MANOEL PAIVA
EWERTON PAIVA
BETO PAIVA

MODERNAPLUS

MATEMÁTICA PAIVA

MANUAL DO PROFESSOR

VOLUME
II
ENSINO MÉDIO
2º ANO

Área de conhecimento:
Matemática e suas Tecnologias

Componente curricular:
Matemática

MODERNA

MANOEL PAIVA
Mestre em Educação Matemática pela
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.
Licenciado em Matemática pela Faculdade de Filosofia,
Ciências e Letras de Santo André (SP). Professor.

EWERTON PAIVA
Licenciado em Matemática pela Universidade
Federal Fluminense (RJ). Professor.

BETO PAIVA
Licenciado em Matemática pela
Universidade Federal Fluminense (RJ).
Professor e coordenador pedagógico.

MODERNAPLUS

MATEMÁTICA PAIVA

VOLUME II

ENSINO MÉDIO – 2º ANO

Área de conhecimento: Matemática e suas Tecnologias
Componente curricular: Matemática

MANUAL DO PROFESSOR

2ª edição
São Paulo, 2024

MODERNA

Edição executiva: Maria Cecília da Silva Veridiano
Edição de texto: Enrico Briese Casentini, João Alves de Souza Neto, Katia Tiemy Sido, Sergio Luiz de Lima Filho
Assistência editorial: Tadashi Horita
Gerência de planejamento editorial e revisão: Maria de Lourdes Rodrigues
Coordenação de revisão: Elaine C. del Nero, Mônica Rodrigues de Lima
Revisão: Ana Cortazzo, Sirlene Prignolato, Tatiana Malheiro, Diego Franco Gonçales
Gerência de *design*, produção gráfica e digital: Patricia Costa
Coordenação de *design* e projetos visuais: Marta Cerqueira Leite
Projeto gráfico: Mariza de Souza Porto, Bruno Tonel, Fábio Luna
Capa: Everson de Paula, Paula Miranda Santos
Colagem digital: Everson de Paula
Fotos: photovideostock/E+/Getty Images; Roy Harris/Shutterstock; Roman Samborskyi/Shutterstock; Ragnar Schmuck/fStop/Getty Images
Coordenação de produção gráfica: Aderson Oliveira
Coordenação de arte: Wilson Gazzoni Agostinho
Edição de arte: Natália Demuri Manoel
Editoração eletrônica: Teclas Editorial, Fórmula Produções Editoriais
Coordenação de pesquisa iconográfica: Sônia Oddi
Pesquisa iconográfica: Junior Rozzo, Mariana Alencar
Coordenação de *bureau*: Rubens M. Rodrigues
Tratamento de imagens: Ademir Francisco Baptista, Ana Isabela Pithan Maraschin, Denise Feitoza Maciel, Vânia Maia
Pré-impressão: Alexandre Petreca, Marcio H. Kamoto
Coordenação de produção industrial: Wendell Monteiro
Impressão e acabamento:

Organização dos objetos digitais: Maria Cecília da Silva Veridiano

Elaboração dos objetos digitais: Enrico Briese Casentini, João Alves de Souza Neto, Katia Tiemy Sido, Maria Cecília da Silva Veridiano, Sergio Luiz de Lima Filho

---

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

```
Paiva, Manoel
   Moderna plus matemática Paiva / Manoel Paiva,
Ewerton Paiva, Beto Paiva. -- 2. ed. -- São Paulo :
Moderna, 2024.

   2º ano : ensino médio : volume II.
   Componente curricular: Matemática.
   Área de conhecimento: Matemática e suas
tecnologias.
   ISBN 978-85-16-13983-4 (aluno)
   ISBN 978-85-16-13984-1 (professor)

   1. Matemática (Ensino médio) I. Paiva, Ewerton.
II. Paiva, Beto. III. Título.


24-227390                               CDD-510.7
```

Índices para catálogo sistemático:

1. Matemática : Ensino médio   510.7

Cibele Maria Dias - Bibliotecária - CRB-8/9427

EDITORA MODERNA LTDA.
Rua Padre Adelino, 758 - Belenzinho
São Paulo - SP - Brasil - CEP 03303-904
Canal de atendimento: 0303 663 3762
www.moderna.com.br
2024
Impresso no Brasil

1 3 5 7 9 10 8 6 4 2

APRESENTAÇÃO

Caro estudante,

o Ensino Médio, cada vez mais alinhado às exigências contemporâneas, tem objetivos gerais que podem ser resumidos em formar cidadãos produtivos e criativos, com raciocínio analítico e capazes de se antecipar a inovações, que busquem novos conhecimentos em um processo de formação contínua, sendo conscientes de seus direitos e deveres e capazes de atuar com protagonismo no mundo do trabalho e no convívio social.

Elaboramos esta obra nesse contexto, destacando que a Matemática no Ensino Médio, além de ter um caráter formativo e instrumental, deve ser compreendida como ciência, com suas características estruturais específicas.

Assim, para atingir os objetivos gerais nesta obra, recorremos à progressão do pensamento científico, ao pensamento computacional, às relações interdisciplinares, à contextualização, ao uso de tecnologias, aos aspectos históricos e às múltiplas representações de um mesmo objeto matemático.

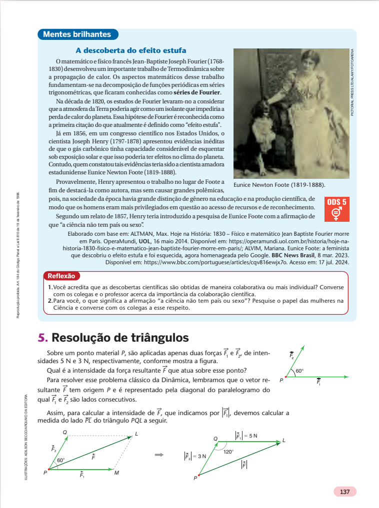
Esperamos contribuir para a sua formação, instigar seu espírito crítico e científico e despertar sua curiosidade para o vasto universo do qual conhecemos uma minúscula parte.

Os autores

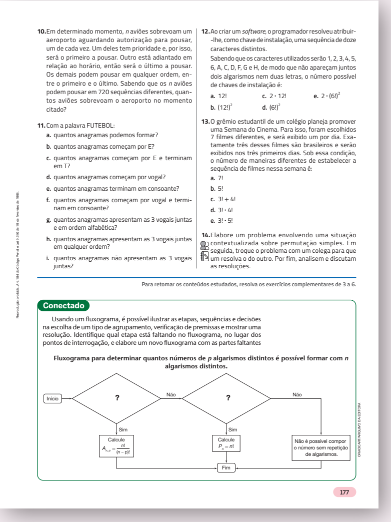
ORGANIZAÇÃO DO LIVRO

Este livro foi elaborado para oferecer, de forma clara e objetiva, conteúdos matemáticos fundamentais para o Ensino Médio.

A **abertura** pretende estimular a reflexão sobre um problema contextualizado relacionado a conteúdos do capítulo.

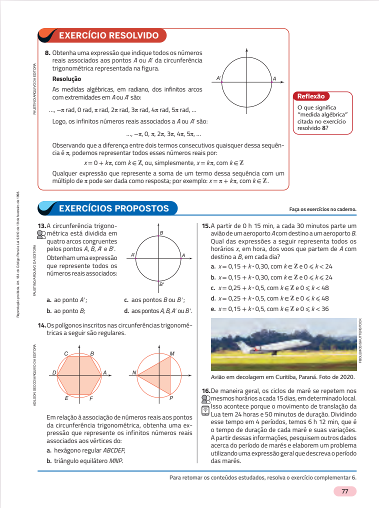


O boxe **Mentes brilhantes** apresenta realizações de pessoas ou povos que contribuíram com o desenvolvimento da Matemática ou da Ciência, além de textos sobre a História da Matemática ou Etnomatemática.



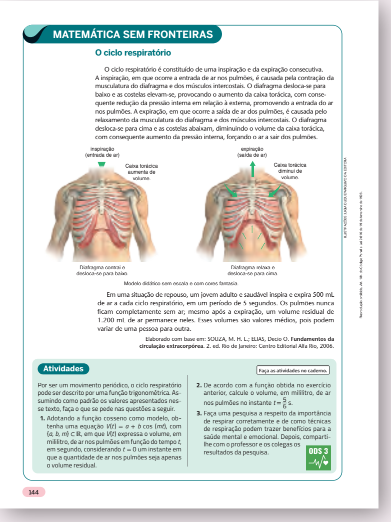
O boxe **Conectado** apresenta atividades com o uso de tecnologias como *softwares* de Geometria dinâmica, planilhas eletrônicas entre outros.

Os **Exercícios resolvidos** acompanham a teoria, auxiliando na compreensão dos conceitos.

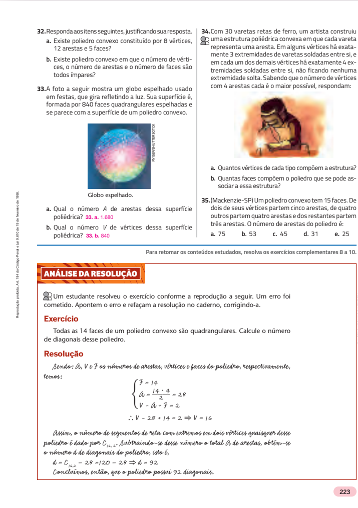


Os **Exercícios propostos** têm o objetivo de verificar o aprendizado, por meio de uma aplicação mais imediata dos conteúdos, além de conexões com o cotidiano.

O boxe **Trabalho e juventudes** apresenta situações relacionadas ao mundo do trabalho ou às culturas juvenis conectadas ao conteúdo do capítulo.

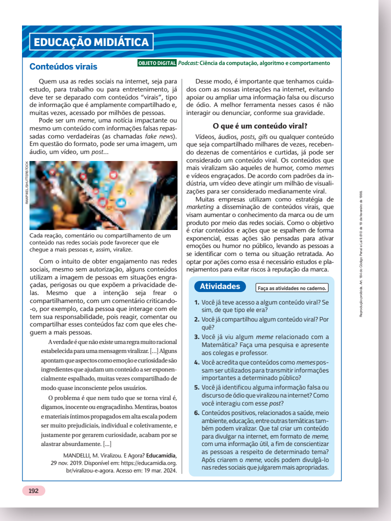


O boxe **Análise da resolução** possibilita refletir sobre erros comuns na resolução de exercícios e mostra sua correção.

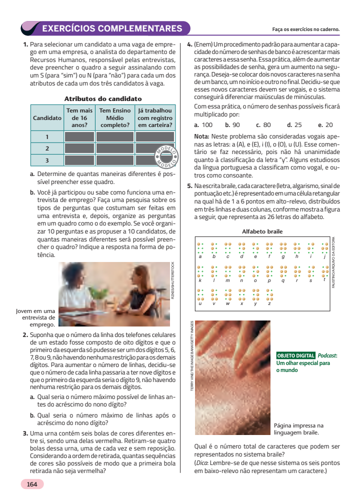


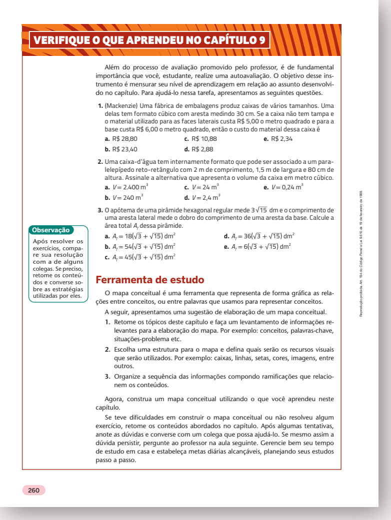
A seção **Matemática sem fronteiras** traz textos com situações de aplicação de conceitos estudados no capítulo.

A seção **Educação midiática** apresenta contextos e informações que visam explorar a importância da análise crítica de informações veiculadas nas mídias digitais.



Os **Exercícios complementares** oferecem questões de aprofundamento, com fixação e revisão dos assuntos abordados.





A seção **Verifique o que aprendeu no capítulo** traz exercícios e questões que possibilitam retomar os principais conteúdos do capítulo por meio de uma autoavaliação.

Ícones usados na coleção

- Recursos tecnológicos
- Produção de textos ou problemas
- Atividade oral
- Atividade em dupla ou em grupo

OBJETO DIGITAL *Podcast*: As ondas de rádio na comunicação humana

OBJETIVOS DE DESENVOLVIMENTO SUSTENTÁVEL

Você já ouviu falar da **Agenda 2030**? Em 2015, a Organização das Nações Unidas (ONU) lançou os **Objetivos de Desenvolvimento Sustentável (ODS)**, com metas desafiadoras para acabar com a pobreza até 2030 e buscar um futuro sustentável para todos. Esses objetivos formam a base da chamada Agenda 2030.

Os 193 países que assinaram o documento, incluindo o Brasil, comprometeram-se a implementar esse plano de ação global, que envolve governos, empresas, instituições e sociedade civil. O monitoramento e a avaliação da agenda são fundamentais nos níveis global, nacional e regional, exigindo cooperação e engajamento de todos os setores da sociedade.

A seguir, apresentamos os 17 Objetivos de Desenvolvimento Sustentável.

ODS 1

ERRADICAÇÃO DA POBREZA

Acabar com a pobreza em todas as formas e em todos os lugares.

ODS 2

FOME ZERO E AGRICULTURA SUSTENTÁVEL

Erradicar a fome, alcançar a segurança alimentar, melhorar a nutrição e promover a agricultura sustentável.

ODS 3

SAÚDE E BEM-ESTAR

Garantir o acesso à saúde de qualidade e promover o bem-estar para todos, em todas as idades.

ODS 4

EDUCAÇÃO DE QUALIDADE

Garantir educação inclusiva, de qualidade e equitativa, promovendo aprendizado contínuo para todos.

ODS 5

IGUALDADE DE GÊNERO

Alcançar a igualdade de gênero e empoderar todas as mulheres e meninas.

ODS 6

ÁGUA POTÁVEL E SANEAMENTO

Garantir a disponibilidade e a gestão sustentável da água potável e do saneamento para todos.

ODS 7

ENERGIA LIMPA E ACESSÍVEL

Garantir o acesso a fontes de energia confiáveis, sustentáveis e modernas para todos.

ODS 8

TRABALHO DECENTE E CRESCIMENTO ECONÔMICO

Promover crescimento econômico inclusivo e sustentável, com emprego pleno e trabalho digno para todos.

RELEITURA DOS ÍCONES DA ONU POR VINICIUS ROSSIGNOL FELIPE

ODS 9

INDÚSTRIA, INOVAÇÃO E INFRAESTRUTURA

Construir infraestruturas resilientes, promover a industrialização inclusiva e sustentável e fomentar a inovação.

ODS 10

REDUÇÃO DAS DESIGUALDADES

Reduzir as desigualdades no interior dos países e entre países.

ODS 11

CIDADES E COMUNIDADES SUSTENTÁVEIS

Tornar as cidades e comunidades mais inclusivas, seguras, resilientes e sustentáveis.

ODS 12

CONSUMO E PRODUÇÃO RESPONSÁVEIS

Garantir padrões de consumo e de produção sustentáveis.

ODS 13

AÇÃO CONTRA A MUDANÇA GLOBAL DO CLIMA

Adotar medidas urgentes para combater as alterações climáticas e os seus impactos.

ODS 14

VIDA NA ÁGUA

Conservar e usar de forma responsável os oceanos, os mares e os recursos marinhos para o desenvolvimento sustentável.

ODS 15

VIDA TERRESTRE

Proteger, restaurar e promover o uso sustentável dos ecossistemas terrestres, gerindo florestas, combatendo a desertificação, revertendo a degradação dos solos e preservando a biodiversidade.

ODS 16

PAZ, JUSTIÇA E INSTITUIÇÕES EFICAZES

Promover sociedades pacíficas e inclusivas para o desenvolvimento sustentável, garantindo o acesso à justiça e construindo instituições eficazes e responsáveis em todos os níveis.

ODS 17

PARCERIAS E MEIOS DE IMPLEMENTAÇÃO

Reforçar os meios de implementação e revitalizar a parceria global para o desenvolvimento sustentável.

Fonte: ORGANIZAÇÃO DAS NAÇÕES UNIDAS. **Sobre o nosso trabalho para alcançar os Objetivos de Desenvolvimento Sustentável no Brasil**. Disponível em: https://brasil.un.org/pt-br/sdgs. Acesso em: 22 set. 2024.

Neste livro, você encontrará indicações dos ODS quando houver propostas, temas ou conceitos com os quais eles podem estar relacionados.

RELEITURA DOS ÍCONES DA ONU POR VINICIUS ROSSIGNOL FELIPE

SUMÁRIO

SUMÁRIO DOS OBJETOS DIGITAIS

CAPÍTULO 1

A **abertura** explora a noção de sequência por meio de uma situação que utiliza o conceito de meia-vida do iodo-131. Esse tema é um exemplo importante de aplicação de sequências na área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias, especialmente no contexto da iodoterapia para o tratamento do câncer da tireoide.

Sequências

Oriente os estudantes a consultar as páginas 6 e 7 para saber mais sobre este e os demais Objetivos de Desenvolvimento Sustentável.

ODS 3

As considerações sobre a meia-vida do iodo-131 são essenciais para determinar a posologia, ou seja, a intensidade e a frequência das doses administradas durante o tratamento do câncer da tireoide. Ao explorar esse tema, favorecemos o desenvolvimento do **ODS 3** e do **TCT Saúde**.

As mulheres são mais afetadas pelos distúrbios da tireoide, variando de 5 a 7 mulheres a cada homem; depois dos 70 anos, cerca de 90% delas possuem nódulos de tireoide. Uma vez detectado o nódulo, o médico precisa avaliar a necessidade de ultrassom ou biópsia. Esses nódulos são encontrados em cerca de metade das pessoas maiores de 40 anos, por isso é recomendado que, a partir dessa idade, seja realizado o exame para a dosagem anual do TSH (o hormônio estimulador da tireoide), além da checagem de colesterol, triglicérides e glicemia.

Elaborado com base em: MANZINI, I. Distúrbios da tireoide: sintomas, diagnóstico e tratamento. **Portal Drauzio Varella**, [*s. l.*], 13 jul. 2022. Disponível em: https://drauziovarella.uol.com.br/endocrinologia/disturbios-da-tireoide-sintomas-diagnostico-e-tratamento/. Acesso em: 26 ago. 2024.

PEAKSTOCK/ISTOCK/GETTY IMAGES

Médica examinando a região do pescoço da paciente.

Uma sugestão para enriquecer o estudo dessa abertura é solicitar aos estudantes que discutam, em grupos, a questão proposta no boxe **Além da teoria**. Essa atividade promoverá um maior engajamento e a compreensão do tema, permitindo que os estudantes relacionem os conceitos teóricos à sua aplicação prática.

Além da teoria

Em medicina nuclear, vários exames e tratamentos da tireoide podem ser realizados com a utilização de iodo-131. Esse isótopo radioativo possui meia-vida de oito dias. Isso significa que a massa inicial *m* de qualquer amostra desse isótopo se reduz à metade ao final de 8 dias.

