3x + 5 \equiv (ax^2 + bx + c)(2x^2 - 1) + 5 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2x^4 + 6x^3 - x^2 - 3x + 5 \equiv$

$\equiv 2ax^4 - ax^2 + 2bx^3 - bx + 2cx^2 - c + 5$

$\therefore\ 2x^4 + 6x^3 - x^2 - 3x + 5 \equiv$

$\equiv 2ax^4 + 2bx^3 + (-a + 2c)x^2 - bx - c + 5$

Assim:

$$\begin{cases} 2a = 2 \\ 2b = 6 \\ -a + 2c = -1 \\ -b = -3 \\ -c + 5 = 5 \end{cases} \Rightarrow\ a = 1,\ b = 3 \text{ e } c = 0$$

$\therefore D\,(x) \equiv x^2 + 3x$

17. a. O volume V do paralelepípedo é calculado pelo produto da área B da base pela altura H. Assim, $V(x) \equiv B(x) \cdot H(x)$, portanto, $B(x)$ é o quociente exato de $V(x)$ por $H(x)$, isto é:

$$\begin{array}{rrrr|l}
x^3 & +\,10x^2 & +\,31x & +\,30 & x + 5 \\ \cline{5-5}
\ominus\ x^3 & +\,5x^2 & & & x^2 + 5x + 6 \\ \cline{1-4}
 & 5x^2 & +\,31x & +\,30 & \\
 & \ominus\ 5x^2 & +\,25x & & \\ \cline{2-4}
 & & 6x & +\,30 & \\
 & & \ominus\ 6x & +\,30 & \\ \cline{3-4}
 & & & 0 &
\end{array}$$

b. Conforme o enunciado, o polinômio $V(x) \equiv x^3 + 10x^2 + 31x + 30$ expressa o volume da caixa em metro cúbico. Como cada metro cúbico equivale a 1.000 L, concluímos que o polinômio $U(x)$, que expressa a capacidade da caixa, em litro, é dado por:

$U(x) \equiv 1.000 \cdot V(x) \Rightarrow$

$\Rightarrow U(x) \equiv 1.000x^3 + 10.000x^2 + 31.000x + 30.000$

18. a. $P(2) = 3 \cdot 2^4 - 2 \cdot 2^3 + 1 = 33$

b. $P(-1) = (-1)^3 + 6 \cdot (-1)^2 - 5 \cdot (-1) - 10 = 0$

c. $P\left(\frac{1}{2}\right) = 32 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 - 8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 1 = \frac{1}{4}$

19. Pelo teorema do resto, temos que o resto R da divisão de $P(x)$ por $x - 2$ é igual a $P(2)$; logo:
$P(2) = 6 \Rightarrow 2^4 + (m + 3) \cdot 2^2 + m \cdot 2 - 4 = 6$
$\therefore m = -3$

20. $P(x) \equiv (3x^2 - 1)(x^2 + 2x + k) - 4x$
Como o resto da divisão de $P(x)$ por $x - 2$ é 91, temos que
$P(2) = 91 \Rightarrow (3 \cdot 2^2 - 1)(2^2 + 2 \cdot 2 + k) - 4 \cdot 2 = 91$
$\therefore k = 1$

21. Pelo teorema do resto, temos que $P(-2) = 32$ e $P(1) = -4$.
Assim:

$$\begin{cases} (-2)^4 + a \cdot (-2)^2 - 3 \cdot (-2) + b = 32 \\ 1^4 + a \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 + b = -4 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4a + b = 10 \\ a + b = -2 \end{cases} \therefore a = 4 \text{ e } b = -6$$

22. Se $P(x) = ax^2 + bx + c$, com $\{a, b, c\} \subset \mathbb{C}$, então:
$P(2) = 3 \Rightarrow 4a + 2b + c = 3$
$P(3) = 10 \Rightarrow 9a + 3b + c = 10$
$P(4) = 21 \Rightarrow 16a + 4b + c = 21$

Resolvendo o sistema: $\begin{cases} c + 2b + 4a = 3 \\ c + 3b + 9a = 10 \\ c + 4b + 16a = 21 \end{cases}$

obtemos $a = 2$, $b = -3$ e $c = 1$.
Logo: $P(x) \equiv 2x^2 - 3x + 1$

23. a. Verdadeira, pois $P\left(\frac{1}{2}\right) = 0$

b. Verdadeira, pois $P(-1) = 0$

c. Falsa, pois $P(3) = 260 \neq 0$

d. Verdadeira, pois $P(2\text{i}) = 0$

24. Pelo teorema de D'Alembert, devemos ter $P(\text{i}) = 0$, ou seja:
$(\text{i})^3 - \text{i} \cdot \text{i}^2 + a^2\text{i} - a\text{i} = 0 \Rightarrow -\text{i} + \text{i} + a^2\text{i} - a\text{i} = 0$
$\therefore (a^2 - a)\text{i} = 0 \Rightarrow a^2 - a = 0 \therefore a = 0$ ou $a = 1$

25. Para que $p(x) \equiv x^3 + 5x^2 + ax + b$ seja divisível por $x - 1$ e por $x - 3$, devemos ter:

$$\begin{cases} P(1) = 0 \\ P(3) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1^3 + 5 \cdot 1^2 + a \cdot 1 + b = 0 \\ 3^3 + 5 \cdot 3^2 + a \cdot 3 + b = 0 \end{cases}$$

Logo:

$$\begin{cases} a + b = -6 \\ 3a + b = -72 \end{cases} \Rightarrow a = -33 \text{ e } b = 27$$

26. b. Se o polinômio $Q(x) \equiv 2x^4 - x^2 + ax + b$ é divisível pelo produto $(x - 1)(x + 2)$, então $Q(x)$ é divisível por $x - 1$ e por $x + 2$. Assim:

$$\begin{cases} Q(1) = 0 \\ Q(-2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 \cdot 1^4 - 1^2 + a \cdot 1 + b = 0 \\ 2 \cdot (-2)^4 - (-2)^2 + a \cdot (-2) + b = 0 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} a + b = -1 \\ 2a - b = 28 \end{cases} \Rightarrow a = 9 \text{ e } b = -10$$

27. $P(x)$ é divisível por $x + 1$ se, e somente se, $P(-1) = 0$, ou seja, $(-1)^n - 1 = 0$ e, portanto, $(-1)^n = 1$. Essa igualdade é satisfeita para qualquer número n par, não nulo, do universo considerado.

28. a.

2	6	−1	3	1	−2
	6	11	25	51	100

Logo: $Q(x) \equiv 6x^3 + 11x^2 + 25x + 51$ e $R = 100$

b.

−1	2	0	1	0	−3	1
	2	−2	3	−3	0	1

Logo: $Q(x) \equiv 2x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 3x$ e $R = 1$

c.

3	1	0	0	0	−81
	1	3	9	27	0

Logo: $Q(x) \equiv x^3 + 3x^2 + 9x + 27$ e $R = 0$

29.

1	1	0	0	0	0	−1
	1	1	1	1	1	0

Logo, o quociente $Q(x)$ e o resto R da divisão de $P(x)$ por $x - 1$ são:
$Q(x) \equiv x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ e $R = 0$
Como $P(x) \equiv Q(x) \cdot (x - 1) + R$, concluímos:
$P(x) \equiv (x - 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$

30. Como $P(-1) = 0$, concluímos que $P(x)$ é divisível por $x + 1$. Sendo $Q(x)$ o quociente dessa divisão, temos:

−1	1	0	0	0	0	0	0	1
	1	−1	1	−1	1	−1	1	0

Logo: $Q(x) \equiv x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$
Então, temos:
$P(x) \equiv (x + 1)(x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + 1)$

31. a. $\frac{E(x)}{3x - 3} \equiv \frac{E(x)}{3(x - 1)} \equiv \frac{\frac{E(x)}{x - 1}}{3}$ (com $x \neq 1$)

Inicialmente, dividimos $E(x)$ por $x - 1$, obtendo o quociente $Q_1(x)$ e o resto R_1:
$Q_1(x) \equiv x^4 + x^3 - 2x^2 - x - 1$ e $R_1 = -2$; logo:
$Q(x) \equiv \frac{x^4}{3} + \frac{x^3}{3} - \frac{2x^2}{3} - \frac{x}{3} - \frac{1}{3}$ e $R = -2$

b. $\frac{E(x)}{2x - 1} \equiv \frac{E(x)}{2\left(x - \frac{1}{2}\right)} \equiv \frac{\frac{E(x)}{x - \frac{1}{2}}}{2}$ $\left(\text{com } x \neq \frac{1}{2}\right)$

Inicialmente dividimos $E(x)$ por $x - \frac{1}{2}$, obtendo o quociente $Q_1(x)$ e o resto R_1:
$Q_1(x) \equiv 6x^2 + 3x + \frac{7}{2}$ e $R_1 = \frac{15}{4}$
$\therefore Q(x) \equiv 3x^2 + \frac{3x}{2} + \frac{7}{4}$ e $R = \frac{15}{4}$

c. $\frac{E(x)}{2x - 1} \equiv \frac{E(x)}{-(x - 2)} \equiv \frac{\frac{E(x)}{x - 2}}{-1}$ (com $x \neq 2$)

Inicialmente, dividimos $E(x)$ por $x - 2$, obtendo o quociente $Q_1(x)$ e o resto R_1:
$Q_1(x) = x^5 + 2x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 16x + 32$ e $R_1 = 63$;
$\therefore Q(x) \equiv -x^5 - 2x^4 - 4x^3 - 8x^2 - 16x - 32$ e $R = 63$

32. a. A raiz do polinômio $D(x)$ é $\frac{1}{3}$; logo, o resto R da divisão de $P(x)$ por $D(x)$ é dado por: $R = P\left(\frac{1}{3}\right) = 1$

b. A raiz do polinômio $D(x)$ é $-\frac{1}{2}$; logo, o resto R da divisão de $P(x)$ por $D(x)$ é dado por: $R = P\left(-\frac{1}{2}\right) = -1$

c. A raiz do polinômio $D(x)$ é i; logo, o resto R da divisão de $P(x)$ por $D(x)$ é dado: $R = P(\mathrm{i}) = -2 + 2\mathrm{i}$

33. $P\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{45}{16} \Rightarrow \frac{1}{16} + \frac{k}{4} + 3 = \frac{45}{16} \Rightarrow k = -1$

34. Devemos ter $P(2) = 0$, ou seja, $k = -58$

35. a. O volume $V(x)$ de desinfetante do reservatório cheio, em decímetro cúbico, pode ser expresso pelo polinômio $V(x) \equiv [x^2 + 3kx + k] \cdot 2x$ ou pelo polinômio $V(x) \equiv \left(\frac{x}{5} - \frac{1}{5}\right) \cdot Q(x)$. Assim, temos que:
$[x^2 + 3kx + k] \cdot 2x \equiv \left(\frac{x}{5} - \frac{1}{5}\right) \cdot Q(x)$
Deduzimos, então, que o polinômio
$V(x) \equiv [x^2 + 3kx + k] \cdot 2x$ é divisível por $\frac{x}{5} - \frac{1}{5}$, portanto, $V(1) = 0$. Logo: $k = -\frac{1}{4}$

b. Observamos que 1 dm^3 = 1 L. Assim, para $k = -\frac{1}{4}$, temos que a capacidade do reservatório, em litro, é dada por:
$$V(x) \equiv \left[x^2 + 3 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) \cdot x + \left(-\frac{1}{4}\right)\right] \cdot 2x,$$
ou seja, $V(x) \equiv 2x^3 - \frac{3x^2}{2} - \frac{x}{2}$
Se a capacidade de cada recipiente for 5,8 L, temos que:
$$C(x) = 5{,}8 \Rightarrow \frac{x}{5} - \frac{1}{5} = 5{,}8 \therefore x = 30$$
Assim, calculamos:
$V(30) \equiv 2 \cdot 30^3 - \frac{3 \cdot 30^2}{2} - \frac{30}{2} \Rightarrow V(30) = 52.635$

37. a. $(x - 1)(x - 2)(x - 4) = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow (x^2 - 2x - x + 2)(x - 4) = 0$
$\therefore (x^2 - 3x + 2)(x - 4) = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow x^3 - 4x^2 - 3x^2 + 12x + 2x - 8 = 0$
$\therefore x^3 - 7x^2 + 14x - 8 = 0$

b. $(x - 5)(x - 1)(x - 1) = 0 \Rightarrow (x - 5)(x - 1)^2 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow (x - 5)(x^2 - 2x + 1) = 0$
$\therefore x^3 - 2x^2 + x - 5x^2 + 10x - 5 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow x^3 - 7x^2 + 11x - 5 = 0$

c. $3(x - 2)(x - 2)(x - 2)(x - 2) = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow 3(x - 2)^2 \cdot (x - 2)^2 = 0$
$\therefore 3(x^2 - 4x + 4)(x^2 - 4x + 4) = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow 3(x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 4x^3 + 16x^2 - 16x + 4x^2 - 16x + 16) = 0$
Logo: $3x^4 - 24x^3 + 72x^2 - 96x + 48 = 0$

38. O polinômio $P(x) \equiv x^3 - 7x^2 + 12x - 10$ é divisível por $x - 5$, pois $P(5) = 0$; portanto, $P(x)$ pode ser escrito como $P(x) = (x - 5) \cdot Q(x)$. Por Briot-Ruffini, temos:

5	1	−7	12	−10
	1	−2	2	0

$\therefore P(x) \equiv (x - 5)(x^2 - 2x + 2)$

Assim, a equação $x^3 - 7x^2 + 12x - 10 = 0$ é equivalente a: $(x - 5)(x^2 - 2x + 2) = 0$
Pela propriedade do produto nulo, temos:
$x - 5 = 0$ ou $x^2 - 2x + 2 = 0 \therefore x = 5$ ou $x = 1 \pm \mathrm{i}$

39.

−2	2	−2	−13	1	6
3	2	−6	−1	3	0
	2	0	−1	0	

Assim, a equação $2x^4 - 2x^3 - 13x^2 + x + 6 = 0$ é equivalente a: $(x + 2)(x - 3)(2x^2 - 1) = 0$
Pela propriedade do produto nulo, temos:
$x + 2 = 0$ ou $x - 3 = 0$ ou $2x^2 - 1 = 0$
$\therefore x = -2$ ou $x = 3$ ou $x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

40. O tempo, em hora, decorrido a partir do início do período de *rush*, para que a velocidade média v seja de 20 km/h é raiz da equação:
$v(t) = 20$, ou seja, $-t^3 + 6t^2 - 9t + 20 = 20$
Resolvendo-a, temos:
$-t^3 + 6t^2 - 9t + 20 = 20 \Rightarrow -t^3 + 6t^2 - 9t = 0$
$\therefore -t(t^2 - 6t + 9) = 0 \Rightarrow t = 0$ ou $t = 3$
A velocidade média v é de 20 km/h às 16 h e às 19 h.

41. a. As raízes $P(x)$ são dadas por:
$4x^2 - x - 3 = 0$
$x = 1$ ou $x = -\frac{3}{4}$
Pelo teorema da decomposição, obtemos $P(x)$ na forma fatorada: $P(x) \equiv 4(x - 1)\left(x + \frac{3}{4}\right)$

b. As raízes de $P(x)$ são dadas por:
$x^3 - 8x^2 + 12x = 0 \Rightarrow x = 2$ ou $x = 6$
Pelo teorema da decomposição, obtemos $P(x)$ na forma fatorada: $P(x) \equiv x(x - 2)(x - 6)$

c.

2	3	−6	3	−6
	3	0	3	0

Então: $P(x) \equiv (x - 2)(3x^2 + 3)$
As raízes de $P(x)$ são dadas por:
$(x - 2)(3x^2 + 3) = 0 \Rightarrow x - 2 = 0$ ou $3x^2 + 3 = 0$
$\therefore x = 2$ ou $x = \mathrm{i}$ ou $x = -\mathrm{i}$
Pelo teorema da decomposição, obtemos $P(x)$ na forma fatorada: $P(x) \equiv 3(x - 2)(x - \mathrm{i})(x + \mathrm{i})$

42. Por Briot-Ruffini, temos:

1	3	−25	59	−47	10
2	3	−22	37	−10	0
	3	−16	5	0	

Logo: $P(x) \equiv (x - 1)(x - 2)(3x^2 - 16x + 5)$
As raízes de $P(x)$ são dadas por:
$(x - 1)(x - 2)(3x^2 - 16x + 5) = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow x - 1 = 0$ ou $x - 2 = 0$ ou $3x^2 - 16x + 5 = 0$
$\therefore x = 1$ ou $x = 2$ ou $x = 5$ ou $x = \frac{1}{3}$
Portanto, a forma fatorada de $P(x)$ é:
$P(x) \equiv 3(x - 1)(x - 2)(x - 5)\left(x - \frac{1}{3}\right)$

43. a. $P(x) = 0 \Rightarrow x^3 - 5x^2 - x + 5 = 0$

Fatorando o primeiro membro, obtemos:

$x^2(x - 5) - (x - 5) = 0 \Rightarrow (x - 5)(x^2 - 1) = 0$

Pela propriedade do produto nulo, deduzimos que:

$x - 5 = 0$ ou $x^2 - 1 = 0 \therefore x = 5$ ou $x = 1$ ou $x = -1$

b. $P(x) > 0 \Rightarrow x^3 - 5x^2 - x + 5 > 0$

Fatorando o primeiro membro:

$(x - 5)(x^2 - 1) > 0$

Estudando os sinais das funções: $f(x) = x - 5$, $g(x) = x^2 - 1$ e $f(x) \cdot g(x)$, concluímos:

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 1 \text{ ou } x > 5\}$

44. a. Pela propriedade do produto nulo, temos:

$(x - 2)^3 = 0$ ou $(x - 5)^4 = 0$ ou $x + 7 = 0$

$\therefore\ x = 2$ ou $x = 5$ ou $x = -7$

c. O grau da equação é a soma das multiplicidades das raízes, isto é: $3 + 4 + 1 = 8$

45. $P(x) \equiv 6(x - 1)(x - 1)(x + 2)(x + 2)(x + 2)(x - 3)$

Logo, a equação polinomial pedida é:

$6(x - 1)^2(x + 2)^3(x - 3) = 0$

46. Dividindo o polinômio

$P(x) \equiv x^5 - 4x^4 + x^3 + 10x^2 - 4x - 8$ por $x + 1$, temos:

-1	1	-4	1	10	-4	-8
	1	-5	6	4	-8	0

Logo: $P(x) \equiv (x + 1)\underbrace{(x^4 - 5x^3 + 6x^2 + 4x - 8)}_{Q_1(x)}$

Dividindo $Q_1(x)$ por $x + 1$, temos:

-1	1	-5	6	4	-8
	1	-6	12	-8	0

Logo: $P(x) \equiv (x + 1)(x + 1)\underbrace{(x^3 - 6x^2 + 12x - 8)}_{Q_2(x)}$

Dividindo $Q_2(x)$ por $x + 1$, temos:

-1	1	-6	12	-8
	1	-7	19	-27

Logo $Q_2(x)$ não é divisível por $x + 1$; portanto, a raiz -1 tem multiplicidade 2, e a raiz 2 tem multiplicidade 3.

47. Pelo menos uma das raízes tem multiplicidade maior que 1. Analisemos a multiplicidade da raiz -2.

-2	1	9	30	44	24
-2	1	7	16	12	0
-2	1	5	6	0	
-2	1	3	0		
	1	1			

Resto diferente de zero

Assim, -2 é raiz de multiplicidade 3.

Essa divisão nos mostra, também, que a equação proposta pode ser representada por: $(x + 2)^3(x + 3) = 0$

Pela propriedade do produto nulo, temos:

$$x + 2 = 0 \text{ ou } x + 3 = 0 \Rightarrow x = -2 \text{ ou } x = -3$$

Portanto, $S = \{-2, -3\}$.

Concluímos, então, que $r = -3$.

48. Pelo teorema da decomposição, essa equação pode ser representada sob a forma: $\underbrace{(x + 1)(x + 1)(x - r)}_{Q(x)} = 0$

em que r é a outra raiz além da raiz -1. Assim, temos que os polinômios $P(x) \equiv 2x^3 + 3x^2 + ax + b$ e $Q(x)$ são divisíveis por $(x + 1)$.

Por Briot-Ruffini, vamos dividir $P(x)$ por $x + 1$, obtendo $Q(x)$; e dividir $Q(x)$ por $x + 1$, obtendo $(x - r)$:

-1	2	3	a	b
-1	2	1	$a - 1$	$1 - a + b$
	2	-1	a	$1 - 2a + b$

Como as divisões são exatas, devemos ter:

$$\begin{cases} 1 - a + b = 0 \\ 1 - 2a + b = 0 \end{cases} \Rightarrow a = 0 \text{ e } b = -1$$

49. a. Devemos mostrar que o polinômio $P(x) \equiv x^5 - 4ix^4 - 14ix^2 - 17x + 6i$ é divisível por $(x - i)^3$ e não é divisível por $(x - i)^4$. Pelo dispositivo de Briot-Ruffini, obtemos que $P(x)$ é divisível por $(x - i)^3$ e não é divisível por $(x - i)^4$, ou seja, o número i é raiz tripla da equação $P(x) = 0$.

51. Se $3 + 2i$ é raiz da equação, então $3 - 2i$ também é; logo: $S = \{5, 3 + 2i, 3 - 2i\}$

52. Como os coeficientes da equação são números reais, temos que: se $3i$ é raiz simples, então $-3i$ é raiz simples; se $4 + i$ é raiz dupla, então $4 - i$ é raiz dupla.

Portanto, a equação deve ter pelo menos sete raízes:

$-1, 3i, -3i, 4 + i, 4 + i, 4 - i$ e $4 - i$

Ou seja, o grau mínimo da equação deve ser 7.

55. a. Se $4i$ é raiz da equação, então $-4i$ também é raiz da equação. Assim, o polinômio

$x^5 - 2x^4 + 15x^3 - 30x^2 - 16x + 32$ é divisível por $x - 2$, por $x - 4i$ e por $x + 4i$.

Pelo dispositivo de Briot-Ruffini, obtemos:

$(x - 2)(x - 4i)(x + 4i)(x^2 - 1) = 0$

Pela propriedade do produto nulo, deduzimos que:

$x - 2 = 0$ ou $x - 4i = 0$ ou $x + 4i = 0$ ou $x^2 - 1 = 0$

Logo, $x = 2$ ou $x = 4i$ ou $x = -4i$ ou $x = 1$ ou $x = -1$

b. Temos que: se i é raiz dupla da equação, então $-i$ também é raiz dupla da equação.

Assim, o polinômio $x^6 + 6x^4 + 9x^2 + 4$ é divisível por $(x - i)^2$ e por $(x + i)^2$.

Pelo dispositivo de Briot-Ruffini, obtemos:

$(x - i)(x - i)(x + i)(x + i)(x^2 + 4) = 0$

Pela propriedade do produto nulo, deduzimos que:

$x - i = 0$ ou $x + i = 0$ ou $x^2 + 4 = 0$

Logo, $x = i$ ou $x = -i$ ou $x = 2i$ ou $x = -2i$

56. a. Se essa equação admite raiz do tipo $\frac{p}{q}$, com p e q inteiros primos entre si e $q \neq 0$, então p é divisor de -1 e q é divisor de 2.

Logo: $\frac{p}{q} \in \left\{\pm 1, \pm \frac{1}{2}\right\}$

Testando em $P(x) = 0$, temos:

$P(1) = 2 \cdot 1^4 + 1^3 + 1^2 + 1 - 1 = 4 \Rightarrow 1$ não é raiz

$P(-1) = 2 \cdot (-1)^4 + (-1)^3 + (-1)^2 + (-1) - 1 = 0$

$\therefore -1$ é raiz

$P\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} - 1 = 0$

$\therefore \frac{1}{2}$ é raiz

$P\left(-\frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^4 + \left(-\frac{1}{2}\right)^3 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} - 1 =$

$= -\frac{5}{4} \quad \therefore -\frac{1}{2}$ não é raiz

b. Se essa equação possui raízes racionais, então elas pertencem ao conjunto $\{\pm1, \pm2\}$.

Testando em $P(x) = 0$, temos:

$P(1) = 1^5 + 3 \cdot 1^4 - 8 \cdot 1^3 - 7 \cdot 1 - 2 = -13 \Rightarrow 1$ não é raiz

$P(-1) = (-1)^5 + 3 \cdot (-1)^4 - 8 \cdot (-1)^3 - 7 \cdot (-1) - 2 =$

$= 15 \Rightarrow -1$ não é raiz

$P(2) = 2^5 + 3 \cdot 2^4 - 8 \cdot 2^3 - 7 \cdot 2 - 2 = 0 \Rightarrow 2$ é raiz

$P(-2) = (-2)^5 + 3 \cdot (-2)^4 - 8 \cdot (-2)^3 - 7 \cdot (-2) - 2 =$

$= 92 \quad \therefore -2$ não é raiz

57. Se essa equação possui raízes racionais, então elas pertencem ao conjunto $\{\pm1, \pm2\}$.

Testando em $P(x) = 0$, temos:

$P(1) = 1^4 + 3 \cdot 1^3 + 3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 2 = 12 \Rightarrow 1$ não é raiz

$P(-1) = (-1)^4 + 3 \cdot (-1)^3 + 3 \cdot (-1)^2 + 3 \cdot (-1) + 2 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow -1$ é raiz

$P(2) = 2^4 + 3 \cdot 2^3 + 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + 2 = 60 \Rightarrow 2$ não é raiz

$P(-2) = (-2)^4 + 3 \cdot (-2)^3 + 3 \cdot (-2)^2 + 3 \cdot (-2) + 2 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow -2$ é raiz

O polinômio $P(x)$ possui duas raízes racionais: -1 e -2.