Suponha que, nesse momento, uma amostra de iodo-131 tenha 100 g. Indique, em ordem decrescente, a massa dessa amostra e a massa remanescente ao final de cada período de 8 dias, durante um período de 32 dias.

Além da teoria: A massa da amostra de iodo-131 reduz-se à metade ao final de 8 dias. Portanto, a massa inicial da amostra e a massa remanescente ao final de cada período de 8 dias são:100 g; 50 g; 25 g; 12,5 g; 6,25 g

Conceitue intuitivamente sequência, mostrando algumas aplicações no cotidiano: lista de chamada da classe, código de barras, ordem alfabética das palavras em um dicionário, ordem crescente na numeração das páginas de um livro, entre outras.

1. O conceito de sequência

É possível que você já tenha tido acesso a afirmações que se referem ao Brasil como um país continental. Elas se dão devido às dimensões do nosso país, que são comparáveis às de um continente. Há apenas quatro países maiores que o Brasil, em extensão territorial. O quadro a seguir mostra a classificação dos cinco maiores países do mundo.

Explore o quadro que apresenta os cinco maiores países do mundo em extensão territorial para discutir os conceitos de classificação e ordem, enfatizando que o objetivo principal é estudar as sequências numéricas. Ao trabalhar com esse exemplo, revise o conceito de função $f: A \rightarrow B$, que relaciona cada elemento do conjunto A (domínio) a um único elemento do conjunto B (imagem). Além disso, defina sequência numérica, que pode ser finita, quando possui um número limitado de termos, ou infinita, quando seus termos se estendem indefinidamente. Essa abordagem permite uma melhor compreensão do uso de sequências numéricas e sua aplicação em diversas situações.

BANDEIRAS: RÚSSIA: EVIKKA/SHUTTERSTOCK; CANADÁ: SVETOCHECK/SHUTTERSTOCK; CHINA: A PLUS VECTOR/SHUTTERSTOCK; EUA: ALEXSL/ISTOCK/GETTY IMAGES; BRASIL: GRMARC/SHUTTERSTOCK

Classificação dos cinco maiores países do mundo, segundo a ordem decrescente das extensões territoriais

Posição	País	Extensão territorial
1	**Rússia**	**17.098.246 km^2**
2	**Canadá**	**9.984.670 km^2**
3	**China**	**9.596.961 km^2**
4	**EUA**	**9.525.067 km^2**
5	**Brasil**	**8.515.767 km^2**

Fonte: QUAL é o maior país do mundo em extensão territorial? **National Geographic Brasil**, [*s. l.*], 11 abr. 2023. Disponível em: https://www.nationalgeographicbrasil.com/viagem/2023/03/qual-e-o-maior-pais-do-mundo-em-extensao-territorial. Acesso em: 26 ago. 2024.

Observe que a classificação é apresentada associando a cada número natural de 1 a 5 o nome de um país. Essa associação estabelece uma ordem para elementos de um conjunto e, portanto, determina uma **sequência**, em que:

- o número 1 corresponde ao primeiro elemento da sequência;
- o número 2 corresponde ao segundo elemento da sequência;
- o número 3 corresponde ao terceiro elemento da sequência;
- o número 4 corresponde ao quarto elemento da sequência;
- o número 5 corresponde ao quinto elemento da sequência.

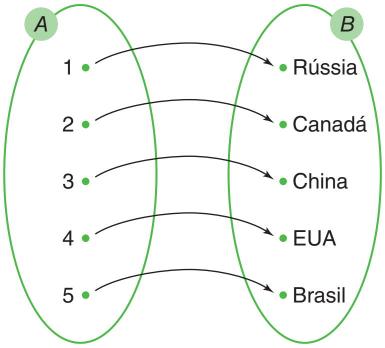
Reflexão

Você conhece alguma situação que pode ser identificada como uma sequência?

Reflexão: Resposta pessoal. Os estudantes podem citar os meses do ano, a ocorrência dos Jogos Olímpicos, a ordem alfabética do dicionário, entre outras situações.

Vamos representar essa associação em um diagrama de flechas, indicando por A o conjunto de números naturais de 1 a 5, e por B, o conjunto dos países classificados nas cinco primeiras posições.

Note que cada elemento de A está associado a um único elemento de B. Dessa forma, temos uma função de A em B. Essa situação é um exemplo de sequência finita, que definimos a seguir.

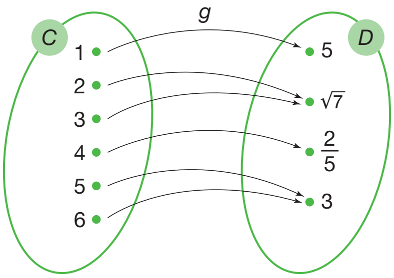


ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

Sequência finita é toda função de domínio $A = \{1, 2, 3, ..., n\}$, com $A \subset \mathbb{N}^*$, e contradomínio B, sendo B um conjunto qualquer não vazio.

Exemplos

a. Consideremos a função *g* descrita no diagrama apresentado.



FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

Essa função descreve uma sequência finita, que pode ser representada simplesmente por:

$$\left(5, \sqrt{7}, \sqrt{7}, \frac{2}{5}, 3, 3\right)$$

Nessa forma de representação da sequência, os parênteses indicam que a ordem em que se apresentam os elementos deve ser mantida, isto é, se trocarmos a ordem de pelo menos dois elementos distintos, obteremos outra sequência, por exemplo:

$$\left(5, \sqrt{7}, \sqrt{7}, \frac{2}{5}, 3, 3\right) \neq \left(\sqrt{7}, 5, \sqrt{7}, \frac{2}{5}, 3, 3\right)$$

b. Sendo $A = \{1, 2, 3, 4, ..., 40\}$, a função $h: A \to \mathbb{R}$ tal que $h(n) = 3n^2 - 1$ representa a sequência finita $(h(1), h(2), h(3), ..., h(40))$, em que:

$h(1) = 3 \cdot 1^2 - 1 = 2$

$h(2) = 3 \cdot 2^2 - 1 = 11$

$h(3) = 3 \cdot 3^2 - 1 = 26$

$h(4) = 3 \cdot 4^2 - 1 = 47$

$\vdots$

$h(40) = 3 \cdot 40^2 - 1 = 4.799$

Portanto, a sequência representada pela função *h* é: (2, 11, 26, 47, ..., 4.799).

Também podemos definir sequência infinita:

Sequência infinita é toda função de domínio $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, ...\}$ e contradomínio *B*, sendo *B* um conjunto qualquer não vazio.

Exemplos

a. Seja a função $f: \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ tal que $f(n) = 2n$. Essa função é a sequência infinita dos números naturais pares não nulos e pode ser representada por: (2, 4, 6, 8, ...)

b. Seja a função $g: \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ tal que $g(n) = (-1)^n$. Essa é a sequência infinita: (−1, 1, −1, 1, ...)

Reflexão

Podemos dizer que a sequência formada pelas letras iniciais dos dias da semana (D, S, T, Q, Q, S, S) é finita ou infinita?

Reflexão: Espera-se que os estudantes percebam que a sequência é finita, mesmo que os termos da sequência não sejam necessariamente diferentes.

Termos de uma sequência

Cada elemento de uma sequência também é chamado de **termo da sequência**. Em uma sequência, o termo que ocupa a posição de número *n* é indicado pelo símbolo a_n, isto é:

a_1 indica o primeiro termo da sequência;
a_2 indica o segundo termo da sequência;
a_3 indica o terceiro termo da sequência;
a_4 indica o quarto termo da sequência;
$\vdots$
a_n indica o *n*-ésimo termo da sequência.

Exemplo

Na sequência (7, 3, 8, 10, ...), temos: $a_1 = 7$, $a_2 = 3$, $a_3 = 8$, $a_4 = 10$, ...

Notas:

1. Podemos nos referir a uma sequência $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...)$ abreviadamente por $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ou, simplesmente, (a_n).
2. Em uma sequência finita $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n)$, os termos a_1 e a_n são chamados de **extremos da sequência**. Dois termos, a_i e a_j, são **equidistantes dos extremos** se, e somente se, a quantidade de termos que precedem a_i for igual à quantidade de termos que sucedem a_j.

3. Um termo a_m é chamado de **termo médio** de uma sequência finita com número ímpar de termos se, e somente se, a quantidade de termos que antecedem a_m for igual à quantidade de termos que o sucedem.
Por exemplo, na sequência $(a_1, a_2, a_3, a_4, ..., a_{58}, a_{59}, a_{60}, a_{61})$, os extremos são a_1 e a_{61}. Os termos a_4 e a_{58} são equidistantes dos extremos. E o termo médio da sequência é a_{31}.

2. Lei de formação de uma sequência

Um conjunto de informações que torna possível determinar todos os termos de uma sequência e a ordem em que esses termos se apresentam é chamado de **lei de formação da sequência**.

Exemplos

a. Seja (a_n) a sequência tal que: $\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_{n+1} = 4 + a_n \end{cases}$, com $n \in \mathbb{N}^*$

As informações $a_1 = 3$ e $a_{n+1} = 4 + a_n$, para todo número natural n não nulo, determinam todos os elementos da sequência e a ordem em que se apresentam. Observe:

- o primeiro termo da sequência é 3 pois, $a_1 = 3$;
- na igualdade $a_{n+1} = 4 + a_n$, atribuindo a n os valores 1, 2, 3, ..., obtemos os demais termos da sequência, isto é:

$$\begin{aligned} n = 1 &\Rightarrow a_2 = 4 + a_1 = 4 + 3 = 7 \\ n = 2 &\Rightarrow a_3 = 4 + a_2 = 4 + 7 = 11 \\ n = 3 &\Rightarrow a_4 = 4 + a_3 = 4 + 11 = 15 \\ n = 4 &\Rightarrow a_5 = 4 + a_4 = 4 + 15 = 19 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Portanto, a sequência é (3, 7, 11, 15, 19, ...).

Nessa sequência, é dado o primeiro termo e os demais termos são definidos por uma expressão com base no termo anterior; definimos essa sequência como recursiva.

b. Considere a sequência (a_n) tal que $a_n = n^2 - 1$. Para determinar os termos dessa sequência, basta atribuir a n os valores 1, 2, 3, 4, ... na igualdade $a_n = n^2 - 1$. Observe:

$$\begin{aligned} n = 1 &\Rightarrow a_1 = 1^2 - 1 = 0 \\ n = 2 &\Rightarrow a_2 = 2^2 - 1 = 3 \\ n = 3 &\Rightarrow a_3 = 3^2 - 1 = 8 \\ n = 4 &\Rightarrow a_4 = 4^2 - 1 = 15 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Portanto, a sequência é (0, 3, 8, 15, ...).

Nessa sequência, cada termo é determinado em relação à sua posição de acordo com a expressão dada. Essa sequência é definida pelo termo geral.

c. A sequência dos números primos, em ordem crescente, é (2, 3, 5, 7, 11, ...). Observe que a lei de formação dessa sequência não foi expressa por uma equação, mas pela propriedade de que os números sejam primos e estejam em ordem crescente. Esse exemplo mostra que a lei de formação de uma sequência pode não ser uma equação.

Reflexão

Dê outros exemplos de sequências que sejam definidas de maneira recursiva.

Reflexão: Resposta pessoal.

Antes de iniciar o tópico, pergunte: “Considerando a ordem crescente dos números naturais ímpares, como você representaria o termo a_n dessa sequência? ($a_n = 2n + 1$)”; “Considerando a ordem crescente dos números naturais não nulos múltiplos de 4, como você representaria o termo b_n dessa sequência? ($b_n = 4n$)”; “Considerando a ordem crescente dos números naturais múltiplos de 4, como você representaria o termo c_n dessa sequência? ($c_n = 4(n - 1)$)”.
Existem dois casos fundamentais para a lei de formação de uma sequência: o primeiro ocorre quando se conhece o primeiro termo e uma relação entre dois termos consecutivos, permitindo a construção da sequência a partir desse padrão; o segundo caso acontece quando é dada uma relação entre um termo qualquer a_n e sua ordem n.

Conectado

Com base nos exemplos, construa um fluxograma que determine os termos de uma sequência de números pares. Em seguida, compartilhe o fluxograma com os colegas.

Conectado: Resposta no final do livro.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Faça os exercícios no caderno.

1\. a. $a_1 = 2$, $a_2 = 8$, $a_3 = \sqrt{7}$, $a_4 = -5$, $a_5 = 9$, $a_6 = 9$ e $a_7 = 9$

1. Responda aos itens a seguir.

- **a.** Na sequência (a_n) dada por $(2, 8, \sqrt{7}, -5, 9, 9, 9)$, quais são os termos a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 e a_7?
- **b.** Qual é o termo médio da sequência (a_n) do item anterior? 1. b. -5
- **c.** Na sequência (b_n) dada por $\left(3, 6, 7, \sqrt[3]{2}, -2, 5, 20, 4, \frac{3}{7}\right)$, os termos b_3 e b_k são equidistantes dos extremos. Quais são os valores de k e b_k? 1. c) $k = 7$ e $b_k = b_7 = 20$
- **d.** Em uma sequência (c_n) de 22 termos, os termos c_k e c_{k+7} são equidistantes dos extremos. Qual é o valor de k? 1. d. $k = 8$

2. Represente na forma $(a_1, a_2, a_3, a_4, ...)$ cada uma das sequências a seguir.

- **a.** (a_n) tal que $a_n = 2n + 5$ 2. a. $(7, 9, 11, 13, ...)$
- **b.** (a_n) tal que $a_n = n^2 + n$ 2. b. $(2, 6, 12, 20, ...)$
- **c.** (a_n) tal que $a_n = \dfrac{n}{n+1}$ 2. c. $\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, ...\right)$
- **d.** (a_n) tal que $\begin{cases} a_1 = 4 \\ a_{n+1} = 5 + a_n \end{cases}$ 2. d. $(4, 9, 14, 19, ...)$
- **e.** (a_n) tal que $\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_2 = 7 \\ a_{n+2} = a_{n+1} - a_n \end{cases}$ 2. e. $(3, 7, 4, -3, ...)$

3. A soma dos n primeiros termos de uma sequência $(a_1, a_2, a_3, a_4, ...)$ é dada por $S_n = n^2 + n$, para todo número natural n não nulo.

- **a.** Calcule a soma dos dez primeiros termos da sequência. 3. a. 110
- **b.** Determine o primeiro termo da sequência. 3. b. 2
- **c.** Determine o 5º termo da sequência. 3. c. 10
- **d.** Determine o n-ésimo termo, a_n, da sequência. 3. d. $2n$

4. Todas as mesas de um restaurante são retangulares, com 6 cadeiras em volta, conforme mostra a figura 1. Se mais de 6 pessoas pretendem sentar-se juntas, então duas ou mais mesas são enfileiradas, conforme mostram as figuras 2 e 3.

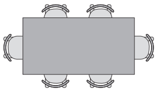


figura 1

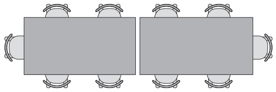


figura 2

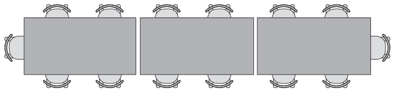
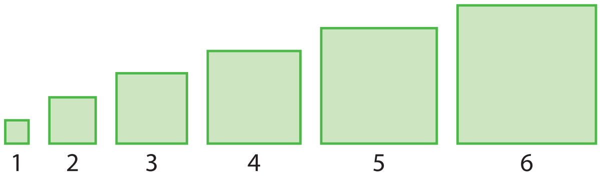


figura 3

FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

- **a.** Enfileirando-se 11 mesas, conforme as disposições mostradas nas figuras, quantas cadeiras serão colocadas à sua volta? 4. a. 46
- **b.** Enfileirando-se n mesas, conforme as disposições mostradas nas figuras anteriores, quantas cadeiras serão colocadas à sua volta? 4. b. $4n + 2$
- **c.** Em uma festa de fim de ano, 36 funcionários de uma empresa farão um almoço de confraternização nesse restaurante. Qual é o número mínimo de mesas que deverão ser enfileiradas, conforme a disposição das figuras 1 a 3, para que as pessoas se sentem juntas? 4. c. 9 mesas

5. (Enem) Em um trabalho escolar, João foi convidado a calcular as áreas de vários quadrados diferentes, dispostos em sequência, da esquerda para a direita, como mostra a figura.



ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

O primeiro quadrado da sequência tem lado medindo 1 cm, o segundo quadrado tem lado medindo 2 cm, o terceiro quadrado tem lado medindo 3 cm e assim por diante. O objetivo do trabalho é identificar em quanto a área de cada quadrado da sequência excede a área do quadrado anterior. A área do quadrado que ocupa a posição n, na sequência, foi representada por A_n. Para $n \geqslant 2$, o valor da diferença $A_n - A_{n-1}$, em centímetro quadrado, é igual a: 5. alternativa a

- **a.** $2n - 1$
- **b.** $2n + 1$
- **c.** $-2n + 1$
- **d.** $(n - 1)^2$
- **e.** $n^2 - 1$

6. O teclado de um piano é formado por 52 teclas brancas que se sucedem, da esquerda para a direita, emitindo a sequência de notas musicais: lá, si, dó, ré, mi, fá, sol, lá, si, dó, ré, mi, fá, sol, e assim sucessivamente. Qual é a nota da 47ª tecla branca, da esquerda para a direita? 6. mi

7\. b. 15 horas.

7. Um mecânico fez a manutenção de uma máquina industrial em 4 etapas, totalizando t horas de trabalho. Na primeira etapa, o mecânico trabalhou metade do total t de horas mais meia hora. Em cada uma das etapas seguintes, ele trabalhou metade do tempo que faltava para completar a tarefa mais meia hora. E assim completou a tarefa na quarta etapa.


ANON_TAE/SHUTTERSTOCK

- **a.** Dê, em função de t, a sequência formada pelas horas de trabalho nessas quatro etapas, na ordem em que foram realizadas. 7. a. $\left(\frac{t+1}{2}, \frac{t+1}{4}, \frac{t+1}{8}, \frac{t+1}{16}\right)$
- **b.** Qual foi o total de horas trabalhadas nessa tarefa?

8. Uma das sequências de números mais conhecidas é a sequência de Fibonacci. Ela foi escrita pelo matemático Leonardo de Pisa, que propôs, em 1902, em sua obra *Liber abaci* (livro de cálculos), o problema que gerou diversas aplicações em várias áreas de conhecimento, como Economia, Biologia, Química etc.

a. Pesquise na internet sobre a sequência de Fibonacci e escreva um pequeno texto sobre suas descobertas. **8. a.** Resposta pessoal.

b. Possivelmente, você verá que a sequência de Fibonacci apresenta relação com um famoso número chamado **número de ouro**. Qual é essa relação?

c. Com base na ideia de recursividade e utilizando os recursos de uma planilha eletrônica, indique os 20 primeiros termos da sequência de Fibonacci.