Logo, $P(x)$ é divisível por $x + 1$ e por $x + 2$:

−1	1	3	3	3	2
−2	1	2	1	2	0
	1	0	1	0	

Assim, a equação $P(x) = 0$ é equivalente a:

$(x + 1)(x + 2)(x^2 + 1) = 0$

Pela propriedade do produto nulo, temos:

$x + 1 = 0$ ou $x + 2 = 0$ ou $x^2 + 1 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = -1$ ou $x = -2$ ou $x = \mathrm{i}$ ou $x = -\mathrm{i}$

Portanto: $S = \{-1, -2, \mathrm{i}, -\mathrm{i}\}$

58. Indicando por x a medida, em decímetro, da largura interna do aquário.

Como $1\ \text{dm}^3 = 1\ \text{L}$, temos:

$(x + 2) \cdot x \cdot (x - 1) = 30 \Rightarrow x^3 + x^2 - 2x - 30 = 0$

Observando que os coeficientes dessa equação, $P(x) = 0$, são números inteiros, deduzimos que se ela tiver uma raiz do tipo $\frac{p}{q}$, com p e q inteiros primos entre si e $q \neq 0$, então p é divisor de 30 e q é divisor de 1, isto é: $p \in \{\pm1, \pm2, \pm3, \pm5, \pm6, \pm10, \pm15, \pm30\}$ e $q \in \{\pm1\}$, portanto, $\frac{p}{q} \in \{\pm1, \pm2, \pm3, \pm5, \pm6, \pm10, \pm15, \pm30\}$.

Como $x > 0$, pois x é uma medida de comprimento, vamos testar apenas os números racionais positivos, "candidatos" a raízes da equação $P(x) = 0$:

$P(1) = -30$. Logo, 1 não é raiz da equação.

$P(2) = -22$. Logo, 2 não é raiz da equação.

$P(3) = 0$. Logo, 3 é raiz da equação.

Dividindo $P(x)$ por $x - 3$, obtemos:

$(x - 3)(x^2 + 4x + 10) = 0$

Pela propriedade do produto nulo, deduzimos que:

$x - 3 = 0$ ou $x^2 + 4x + 10 = 0$

Observando que a equação polinomial do 2º grau não possui raiz real, pois $\Delta = -24$, concluímos que a única raiz que pode ser admitida como valor de x é 3. As dimensões do aquário são: 5 dm, 3 dm e 2 dm.

59. $\frac{4\pi(R + 1)^3}{3} = 2 \cdot \frac{4\pi R^3}{3} + \frac{44\pi}{3} \Rightarrow (R + 1)^3 = 2R^3 + 11$

$\therefore R^3 + 3R^2 + 3R + 1 = 2R^3 + 11 \Rightarrow R^3 - 3R^2 - 3R + 10 = 0$

Como os coeficientes dessa equação, $P(R) = 0$, são números inteiros, deduzimos que se ela tiver uma raiz do tipo $\frac{p}{q}$, com p e q inteiros primos entre si e $q \neq 0$, então p é divisor de 10 e q é divisor de 1, isto é: $p \in \{\pm1, \pm2, \pm5, \pm10\}$ e $q \in \{\pm1\}$, portanto, $\frac{p}{q} \in \{\pm1, \pm2, \pm5, \pm10\}$.

Como $R > 0$, pois R é uma medida de comprimento, vamos testar apenas os números racionais positivos, "candidatos" a raízes da equação $P(R) = 0$:

$P(1) = 1^3 - 3 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 + 10 = 5$

Logo, 1 não é raiz da equação.

$P(2) = 2^3 - 3 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2 + 10 = 0$

Logo, 2 é raiz da equação.

Dividindo $P(R)$ por $R - 2$, temos:

2	1	−3	−3	10
	1	−1	−5	0

Logo, a equação $P(R) = 0$ pode ser representada na forma fatorada: $(R - 2)(R^2 - R - 5) = 0$

Pela propriedade do produto nulo, deduzimos que:

$R - 2 = 0$ ou $R^2 - R - 5 = 0 \Rightarrow R = 2$ ou

$R = \frac{1 + \sqrt{21}}{2}$ ou $R = \frac{1 - \sqrt{21}}{2}$ (não convém)

Assim: $R = 2$ cm ou $R = \frac{1 + \sqrt{21}}{2}$ cm

60. a. Pelas relações de Girard, temos:

$$\begin{cases} 2 + \sqrt{7} + 2 - \sqrt{7} = \frac{-b}{3} \\ (2 + \sqrt{7})(2 - \sqrt{7}) = \frac{c}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4 = \frac{-b}{3} \\ -3 = \frac{c}{3} \end{cases}$$

$\therefore b = -12$ e $c = -9$

b. Como a equação tem coeficientes reais, deduzimos que se $2 + 4\mathrm{i}$ é raiz da equação, então $2 - 4\mathrm{i}$ também é raiz. Assim, temos, pelas relações de Girard:

$$\begin{cases} 2 + 4\mathrm{i} + 2 - 4\mathrm{i} = \frac{-2}{p} \\ (2 + 4\mathrm{i})(2 - 4\mathrm{i}) = \frac{-q}{p} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4 = \frac{-2}{p} \\ 20 = \frac{-q}{p} \end{cases}$$

$\therefore p = -\frac{1}{2}$ e $q = 10$

61. Sendo r e s as dimensões do retângulo, em decímetro, temos, pelas relações de Girard:

$$\begin{cases} r + s = \frac{5}{\sqrt{5}} \\ rs = \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{5}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r + s = \sqrt{5} \\ rs = \sqrt{3} \end{cases}$$

Logo, o perímetro e a área do retângulo são, respectivamente, $2\sqrt{5}$ dm e $\sqrt{3}$ dm^2.

62. **a.** $r_1 + r_2 = \frac{-(-\sqrt{3})}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

b. $r_1 r_2 = \frac{\sqrt{6}}{2}$

c. $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = \frac{r_2 + r_1}{r_1 r_2} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{6}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{18}}{6} = \frac{3\sqrt{2}}{6} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

d. $r_1 + r_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow (r_1 + r_2)^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$

Logo: $r_1^2 + 2r_1r_2 + r_2^2 = \frac{3}{4}$

Como $r_1r_2 = \frac{\sqrt{6}}{2}$, temos:

$r_1^2 + 2 \cdot \frac{\sqrt{6}}{2} + r_2^2 = \frac{3}{4}$

$r_1^2 + r_2^2 = \frac{3 - 4\sqrt{6}}{4}$

e. $\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} = \frac{r_2^2 + r_1^2}{r_1^2 r_2^2} = \frac{r_1^2 + r_2^2}{(r_1 r_2)^2} = \frac{\frac{3 - 4\sqrt{6}}{4}}{\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2} =$

$= \frac{3 - 4\sqrt{6}}{6}$

63. **a.** $r_1 + r_2 + r_3 = -\frac{(-3)}{3} = 1$

b. $r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3 = \frac{6}{3} = 2$

c. $r_1r_2r_3 = \frac{(-1)}{3} = \frac{1}{3}$

d. $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} = \frac{r_2 r_3 + r_1 r_3 + r_1 r_2}{r_1 r_2 r_3} = \frac{2}{\frac{1}{3}} = 6$

e. $r_1 + r_2 + r_3 = 1 \Rightarrow (r_1 + r_2 + r_3)^2 = 1^2$; logo:

$r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + 2r_1r_2 + 2r_1r_3 + 2r_2r_3 = 1$, ou seja:

$r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + 2(r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3) = 1$, ou, ainda:

$r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + 2 \cdot 2 = 1$ e, portanto:

$r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 = -3$

f. $r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3 = 2 \Rightarrow (r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3)^2 = 2^2$, logo;

$(r_1r_2)^2 + (r_1r_3)^2 + (r_2r_3)^2 + 2r_1r_2 \cdot r_1r_3 + 2r_1r_2 \cdot r_2r_3 +$
$+ 2r_1r_3 \cdot r_2r_3 = 4$, ou seja:

$(r_1r_2)^2 + (r_1r_3)^2 + (r_2r_3)^2 + 2r_1r_2r_3(r_1 + r_2 + r_3) = 4$ ou,

ainda; $(r_1r_2)^2 + (r_1r_3)^2 + (r_2r_3)^2 + 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 = 4$ e, portanto:

$(r_1r_2)^2 + (r_1r_3)^2 + (r_2r_3)^2 = \frac{10}{3}$

g. $\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} + \frac{1}{r_3^2} = \frac{r_2^2 \cdot r_3^2 + r_1^2 \cdot r_3^2 + r_1^2 \cdot r_2^2}{r_1^2 \cdot r_2^2 \cdot r_3^2} =$

$= \frac{(r_2 r_3)^2 + (r_1 r_3)^2 + (r_1 r_2)^2}{(r_1 r_2 r_3)^2} = \frac{\frac{10}{3}}{\left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{\frac{10}{3}}{\frac{1}{9}} = 30$

64. Sendo x_1, x_2 e x_3 as raízes da equação tais que $x_1 + x_2 = -1$, temos:

$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a} \Rightarrow -1 + x_3 = -\frac{1}{2}$

$\therefore x_3 = \frac{1}{2}$

Por Briot-Ruffini, temos:

$\frac{1}{2}$	2	1	−13	6
	2	2	−12	0

Logo, a equação proposta é equivalente a:

$\left(x - \frac{1}{2}\right)(2x^2 + 2x - 12) = 0$, cujas raízes são: $\frac{1}{2}$, 2 e −3

65. Sendo as três raízes da equação a, $\frac{1}{a}$ e b, temos, por uma das relações de Girard: $a \cdot \frac{1}{a} \cdot b = -\frac{2}{2} \Rightarrow b = -1$

Substituindo x por −1 na equação, obtemos o valor de p:

$2 \cdot (-1)^3 - 3 \cdot (-1)^2 + p \cdot (-1) + 2 = 0 \Rightarrow p = -3$

66. Sejam $s - r$, s e $s + r$ as raízes da equação.

Uma das relações de Girard garante que:

$s - r + s + s + r = 60 \quad \therefore s = 20$

Dividindo o polinômio $x^3 - 60x^2 + 1.100x - 6.000$ por $x - 20$, obtemos:

$(x - 20) \cdot (x^2 - 40x + 300) = 0$

Pela propriedade do produto nulo, temos:

$x - 20 = 0$ ou $x^2 - 40x + 300 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 20$ ou $x = 10$ ou $x = 30$

67. Vamos resolver o item **b** em primeiro lugar.

b. Observando que zero não é raiz da equação, pois o termo independente (−64) é diferente de zero, podemos afirmar que a razão q da PG formada pelas raízes é diferente de zero e, portanto, as raízes podem ser indicadas por $\frac{a}{q}$, a e aq, em que a é um número real, também diferente de zero.

Por uma das relações de Girard, temos:

$\frac{a}{q} \cdot a \cdot aq = 64 \Rightarrow a^3 = 64$

Substituindo a por 4 na equação, $k = 56$.

a. Como $k = 56$, temos a equação

$x^3 - 14x^2 + 56x - 64 = 0$, da qual 4 é uma raiz. Logo, o polinômio $P(x) \equiv x^3 - 14x^2 + 56x - 64$ é divisível por $x - 4$. Efetuamos, então, essa divisão pelo dispositivo de Briot-Ruffini:

4	1	−14	56	−64
	1	−10	16	0

Assim a equação $P(x) = 0$ pode ser representada por:

$(x - 4)(x^2 - 10x + 16) = 0$

Pela propriedade do produto nulo, concluímos:

$x - 4 = 0$ ou $x^2 - 10x + 16 = 0$

$\therefore\ x = 4$ ou $x = 2$ ou $x = 8$

68. A resistência equivalente R_{eq}, em ohm, é dada pela equação: $\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$, que é equivalente a

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{R_2 R_3 + R_1 R_3 + R_1 R_2}{R_1 R_2 R_3} \quad (1)$$

Pelas relações de Girard, temos:

$$\begin{cases} R_2 R_3 + R_1 R_3 + R_1 R_2 = 8.100 & (2) \\ R_1 R_2 R_3 = 121.500 & (3) \end{cases}$$

Substituindo (2) e (3) em (1), concluímos:

$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{8.100}{121.500} \Rightarrow R_{eq} = 15$

70. As relações de Girard garantem que:

$$\begin{cases} -2+4+4+4=-a \\ -2\cdot 4+(-2)\cdot 4+(-2)\cdot 4+4\cdot 4+4\cdot 4+4\cdot 4=b \\ -2\cdot 4\cdot 4+(-2)\cdot 4\cdot 4+(-2)\cdot 4\cdot 4+4\cdot 4\cdot 4=-c \\ -2\cdot 4\cdot 4\cdot 4=d \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} a=-10 \\ b=24 \\ c=32 \\ d=-128 \end{cases}$$

71. Sendo r, r, r, s e $-s$ as raízes dessa equação, as relações de Girard garantem que:

$r+r+r+s+(-s)=-\dfrac{(-6)}{1} \Rightarrow r=2$

Por Briot-Ruffini, temos:

2	1	−6	0	64	−144	96
2	1	−4	−8	48	−48	0
2	1	−2	−12	24	0	
	1	0	−12	0		

Assim, a equação proposta é equivalente a:

$(x^2-12)(x-2)^3=0$

$\therefore x^2-12=0$ ou $(x-2)^3=0$,

ou seja: $x=\pm 2\sqrt{3}$ ou $x=2$

$\therefore S=\{2\sqrt{3}, -2\sqrt{3}, 2\}$

72. Existe um único polinômio P de coeficientes reais de grau menor que 4 cujo gráfico passa pelos quatro pontos $(-1, 8)$, $(0, 2)$, $(1, -5)$ e $(2, -10)$ do plano cartesiano. Assim, o grau máximo que pode ter o polinômio P é 3, ou seja, $P(x) \equiv ax^3+bx^2+cx+d$.

Como $P(1)=-5$, $P(-1)=8$, $P(2)=-10$ e $P(0)=2$, obtemos:

$$\begin{cases} a+b+c+d=-5 \\ -a+b-c+d=8 \\ 8a+4b+2c+d=-10 \\ 0a+0b+0c+d=2 \end{cases} \Rightarrow a=\frac{1}{2}, b=-\frac{1}{2}, c=-7 \text{ e } d=2$$

Concluímos, então, que: $P(x) \equiv \dfrac{x^3}{2}-\dfrac{x^2}{2}-7x+2$

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

1. **a.** $T(0)=0^3+2\cdot 0^2+0+40=40$

b. $T(4)=4^3+2\cdot 4^2+4+40=140$

c. $T(8)=8^3+2\cdot 8^2+8+40=688$

2. Se o paralelepípedo não tivesse os furos, seu volume seria:

$V_1=6x(4x+2)(x+5)$

Os paralelepípedos que representam os furos têm volumes:

$V_2=x\cdot x\cdot 6x=6x^3$, $V_3=x\cdot x\cdot(4x+2)=x^2(4x+2)$ e $V_4=x\cdot x\cdot(x+5)=x^2(x+5)$

A intersecção dos três furos é um cubo de aresta x e, portanto, de volume $V_5=x^3$.

Assim: $V=V_1-V_2-V_3-V_4+2V_5$

Observe que adicionamos $2V_5$ à diferença $V_1-V_2-V_3-V_4$, porque, nessa diferença, subtraímos três vezes a intersecção dos furos, quando deveríamos ter subtraído apenas uma vez. Logo: $V=15x^3+125x^2+60x$

3. $P(x)=x(x^2-2x)-(x-2)(3x+4)=x^3-5x^2+2x+8$

$$\begin{array}{rrrr|l} x^3 & -5x^2 & +2x & +8 & x^2-1 \\ \cline{5-5} -x^3 & & +x & & x-5 \\ \cline{1-4} & -5x^2 & +3x & +8 & \\ & +5x^2 & & -5 & \\ \cline{2-4} & & 3x & +3 & \end{array}$$

Portanto, o resto da divisão de $P(x)$ por $Q(x)$ é $3x+3$.

4. Seja $P(x) = ax^2+bx+c$, com $\{a, b, c\} \subset \mathbb{R}$ e $a \neq 0$, o polinômio desejado. As raízes de x, $x-1$ e $x+1$ são 0, 1 e −1, respectivamente. Pelo dispositivo de Briot-Ruffini, temos:

0	a	b	c
	a	b	c

0	a	b	c
	a	$a+b$	$a+b+c$

0	a	b	c
	a	$-a+b$	$a-b+c$

Como os restos da divisão de $P(x)$ por x, $x-1$ e $x+1$ são −1, 0 e 4, respectivamente, temos:

$$\begin{cases} c=-1 & (1) \\ a+b+c=0 & (2) \\ a-b+c=4 & (3) \end{cases}$$

De (1) obtemos $c=-1$. Substituindo c por −1 em (2) e (3):

$$\begin{cases} a+b-1=0 \\ a-b-1=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b=1 \\ a-b=5 \end{cases} \Rightarrow a=3 \text{ e } b=-2$$

Portanto, $P(x)=3x^2-2x-1$.