8. b. Na sequência (a_n) de Fibonacci, a razão $\frac{a_n + 1}{a_n}$ tende ao número 1,61803..., quando *n* aumenta indefinidamente. Esse número é conhecido como número de ouro.

8. c. (0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181)

Para retomar os conteúdos estudados, resolva os exercícios complementares 1 a 3.

Mentes brilhantes

Ada Lovelace e a computação

Considerada a primeira programadora da história, Ada Lovelace, como ficou conhecida, desde cedo foi incentivada a estudar matemática e ciência. Ainda jovem, ela começou a trabalhar com Charles Babbage e colaborou com a idealização de uma máquina analítica, um dispositivo de cálculos.

Ada também fez a tradução de um artigo do engenheiro Luigi Menabrea e incluiu um apêndice contendo notas com suas observações. Uma das notas foi a demonstração do passo a passo da sequência de números de Bernoulli. Este algoritmo foi considerado o primeiro programa de computador escrito no mundo inteiro antes dos computadores eletrônicos.

Seu trabalho vai além da sua época, pois sua abordagem visionária previa que a máquina também poderia manipular símbolos.

Elaborado com base em: LÓPEZ, M. Ada Lovelace e os números de Bernoulli. **Guia dos entusiastas da ciência**. 23 set. 2019, v. 2, n. 2, p. 4. Disponível em: https://gec.proec.ufabc.edu.br/profissao-cientista/ada-lovelace/. Acesso em: 27 ago. 2024.

MARGARET CARPENTER. FOTO: DONALDSON COLLECTION/ARCHIVE PHOTOS/GETTY IMAGES - MUSEU DA CIÊNCIA, LONDRES

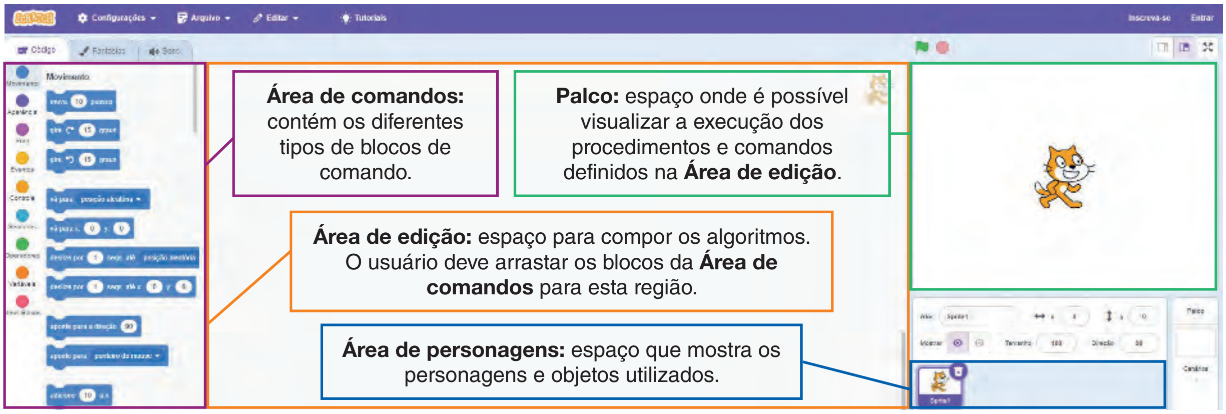
Reprodução artística de Ada Lovelace (1815-1852), conhecida como a primeira programadora do mundo.

Conectado

Atualmente, existem programas e plataformas específicos que utilizam linguagem de programação simplificada para que qualquer pessoa possa criar algoritmos, animações, jogos, entre outros.

Existem várias linguagens de programação, e uma delas é o Scratch, que utiliza uma linguagem de blocos simples e intuitiva. Cada bloco representa um comando que vai encaixando em outro bloco, formando uma sequência de comandos (algoritmos) que será interpretada e executada pelo programa. Tenha em mente que essa sequência precisa ser coerente para atender ao seu objetivo. O Scratch é gratuito e pode ser acessado pelo *site*: https://scratch.mit.edu/ (acesso em: 29 ago. 2024).

A seguir, vamos apresentar algumas de suas funcionalidades.



Área de comandos: contém os diferentes tipos de blocos de comando.

Palco: espaço onde é possível visualizar a execução dos procedimentos e comandos definidos na **Área de edição**.

Área de edição: espaço para compor os algoritmos. O usuário deve arrastar os blocos da **Área de comandos** para esta região.

Área de personagens: espaço que mostra os personagens e objetos utilizados.

REPRODUÇÃO/SCRATCH.MIT.EDU

A seguir, é apresentado um algoritmo que foi criado para determinar a sequência numérica (2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16).

Oriente os estudantes a explorarem o Scratch, apresentado no boxe **Conectado**, como uma ferramenta prática e acessível para aprender conceitos de programação.

```
quando 🏴 for clicado
mude minha variável ▾ para 0
repita até que minha variável = 16
    adicione 2 a minha variável ▾
    diga minha variável por 1 segundos
```

REPRODUÇÃO/SCRATCH.MIT.EDU

Destaque que essa plataforma utiliza uma linguagem de blocos simples, permitindo que qualquer pessoa crie algoritmos, animações e jogos sem a necessidade de conhecimento prévio em programação.

Os blocos usados na construção desse algoritmo são detalhados a seguir.

```
quando 🏴 for clicado
```

Comando indica o início do algoritmo. Ao clicar na bandeira verde localizada próximo do **Palco**, os comandos ligados a ele são realizados.

```
mude minha variável ▾ para 0
```

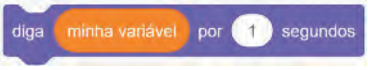
É usado para atribuir valor a uma variável. Note que iniciamos com a variável 0.

```
repita até que minha variável = 16
```

Comando usado para indicar a repetição de passos. No nosso exemplo, igualamos a variável ao número 16. Assim, os passos serão repetidos até obtê-lo.

```
adicione 2 a minha variável ▾
```

Comando usado para adicionar um valor a uma variável. No nosso exemplo, iniciamos com a variável zero e vamos adicionar 2 a essa variável.



```
diga minha variável por 1 segundos
```

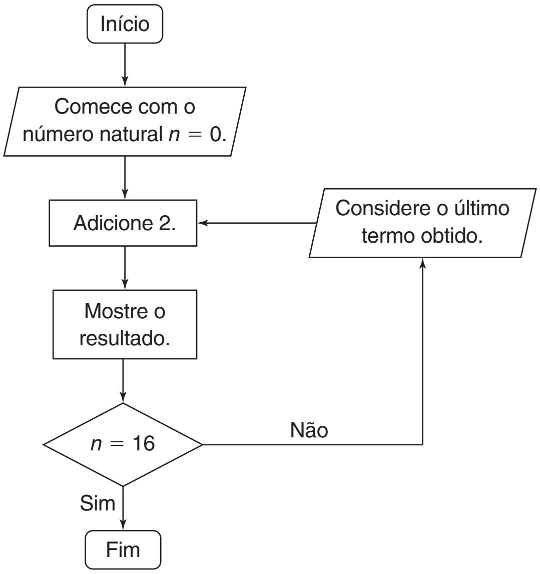
Comado usado para que o personagem apresente uma mensagem, em balão de fala ou de pensamento, em um determinado intervalo de tempo.

REPRODUÇÃO/SCRATCH.MIT.EDU

Após finalizar o algoritmo, vamos executar os comandos no espaço denominado **Palco,** clicando na bandeira verde. O personagem vai dizer os termos da sequência. No nosso exemplo, ele começa com 2, depois 4, e assim por diante, até 16.

REPRODUÇÃO/SCRATCH.MIT.EDU

Também podemos representar esse algoritmo criado no Scratch utilizando o fluxograma a seguir.



ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

Ao trabalhar com o Scratch e os conceitos de programação, favorecemos o desenvolvimento da **competência geral 2**, ao estimular a resolução de problemas de forma criativa e lógica; da **competência geral 4**, ao favorecer a expressão e a comunicação de ideias de forma clara e organizada; e da **competência geral 5**, ao desenvolver habilidades de programação e uso de tecnologias digitais, compreendendo como aplicá-las para solucionar problemas.

Agora é com você!

1. A imagem a seguir mostra o algoritmo para obter o terceiro termo de uma sequência. Analise-o e responda às questões.

```
mude termo 2 ▾ para 5
mude termo 3 ▾ para 2 + termo 2
diga termo 3
```

REPRODUÇÃO/SCRATCH.MIT.EDU

a. De acordo com esse algoritmo, o terceiro termo da sequência é obtido de maneira recursiva ou não? Justifique. **1. a.** Espera-se que os estudantes respondam que a sequência é recursiva, pois, para obter esse termo, o termo anterior é adicionado a 2.

b. Qual é a expressão que determina os termos da sequência? **1. b.** $a_n = 2 + a_{n-1}$, para $n \in \mathbb{N}$ com $n \geqslant 2$.

2. Junte-se a um colega e conversem sobre alguma situação que envolva algum conceito matemático estudado. Em seguida, elaborem um problema sobre esse conceito e listem no caderno os passos necessários para resolvê-lo. Em um computador, utilizando o Scratch, construam um algoritmo que represente a sequência dos passos descritos anteriormente e executem o programa para verificar se retorna as soluções esperadas. **2.** Respostas pessoais.

3. Progressão aritmética

OBJETO DIGITAL *Podcast*: As ondas de rádio na comunicação humana

A Portaria Interministerial MDIC/MCTIC nº 68, de 21 de setembro de 2017, estendeu as faixas de radiodifusão FM no Brasil, que passaram a operar no intervalo de 76 megahertz (MHz) a 108 megahertz, conhecida como "FM estendida". A diferença entre a frequência de duas emissoras sucessivas na sintonização dos aparelhos de rádio continuou a ser de 0,2 MHz.

Assim, em cada região especificada pela Agência Nacional de Telecomunicações (Anatel), as frequências, em MHz, disponíveis para emissoras de rádio FM formariam a sequência:

(76; 76,2; 76,4; 76,6; ...; 108)

Essa sequência numérica é uma **progressão aritmética**, porque, adicionando uma mesma constante a cada um de seus termos, obtemos o termo seguinte. Na sequência das frequências de rádio disponíveis, adicionamos 0,2 a cada termo para obter o termo seguinte.

Podemos definir, de modo geral, que:

RAFASTOCKBR/SHUTTERSTOCK

A Agência Nacional de Telecomunicações (Anatel) busca a cooperação de diferentes associações a fim de divulgar a necessidade de que os receptores de rádio em frequência modulada de veículos importados operem na faixa estendida para garantir o acesso a um número maior de emissoras FM no Brasil.

Progressão aritmética (P.A.) é toda sequência numérica em que cada termo, a partir do segundo, é igual à soma do termo precedente (anterior) com uma constante *r*.

A constante *r* é chamada de **razão** da progressão aritmética.

O rádio é um dos mais importantes meios de comunicação, sendo um veículo de grande alcance. Sugerimos que os estudantes acessem o objeto digital ***Podcast*: Rádio**, que aborda o conceito de rádio, explicando desde o funcionamento das ondas de rádio até os sistemas de transmissão e recepção.

Exemplos

a. A sequência (4, 9, 14, 19, 24, 29, 34, 39) é uma P.A. finita de razão $r = 5$.

b. (18, 10, 2, −6, −14, ...) é uma P.A. infinita de razão $r = -8$.

c. (4, 4, 4, 4, 4, ...) é uma P.A. infinita de razão $r = 0$.

Nota:

Considere uma P.A. qualquer de razão r:

$$(a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n, a_{n+1}, \ldots)$$

$$+r \quad +r \quad +r \qquad\qquad +r$$

Observe que:

$a_2 - a_1 = r$ $\qquad$ $a_3 - a_2 = r$ $\qquad$ $a_4 - a_3 = r$ $\qquad$ $a_{n+1} - a_n = r$

Ou seja, a diferença entre dois termos consecutivos quaisquer, $a_{n+1} - a_n$, é constante e igual à razão r.

Classificação das progressões aritméticas

Podemos classificar as progressões aritméticas em crescente, decrescente ou constante.

- **Crescente**: uma P.A. é crescente quando cada termo, a partir do segundo, é maior que o antecedente. Para que isso ocorra, é necessário e suficiente que ela tenha **razão positiva**.

Exemplo

(6, 10, 14, 18, ...) é uma P.A. crescente. Note que sua razão é positiva: $r = 4$

- **Decrescente**: uma P.A. é decrescente quando cada termo, a partir do segundo, é menor que o antecedente. Para que isso ocorra, é necessário e suficiente que ela tenha **razão negativa**.

Exemplo

(13, 8, 3, −2, −7, ...) é uma P.A. decrescente. Note que sua razão é negativa: $r = -5$

- **Constante**: uma P.A. é constante quando todos os seus termos são iguais. Para que isso ocorra, é necessário e suficiente que ela tenha **razão nula**.

Exemplo

$\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}, \frac{5}{2}, \frac{5}{2}, \ldots\right)$ é uma P.A. constante. Note que sua razão é nula: $r = 0$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Faça os exercícios no caderno.

9. (Enem) O número mensal de passagens de determinada empresa aérea aumentou no ano passado nas seguintes condições: em janeiro foram vendidas 33.000 passagens; em fevereiro, 34.500; em março, 36.000. Esse padrão de crescimento se mantém para os meses subsequentes.

Quantas passagens foram vendidas por essa empresa em julho do ano passado? **9.** alternativa **d**

a. 38.000

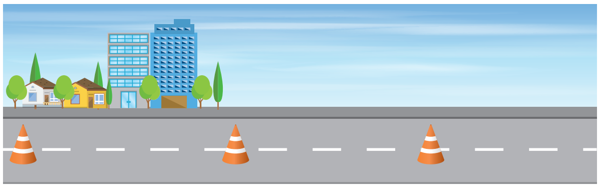
b. 40.500

c. 41.000

d. 42.000

e. 48.000

10. Em uma rua, cujo início é um ponto A, serão realizadas obras de manutenção. Para isso, foram colocados 35 cones de sinalização, numerados por 1, 2, 3, ..., 35, ao longo do trecho reto onde as obras serão realizadas. O cone de número 1 foi colocado a 148 m de distância do ponto A, e cada cone de número n, com $n > 1$, foi colocado a 20 m mais distante do ponto A do que o cone de número $n - 1$.



ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

(Modelo didático sem escala e com cores fantasia.)

a. Escreva a sequência (a_1, a_2, a_3, ..., a_{35}) em que cada termo a_n é a distância, em metro, entre o cone *n* e o ponto *A*.
10. a. A sequência pedida é (148, 168, 188, 208, ..., 828).

b. Dê a lei de formação da sequência obtida no item **a.** **10. b.** A lei de formação dessa sequência é $a_n = 148 + (n - 1) \cdot 20$.

11. Classifique cada uma das seguintes progressões aritméticas em crescente, decrescente ou constante:

a. $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ tal que $a_n = 8 - 3n$ **11. a.** decrescente

b. $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ tal que $a_n = \dfrac{n^2 - 9}{n + 3} - n$ **11. b.** constante

c. $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ tal que $\begin{cases} a_1 = 10 \\ a_{n+1} = a_n + 8 \end{cases}$ **11. c.** crescente

12. Um tanque estava com 600 L de água. Abriu-se, então, uma torneira com vazão constante para enchê-lo, o que levou exatamente três horas. Os termos da sequência (600, $5x - y$, $6x + 3y$, $8x + 5y$) representam, respectivamente, a quantidade de água no tanque, em litro, no instante em que foi aberta a torneira e ao final de cada uma das três horas seguintes. Responda:

a. Qual é a capacidade do tanque? **12. a.** 4.200 L

b. Qual é vazão dessa torneira, em litro por hora?
12. b. 1.200 litros por hora.

Fórmula do termo geral de uma progressão aritmética

Voltando à situação apresentada no começo deste tópico, a respeito da FM estendida, a P.A. (76; 76,2; 76,4; 76,6; ...; 108) apresenta as frequências, em MHz, disponíveis para emissoras de rádio FM em cada região especificada pela Anatel.

Observe que podemos calcular qualquer termo dessa P.A. adicionando ao primeiro termo um número da forma $k \cdot 0{,}2$, com $k \in \mathbb{N}$. Por exemplo, o primeiro termo é a soma $76 + 0 \cdot 0{,}2$; o segundo termo é a soma $76 + 1 \cdot 0{,}2$; o terceiro termo é a soma $76 + 2 \cdot 0{,}2$; o quarto termo é a soma $76 + 3 \cdot 0{,}2$, e assim por diante.

De modo geral, em uma progressão aritmética, um termo qualquer pode ser expresso em função da razão (*r*) e do primeiro termo (a_1) por uma fórmula matemática. Para entender essa fórmula, imagine uma escada que une dois pisos de um edifício. Ao piso inferior, associamos um número a_1 que indica a altura desse piso em relação ao nível do piso do andar térreo. Associamos aos patamares dos degraus as alturas a_2, a_3, a_4, a_5, ..., a_n, ..., em relação ao nível do piso térreo, conforme mostra a figura.

Sendo *r* a altura de cada degrau, a sequência (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, ..., a_n, ...) é uma P.A.

- Se uma pessoa estiver no patamar de altura a_1, quantos degraus deverá subir para atingir o patamar de altura a_7?

  Observando a figura, constatamos que a pessoa deverá subir 6 degraus (6*r*). Assim, a altura a_7 é igual à soma $a_1 + 6r$.

- Generalizando, se uma pessoa estiver no patamar de altura a_1, quantos degraus deverá subir para atingir o patamar de altura a_n?

(Modelo didático sem escala e com cores fantasia.)

FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

No patamar de altura a_2, a pessoa terá subido 1 degrau; no de altura a_3, terá subido 2 degraus; no de altura a_4, terá subido 3 degraus; e assim por diante. Ou seja:

$$a_1 = a_1 + 0r$$
$$a_2 = a_1 + 1r$$
$$a_3 = a_1 + 2r$$
$$a_4 = a_1 + 3r$$
$$\vdots$$

Observando que, em cada igualdade, o coeficiente de r tem uma unidade a menos que o índice do termo à esquerda da igualdade, concluímos que: $a_n = a_1 + (n - 1)r$.

De maneira geral:

Em uma P.A. $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, ..., a_n, ...)$ de razão r, temos:

$$a_n = a_1 + (n - 1)r$$

Essa identidade é chamada de **fórmula do termo geral** da P.A.

Reflexão

É possível representar o termo a_n de uma P.A. em função da razão r e de qualquer termo a_k?

Reflexão: Sim. Para entender como, pense na escada da figura da introdução deste tópico. Se uma pessoa estiver no patamar de altura a_6 e quiser se deslocar até o patamar de altura a_{10}, ela deverá subir (10 – 6) degraus, ou seja: $a_{10} = a_6 + (10 - 6) \cdot r$
Se uma pessoa estiver no patamar de altura a_{10} e quiser se deslocar até o patamar de altura a_6, ela deverá descer 4 degraus, que indicamos por (6 – 10), ou seja: $a_6 = a_{10} + (6 - 10) \cdot r$. Essa ideia pode ser generalizada: em qualquer P.A. (a_n) de razão r, temos: $a_n = a_k + (n - k) \cdot r$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Determine o 51º termo da P.A. (4, 10, 16, 22, ...).