5. **a.** Como $D(x) \equiv (x+1)(x+1)(x+1)$, deduzimos que, se $P(x)$ é divisível por $D(x)$ então $P(x)$ é divisível por $x+1$; logo, $P(-1)=0$:

$P(-1)=0 \Rightarrow k=5$

b. Para $k=5$, temos: $P(x) \equiv 2x^4+5x^3+3x^2-x-1$

Dividindo $P(x)$ por $x+1$, obtemos o quociente $Q_1(x)$:

−1	2	5	3	−1	−1
	2	3	0	−1	0

Observamos que a divisão é exata

$Q_1(x) \equiv 2x^3+3x^2-1$, e dividindo por $x+1$, obtemos $Q_2(x)$:

−1	2	3	0	−1
	2	1	−1	0

Observamos que a divisão é exata

$Q_2(x) \equiv 2x^2+x-1$, dividindo por $x+1$, obtemos $Q_3(x)$:

−1	2	1	−1
	2	−1	0

Observamos que a divisão é exata

$Q_3(x) \equiv 2x - 1$

Concluímos, então, que o quociente $Q(x)$ da divisão exata de $P(x)$ por $D(x)$é $Q(x) \equiv 2x - 1$

6. a. Se o polinômio $P(x)$ tem raízes 2 e −1, então a divisão de $P(x)$ por $x - 2$ e $x + 1$ tem resto 0. Utilizando o dispositivo de Briot-Ruffini, temos:

2	2	−1	a	b
	2	3	$6 + a$	$12 + 2a + b$
	2	1	$5 + a$	

Logo, $\begin{cases} 12 + 2a + b = 0 \\ 5 + a = 0 \end{cases} \Rightarrow a = -5$ e $b = -2$

b. Pelo item **a**, verificamos que a divisão de $P(x)$ por $(x - 2)(x + 1)$ resulta em $(2x + 1)$ com resto 0. Logo, $P(x) = (x - 2)(x + 1)(2x + 1)$. Portanto, a terceira raiz de $P(x)$ é: $2x + 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$

7. $D(x) = 5 \Rightarrow 2x^3 - 4x^2 + 2x + 1 = 5$

$\therefore 2x^3 - 4x^2 + 2x - 4 = 0 \Rightarrow 2x^2(x - 2) + 2(x - 2) = 0$

$\therefore (x - 2)(2x^2 + 2) = 0 \Rightarrow x - 2 = 0$ ou $2x^2 + 2 = 0$

$\therefore x = 2$ ou $x = i$ ou $x = -i$

As raízes imaginárias não convêm como valor de x.

Concluímos, então, que a dívida acumulada atingiu 5 milhões de reais no mês 2, ou seja, em fevereiro de 2024.

8. a. Devemos mostrar que $P(1) = 0$ para qualquer valor de a.

$P(1) = 2 \cdot 1^3 - (3a + 2) \cdot 1^2 + (a^2 + 3a) \cdot 1 - a^2 =$

$= 2 - 3a - 2 + a^2 + 3a - a^2 = 0$

Logo, $P(x)$ é divisível por $x - 1$ para qualquer valor de a.

b. Dividindo $P(x)$ por $x - 1$, obtemos:

1	2	$-3a - 2$	$a^2 + 3a$	$-a^2$
	2	$-3a$	a^2	0

Assim, deduzimos que:

$P(x) \equiv (x - 1)(2x^2 - 3ax + a^2)$

Calculando as raízes de $P(x)$:

$P(x) = 0 \Rightarrow (x - 1)(2x^2 - 3ax + a^2) = 0$

$\therefore x - 1 = 0$ ou $2x^2 - 3ax + a^2 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 1$ ou $x = a$ ou $x = \frac{a}{2}$

Assim, pelo teorema da decomposição, concluímos:

$P(x) \equiv 2(x - 1)(x - a)\left(x - \frac{a}{2}\right)$

9. Dizer que 3 é raiz dupla da equação equivale a dizer que o polinômio $P(x) \equiv x^4 - 6x^3 + 10x^2 - 6x + 9$ é divisível por $(x - 3)^2$ e não é divisível por $(x - 3)^3$. Aplicando o dispositivo de Briot-Ruffini, temos:

3	1	−6	10	−6	9
3	1	−3	1	−3	0
	1	0	1	0	

Logo, a equação $P(x) = 0$ pode ser representada na forma fatorada: $(x - 3)^2(x^2 + 1) = 0$

Pela propriedade do produto nulo, deduzimos que:

$x - 3 = 0$ ou $x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x = 3$ ou $x = i$ ou $x = -i$

10. Aplicando o dispositivo de Briot-Ruffini, temos:

1	1	−3	2	2	−3	1
1	1	−2	0	2	−1	$\underbrace{0}_{\text{resto}}$
1	1	−1	−1	1	$\underbrace{0}_{\text{resto}}$	
1	1	0	−1	$\underbrace{0}_{\text{resto}}$		
1	1	1	$\underbrace{0}_{\text{resto}}$			
	1	$\underbrace{2}_{\text{resto}}$				

Logo, a equação proposta pode ser apresentada sob a forma: $(x - 1)^4(x + 1) = 0$

Portanto, a raiz 1 tem multiplicidade 4.

11. alternativa **e**

Como o polinômio $P(x)$ admite a raiz complexa 2+ i, então $P(x)$ também admite a raiz complexa 2− i. Logo, $P(x)$ é divisível por $x - 2-$ i e divisível por $x - 2+$ i, consequentemente divisível pelo produto $(x - 2-$ i$)$ $(x - 2+$ i$)$.

$(x - 2-$ i$)$ $(x - 2+$ i$) = x^2 - 4 + 5$

Portanto $P(x)$ é divisível por $x^2 - 4 + 5$.

12. a. As fórmulas dos montantes M acumulados pela aplicação de um capital C por t unidades de tempo, à taxa percentual de juros x por unidade de tempo são: $M = C + C \cdot x \cdot t$, para juros simples, e $M = C(1 + x)^t$, para juros compostos. Assim, temos:

$13.500 + 13.500 \cdot x \cdot 3 = 10.000(1 + x)^3 \Rightarrow$

$\Rightarrow 13.500 + 40.500x = 10.000(1 + 3x + 3x^2 + x^3)$

$\therefore 13.500 + 40.500x =$

$= 10.000 + 30.000x + 30.000x^2 + 10.000x^3 \Rightarrow$

$\Rightarrow 10.000x^3 + 30.000x^2 - 10.500x - 3.500 = 0$

Dividindo ambos os membros por 500, obtemos:

$20x^3 + 60x^2 - 21x - 7 = 0$

b. Pesquisando as possíveis raízes racionais da equação $20x^3 + 60x^2 - 21x - 7 = 0$, constatamos que $\frac{1}{2}$ é uma de suas raízes, pois:

$$20 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 + 60 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 21 \cdot \frac{1}{2} - 7 = 0$$

Aplicando o dispositivo prático de Briot-Ruffini, temos:

$\frac{1}{2}$	20	60	−21	−7
	20	70	14	0

Logo, a equação $20x^3 + 60x^2 - 21x - 7 = 0$ é equivalente a $\left(x - \frac{1}{2}\right)(20x^2 + 70x + 14) = 0$. Pela propriedade do produto nulo, deduzimos que $x - \frac{1}{2} = 0$ ou $20x^2 + 70x + 14 = 0$, de onde obtemos:

$x = \frac{1}{2}$ ou $x = \frac{-70 + \sqrt{3.780}}{40}$ (não convém, pois é negativa)

Concluímos, assim, que a taxa de juros nos dois empréstimos foi de 50%.

13. a. Como $p(i) = i^4 + 2i^3 + 3i^2 + 2i + 2 = 1 - 2i - 3 + 2i + 2 = 0$, segue-se que i é uma raiz de $p(x)$.

b. Como o número imaginário i é raiz do polinômio de coeficientes reais $p(x)$, temos que $-i$ também é raiz desse polinômio. Assim, $p(x)$ é divisível por $x - i$, e o quociente $Q(x)$ dessa divisão é divisível por $x + i$. Aplicando o dispositivo de Briot-Ruffini, temos:

i	1	2	3	2	2
$-i$	1	$2 + i$	$2 + 2i$	$2i$	0
	1	2	2	0	

Logo, $p(x) \equiv (x - i)(x + i)(x^2 + 2x + 2)$.

As raízes de $p(x)$ são dadas pela equação:

$(x - i)(x + i)(x^2 + 2x + 2) = 0$

Pela propriedade do produto nulo, concluímos:

$x - i = 0$ ou $x + i = 0$ ou $x^2 + 2x + 2 = 0$

$\therefore x = i$ ou $x = -i$ ou $x = -1 + i$ ou $x = -1 - i$

14. a. Se essa equação admite raiz do tipo $\frac{p}{q}$, p e q inteiros primos entre si e $q \neq 0$, então p é divisor de 2 e q é divisor de 1, ou seja, $p \in \{\pm 1, \pm 2\}$ e $q \in \{\pm 1\}$.

Logo: $\frac{p}{q} \in \{\pm 1, \pm 2\}$

Testando cada um desses valores na equação $P(x) = 0$:

$P(1) = 12 \Rightarrow 1$ não é raiz

$P(-1) = 0 \Rightarrow -1$ é raiz

$P(2) = 60 \Rightarrow 2$ não é raiz

$P(-2) = 0 \Rightarrow -2$ é raiz

Logo, a equação admite exatamente duas raízes racionais: -1 e -2

b. Se essa equação possui raízes racionais, elas pertencem ao conjunto $\left\{\pm 1, \pm \frac{1}{2}, \pm 3, \pm \frac{3}{2}\right\}$. Testando o número 1 na equação $P(x) = 0$, temos:

$P(1) = 2 \cdot 1^3 + 1^2 - 3 = 0 \Rightarrow 1$ é raiz

Em vez de calcular $P(-1)$, $P\left(\frac{1}{2}\right)$, $P\left(-\frac{1}{2}\right)$, $P(3)$, $P(-3)$, $P\left(\frac{3}{2}\right)$ e $P\left(-\frac{3}{2}\right)$, podemos aproveitar o fato de que 1 é raiz e dividir $P(x)$ por $x - 1$:

1	2	1	0	-3
	2	3	3	$\underbrace{0}_{\text{resto}}$

Logo, a equação proposta é equivalente a:

$(2x^2 + 3x + 3)(x - 1) = 0 \Rightarrow 2x^2 + 3x + 3 = 0$ ou $x = 1$

Como o discriminante da equação $2x^2 + 3x + 3 = 0$ é negativo, concluímos que a equação $P(x) = 0$ possui como única raiz racional o número 1.

15. a. Se essa equação possui raízes racionais não nulas, elas pertencem ao conjunto $\left\{\pm 1, \pm \frac{1}{2}\right\}$.

Testando os valores em $P(x) = 0$, temos:

$P(1) = 2 \cdot 1^4 - 4 \cdot 1^3 + 1^2 + 1 = 0 \Rightarrow 1$ é raiz

Dividindo $P(x)$ por $x - 1$, temos:

1	2	-4	1	1	0
	2	-2	-1	0	$\underbrace{0}_{\text{resto}}$

Logo, a equação dada é equivalente a:

$(2x^3 - 2x^2 - x) \cdot (x - 1) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x \cdot (2x^2 - 2x - 1) \cdot (x - 1) = 0$

Pela propriedade do produto nulo, temos:

$x = 0$ ou $2x^2 - 2x - 1 = 0$ ou $x - 1 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 0$ ou $x = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$ ou $x = \frac{1 - \sqrt{3}}{2}$ ou $x = 1$

Portanto: $S = \left\{0, \frac{1 + \sqrt{3}}{2}, \frac{1 - \sqrt{3}}{2}, 1\right\}$

b. Se essa equação possui raízes racionais, elas pertencem ao conjunto $\{1, -1\}$. Testando os valores em $P(x) = 0$, temos:

$P(1) = 1^4 + 2 \cdot 1^3 + 2 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 + 1 = 8 \Rightarrow 1$ não é raiz

$P(-1) = (-1)^4 + 2 \cdot (-1)^3 + 2 \cdot (-1)^2 + 2 \cdot (-1) + 1 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow -1$ é raiz

Por Briot-Ruffini temos:

-1	1	2	2	2	1
-1	1	1	1	1	$\underbrace{0}_{\text{resto}}$
-1	1	0	1	$\underbrace{0}_{\text{resto}}$	
	1	-1	$\underbrace{2}_{\text{resto}}$		

Logo, -1 é raiz dupla e, portanto, a equação proposta é equivalente a $(x + 1)^2(x^2 + 1) = 0$, cujas raízes são: -1, i e $-i$.

Assim, temos o conjunto solução: $S = \{-1, i, -i\}$

16. Sendo V_A e V_B os volumes de água, em bilhão de litros, das represas A e B, respectivamente, temos, pelas relações de Girard:

$V_A + V_B = \frac{-(-3.875,2)}{3,2} \Rightarrow V_A + V_B = 1.211$

17. a. Sendo $a - r$, a e $a + r$ as raízes do polinômio, uma das relações de Girard nos garante que:

$a - r + a + a + r = 3 \Rightarrow a = 1$

Assim, temos: $P(1) = 0 \Rightarrow 1^3 - 3 \cdot 1^2 + m = 0 \therefore m = 2$

b. Do item **a**, concluímos que $P(x) \equiv x^3 - 3x^2 + 2$. Dividindo $P(x)$ por $x - 1$, temos:

1	1	-3	0	2
	1	-2	-2	$\underbrace{0}_{\text{resto}}$

Logo: $P(x) \equiv (x - 1)(x^2 - 2x - 2)$

As raízes de $P(x)$ são dadas por:

$(x - 1)(x^2 - 2x - 2) = 0 \Rightarrow x - 1 = 0$ ou $x^2 - 2x - 2 = 0$

Portanto: $x = 1$ ou $x = 1 + \sqrt{3}$ ou $x = 1 - \sqrt{3}$

18. Sendo r e s as raízes dessa equação, pelo teorema de Pitágoras, temos: $r^2 + s^2 = (2\sqrt{5})^2$; e, por uma das relações de Girard, $r + s + 2\sqrt{5} = 2(3 + \sqrt{5})$. Assim, obtemos:

$$\begin{cases} r^2 + s^2 = (2\sqrt{5})^2 \\ r + s + 2\sqrt{5} = 2(3 + \sqrt{5}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r^2 + s^2 = 20 \\ r = 6 - s \end{cases}$$

$\therefore s = 2$ ou $s = 4$; $r = 4$ ou $r = 2$

Deduzimos, então, que as raízes da equação são 2, 4 e $2\sqrt{5}$.

Determinando as constantes m e n por meio de duas das relações de Girard:

$$\begin{cases} 2 \cdot 4 + 2 \cdot 2\sqrt{5} + 4 \cdot 2\sqrt{5} = m \\ 2 \cdot 4 \cdot 2\sqrt{5} = -n \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m = 4(2 + 3\sqrt{5}) \text{ e } n = -16\sqrt{5}$$

19. alternativa **b**

Sendo -1, -1, a, b e c as raízes da equação, uma das relações de Girard nos garante que:

$-1 - 1 + a + b + c = 1 \Rightarrow a + b + c = 3$

REFLEXÃO

Página 260: Fatorando o polinômio $D(x)$, obtemos:

$D(x) = (x - 4)(x - 2)$

Dividindo $P(x)$ por $x - 4$, chegamos ao quociente $Q_1(x)$. Dividindo $Q_1(x)$ por $x - 2$, chegamos ao quociente $Q_2(x)$, conforme mostra o esquema:

$$\begin{array}{r|l} x^3 + 0x^2 - 6x + 17 & x - 4 \\ \hline \underline{x^3 - 4x^2 } & x^2 + 4x + 10 \\ 4x^2 - 6x + 17 & \\ \underline{4x^2 - 16x } & \\ 10x + 17 & \\ \underline{10x - 40} & \\ 57 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} x^2 + 4x + 10 & x - 2 \\ \hline \underline{x^2 - 2x } & x + 6 \\ 6x + 10 & \\ \underline{6x - 12} & \\ 22 & \end{array} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{array}{r|l} P(x) & x - 4 \\ \hline 57 & Q_1(x) \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} Q_1(x) & x - 2 \\ \hline 22 & Q_2(x) \end{array}$$

Portanto: $\begin{cases} P(x) = Q_1(x) \cdot (x - 4) + 57 & (1) \\ Q_1(x) = Q_2(x) \cdot (x - 2) + 22 & (2) \end{cases}$

Substituindo (2) em (1), obtemos:

$P(x) = [Q_2(x) \cdot (x - 2) + 22] \cdot (x - 4) + 57$, ou seja,

$P(x) = Q_2(x) \cdot (x - 2)(x - 4) + 22 \cdot (x - 4) + 57$ ou, ainda,

$P(x) = Q_2(x) \cdot (x - 2)(x - 4) + 22x - 31$

Concluímos, então, que o quociente da divisão de $P(x)$ por $D(x)$ é $Q_2(x) = x + 6$ e o resto é $R(x) = 22x - 31$.

Página 262: Sim. Para demonstrar esse fato, consideremos que $Q(x)$ seja o quociente exato de $P(x)$ pelo produto $(x - a) \cdot (x - b)$, isto é: $P(x) \equiv (x - a) \cdot (x - b) \cdot Q(x)$.

Calculando $P(a)$ e $P(b)$ temos:

$P(a) = (a - a) \cdot (a - b) \cdot Q(a) \Rightarrow P(a) = 0$

$P(b) = (b - a) \cdot (b - b) \cdot Q(b) \Rightarrow P(b) = 0$

Portanto, pelo teorema de D'Alembert, $P(x)$ é divisível por $x - a$ e por x.

Página 273: Sim. Uma equação polinomial do 3º grau pode ter as três raízes imaginárias; porém, os coeficientes da equação não serão todos números reais. Por exemplo, vamos formar uma equação polinomial do 3º grau com as raízes imaginarias i, 2i e 5i:

$(x - i)(x - 2i)(x - 5i) = 0 \Rightarrow x^3 - 8ix^2 - 17x + 10i = 0$

Essa é uma equação polinomial do 3º grau cujas raízes são todas imaginárias.

Página 278: Não. Considerando a equação polinomial do 2º grau $x^2 - 5x + 4 = 0$. Sendo r e s as raízes dessa equação, temos, pelas relações de Girard: $r + s = 5$ e $r \cdot s = 4$. Disto, obtemos: $r = 5 - s$. Substituindo esse valor de r na equação $r \cdot s = 4$, obtemos $s^2 - 5s + 4 = 0$. Note que essa equação é equivalente a equação original que tentamos resolver pelas relações de Girard. Assim, concluímos que as relações de Girard são insuficientes para resolver uma equação polinomial.