Resolução

Devemos determinar o termo $a_n = a_1 + (n - 1)r$ dessa P.A. tal que: $a_1 = 4$, $r = 6$ e $n = 51$.

Logo:

$$a_{51} = 4 + (51 - 1) \cdot 6 \Rightarrow a_{51} = 4 + 50 \cdot 6 = 304$$

Concluímos, assim, que o 51º termo da P.A. é 304.

2. Obtenha a razão da P.A. $(a_1, a_2, a_3, ...)$ tal que $a_1 = 7$ e $a_5 = 8$.

Resolução

Aplicando a fórmula do termo geral $a_n = a_1 + (n - 1)r$ da P.A. para $n = 5$, temos:

$$a_5 = a_1 + 4r \Rightarrow 8 = 7 + 4r$$
$$\therefore r = \frac{1}{4}$$

Concluímos que a razão da P.A. é $\frac{1}{4}$.

3. Determine o número de termos da progressão aritmética (2, 10, 18, ..., 250).

Resolução

Indicando por n o número de termos, devemos obter o valor de n na igualdade $a_n = a_1 + (n - 1)r$ tal que: $a_1 = 2$, $a_n = 250$ e $r = 8$.

Logo:

$$250 = 2 + (n - 1) \cdot 8 \Rightarrow 250 = 2 + 8n - 8$$
$$\therefore 256 = 8n \Rightarrow n = 32$$

Concluímos, então, que a P.A. possui 32 termos.

4. Qual é a razão da P.A. (a_n) tal que $a_1 + a_5 = 26$ e $a_2 + a_9 = 46$?

Resolução

Pela fórmula $a_n = a_1 + (n - 1)r$, podemos representar os termos a_5, a_2 e a_9 por:

$$a_2 = a_1 + r$$
$$a_5 = a_1 + 4r$$
$$a_9 = a_1 + 8r$$

Assim:

$$\begin{cases} a_1 + a_5 = 26 \\ a_2 + a_9 = 46 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 + a_1 + 4r = 26 \\ a_1 + r + a_1 + 8r = 46 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} 2\,a_1 + 4r = 26 \\ 2\,a_1 + 9r = 46 \end{cases}$$

Subtraindo, membro a membro, essas igualdades, temos:

$$-5r = -20 \Rightarrow r = 4$$

Concluímos, então, que a razão da P.A. é 4.

5. Percorrendo uma estrada no sentido crescente das marcas quilométricas, percebe-se o primeiro radar (medidor de velocidade) no quilômetro 27. A partir daí, há um radar a cada 15 quilômetros. Quantos radares existem até o quilômetro 360 dessa estrada?

THEO FITZHUGH/SHUTTERSTOCK

Radar medidor de velocidade.

Resolução

A sequência das marcas quilométricas onde existem radares, até o quilômetro 360, é a P.A. de primeiro termo 27, razão 15 e último termo a_n:

$(27, 42, 57, ..., a_n)$

Como não sabemos, por enquanto, se 360 é um termo da P.A., devemos supor que $a_n \leqslant 360$.

Pela fórmula do termo geral $a_n = a_1 + (n - 1)r$, temos:

$$a_n \leqslant 360 \Rightarrow 27 + (n - 1) \cdot 15 \leqslant 360$$

$$\therefore (n - 1) \cdot 15 \leqslant 333 \Rightarrow n - 1 \leqslant \frac{333}{15}$$

$$\therefore n \leqslant 23{,}2$$

Como n é um número natural, temos que o maior valor possível de n é 23.

Assim, concluímos que até o quilômetro 360 há 23 radares.

Nota: Essa resolução nos permite afirmar que 360 não pertence à P.A., pois na última desigualdade da resolução da inequação, $n \leqslant 23{,}2$, o segundo membro não é um número natural.

6. Interpole (insira) 4 meios aritméticos entre 1 e 2, nessa ordem.

Resolução

Interpolar (ou inserir) 4 meios aritméticos entre 1 e 2, nessa ordem, significa determinar a P.A. de primeiro termo 1 e último termo 2, havendo entre eles quatro outros termos, isto é:

$$\left(\underset{\substack{\uparrow\\ a_1}}{1},\ \underbrace{\_\,,\_\,,\_\,,\_}_{\substack{\text{meios}\\ \text{aritméticos}}},\ \underset{\substack{\uparrow\\ a_6}}{2}\right)$$

Pela fórmula do termo geral $a_n = a_1 + (n - 1)r$, temos:

$$a_6 = a_1 + 5r \Rightarrow 2 = 1 + 5r$$

$$\therefore r = \frac{1}{5}$$

Logo, a P.A. é $\left(1, \frac{6}{5}, \frac{7}{5}, \frac{8}{5}, \frac{9}{5}, 2\right)$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Faça os exercícios no caderno.

13. Determine o 40º termo da P.A. (2, 13, 24, 35, ...). **13.** 431

14. Obtenha o n-ésimo termo, a_n, da P.A. (2, 8, 14, 20, ...). **14.** $a_n = 6n - 4$

15. Na P.A. $(a_1, a_2, a_3, ...)$ de razão $r = 2 - k$, temos que $a_{11} = 29k - 18$, sendo k um número real. Determine a_1 em função de k. **15.** $a_1 = 39k - 38$

16. Quantos termos tem a P.A. (3, 7, 11, ..., 99)? **16.** 25 termos

17. Interpole 6 meios aritméticos entre 2 e 10, nessa ordem. **17.** $\left(2, \frac{22}{7}, \frac{30}{7}, \frac{38}{7}, \frac{46}{7}, \frac{54}{7}, \frac{62}{7}, 10\right)$

18. Os termos da P.A. (a_1, a_2, a_3, a_4) representam, respectivamente, o número de estudantes do período matutino que estudam nas turmas A, B, C e D de uma escola. Nesse período, as turmas A e C, juntas, possuem 66 estudantes; enquanto as turmas B e D, juntas, possuem 72 estudantes. Calcule o número de estudantes do período matutino de cada uma dessas turmas. **18.** A: 30, B: 33, C: 36 e D: 39

19. Considerando a P.A. crescente (a_n) formada pelos múltiplos de 12 maiores que 2.000 e menores que 8.000, determine o que se pede em cada item.

a. O trigésimo termo dessa P.A. **19. a.** 2.352

b. O número de termos dessa P.A. **19. b.** 500

20. Um prédio residencial foi inaugurado no ano de 1971, quando houve a primeira reunião de condomínio. Nessa reunião, ficou estabelecido que, a contar daquela data, de 6 em 6 anos o edifício passaria por obras de conservação. Supondo que essa determinação tenha sido cumprida até hoje e continue sendo, responda:

a. Em que ano ocorreu a 1ª obra de conservação?

b. Em que ano ocorreu a 7ª obra de conservação?

c. Qual será o primeiro ano, depois de 2050, em que ocorrerá uma nova obra de conservação?

20. a. 1977 **20. b.** 2013 **20. c.** 2055

21. (Enem) A prefeitura de um pequeno município do interior decide colocar postes para iluminação ao longo de uma estrada retilínea, que inicia em uma praça central e termina numa fazenda na zona rural. Como a praça já possui iluminação, o primeiro poste será colocado a 80 metros da praça, o segundo, a 100 metros, o terceiro, a 120 metros, e assim sucessivamente, mantendo-se sempre uma distância de vinte metros entre os postes, até que o último poste seja colocado a uma distância de 1.380 metros da praça. Se a prefeitura pode pagar, no máximo, R$ 8.000,00 por poste colocado, o maior valor que poderá gastar com a colocação desses postes é:

a. R$ 512.000,00
b. R$ 520.000,00
c. R$ 528.000,00
d. R$ 552.000,00
e. R$ 584.000,00

21. alternativa **c**

Para retomar os conteúdos estudados, resolva os exercícios complementares 4 e 5.

Propriedades das progressões aritméticas

P1. Em toda P.A. finita, a soma de dois termos equidistantes dos extremos é igual à soma dos extremos.

Demonstração

Seja a P.A. finita $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k, a_{k+1}, \ldots, a_{n-k}, \ldots, a_n)$ de razão r.
Os termos a_{k+1} e a_{n-k} são equidistantes dos extremos, pois antes de a_{k+1} existem k termos e depois de a_{n-k} existem, também, k termos. Vamos demonstrar que: $a_{k+1} + a_{n-k} = a_1 + a_n$

De fato:

$$\underbrace{a_{k+1}} + \overbrace{a_{n-k}} = \underbrace{a_1 + (k+1-1)r} + \overbrace{a_1 + (n-k-1)r} = a_1 + \cancel{kr} + a_1 + (n-1)r - \cancel{kr} =$$

$$= a_1 + \underbrace{a_1 + (n-1)r} = a_1 + \underbrace{a_n}$$

Exemplo

(3, 8, 13, 18, 23, 28, 33, 38, 43, 48, 53, 58, 63)

28 + 38 = 66
23 + 43 = 66
18 + 48 = 66
13 + 53 = 66
8 + 58 = 66
3 + 63 = 66

P2. Uma sequência de três termos é P.A. se, e somente se, o termo médio é igual à média aritmética entre os outros dois, isto é:

$$(a, b, c) \text{ é P.A.} \Leftrightarrow b = \frac{a+c}{2}$$

Reflexão

Em uma sequência com mais de três termos, cada termo entre os extremos é a média aritmética entre o termo anterior e o posterior? Justifique.

Reflexão: Espera-se que os estudantes respondam que sim, pois, escolhendo três termos seguidos da sequência, o termo do meio será a média aritmética do termo antecessor e sucessor a ele.

Demonstração

$$\text{Temos: } \begin{cases} (a, b, c) \text{ é P.A.} \Leftrightarrow b - a = c - b \\ b - a = c - b \Leftrightarrow b = \dfrac{a+c}{2} \end{cases}$$

Logo: (a, b, c) é P.A. $\Leftrightarrow b = \dfrac{a+c}{2}$

Consequência

Temos, como consequência das propriedades P1 e P2:

Em uma P.A. com número ímpar de termos, o termo médio é a média aritmética entre os extremos.

Demonstração

Seja a_k o termo médio de uma P.A. com número ímpar de termos:

$$(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{k-1}, a_k, a_{k+1}, \ldots, a_n)$$

Temos que a sequência (a_{k-1}, a_k, a_{k+1}) também é uma P.A.; logo, pela P2, temos:

$$a_k = \frac{a_{k-1} + a_{k+1}}{2} \qquad (1)$$

Mas os termos a_{k-1} e a_{k+1} são equidistantes dos extremos e, portanto, por P1, temos:

$$a_{k-1} + a_{k+1} = a_1 + a_n \quad (2)$$

Por (1) e (2), concluímos que: $a_k = \dfrac{a_1 + a_n}{2}$

Exemplo

(2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29, 32, 35, 38)

termo médio

$20 = \dfrac{2 + 38}{2}$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

7. Determine o número x de modo que a sequência $(x + 3, x - 1, 1 - 2x)$ seja uma P.A.

Resolução

A sequência $(x + 3, x - 1, 1 - 2x)$ é uma P.A. se, e somente se, $x - 1 = \dfrac{x + 3 + 1 - 2x}{2}$, ou seja: $2x - 2 = -x + 4 \Rightarrow x = 2$

Se achar conveniente, no **exercício proposto 25**, explique que, como a velocidade é constante, as distâncias do veículo em relação ao ponto *O* nesses três primeiros segundos formam uma P.A.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Faça os exercícios no caderno.

22. Para um sorteio foram colocadas em uma urna 1.000 fichas numeradas de 1 a 1.000, cada ficha contendo um único número natural. No momento do sorteio serão retiradas duas fichas da urna, e o resultado do sorteio será a soma dos números dessas duas fichas. Para que esse resultado seja 1.533, quantos conjuntos diferentes de duas fichas poderão ser sorteados? **22.** 234 conjuntos

23. Em uma P.A. finita, o termo médio é o quádruplo do primeiro termo. Sabendo que o último termo dessa P.A. é 42, determine o primeiro termo. **23.** 6

24. Faça o que se pede nos itens a seguir.

a. Determine o número real x de modo que a sequência $(x + 3, 2x, 4x - 10)$ seja uma P.A. **24. a.** $x = 7$

b. Para que valor de y a sequência $(y^2 - 2, y + 5, 4y + 4)$ é uma P.A. crescente? **24. b.** $y = 2$

c. Existe algum número real t para o qual a sequência $(t + 5, 2t + 1, 3t + 4)$ seja uma P.A.? Justifique sua resposta.

25. Durante três segundos após a passagem por um ponto *O* de uma pista, um carro de Fórmula 1 manteve a velocidade constante ao longo de um trecho reto. Nesse período, a distância do veículo em relação ao ponto *O*, a cada segundo, pode ser descrita pelo quadro a seguir.

MICHAEL POTTS F1/ SHUTTERSTOCK

Carro no autódromo de Interlagos, no Grande Prêmio do Brasil de Fórmula 1, realizado em São Paulo (SP). Foto de 2023.

Relação do tempo pela distância em relação ao ponto *O*

Tempo (segundo)	Distância em relação ao ponto *O* (metro)
1	$x + 20$
2	$3x + 10$
3	$4x + 30$

Qual era a distância do automóvel em relação ao ponto *O* ao final dos três segundos? **25.** 150 m

Para retomar os conteúdos estudados, resolva o exercício complementar 6.

24. c. Não, pois nessa sequência não é possível achar nenhum número real *t* que satisfaça à propriedade P2 das progressões aritméticas.

Ao trabalhar este tópico, enfatize que a representação genérica de uma P.A. de 4 termos pode ser $(x, x + r, x + 2r, x + 3r)$. Porém, em certos problemas em que é conhecida a soma dos quatro termos, é mais adequada a representação $(x - 3r, x - r, x + r, x + 3r)$.

Representação genérica de uma progressão aritmética

Para agilizar a resolução de certos problemas, convém representar uma P.A. de maneira genérica. Mostramos a seguir algumas dessas representações.

- A sequência $(x, x + r, x + 2r)$ é uma P.A. de três termos e razão r, para quaisquer valores de x e r.
- A sequência $(x - r, x, x + r)$ é uma P.A. de três termos e razão r, para quaisquer valores de x e r. Essa representação é mais adequada quando se pretende determinar uma P.A. de três termos, conhecendo-se a soma deles.
- A sequência $(x, x + r, x + 2r, x + 3r)$ é uma P.A. de quatro termos e razão r, para quaisquer valores de x e r.
- A sequência $(x - 3r, x - r, x + r, x + 3r)$ é uma P.A. de quatro termos e razão $2r$, para quaisquer valores de x e r. Essa representação é mais adequada quando se pretende determinar uma P.A. de quatro termos, conhecendo-se a soma deles.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

8. Determine a P.A. crescente de três termos, sabendo que a soma desses termos é 3 e o produto deles é −8.

Resolução

Quando se conhece a soma dos termos, uma representação conveniente é:

$$(x - r, x, x + r)$$

Pelo enunciado, temos:

$$x - \cancel{r} + x + x + \cancel{r} = 3 \Rightarrow 3x = 3$$

$$\therefore x = 1 \quad (1)$$

Também sabemos que:

$$(x - r) \cdot x \cdot (x + r) = -8 \quad (2)$$

Substituindo (1) em (2), obtemos:

$$(1 - r) \cdot 1 \cdot (1 + r) = -8 \Rightarrow 1 - r^2 = -8$$

$$\therefore r^2 = 9 \Rightarrow r = \pm 3$$

Como devemos ter uma P.A. crescente, só interessa a razão positiva, isto é, $r = 3$.

Assim, a P.A. procurada $(x - r, x, x + r)$ é $(-2, 1, 4)$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Faça os exercícios no caderno.

26. Os três primeiros termos de uma P.A. decrescente são tais que a soma deles é 24 e o produto, 480. O 24º termo dessa P.A. é: **26.** alternativa **a**

a. −36
b. 4
c. 50
d. −1
e. 0

27. Um automóvel percorreu 300 km para ir da cidade A à cidade D, passando pelas cidades B e C, nessa ordem. Considerando que as distâncias percorridas, em quilômetro, entre as cidades A e B, B e C, C e D formam uma P.A., nessa ordem, calcule a distância percorrida entre as cidades B e C. **27.** 100 km

28. Dispondo em ordem crescente as medidas, em grau, dos três ângulos internos de um triângulo, obtém-se uma P.A. Se a medida do maior ângulo interno desse triângulo tem 20° a mais que a medida do menor, qual é a medida do menor ângulo interno desse triângulo? **28.** 50°

Para retomar os conteúdos estudados, resolva o exercício complementar 7.

Soma dos *n* primeiros termos de uma progressão aritmética

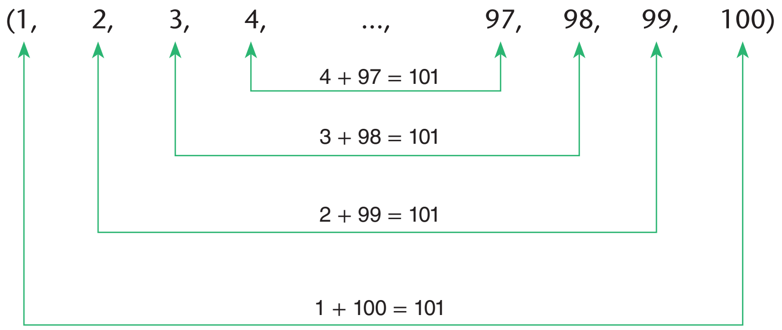
No ano de 1785, em uma pequena escola do principado de Brunsvique, na Alemanha, o professor Büttner propôs a seus estudantes que adicionassem os números naturais de 1 a 100. Apenas três minutos depois, um menino de 8 anos de idade aproximou-se da mesa do professor e apresentou o resultado pedido. O professor, surpreso, constatou que o resultado estava correto.

Elaborado com base em: KARSON, P. **A magia dos números**. Porto Alegre: Globo, 1961. p. 100.

Aquele menino viria a ser um dos maiores matemáticos de todos os tempos: Carl Friedrich Gauss (1777-1855). O cálculo efetuado por Gauss foi simples e elegante; ele percebeu que:

- a soma do primeiro número com o último é: 1 + 100 = 101
- a soma do segundo número com o penúltimo é: 2 + 99 = 101
- a soma do terceiro número com o antepenúltimo é: 3 + 98 = 101

e assim por diante, ou seja, a soma de dois termos equidistantes dos extremos é igual à soma dos extremos, que é 101:



Como no total são 50 somas iguais a 101, Gauss concluiu que:

$$1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + 97 + 98 + 99 + 100 = 50 \cdot 101 = 5.050$$

Esse raciocínio pode ser generalizado para o cálculo da soma dos *n* primeiros termos de uma progressão aritmética qualquer pelo teorema a seguir.

A soma S_n dos n primeiros termos da P.A. $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \ldots, a_n, \ldots)$ é dada por:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$

Demonstração

Vamos descrever a soma S_n duas vezes, do seguinte modo:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$$
$$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots + a_3 + a_2 + a_1$$

Adicionando, membro a membro, essas igualdades, temos:

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \ldots + (a_{n-2} + a_3) + (a_{n-1} + a_2) + \\ + (a_n + a_1)$$

Observando que em cada expressão entre parênteses temos a soma dos extremos ou a soma de dois termos equidistantes dos extremos, podemos escrever, pela propriedade P1:

$$2S_n = \underbrace{(a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \ldots + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n)}_{n \text{ parcelas iguais a } (a_1 + a_n)}$$

$$\therefore 2S_n = (a_1 + a_n) \cdot n$$

$$\therefore S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$


CHRISTIAN ALBRECHT JENSEN - MUSEU ESTATAL PUSHKIN DE BELAS ARTES, MOSCOU

Carl Friedrich Gauss retratado por Christian Albrecht Jensen em 1840. Óleo sobre tela, 66 × 52 cm. Matemático, físico e astrônomo alemão que realizou importantes trabalhos em várias áreas do conhecimento, notadamente em Matemática.

Para saber mais sobre a vida de Gauss, sugerimos a leitura do livro **A medida do mundo**, de Daniel Kehlmann. Nessa obra o autor narra a vida de dois dos maiores nomes da ciência alemã: o naturalista Alexander von Humboldt e o matemático Carl Friedrich Gauss.

Podemos interpretar geometricamente a fórmula da soma dos n primeiros termos de uma P.A. Considere n retângulos de bases unitárias (de medida 1) cujas medidas das alturas formam a P.A. crescente (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, ..., a_n). Como a base de cada retângulo mede 1 unidade, as áreas desses retângulos são numericamente iguais aos termos dessa P.A. Colocando lado a lado esses retângulos, com as alturas em ordem crescente, obtemos a figura 1 a seguir.

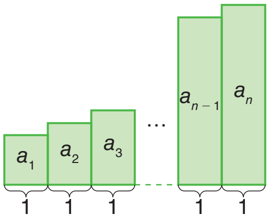


Figura 1

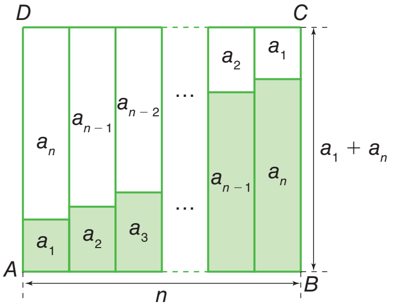


Figura 2

FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

Acima de cada retângulo, construímos outro tal que a soma de suas alturas seja igual a $a_1 + a_n$, conforme mostra a figura 2.

A área da região verde, $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$, é metade da área do retângulo $ABCD$, isto é:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$

Mentes brilhantes

Geometria sona ou lusona faz referência a uma tradição africana relacionada aos povos de Angola e países vizinhos. Os desenhos, formados de pontos e linhas, são feitos na areia e narram provérbios, fábulas, jogos etc., e esse conhecimento é transmitido de geração a geração. Nos desenhos sona (no singular), é possível trabalhar com processo de multiplicação, números primos, simetria de figuras, soma de sequências aritméticas etc.

Um exemplo é calcular a soma de uma sequência com base na malha de pontos do desenho a seguir.

O número de pontos pode ser representado por $2 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8)$ ou por $8 \cdot 9$. Ou seja,

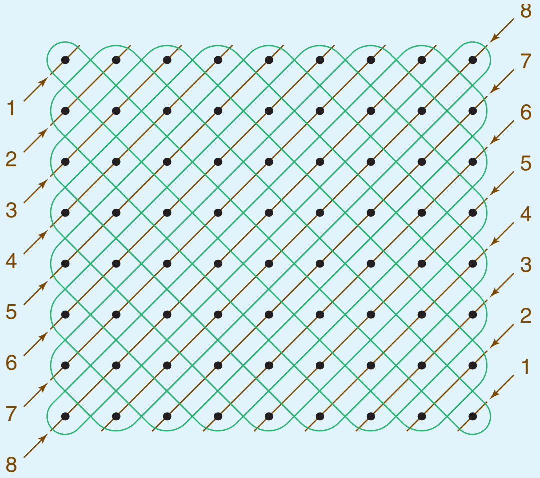
$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = \frac{(8 \cdot 9)}{2}$$

Se a malha de pontos for de 4 por 5, temos:

$$1 + 2 + 3 + 4 = \frac{(4 \cdot 5)}{2}$$

Então, se a soma for de 1 a 100, como o problema resolvido por Gauss, temos:

$$1 + 2 + 3 + 4 + ... + 99 + 100 = \frac{(100 \cdot 101)}{2} = 5.050$$



ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

Elaborado com base em: OLIVEIRA, C. C. **Geometria sona como proposta pedagógica para o ensino de Matemática**. 2014. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal Rural do Semiárido, Mossoró, 2014.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

9. Calcule a soma dos vinte primeiros termos da P.A. (3, 7, 11, 15, ...).

Resolução

Aplicando a fórmula $S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$ para $n = 20$, temos:

$$S_{20} = \frac{(a_1 + a_{20}) \cdot 20}{2}$$

Calculando a_{20} pela fórmula do termo geral, $a_n = a_1 + (n - 1)r$, temos:

$$a_{20} = a_1 + (20 - 1)r \Rightarrow a_{20} = 3 + 19 \cdot 4 = 79$$

Logo: $S_{20} = \frac{(3 + 79) \cdot 20}{2} = 820$

10. Calcule a soma dos n primeiros termos da P.A. (6, 10, 14, 18, ...).

Resolução

Temos $a_1 = 6$ e $a_n = 6 + (n - 1) \cdot 4$, ou seja, $a_n = 4n + 2$.

Pela fórmula $S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$, concluímos que:

$$S_n = \frac{(6 + 4n + 2) \cdot n}{2} = \frac{(8 + 4n) \cdot n}{2} = 4n + 2n^2$$

11. O Cerrado é chamado de “berço das águas do Brasil” e é fonte de cerca de 40% da água doce do país. Em fevereiro de 2024, houve um aumento de 19% nos alertas de desmatamento, em comparação com fevereiro de 2023. Além disso, esse bioma perdeu 3.798 km^2 de vegetação nativa, no acumulado de agosto de 2023 a fevereiro [de 2024], de acordo com o monitoramento feito pelo Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais (Inpe).

Elaborado com base em: BOND, L. Cerrado tem alta de 19% nos alertas de desmatamento em fevereiro. **Agência Brasil**, São Paulo, 11 mar. 2024. Disponível em: https://agenciabrasil.ebc.com.br/geral/noticia/2024-03/cerrado-tem-alta-de-19-de-alertas-de-desmatamento-em-fevereiro. Acesso em: 31 ago. 2024.


ANDRE DIB/PULSAR IMAGENS

Cerrado brasileiro. Foto de 2024.

Suponha que, em certo município, o desmatamento do cerrado cresce de maneira que, a cada dia são desmatados 4 hectares (ha) a mais que a área desmatada no dia anterior. Se, no primeiro dia de um determinado mês, foram desmatados 50 ha, responda:

a. Quantos hectares foram desmatados no 20º dia desse mês?

b. Quantos hectares foram desmatados nos 20 primeiros dias desse mês?

c. Considerando que ao final de *n* dias, a partir do primeiro dia do mês citado, o ritmo de desmatamento se manteve e a área total desmatada nesses dias foi de 10.080 ha, determine *n*.

OBJETO DIGITAL **Mapa clicável: Cerrado**

Resolução

a. Considerando 50 ha como primeiro termo da sequência das áreas desmatadas a cada dia nesse município, temos que cada termo, a partir do segundo, é a soma do anterior com 4 ha. Logo, essa sequência é uma P.A. (a_n) de razão $r = 4$. Calculando o 20º termo dessa P.A., temos:

$$a_{20} = 50 + (20 - 1) \cdot 4 \Rightarrow a_{20} = 126$$

Concluímos, assim, que no 20º dia do mês considerado foram desmatados 126 ha.

b. A soma S_{20} dos 20 primeiros termos da P.A. descrita no item **a** é dada por:

$$S_{20} = \frac{(50 + 126) \cdot 20}{2} \Rightarrow S_{20} = 1.760$$

Portanto, nos 20 primeiros dias do mês considerado, foram desmatados 1.760 ha.

c. O termo geral a_n da P.A. citada no item **a** é dado por:

$$a_n = 50 + (n - 1) \cdot 4 \Rightarrow a_n = 4n + 46$$

Devemos determinar *n* tal que a soma S_n dos *n* primeiros termos da P.A. seja 10.080, ou seja,

$$S_n = \frac{(50 + 4n + 46) \cdot n}{2} \Rightarrow 10.080 = \frac{(96 + 4n) \cdot n}{2}$$

$$\therefore 4n^2 + 96n - 20.160 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n^2 + 24n - 5.040 = 0$$

$$\Delta = 24^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-5.040) = 20.736$$

$$\therefore n = \frac{-24 \pm \sqrt{20.736}}{2 \cdot 1} \Rightarrow n = \frac{-24 \pm 144}{2}$$

$$\therefore n = 60 \text{ ou } n = \cancel{-84} \text{ (não convém)}$$

Concluímos, então, que serão necessários 60 dias, a partir do primeiro dia do mês considerado, para que a área desmatada seja 10.080 ha.

Para obterem mais informações sobre o Cerrado, sugira aos estudantes que acessem o objeto digital **Mapa clicável: Cerrado**.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Faça os exercícios no caderno.

29. Calcule a soma dos trinta primeiros termos da P.A. (−15, −11, −7, −3, ...). **29.** 1.290

30. Faça o que se pede.

a. Calcule a soma dos múltiplos positivos de 7 menores que 200. **30. a.** 2.842

b. Calcule a soma dos números naturais que sejam múltiplos de 2 e 3, simultaneamente, e estejam compreendidos entre 200 e 800. **30. b.** 50.100

31. Dada a P.A. (2, 7, 12, 17, ...), determine:

a. o *n*-ésimo termo, isto é, a_n; **31. a.** $5n - 3$

b. a soma dos *n* primeiros termos. **31. b.** $\frac{5n^2 - n}{2}$

32. Calcule a soma: **32. a.** n^2

a. dos *n* primeiros números naturais ímpares;

b. dos *n* primeiros números naturais pares; **32. b.** $n^2 - n$

c. dos *n* primeiros números naturais pares não nulos. **32. c.** $n^2 + n$

33. No dia 1º de janeiro, um *site* de compras foi acessado por 1.800 internautas. A cada um dos dias seguintes de janeiro houve um aumento de 100 acessos a esse *site* em relação ao dia anterior.

a. Determine o dia de janeiro em que houve exatamente 3.700 acessos a esse *site*? **33. a.** 20 de janeiro

b. Quantos acessos houve no mês de janeiro até o dia mencionado no item **a**? **33. b.** 55.000

34. Uma empresa planeja investir na atualização de seu centro de dados pelos próximos 20 meses, aplicando nesse projeto as seguintes quantias, mês a mês:

1º mês: 6 mil dólares;	5º mês: 12 mil dólares;
2º mês: 4 mil dólares;	6º mês: 12 mil dólares;
3º mês: 9 mil dólares;	7º mês: 15 mil dólares;
4º mês: 8 mil dólares;	8º mês: 16 mil dólares;

e assim sucessivamente, mantendo essa regularidade, até o vigésimo mês.


SHEPHERD ZHOU/FEATURE CHINA/FUTURE PUBLISHING/GETTY IMAGES

Sala de centro de dados em Wuhan, China. Foto de 2023.

O investimento previsto nessa atualização, em milhares de dólares, é: **34.** alternativa **a**

a. 415.
b. 500.
c. 258.
d. 1.000.
e. 931.

35. No projeto de uma sala de cinema, um arquiteto desenhou a planta em formato de um trapézio isósceles, com a tela sobre a base menor desse trapézio. As poltronas serão dispostas em 16 fileiras paralelas às bases do trapézio, tendo 20 poltronas na primeira fileira. A partir da segunda, cada fileira terá 2 poltronas a mais que a fileira anterior. Calcule o número de poltronas desse cinema. **35.** 560 poltronas

36. Em uma indústria, a instalação de uma máquina foi realizada em n fases. A primeira fase demorou 12 h; a segunda demorou 11,6 h, e assim por diante, cada fase seguinte demorando 0,4 h a menos que o tempo da fase anterior. Se a instalação da máquina foi concluída em 144 h, em quantas fases esse trabalho foi realizado? **36.** 16 fases

37. Qualquer dispositivo que resiste à passagem da corrente elétrica em um circuito é chamado de resistor. Essa resistência pode ser medida em ohm, cujo símbolo é a letra grega Ω (ômega). Admitiremos sempre medidas positivas para as resistências.


SOMCHAI SOM/SHUTTERSTOCK
SOMCHAI SOM/SHUTTERSTOCK
EMILIO100/SHUTTERSTOCK

(As imagens não respeitam as proporções reais entre os objetos.)

As principais finalidades de um resistor são transformar energia elétrica em energia térmica, como no chuveiro e na lâmpada, ou limitar a corrente elétrica, evitando curtos-circuitos, como nos resistores-fusíveis.

Dos estudos de Física, sabemos que, em uma associação em série de n resistores com resistências iguais a R_1, R_2, R_3, ..., R_n, respectivamente, a resistência equivalente, R_{eq}, é dada por: $R_{eq} = R_1 + R_2 + R_3 + ... + R_n$

FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

De acordo com essa informação, resolva o problema a seguir.

Em um circuito, n resistores estão ligados em série e suas respectivas resistências, medidas em ohm, estão em progressão aritmética de razão 20 e primeiro termo igual a 100. Sabendo que a resistência equivalente dessa associação é 3.600 Ω, calcule o número n de resistores associados. **37.** 15

38. Elabore um problema sobre a soma dos n primeiros termos de uma P.A. envolvendo uma situação contextualizada. Depois, junte-se a um colega a fim de resolver o problema elaborado por ele.

38. Resposta pessoal.

Para retomar os conteúdos estudados, resolva o exercício complementar 8.

A progressão aritmética e a função afim

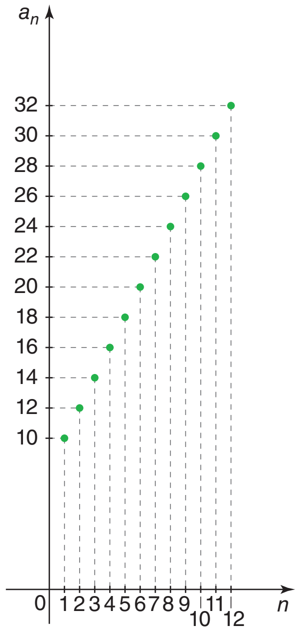
Na fase de preparação para uma competição, um atleta realizou 12 treinos. No primeiro treino, ele correu 10 km e, em cada um dos treinos seguintes, correu 2 km a mais que no anterior. Assim, podemos representar as distâncias, em quilômetro, percorridas, treino a treino, pela progressão aritmética:

$$(10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30, 32)$$

A representação gráfica dessa P.A., cujo termo geral é $a_n = 10 + (n - 1) \cdot 2$, ou seja, $a_n = 8 + 2n$, é formada pelos pontos (n, a_n) do plano cartesiano.

Assim, temos:

Para $n = 1$, obtemos (1, 10).
Para $n = 2$, obtemos (2, 12).
Para $n = 3$, obtemos (3, 14).
Para $n = 4$, obtemos (4, 16).
Para $n = 5$, obtemos (5, 18).
⋮
Para $n = 12$, obtemos (12, 32).




GIL COHEN-MAGEN/AFP/GETTY IMAGES

Jovem praticando corrida.

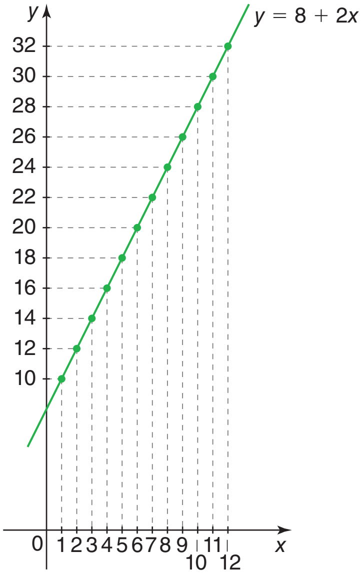
Observando que o termo geral $a_n = 8 + 2n$ é identificado com a função afim $y = 8 + 2x$, quando x assume apenas valores naturais não nulos, concluímos que a representação gráfica da P.A. (10, 12, 14, 16, ..., 32) é formada por pontos da reta de equação $y = 8 + 2x$.

Generalizando, consideremos a P.A. $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...)$ de razão não nula r, cujo termo geral é:

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$$

A representação gráfica dessa P.A. é formada por pontos do gráfico da função afim $y = a_1 + (x - 1)r$.

Dessa forma, algumas importantes propriedades da função afim podem ser aplicadas na resolução de problemas que envolvem progressões aritméticas, como a constância da taxa de variação; isto é, dados dois termos, a_n e a_k, de uma P.A., com $n \neq k$, a taxa de variação $\frac{a_n - a_k}{n - k}$ é constante.



ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

EXERCÍCIO PROPOSTO

Faça os exercícios no caderno.

39. O quadro a seguir mostra o montante obtido nos meses seguintes de uma aplicação inicial de R$ 1.500,00 a juro simples.

Montante da aplicação

t (mês)	1	2	3	4	...
Montante (R$)	1.530,00	1.560,00	1.590,00	1.620,00	...

a. Qual é a taxa de juro mensal que está sendo paga ao investidor?

b. Esses montantes formam uma sequência em P.A.? Qual é a razão?

c. Escreva a expressão do montante M em função do tempo t em mês.

d. Analisando a expressão definida no item anterior, é possível fazer afirmar que existe relação entre P.A. e a função afim? Justifique.

e. Construa o gráfico da expressão definida no item **c**.

39. a. 2%
39. b. Sim, a razão da P.A. é 30.
39. c. $M(t) = 1.500 + 30t$
39. d. Sim, pois podemos observar que a constante de variação é a razão da P.A. e o valor inicial é o primeiro termo.
39. e. Resposta no final do livro.

4. Progressão geométrica

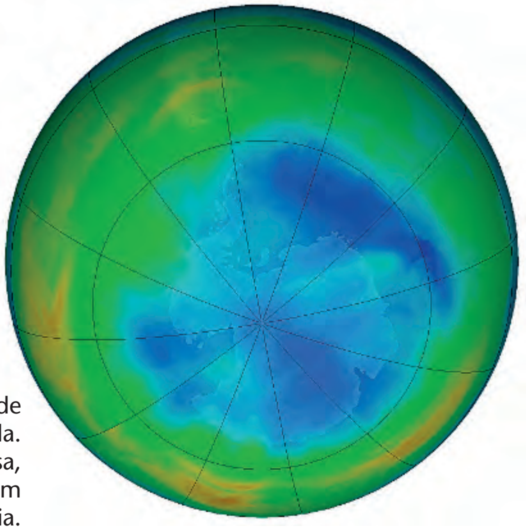
Problemas que envolvem grandezas que crescem ou decrescem por meio do produto por uma taxa constante podem ser resolvidos com o auxílio da função exponencial. Problemas como esses podem ser resolvidos, também, utilizando as propriedades de um tipo de sequência chamada de **progressão geométrica** (P.G.). Como exemplo, observe a situação a seguir.