VERIFIQUE O QUE APRENDEU NO CAPÍTULO 10

1. a. $C(x) = x\left(\frac{x}{40} + 2\right) \Rightarrow C(x) = \frac{x^2}{40} + 2x$

b. $R(x) = x(430 - x) \Rightarrow R(x) = 430x - x^2$

c. $L(x) = R(x) - C(x) \Rightarrow L(x) = 430x - x^2 - \left(\frac{x^2}{40} + 2x\right)$

$\therefore L(x) = -\frac{41x^2}{40} + 428x$

2. a.

$$\begin{array}{r|l} x^5 + 0x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 0x + 1 & x + 1 \\ \hline \ominus\ \underline{x^5 + x^4 } & x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 \\ -x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 0x + 1 & \\ \ominus\ \underline{-x^4 - x^3 } & \\ x^3 + 0x^2 + 0x + 1 & \\ \ominus\ \underline{x^3 + x^2 } & \\ -x^2 + 0x + 1 & \\ \ominus\ \underline{-x^2 - x } & \\ x + 1 & \\ \ominus\ \underline{x + 1} & \\ 0x + 0 & \end{array}$$

Logo, $Q(x) \equiv x^4 - x^3 - x^2 - x + 1$ e $R(x) \equiv 0$.

b. Calculando análogo ao item **a**, temos:

$Q(x) = 2x^2 - \frac{x}{3} + \frac{1}{9}$ e $R(x) = \frac{11x}{9} + \frac{14}{9}$

3. Se 2i é raiz da equação, então $-2i$ também é, pois os coeficientes da equação são números reais.

Assim, o polinômio $x^5 - 3x^4 + 3x^3 - 9x^2 - 4x + 12$ é divisível por $x - 3$, por $x - 2i$ e por $x + 2i$.

Pelo dispositivo de Briot-Ruffini, temos:

3	1	−3	3	−9	−4	12
2i	1	0	3	0	−4	0
−2i	1	2i	−1	−2i	0	
	1	0	−1	0		

Logo, a equação pode ser representada na forma:

$(x^2 - 1)(x + 2i)(x - 2i)(x - 3) = 0$

Pela propriedade do produto nulo, deduzimos que:

$x^2 - 1 = 0$ ou $x + 2i = 0$ ou $x - 2i = 0$ ou $x - 3 = 0$

$\therefore x = 1$ ou $x = -1$ ou $x = -2i$ ou $x = 2i$ ou $x = 3$

4. O consumo do caminhão, em litro de combustível, nas ruas pavimentadas da cidade, nas ruas de terra e na autoestrada foram:

$\frac{8}{x}$, $\frac{2}{x - 1}$ e $\frac{6}{x + 1}$, respectivamente. Assim, temos:

$\frac{8}{x} + \frac{2}{x - 1} + \frac{6}{x + 1} = 8 \Rightarrow 8x^3 - 16x^2 - 4x + 8 = 0$

Fatoramos o primeiro membro, obtendo:

$8x^2(x - 2) - 4(x - 2) = 0 \Rightarrow (x - 2)(8x^2 - 4) = 0$

$\therefore x - 2 = 0$ ou $8x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = 2$ ou $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (não convém)

ou $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ (não convém)

Concluímos, então, que o desempenho do caminhão nas ruas da cidade foi de 2 km/L; nas ruas de terra foi de 1 km/L; e na autoestrada foi de 3 km/L.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS COMENTADAS

BICUDO, M. A. V. (org.). **Educação matemática**. 2. ed. São Paulo: Centauro, 2005.

Traz artigos relacionados a pesquisas realizadas em educação matemática, com foco em metodologia e ensino.

BLACK DOG INSTITUTE. Structured Problem Solving. Disponível em: https://www.blackdoginstitute.org.au/wp-content/uploads/2020/04/16-structured-problem-solving.pdf. Acesso em: 22 set. 2024.

Roteiro para solução estruturada de problemas.

BRACKMANN, C. P. **Desenvolvimento do pensamento computacional através de atividades desplugadas na Educação Básica**. 2017. Tese (Doutorado em Informática na Educação) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2017.

Pesquisa sobre a possibilidade de desenvolver o pensamento computacional na Educação Básica exclusivamente por meio de atividades sem o uso de computadores.

BRASIL. **Lei nº 14.533, de 11 de janeiro de 2023**. Diário Oficial da União: seção 1, Brasília, DF, 12 jan. 2023.

Lei que institui a Política Nacional de Educação Digital.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. 2018. Brasília, DF: MEC, 2018.

Documento que regulamenta o ensino nas escolas brasileiras públicas e particulares de Educação Infantil, Ensinos Fundamental e Médio.

BRASIL. Ministério da Educação. Política Nacional de Ensino Médio. **Gov.br.** Brasília, DF, 2024. Disponível em: https://www.gov.br/mec/pt-br/areas-de-atuacao/eb/politica-nacional-ensino-medio. Acesso em: 31 ago. 2024.

Lei que regulamenta a Política Nacional de Ensino Médio.

BRASIL. Ministério da Educação. **Temas contemporâneos transversais na BNCC**: proposta de práticas de implementação. Brasília, DF: MEC, 2019.

Guia com explicações e orientações a respeito dos temas contemporâneos transversais.

CRUZ, L. F. C. Bases neuroanatômicas e neurofisiológicas do processo ensino e aprendizagem. *In*: **III Curso de Atualização de Professores da Educação Infantil, Ensino Fundamental e Médio. A Neurociência e a Educação**: Como nosso cérebro aprende?. Ouro Preto, 2016.

Documento com artigos sobre a neurociência e a educação.

CURY, H. N. **Análise de erros**: o que podemos aprender com as respostas dos alunos. Belo Horizonte:Autêntica, 2007.

O livro traz uma revisão da literatura sobre a temática no Brasil e no mundo, discutindo-as com base em diferentes perspectivas.

DENARDI, V. B. Teoria dos registros e representação semiótica: contribuições para a formação de professores de matemática. *In*: XXI Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática, 2017, Pelotas, RS. **Anais do XXI EBRAPEM**. Pelotas: Universidade Federal de Pelotas, 2017.

Partes de uma pesquisa que tem como objetivo investigar as contribuições da semiótica para a compreensão de conceitos matemáticos necessários à formação de professores de matemática.

HOFFMANN, J. **Avaliar para promover**: as setas do caminho. Porto Alegre: Mediação, 2005.

O livro apresenta os cinco princípios essenciais da avaliação mediadora.

ITAÚ EDUCAÇÃO E TRABALHO (org.). **O Futuro do mundo do trabalho para as juventudes Brasileiras**. São Paulo: Itaú educação e trabalho, 2023.

A pesquisa traça um perfil de jovens entre 14 e 29 anos sobre a inserção educacional e laboral desse grupo.

LUCKESI, C. C. **Avaliação da aprendizagem escolar**. São Paulo: Cortez, 2000.

O livro apresenta um panorama de contextos e abordagens relacionados à avaliação da aprendizagem.

MONTEIRO, A.; POMPEU JÚNIOR, G. **A Matemática e os temas transversais**. São Paulo: Moderna, 2003.

A obra questiona alguns conceitos relacionados aos temas transversais e à função que a Matemática exerce nesse mecanismo.

MORAN, J. M.; MASSETTO, M. T.; BEHRENS, M. A. **Novas tecnologias e mediação pedagógica**. 12. ed. Campinas: Papirus, 2006.

A obra aborda os problemas do ensino e da educação, além de discutir o uso da tecnologia como mediação pedagógica.

NOGUEIRA, N. R. **Pedagogia dos projetos**: uma jornada interdisciplinar rumo ao desenvolvimento das múltiplas inteligências. 7. ed. São Paulo: Érica, 2010.

Nessa obra a autora discute questões conceituais, procedimentais e atitudinais na dinâmica de trabalho com projetos.

ORGANIZAÇÃO das Nações Unidas para a Educação, a Ciência e a Cultura. **Violência escolar e *bullying***: relatório sobre a situação mundial. Brasília, DF: UNESCO, 2019.

Relatório apresentado no Simpósio Internacional sobre Violência Escolar e *bullying*: das evidências à ação, Seul, República da Coreia, de 17 a 19 de janeiro de 2017.

PITANGA, G. *et al. Bullying* e violência escolar: suas consequências e como combatê-las. *In*: **Blog #tmjUNICEF**. Brasília, DF: 18 jul. 2023. Disponível em: https://www.unicef.org/brazil/blog/bullying-e-violencia-escolar. Acesso em: 22 set. 2024.

Texto sobre *bullying* e violência escolar apresentando suas consequências e dicas para serem combatidos.

SILVA, M. R. G. da. Considerações sobre o trabalho em grupo na aula de Matemática. **Mimesis**, Bauru, v. 19, n. 2, 1998.

Artigo sobre a aprendizagem matemática por meio da organização dos estudantes em grupos.

ISBN 978-85-16-13988-9

9 788516 139889