Alguns gases utilizados na indústria, como os clorofluorcarbonetos, têm efeito devastador na camada de ozônio que protege a Terra contra um tipo nocivo de radiação solar. Esses gases provocam falhas nessa camada, conhecidas como "buracos da camada de ozônio".

O protocolo de Montreal, realizado por 31 países em 16 de setembro de 1987, estabeleceu acordos para a eliminação do uso das substâncias que destroem a camada de ozônio. Atualmente, cerca de 197 países já assinaram esse tratado.

> As emissões combinadas de cinco tipos de clorofluorcarbonetos (CFC), gases produzidos pelo homem que destroem a camada de ozônio situada na alta atmosfera da Terra, aumentaram 2,6 vezes durante a década passada. Em 2020, a concentração desse grupo de CFC foi a maior já registrada. A camada de ozônio protege os habitantes do planeta da ação nociva dos raios ultravioleta provenientes do sol, que podem provocar câncer de pele, problemas imunológicos e outros distúrbios. Os dados fazem parte de [um] estudo publicado em abril na revista *Nature Geosciences* e surpreenderam seus autores.
>
> [...]
>
> "Os clorofluorcarbonetos têm uma meia-vida na atmosfera da ordem de mais de um século e seus efeitos se prolongam por muito tempo", comenta o físico britânico Luke Western, da Universidade de Bristol, no Reino Unido, autor principal do artigo, em entrevista a *Pesquisa FAPESP* [...].

RODRIGUES, M. Emissões de CFC aumentaram 2,6 vezes na década passada. **Pesquisa FAPESP**, São Paulo, ano 24, n. 329, p. 65-67, jul. 2023.



NASA OZONE WATCH

Buraco na camada de ozônio sobre a Antártida. Esquema feito pela Nasa, sem escala e com cores fantasia.

Previsões realistas estimam que se o Protocolo de Montreal for obedecido, o buraco na camada de ozônio deverá ter uma redução média de 30% a cada década, contando a partir de 2005, quando o buraco era de 27 milhões de quilômetros quadrados. De acordo com essa hipótese, a sequência a seguir apresenta, década a década, a extensão do buraco, em milhões de quilômetros quadrados, até 2065:

$$\left(\underbrace{27}_{2005};\ \underbrace{27 \cdot 0,7}_{2015};\ \underbrace{27 \cdot (0,7)^2}_{2025};\ \underbrace{27 \cdot (0,7)^3}_{2035};\ \underbrace{27 \cdot (0,7)^4}_{2045};\ \underbrace{27 \cdot (0,7)^5}_{2055};\ \underbrace{27 \cdot (0,7)^6}_{2065}\right)$$

A abordagem contextualizada apresenta um tema relevante ao meio ambiente, abordando substâncias que provocam falhas na camada de ozônio e o protocolo de Montreal, o que favorece o trabalho interdisciplinar. Permita que o estudante analise os dados apresentados e reflita sobre causas e consequências de fenômenos ambientais, propiciando um desenvolvimento em parceria com os professores de Biologia, Química e Geografia. Ao explorar esse tema, favorecemos o desenvolvimento do **ODS 11** e do **TCT Educação ambiental**.

ODS 11

Se preferir, inicie o assunto por meio de outra situação. Sugerimos apresentar o conceito de progressão geométrica a partir de um investimento financeiro em regime de juro composto. Acompanhe: um fundo de investimento oferece a taxa de juro constante de 10% ao ano, em regime de juro composto. Se um capital de R$ 50.000,00 for aplicado nesse fundo durante 4 anos, obteremos o montante acumulado ao final de cada ano do seguinte modo:

- Capital inicial: 50.000
- Montante ao final do 1º ano: 50.000 · 1,1 = = 55.000
- Montante ao final do 2º ano: 55.000 · 1,1 = = 60.500
- Montante ao final do 3º ano: 60.500 · 1,1 = = 66.550
- Montante ao final do 4º ano: 66.550 · 1,1 = = 73.205

A sequência formada pelo capital inicial e pelos montantes acumulados ao final de cada um dos 4 anos é: (50.000, 55.000, 60.500, 66.550, 73.205). Note que cada termo, a partir do segundo, é igual ao produto do termo anterior pela constante 1,1. Por isso, dizemos que essa sequência é uma **progressão geométrica** de razão 1,1.

Essa sequência é chamada de **progressão geométrica** (P.G.), porque, multiplicando cada termo por uma mesma constante, obtemos o termo seguinte. Na sequência anterior, multiplicamos cada termo pela constante 0,7.

Podemos definir, de modo geral, que:

Progressão geométrica é toda sequência numérica em que cada termo, a partir do segundo, é igual ao produto do termo anterior por uma constante q. O número q é chamado de **razão** da progressão geométrica.

Defina P.G., enfatizando que a sequência de valores de uma grandeza que cresce ou decresce a uma taxa constante por unidade de uma variável independente é uma P.G. (crescimento populacional de uma colônia de bactérias em função do tempo, decaimento radioativo em função do tempo, pressão atmosférica em função da altitude etc.).

Exemplos

a. (1, 3, 9, 27, 81, 243) é uma progressão geométrica finita de razão $q = 3$.

b. (5, −10, 20, −40, 80, −160) é uma progressão geométrica finita de razão $q = -2$.

c. (7, 0, 0, 0, 0, ...) é uma progressão geométrica infinita de razão $q = 0$.

d. (0, 0, 0, 0, 0, ...) é uma progressão geométrica infinita de razão indeterminada.

e. Como apresentado na abertura deste capítulo, o iodo-131 possui meia-vida de oito dias. Isso significa que a massa m de uma amostra de iodo-131 se reduz à metade $\left(\frac{m}{2}\right)$, decorridos oito dias. Por exemplo, a progressão geométrica $\left(100, 50, 25, \frac{25}{2}, \frac{25}{4}, \ldots\right)$ descreve a massa, em grama, de uma amostra de iodo-131 a cada período de oito dias, a partir de uma amostra de 100 g.

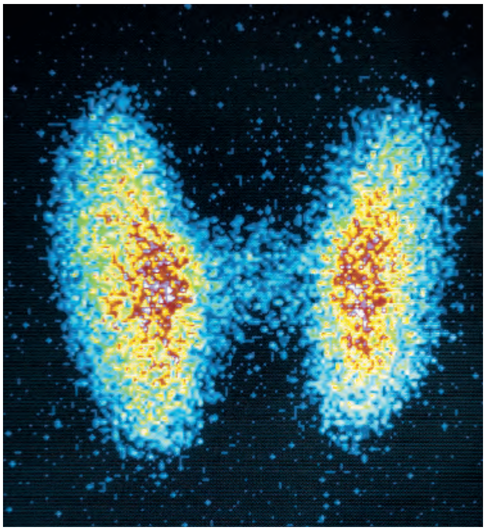

BSIP/ASTIER/AGB PHOTO LIBRARY

Imagem de cintilografia da tireoide, exame que utiliza o iodo-131. Imagem colorizada artificialmente.

Classificação das progressões geométricas

As progressões geométricas podem ser classificadas em crescente, decrescente, constante, oscilante ou quase nula.

- **Crescente**: uma P.G. é crescente quando cada termo, a partir do segundo, é maior que o antecedente. Para que isso ocorra, é necessário e suficiente que $a_1 > 0$ e $q > 1$ ou $a_1 < 0$ e $0 < q < 1$.

Exemplos

a. (1, 2, 4, 8, ...) é uma P.G. crescente de razão $q = 2$.

b. $\left(-2, -1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \ldots\right)$ é uma P.G. crescente de razão $q = \frac{1}{2}$.

- **Decrescente**: uma P.G. é decrescente quando cada termo, a partir do segundo, é menor que o antecedente. Para que isso ocorra, é necessário e suficiente que $a_1 > 0$ e $0 < q < 1$ ou $a_1 < 0$ e $q > 1$.

Exemplos

a. $\left(12, 6, 3, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \ldots\right)$ é uma P.G. decrescente de razão $q = \frac{1}{2}$.

b. (−1, −3, −9, −27, ...) é uma P.G. decrescente de razão $q = 3$.

- **Constante**: uma P.G. é constante quando todos os seus termos são iguais. Para que isso ocorra, é necessário e suficiente que sua razão seja 1 ou que todos os seus termos sejam nulos.

Exemplos

a. (6, 6, 6, 6, 6, ...) é uma P.G. constante de razão $q = 1$.

b. (0, 0, 0, 0, ...) é uma P.G. constante de razão indeterminada.

- **Oscilante**: uma P.G. é oscilante quando todos os seus termos são diferentes de zero, e dois termos consecutivos quaisquer têm sinais opostos. Para que isso ocorra, é necessário e suficiente que $a_1 \neq 0$ e $q < 0$.

Exemplos

a. (1, −2, 4, −8, 16, −32, ...) é uma P.G. oscilante de razão $q = -2$.

b. $\left(-8, 4, -2, 1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots\right)$ é uma P.G. oscilante de razão $q = -\frac{1}{2}$.

- **Quase nula**: uma P.G. é quase nula quando o primeiro termo é diferente de zero e os demais são iguais a zero. Para que isso ocorra, é necessário e suficiente que $a_1 \neq 0$ e $q = 0$.

Exemplo

(4, 0, 0, 0, 0, 0, 0, ...) é uma P.G. quase nula.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Faça os exercícios no caderno.

40. Verifique se as sequências a seguir são progressões geométricas.

a. $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6)$ tal que $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$, com n natural não nulo e $n \leqslant 6$. **40. a.** É P.G.

b. $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ tal que $a_n = (n - 1)^2$, com n natural não nulo e $n \leqslant 5$. **40. b.** Não é P.G.

c. $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6)$ tal que $a_n = 5^{2-n}$, com n natural não nulo e $n \leqslant 6$. **40. c.** É P.G.

d. (a_1, a_2, a_3, a_4) tal que $a_n = (-1)^n \cdot 2^{n-4}$, com n natural não nulo e $n \leqslant 4$. **40. d.** É P.G.

41. (Enem) Para comemorar o aniversário de uma cidade, a prefeitura organiza quatro dias consecutivos de atrações culturais. A experiência de anos anteriores mostra que, de um dia para o outro, o número de visitantes no evento é triplicado. É esperada a presença de 345 visitantes para o primeiro dia do evento.

Uma representação possível do número esperado de participantes para o último dia é **41.** alternativa **c**

a. 3×345

b. $(3 + 3 + 3) \times 345$

c. $3^3 \times 345$

d. $3 \times 4 \times 345$

e. 34×345

42. Estudos demográficos estimam que a população de certa cidade cresça 2% ao ano, atingindo, no final de 2030, o total de 477.360 habitantes.

a. Considerando o período em que essa estimativa é válida, tem-se que a sequência crescente formada pelo número de habitantes dessa cidade, ao final de cada ano, é uma P.G. Qual é a razão dessa P.G.?

b. Qual será o número de habitantes dessa cidade no final de 2029? **42. b.** 468.000 **42. a.** 1,02

c. Se esse percentual de crescimento se mantiver, qual será a população no final de 2031?
42. c. aproximadamente 486.907

Fórmula do termo geral de uma progressão geométrica

Retomando a situação apresentada na introdução do tópico **Progressão geométrica**, sabemos que, de 2005 a 2065, a cada década, a extensão da camada de ozônio, em quilômetro quadrado, é dada pelos termos da progressão geométrica:

$$(27;\ 27 \cdot 0{,}7;\ 27 \cdot (0{,}7)^2;\ 27 \cdot (0{,}7)^3;\ 27 \cdot (0{,}7)^4;\ 27 \cdot (0{,}7)^5;\ 27 \cdot (0{,}7)^6)$$

Note que qualquer termo dessa P.G. pode ser representado pelo produto do primeiro termo 27 por uma potência de razão 0,7. O primeiro termo pode ser representado por $27 \cdot (0{,}7)^0$.

Podemos generalizar esse raciocínio para qualquer P.G., isto é, em toda progressão geométrica, um termo qualquer pode ser expresso em função do primeiro termo e da razão da P.G. Para entender tal fórmula, considere a P.G. cujo primeiro termo é a_1 e cuja razão é q:

$$(a_1,\ a_1 \cdot q,\ \underbrace{a_1 \cdot q^2}_{a_2},\ \underbrace{a_1 \cdot q^3}_{a_3},\ \underbrace{a_1 \cdot q^4}_{a_4},\ \ldots,\ ?,\ \underbrace{\ldots}_{a_n})$$

Observe que qualquer termo da P.G. é o produto do primeiro termo a_1 por uma potência de q:

$$\begin{aligned} a_1 &= a_1 \cdot q^0 \\ a_2 &= a_1 \cdot q^1 \\ a_3 &= a_1 \cdot q^2 \\ a_4 &= a_1 \cdot q^3 \\ a_5 &= a_1 \cdot q^4 \\ &\vdots \\ a_n &= ? \end{aligned}$$

Reflexão 1: Considere a P.G. de razão q: $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, \ldots)$
Note, por exemplo, que o termo a_6 pode ser representado de várias maneiras: $a_6 = a_1 \cdot q^{6-1}$, ou seja, $a_6 = a_1 \cdot q^5$; $a_6 = a_2 \cdot q^{6-2}$, ou seja, $a_6 = a_2 \cdot q^4$; $a_6 = a_4 \cdot q^{6-4}$, ou seja, $a_6 = a_4 \cdot q^2$; $a_6 = a_7 \cdot q^{6-7}$, ou seja, $a_6 = a_7 \cdot q^{-1}$; $a_6 = a_8 \cdot q^{6-8}$, ou seja, $a_6 = a_8 \cdot q^{-2}$. Essa ideia pode ser generalizada da seguinte maneira: em qualquer P.G. (a_n) de razão q, temos $a_n = a_k \cdot q^{n-k}$.

Observando que, em cada igualdade, o expoente de q tem uma unidade a menos que o índice do termo à esquerda da igualdade, concluímos que: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$. Ou seja:

Reflexão

É possível representar o termo a_n de uma P.G. em função da razão q e de qualquer termo a_k?

Em uma P.G. $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots)$ de razão q, temos: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

Essa identidade é chamada de **fórmula do termo geral** da P.G.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

12. Determine o 13º termo da P.G. (64, 32, 16, ...).

Resolução

Devemos determinar o termo $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ dessa P.G. tal que: $\begin{cases} a_1 = 64 \\ q = \dfrac{1}{2} \\ n = 13 \end{cases}$

Logo:

$$a_{13} = a_1 \cdot q^{12} = 64 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{12} = 2^6 \cdot \frac{1}{2^{12}} = \frac{1}{2^6} = \frac{1}{64}$$

13. Uma estimativa prevê um crescimento anual de 0,2% na população de uma cidade. Supondo que essa estimativa esteja correta, calcule a população dessa cidade daqui a 14 anos, sabendo que a população atual é de 480.000 habitantes.

Resolução

A sequência crescente das populações, ano a ano, dessa cidade, a partir do momento atual, é a progressão geométrica (a_n) de razão 1,002 e primeiro termo 480.000. O termo a_{15} dessa P.G. é a população da cidade daqui a 14 anos.

Pela fórmula do termo geral $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, temos:

$$a_{15} = 480.000 \cdot (1{,}002)^{14}$$

Com o auxílio de uma calculadora, obtemos: $(1{,}002)^{14} \approx 1{,}02837$ e, portanto:

$$a_{15} \approx 480.000 \cdot 1{,}02837 \Rightarrow a_{15} \approx 493.618$$

Logo, daqui a 14 anos a população da cidade será de 493.618 habitantes aproximadamente.

Reflexão

Qual é a importância de fazer estimativas do crescimento populacional?

Reflexão 2: Fazer estimativas do crescimento populacional é fundamental para o planejamento e a tomada de decisões em diversas áreas, como saúde, educação, infraestrutura e economia.

14. Um estudo mostrou que a área desertificada de um município dobra a cada década e que atualmente essa área representa $\frac{1}{1.024}$ do município. Se a conclusão desse estudo estiver correta e não for tomada nenhuma providência, daqui a exatamente k décadas todo o município terá se transformado em deserto. Determine k.

PABLO PORCIUNCULA/AFP/GETTY IMAGES

Caatinga na estiagem, em Juazeiro, Bahia. Foto de 2024.

Reflexão: O sistema de equações $\begin{cases} a_1 q^2 (1+q^3) = 36 \\ a_1 (1+q^3) = 144 \end{cases}$ também pode ser resolvido por comparação ou por substituição.

Resolução

Sendo A a área total do município, a sequência das áreas desertificadas desse município, década a década, a partir do momento atual até a desertificação integral, é a progressão geométrica de razão 2, primeiro termo igual a $\frac{A}{1.024}$ e último termo A:

$$\left(\frac{A}{1.024}, \frac{A}{512}, \frac{A}{256}, \ldots, A\right)$$

Podemos afirmar que A pertence à P.G. porque pode ser representada como o produto de $\frac{A}{1.024}$ por uma potência de expoente natural da razão 2.

O número n de termos dessa P.G. pode ser determinado pela fórmula do termo geral $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, em que

$$a_n = A,\ a_1 = \frac{A}{1.024} \text{ e } q = 2, \text{ isto é:}$$

$$A = \frac{A}{1.024} \cdot 2^{n-1} \Rightarrow 2^{n-1} = 1.024$$

$$\therefore 2^{n-1} = 2^{10} \Rightarrow n - 1 = 10$$

$$\therefore n = 11$$

O número k pedido é igual a $n - 1$, isto é, $k = 10$ e, portanto, daqui a dez décadas, ou 100 anos, toda a área do município terá se desertificado.

15. Calcule a razão da P.G. (a_n) tal que $a_3 + a_6 = 36$ e $a_1 + a_4 = 144$.

Resolução

Pela fórmula do termo geral $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, temos:

$a_3 = a_1 q^2$, $a_6 = a_1 q^5$ e $a_4 = a_1 q^3$; logo:

$$\begin{cases} a_3 + a_6 = 36 \\ a_1 + a_4 = 144 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 q^2 + a_1 q^5 = 36 \\ a_1 + a_1 q^3 = 144 \end{cases}$$

Fatoramos o primeiro membro de cada uma das igualdades anteriores:

$$\begin{cases} a_1 q^2 (1 + q^3) = 36 \\ a_1 (1 + q^3) = 144 \end{cases}$$

Dividimos, membro a membro, as duas igualdades anteriores:

$$\frac{\cancel{a_1} q^2 \cancel{(1+q^3)}}{\cancel{a_1} \cancel{(1+q^3)}} = \frac{36}{144} \Rightarrow q^2 = \frac{1}{4}$$

$$\therefore q = \pm\frac{1}{2}$$

Vamos resolvê-lo por comparação. Para isso, isolamos a expressão $a_1 (1 + q^3)$ em cada uma das equações, obtendo:

$$\begin{cases} a_1 (1+q^3) = \frac{36}{q^2} \\ a_1 (1+q^3) = 144 \end{cases}$$

Observe, portanto, que existem duas progressões geométricas que satisfazem as condições desse problema: uma de razão positiva, $q = \frac{1}{2}$, e outra de razão negativa, $q = -\frac{1}{2}$.

Assim, concluímos que:

$$\frac{36}{q^2} = 144 \Rightarrow \left(\frac{6}{q}\right)^2 = 144$$

$$\therefore \frac{6}{q} = \pm 12 \Rightarrow q = \frac{1}{2} \text{ ou } q = -\frac{1}{2}$$

Reflexão

Há outro modo de resolver o sistema de equações do exercício resolvido 15?

16. Interpole 5 meios geométricos entre 1 e 64, nessa ordem.

Resolução

Devemos determinar a P.G. de sete termos, com $a_1 = 1$ e $a_7 = 64$.

$$(\underset{\substack{\uparrow \\ a_1}}{1}, \underbrace{\_, \_, \_, \_, \_}_{\text{meios geométricos}}, \underset{\substack{\uparrow \\ a_7}}{64})$$

Pela fórmula do termo geral $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, temos:

$$a_7 = a_1 q^6 \Rightarrow 64 = 1 \cdot q^6$$

$$\therefore q = \pm\sqrt[6]{64} = \pm 2$$

Chegamos, portanto, a duas interpolações possíveis:

- para $q = 2$, temos a P.G. (1, 2, 4, 8, 16, 32, 64);
- para $q = -2$, temos a P.G. (1, −2, 4, −8, 16, −32, 64).

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Faça os exercícios no caderno.

43. Determine o 14º termo da P.G. (1.536, 768, 384, 192, ...). **43.** $\frac{3}{16}$

44. Obtenha o n-ésimo termo (a_n) da P.G. (3, 6, 12, 24, ...).
44. $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$

45. Considere a P.G. (a_n) de razão $q = \sqrt[7]{3}$ e $a_{15} = 5$. Determine a_1. **45.** $\frac{5}{9}$

46. Obtenha a P.G. (a_n) de termos não nulos e razão $q = \frac{2}{3}$ tal que $a_6 = a_1 \cdot a_4$. **46.** $\left(\frac{4}{9}, \frac{8}{27}, \frac{16}{81}, \frac{32}{243}, \ldots\right)$

47. Quantos termos tem a P.G. $\left(243, 81, 27, \ldots, \frac{1}{3^{10}}\right)$?
47. 16 termos

48. Faça o que se pede em cada item.

a. Interpole quatro meios geométricos entre 1 e 3, nessa ordem. **48. a.** $\left(1, \sqrt[5]{3}, \sqrt[5]{9}, \sqrt[5]{27}, \sqrt[5]{81}, 3\right)$

b. Ao interpolar três meios geométricos entre 4 e 324, nessa ordem, é possível formar duas progressões geométricas, uma crescente e uma oscilante. Determine a soma S dos termos da P.G. oscilante.
48. b. $S = 244$

49. (Fuvest-SP) Numa progressão geométrica de 4 termos positivos, a soma dos dois primeiros vale 1 e a soma dos dois últimos vale 9. Calcule o valor da razão da progressão.
49. a. $q = 3$

50. As figuras a seguir representam o mesmo cubo com diferentes divisões.

ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

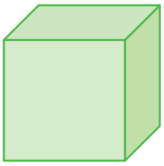


Figura 1

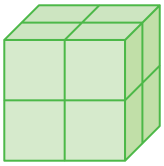


Figura 2

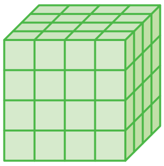


Figura 3

…

- Dividindo o cubo da figura 1 em 8 cubinhos iguais, obtém-se a figura 2;
- Dividindo cada cubinho da figura 2 em 8 novos cubinhos iguais, obtém-se a figura 3.

E assim por diante. Dividindo cada um dos cubinhos que compõem uma figura em 8 novos cubinhos iguais, obtém-se a figura seguinte.

a. Quantos cubinhos compõem a figura 5? **50. a.** 4.096

b. Quantos cubinhos compõem a figura *n*? **50. b.** 8^{n-1}

51. Em uma placa de Petri (recipiente cilíndrico, achatado, de vidro ou plástico que os biólogos utilizam para a cultura de células) foram colocados 300 micro-organismos. A partir desse momento, denominado instante zero, observou-se a evolução da população durante todo o dia, constatando-se que o número de indivíduos dobrou a cada 30 minutos.


SCIENCE PHOTO/SHUTTERSTOCK

A placa de Petri é um recipiente muito utilizado em laboratórios para a cultura de células dos mais variados tipos.

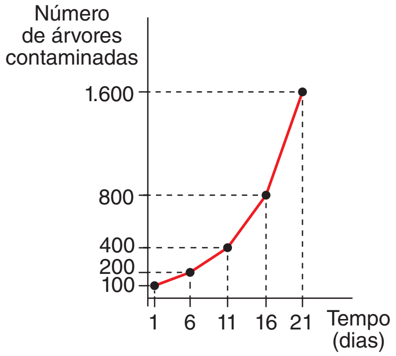
a. Escreva os cinco primeiros termos da sequência crescente (a_n), em que a_1 é o número inicial de indivíduos da população de micro-organismos colocados na placa de Petri e cada termo a_n, com $n \geqslant 2$, é o número de indivíduos ao final de cada período de 30 minutos, a partir do instante zero.
51. a. (300, 600, 1.200, 2.400, 4.800)

b. Qual é a população de micro-organismos ao final de 3 horas, a partir do instante zero?
51. b. 19.200 indivíduos

c. Qual é a população de micro-organismos ao final de *k* horas, com $k \in \mathbb{N}^*$, a partir do instante zero?
51. c. $300 \cdot 2^{2k}$

52. À zero hora de determinado dia, constatou-se que uma plantação de eucaliptos havia sido atacada por um fungo. Observe o gráfico de linha; ele mostra o número de árvores contaminadas ao final do primeiro dia em que se constatou a presença do fungo e o número de árvores contaminadas ao final de cada período de 5 dias subsequentes.

EVOLUÇÃO DA CONTAMINAÇÃO DA PLANTAÇÃO DE EUCALIPTOS



FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

Elaborado para fins didáticos.

Supondo que o padrão de crescimento do número de árvores contaminadas continue o mesmo observado no gráfico e que não se tome nenhuma providência para controlar a doença:

a. quantas árvores estarão contaminadas ao final do 31º dia da constatação da doença? **52. a.** 6.400 árvores

b. em quantos dias, no mínimo, a partir da constatação da doença, todas as 102.400 árvores da plantação estarão contaminadas? **52. b.** 51 dias

53. Elabore um problema que envolva o termo geral de uma P.G. cuja razão é 3 em uma situação contextualizada. Depois, junte-se a um colega e troquem o caderno para um resolver o problema do outro.
53. Resposta pessoal.

Para retomar os conteúdos estudados, resolva os exercícios complementares 9 e 10.

Propriedade das progressões geométricas

Uma sequência de três termos, em que o primeiro é diferente de zero, é uma P.G. se, e somente se, o quadrado do termo médio for igual ao produto dos outros dois; isto é, sendo $a \neq 0$, temos:

$$(a, b, c) \text{ é P.G.} \Leftrightarrow b^2 = ac$$

Reflexão

Por que essa propriedade exige que o primeiro termo da sequência seja diferente de zero?

Reflexão: Porque existem sequências numéricas do tipo (0, *b*, *c*) que satisfazem a condição $b^2 = 0 \cdot c$ e não são progressões geométricas. Por exemplo, a sequência (0, 0, 4).

Demonstração

Vamos analisar cada uma das hipóteses: $b \neq 0$ ou $b = 0$

- 1ª hipótese: $b \neq 0$

  Como $a \neq 0$ e $b \neq 0$, temos:

  $$\begin{cases} (a, b, c) \text{ é P.G.} \Leftrightarrow \dfrac{b}{a} = \dfrac{c}{b} \\ \dfrac{b}{a} = \dfrac{c}{b} \Leftrightarrow b^2 = ac \end{cases}$$

  Logo: (a, b, c) é P.G. $\Leftrightarrow b^2 = ac$

- 2ª hipótese: $b = 0$

  Como $a \neq 0$ e $b = 0$, temos a sequência $(a, 0, 0)$, que é uma P.G. de razão 0. Com isso, constatamos que o quadrado do termo médio é igual ao produto dos outros dois termos: $0^2 = a \cdot 0$

  Logo: (a, b, c) é P.G. $\Leftrightarrow b^2 = ac$

Consequência

Temos, como consequência imediata dessa propriedade:

> Em uma P.G. com número ímpar de termos, o quadrado do termo médio é igual ao produto dos extremos.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

17. Determine x de modo que a sequência $(3, x + 2, 3x)$ seja uma P.G. crescente.

Resolução

A sequência de três termos tem o primeiro termo não nulo (3). Logo, essa sequência é P.G. se, e somente se, $(x + 2)^2 = 3 \cdot 3x$, ou seja:

$$x^2 + 4x + 4 = 9x \Rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0$$

$$\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 9$$

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm 3}{2} \Rightarrow x = 4 \text{ ou } x = 1$$

- Para $x = 1$, temos a P.G. $(3, 1 + 2, 3 \cdot 1)$, que é a P.G. constante $(3, 3, 3)$.
- Para $x = 4$, temos a P.G. $(3, 4 + 2, 3 \cdot 4)$, que é a P.G. crescente $(3, 6, 12)$.

Concluímos, então, que a sequência apresentada é P.G. crescente apenas para $x = 4$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Faça os exercícios no caderno.

54. Obtenha x para que a sequência $(-1, x - 1, 4x - 1)$ seja uma P.G. **54.** $x = 0$ ou $x = -2$

55. Determine os números reais a, b, c e d de maneira que a sequência $(3, a, 12, b, c, d)$ seja uma P.G. oscilante.
55. $a = -6$, $b = -24$, $c = 48$ e $d = -96$

56. Para dois números positivos a e c, a sequência $(a, 4, c)$ é P.A. e a sequência $(c + 2, 4, a)$ é P.G. Determine a e c.
56. $a = 2$ e $c = 6$

57. Marcelo tomou emprestado de um banco a quantia de 20 mil reais, em regime de juros compostos à taxa constante. Durante dois anos, Marcelo não conseguiu realizar nenhuma amortização dessa dívida, ou seja, não pagou nenhuma parte dela. Assim, ao final do primeiro ano do empréstimo, a dívida havia aumentado, em milhares de reais, para $2x + 10$, e ao final do segundo ano do empréstimo, a dívida atingiu o valor $4x + 5$ milhares de reais. Qual era o valor da dívida ao final do segundo ano do empréstimo?

Nota: Amortização é a redução de uma dívida por meio de pagamentos parciais. **57.** 45 mil reais

58. Uma substância radioativa tem decaimento percentual constante a cada ano. O quadro a seguir descreve a massa dessa substância, em grama, no início dos anos 2022, 2023 e 2024, em que x é um número real maior que 15.

Relação entre a massa da substância e o tempo em ano

Início do ano	2022	2023	2024
Massa (em grama)	$4x - 60$	$2x + 10$	$x + 41$

a. Qual era a massa dessa substância no início de 2022?

b. Considerando a continuidade desse decaimento, qual era a massa dessa substância no início de 2025?

58. a. 100 gramas **58. b.** 72,9 gramas

Para retomar os conteúdos estudados, resolva os exercícios complementares 11 e 12.

Representação genérica de uma progressão geométrica

Como no estudo da P.A., é importante saber representar uma P.G. genericamente. Mostramos a seguir algumas representações.

- A sequência (x, xq, xq^2) é uma P.G. de três termos e razão q, para quaisquer valores de x e q.
- A sequência $\left(\frac{x}{q}, x, xq\right)$ é uma P.G. de três termos e razão q, para quaisquer valores de x e q, com $q \neq 0$. Essa representação é mais adequada quando se pretende determinar uma P.G. de três termos, conhecendo o produto deles.
- A sequência (x, xq, xq^2, xq^3) é uma P.G. de quatro termos e razão q, para quaisquer valores de x e q.
- A sequência $\left(\frac{x}{q^3}, \frac{x}{q}, xq, xq^3\right)$ é uma P.G. de quatro termos e razão q^2, para quaisquer valores de x e q, com $q \neq 0$. Essa representação é mais adequada quando se pretende determinar uma P.G. de quatro termos, conhecendo o produto deles.

Enfatize que a representação genérica de uma P.G. de 4 termos pode ser (x, xq, xq^2, xq^3). Porém, em certos problemas em que é conhecido o produto dos quatro termos, é mais adequada a representação $\left(\frac{x}{q^3}, \frac{x}{q}, xq, xq^3\right)$, com $q \neq 0$.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

18. Determine a P.G. de três termos, sabendo que o produto desses termos é 8 e que a soma do 2º com o 3º termo é 10.

Resolução

Quando se conhece o produto dos termos, a representação mais conveniente é $\left(\frac{x}{q}, x, xq\right)$. Pelo enunciado, temos:

$$\frac{x}{\cancel{q}} \cdot x \cdot x\cancel{q} = 8 \Rightarrow x^3 = 8$$

$$\therefore x = 2 \quad \text{(I)}$$

Também sabemos que: $x + xq = 10$ (II)

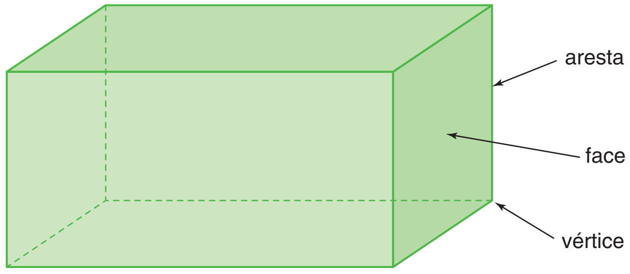
Substituindo (I) em (II), obtemos: $2 + 2q = 10 \Rightarrow q = 4$

Assim, para $x = 2$ e $q = 4$, a P.G. $\left(\frac{x}{q}, x, xq\right)$ é igual a $\left(\frac{1}{2}, 2, 8\right)$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Faça os exercícios no caderno.

59. Em um bloco retangular de volume 216 cm^3, a soma das medidas das doze arestas é 84 cm. Calcule as dimensões (comprimento, largura e altura) desse bloco, em centímetro, sabendo que elas, em determinada ordem, formam uma P.G.



ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

Um bloco retangular tem todas as seis faces retangulares.

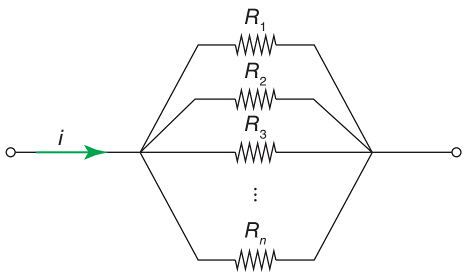
- Os lados de cada face são arestas do bloco.
- Os vértices de cada face são vértices do bloco.
- As medidas de três arestas concorrentes em um mesmo vértice são as dimensões (comprimento, largura e altura) do bloco.
- O volume de um bloco retangular é o produto das três dimensões.
- O bloco retangular também é chamado de paralelepípedo reto-retângulo.

59. 3 cm, 6 cm e 12 cm

60. Qualquer dispositivo que resiste à passagem da corrente elétrica em um circuito é chamado de resistor. Essa resistência pode ser medida em ohm, cujo símbolo é a letra grega Ω (ômega). Admitiremos sempre medidas positivas para resistências.

Dos estudos de Física, sabemos que em uma associação em paralelo de n resistores com resistências iguais a $R_1, R_2, R_3, ..., R_n$, respectivamente, a resistência equivalente, R_{eq}, é dada por:

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + ... + \frac{1}{R_n}$$



FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

De acordo com essa informação, resolva o problema a seguir.

Em um circuito, três resistores estão ligados em paralelo, e suas respectivas resistências, medidas em ohm (Ω), estão em progressão geométrica de razão 2.

Indicando por R a maior dessas resistências, obtenha uma equação que expresse a resistência equivalente, R_{eq}, dessa associação, em função de R. **60.** $R_{eq} = \frac{R}{7}$

O tema de contextualização possibilita o trabalho com investimentos em programas sociais, integrando aspectos matemáticos à análise de processos econômicos e sociais. Essa abordagem pode ser explorada de maneira interdisciplinar, especialmente em colaboração com a área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas, por meio de discussões com base em exemplos reais do Brasil. Ao analisar dados e tendências, os estudantes podem compreender como a Matemática pode apoiar a formulação de políticas públicas, avaliar impactos de programas sociais e estimular debates sobre desigualdade, distribuição de recursos e desenvolvimento sustentável.

Soma dos *n* primeiros termos de uma progressão geométrica

O Ministério do Planejamento de um país estimou os gastos com um programa social para o período de 2026 a 2045. No primeiro ano, o plano é investir 40 milhões de dólares no programa e, em cada ano seguinte, o investimento deve ser 2% maior que o do ano anterior. Assim, o investimento total no programa, durante os 20 anos, é a soma dos termos da progressão geométrica a seguir, em que o primeiro termo é o valor, em milhão de dólares, destinado ao programa em 2026; o segundo é o valor, em milhão de dólares, destinado ao programa em 2027; e assim por diante.

$$(40;\ 40 \cdot 1{,}02;\ \ 40 \cdot (1{,}02)^2;\ \ldots,\ 40 \cdot (1{,}02)^{19})$$

Mesmo dispondo de uma calculadora, os técnicos do Ministério não adicionaram os termos um a um, pois o trabalho seria longo e tedioso. Eles usaram a fórmula a seguir, que expressa a soma dos n primeiros termos de uma P.G. não constante, em função do primeiro termo a_1 e da razão q:

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (1 - q^n)}{1 - q}$$

Observe a simplicidade do cálculo, que não dispensa o uso da calculadora:

$$S_{20} = \frac{40 \cdot \left(1 - (1{,}02)^{20}\right)}{1 - 1{,}02} \Rightarrow S_{20} \approx 972$$

Assim, o investimento no programa, ao longo dos 20 anos, será de 972 milhões de dólares, aproximadamente.

Formalizamos esse procedimento pelo teorema:

A soma S_n dos n primeiros termos da P.G. não constante $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots)$ de razão q é dada por:

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (1 - q^n)}{1 - q}$$

Demonstração

Indicando por S_n a soma dos n primeiros termos da P.G. $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots)$, temos:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n \text{ ou, ainda,}$$
$$S_n = a_1 + a_1q + a_1q^2 + \ldots + a_1q^{n-1} \quad (1)$$

Multiplicando ambos os membros dessa igualdade pela razão q da P.G., obtemos:

$$qS_n = a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + \ldots + a_1q^n \qquad (2)$$

Subtraindo as igualdades (1) e (2), membro a membro, temos:

$$S_n - qS_n = a_1 - a_1q^n \Rightarrow S_n(1 - q) = a_1(1 - q^n)$$

Como $q \neq 1$, pois a P.G. não é constante, podemos dividir ambos os membros dessa última igualdade por $1 - q$, concluindo:

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (1 - q^n)}{1 - q}$$

Reflexão

Em uma P.G. constante, como se calcula a soma dos n primeiros termos?

Reflexão: Em uma P.G. constante, todos os termos são iguais ao primeiro termo a_1; logo, a soma S_n dos n primeiros termos desse tipo de P.G. é dada por: $S_n = n \cdot a_1$

Oriente os estudantes a refletirem sobre a estrutura de tributos no Brasil, destacando a diferença entre os tributos municipais, estaduais e federais. Explique como esses impostos afetam tanto a macro quanto a microeconomia, incluindo a realidade individual e familiar.

Incentive a discussão sobre o impacto desses tributos no cotidiano das pessoas, como no consumo de bens e serviços, e a importância dos impostos para o funcionamento dos serviços públicos. Ao explorar esse tema, favorecemos o desenvolvimento do **TCT Educação fiscal**.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

19. Calcule a soma dos onze primeiros termos da P.G. $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, 4, ...\right)$.

Resolução

Aplicamos a fórmula $S_n = \frac{a_1 \cdot (1 - q^n)}{1 - q}$ para $a_1 = \frac{1}{4}$, $q = 2$ e $n = 11$:

$$S_{11} = \frac{\frac{1}{4} \cdot (1 - 2^{11})}{1 - 2} = \frac{\frac{1}{4} \cdot (-2.047)}{-1}$$

$$\therefore S_{11} = \frac{2.047}{4}$$

20. Desde a sua fundação, uma empresa já pagou um total de R\$ 46.410,00 em impostos. Considerando que, a cada ano, os impostos pagos têm aumentado 10% em relação ao ano anterior e que, no primeiro ano de funcionamento, a empresa pagou R\$ 10.000,00 em impostos, calcule o tempo de existência dessa empresa.

No Brasil, são cobrados tributos municipais, estaduais e federais e na microestrutura, individual ou familiar, também estamos sujeitos a pagamento de impostos.

Resolução

A sequência dos impostos pagos por essa empresa, ano a ano, é uma progressão geométrica de primeiro termo 10.000 e razão 1,1. O tempo de existência da empresa, em ano, é o número n de termos dessa P.G. e pode ser obtido pela fórmula da soma S_n de seus n primeiros termos, em que $S_n = 46.410$, $a_1 = 10.000$ e $q = 1,1$, isto é:

$$46.410 = \frac{10.000 \cdot [1 - (1,1)^n]}{1 - 1,1} \Rightarrow 4,641 = \frac{1 - (1,1)^n}{-0,1}$$

$$\therefore -0,4641 = 1 - (1,1)^n \Rightarrow (1,1)^n = 1,4641$$

$$\therefore \left(\frac{11}{10}\right)^n = \left(\frac{14.641}{10.000}\right)$$

Fatorando o número 14.641, obtemos 11^4 e, portanto:

$$\left(\frac{11}{10}\right)^n = \left(\frac{11}{10}\right)^4 \Rightarrow n = 4$$

Logo, a empresa tem 4 anos de existência.

Conectado: Oriente os estudantes a indicar em uma célula, digamos, A1, o valor *x* e em outra (por exemplo, na A2) o valor *y*. Em uma coluna, eles podem indicar as referências aos anos (Ano 1 na célula B1, Ano 2 na célula B2 até Ano 20 na célula B20). Assim, na célula B1 pode-se indicar a expressão =**A1**; na célula B2, =**A1*A2**; na célula B3, =**A1*A2^2**"; na B4, = **A1*A2^3** etc. Em planilhas eletrônicas, usualmente, o asterisco indica uma multiplicação e o circunflexo, uma potenciação. Depois, basta mudar o valor digitado nas células A1 e A2 para 40 e 2, respectivamente. Além disso, pode-se digitar na célula B21 a fórmula =**soma(B1:B20)** para obter automaticamente a soma dos valores a serem investidos nos anos considerados.

Conectado

Em uma planilha eletrônica, organize os dados para calcular, automaticamente, o valor investido em cada ano pelo Ministério do Planejamento, considerando que o plano seja investir *x* milhões de dólares no primeiro ano e, em cada ano seguinte, investir *y*% a mais que no ano anterior, durante 20 anos.

Depois, considerando $x = 40$ e $y = 2$, com as ferramentas da planilha eletrônica, indiquem em uma célula a soma dos valores dos recursos, adicionando-os um a um. Em outra célula, expresse essa soma por meio da fórmula da soma de n termos de uma P.G. e compare-a com a soma anterior.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Faça os exercícios no caderno.

61. Calcule a soma dos: **61. a.** 3.069 **61. b.** $\frac{2.047}{256}$

a. 10 primeiros termos da P.G. (3, 6, 12, 24, ...); **61. c.** 0

b. 11 primeiros termos da P.G. $\left(4, 2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, ...\right)$;

c. 50 primeiros termos da P.G. (5, −5, 5, −5, 5, ...);

d. 51 primeiros termos da P.G. (5, −5, 5, −5, 5, ...).

61. d. 5

62. 3

62. Em uma P.G. de razão 2, a soma dos oito primeiros termos é 765. Determine o primeiro termo dessa P.G.

63. Determine a soma dos n primeiros termos da P.G. (5, 10, 20, 40, ...). **63.** alternativa **c**

a. $2^n - 5$

b. $5 - 2^n$

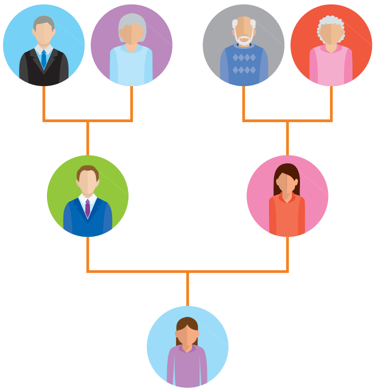
c. $5(2^n - 1)$

d. $5(1 - 2^n)$

e. $5(2^n - 5)$

64. A soma dos n primeiros termos de uma P.G. é 12.285. Determine n sabendo que $a_1 = 3$ e $q = 2$. **64.** $n = 12$

65. Considerando apenas a relação de paternidade entre duas gerações consecutivas, seus pais formam a primeira geração anterior à sua, os pais deles formam a segunda geração, os pais dos pais deles formam a terceira geração, e assim por diante.



ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

Calculem:

a. o número de ascendentes seus que formaram a 20ª geração. **65. a.** 1.048.576

b. o número de ascendentes seus até a 20ª geração. **65. b.** 2.097.150

66. (UFCG-PB) Um estudante prepara-se para uma competição de natação e corrida na sua escola. No primeiro dia de sua preparação, ele nada 25 m e corre 1.500 m. Sabendo-se que ele nada sempre o dobro do que nadou no dia anterior, corre 300 m a mais do que correu no dia anterior e que nos primeiros n dias, somando-se as distâncias que ele nadou encontramos 3.175 m, podemos afirmar que o estudante correu durante estes n dias a quantidade de:

a. 17.500 m
b. 19.500 m
c. 15.400 m
d. 13.200 m
e. 16.800 m

66. alternativa **e**

67. Elabore um problema sobre a soma dos n primeiros termos de uma P.G. envolvendo uma situação contextualizada. Depois, junte-se a um colega a fim de resolver o problema elaborado por ele. **67.** Resposta pessoal.

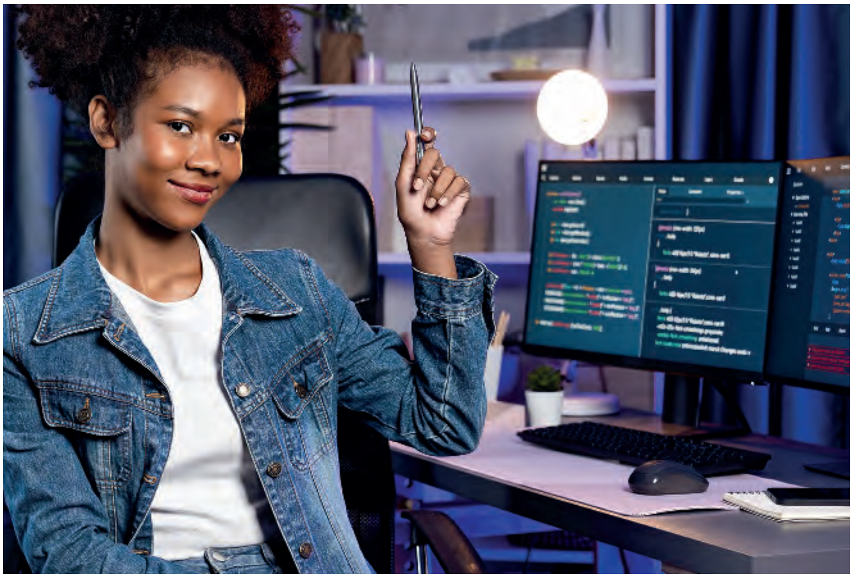
Para retomar os conteúdos estudados, resolva o exercício complementar 13.

TRABALHO E JUVENTUDES

Programadores

Quando usamos um computador, um celular ou um *tablet*, estamos interagindo com *softwares*. Eles são programas que executam funções específicas, como acessar a internet, editar um texto ou jogar um *game*. Mas quem cria esses *softwares*? São as pessoas programadoras.

Elas usam linguagens especiais para escrever os códigos que fazem os *softwares* funcionarem. Esses códigos são como receitas que dizem ao computador o que ele deve fazer em cada situação.



NANOSTOCKK/ISTOCK/GETTY IMAGES

As pessoas programadoras podem trabalhar com diferentes tipos de *software*, como os que rodam na *web*, nos computadores ou nos dispositivos móveis. Elas também podem atender a diferentes objetivos, como resolver problemas internos de uma empresa ou desenvolver soluções para clientes externos.

O QUE faz e quanto ganha um programador? **Terra**, São Paulo, 20 jun. 2023. Disponível em: https://www.terra.com.br/noticias/educacao/carreira/o-que-faz-e-quanto-ganha-um-programador,cf006d4dd4a650aa6036dcf0b392e114he8su4fu.html. Acesso em: 31 ago. 2024.

Quer saber mais sobre a profissão de programador? Faça uma pesquisa na internet sobre essa profissão e compartilhe com os colegas um resumo de sua pesquisa.

Trabalho e juventudes: Resposta pessoal.

Soma dos infinitos termos de uma progressão geométrica

Suponha que uma amostra de substância radioativa perca metade de sua massa a cada ano. Assim, se, nesse momento, essa amostra tem 1 kg de massa, daqui a 1 ano ela terá $\frac{1}{2}$ kg; daqui a 2 anos ela terá $\frac{1}{4}$ kg; e assim por diante. Desse modo, cada termo a_n da progressão geométrica a seguir representa a massa dessa amostra, em quilograma, ao final de n anos, a partir de agora.

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \dots\right)$$

Admitindo que essa P.G. seja infinita, qual é a soma de seus infinitos termos?

Ora, se esses infinitos termos representam a massa perdida da amostra, ano a ano, é razoável concluir que a soma deles é 1 kg, que é a massa original da amostra. Porém, é importante observar que:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}=0{,}75 \qquad \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}=\frac{15}{16}=0{,}9375$$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\frac{7}{8}=0{,}875 \qquad \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}=\frac{31}{32}=0{,}96875$$

Isto é, por mais que adicionemos termos dessa P.G., jamais chegaremos à soma 1. Entretanto, adicionando mais e mais parcelas, vamos nos aproximar de 1 tanto quanto quisermos. Por isso, dizemos que 1 é o **limite** dessa soma.

O limite (indicado por S_∞) da soma dos infinitos termos de uma P.G. (a_1, a_2, a_3, ...), de razão q, com $-1 < q < 1$, é dado por:

$$S_\infty = \frac{a_1}{1-q}$$

Vamos justificar essa fórmula a partir da soma S_n dos n primeiros termos da P.G., isto é:

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} \Rightarrow S_n = \frac{a_1 - a_1 q^n}{1-q}$$

$$\therefore S_n = \frac{a_1}{1-q} - \frac{a_1 q^n}{1-q}$$

Quando o número n de termos aumenta indefinidamente (tende ao infinito), a potência q^n se aproxima indefinidamente de zero (tende a zero), pois o número q está entre -1 e 1.

Assim, a expressão S_n se aproxima indefinidamente de $\frac{a_1}{1-q}$. Indicando esse limite por S_∞, temos:

$$S_\infty = \frac{a_1}{1-q}$$

Notas:

1. Existe o limite da soma dos infinitos termos de uma P.G. de razão q se, e somente se, $-1 < q < 1$.
2. O limite da soma dos infinitos termos de uma P.G. é chamado, simplesmente, de **soma** dos infinitos termos da P.G.


FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

Símbolo utilizado para identificar substâncias radioativas.

A situação inicial associa uma substância radioativa a sequências matemáticas e aplicações científicas, destacando o conceito de meia-vida, fundamental para a compreensão de elementos radioativos. Esse conhecimento é amplamente utilizado em diversas áreas, como a datação de amostras geológicas e biológicas, abrangendo desde fósseis até *icebergs*, o que ilustra o uso prático da progressão geométrica. Ao abordar o decaimento exponencial de elementos radioativos, como o carbono-14, os estudantes podem verificar como a Matemática é aplicada em campos como a Paleontologia, a Arqueologia e os estudos paleoclimáticos, auxiliando na reconstrução de ambientes e eventos históricos. Ao explorar esse tema, contribuímos para o desenvolvimento do **TCT Ciência e tecnologia**.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

21. Calcule a soma dos infinitos termos da P.G. $\left(5, \frac{5}{2}, \frac{5}{4}, \ldots\right)$.

Resolução

Calculando a razão da P.G., obtemos: $q = \frac{5}{2} : 5 \Rightarrow q = \frac{1}{2}$

Como $-1 < \frac{1}{2} < 1$, então existe a soma S_∞.

Pela fórmula $S_\infty = \frac{a_1}{1 - q}$, concluímos que:

$$S_\infty = \frac{5}{1 - \frac{1}{2}} \Rightarrow S_\infty = \frac{5}{\frac{1}{2}} = 10$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Faça os exercícios no caderno.

68. Calcule a soma dos infinitos termos de cada uma das seguintes progressões geométricas:

a. $\left(25, 5, 1, \frac{1}{5}, \frac{1}{25}, \ldots\right)$ **68. a.** $\frac{125}{4}$

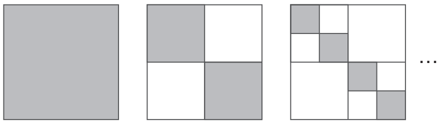
b. $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, -\frac{1}{16}, \ldots\right)$ **68. b.** $\frac{1}{3}$

c. (6; 0,6; 0,06; 0,006; ...) **68. c.** $\frac{20}{3}$

d. $(k^5, k^4, k^3, k^2, \ldots)$, sendo k uma constante real maior que 1. **68. d.** $\frac{k^6}{k - 1}$

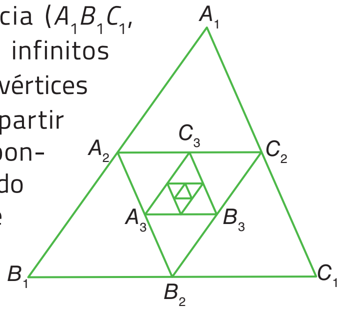
69. Resolva, em $\mathbb{R}$, a equação $\log x + \frac{\log x}{2} + \frac{\log x}{4} + \frac{\log x}{8} + \ldots = 4$, em que as parcelas do primeiro membro da igualdade se sucedem infinitamente obedecendo ao padrão observado. **69.** $S = \{100\}$

70. Na sequência de figuras a seguir, todos os quadriláteros são quadrados. O lado do primeiro quadrado sombreado mede 4 cm, e cada quadrado sombreado, a partir da segunda figura, foi obtido unindo-se os pontos médios dos lados opostos de cada quadrado sombreado da figura anterior.



Qual é a soma das medidas das áreas dos quadrados sombreados nas infinitas figuras? **70.** 32 cm²

71. Considere a sequência $(A_1B_1C_1, A_2B_2C_2, A_3B_3C_3, \ldots)$, de infinitos triângulos, em que os vértices de cada triângulo, a partir do segundo, são os pontos médios dos lados do triângulo precedente (conforme a figura).



Sendo 20 cm o perímetro do triângulo $A_1B_1C_1$, calcule a soma dos perímetros desses infinitos triângulos. (*Sugestão*: O segmento $\overline{A_2C_2}$ mede metade do segmento $\overline{B_1C_1}$, pois, pelo caso L.A.L. de semelhança de triângulos, temos $\triangle A_1A_2C_2 \sim \triangle A_1B_1C_1$, e a razão de semelhança é $\frac{1}{2}$. Repita esse raciocínio para os demais lados dos triângulos, a partir de $A_2B_2C_2$.) **71.** 40 cm

72. Determine a fração geratriz da dízima periódica $D = 4{,}8888\ldots$ **72.** $\frac{44}{9}$

$$\left(\textit{Sugestão}: D = 4 + \underbrace{0{,}8 + 0{,}08 + 0{,}008 + 0{,}0008 + \ldots}_{\text{P.G. infinita de razão 0,1}}\right)$$

73. a. empréstimo A: (1, 2, 3, 4); empréstimo B: (1, 2, 4, 8)

73. Dois empréstimos, A e B, de 1 milhão de reais cada um foram tomados ao mesmo tempo e pagos 3 anos depois. O montante da dívida do empréstimo A cresceu em regime de juros simples à taxa de 100% ao ano e o de B cresceu em regime de juro composto à taxa de 100% ao ano.

a. Forme as sequências $(1, a_2, a_3, a_4)$ e $(1, b_2, b_3, b_4)$, relativas aos empréstimos A e B, respectivamente, em que o primeiro termo representa o valor do empréstimo tomado, em milhão de reais, e os demais termos representam o montante da dívida, em milhão de reais, ao final de cada ano do empréstimo.

b. Represente no mesmo plano cartesiano os pontos (n, a_n) e (n, b_n), referentes às sequências obtidas no item **a**. **73. b.** Resposta no final do livro.

c. Em relação aos pontos citados no item **b**, obtenha a lei de associação da função afim f e da função exponencial g, de domínio $\mathbb{R}$, tal que $f(n) = a_n$ e $g(n) = b_n$. Construa, no mesmo plano cartesiano, o gráfico de f e g, destacando os pontos (n, a_n) e (n, b_n).

73. c. Resposta no final do livro.

ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

74. De acordo com o Marine Stewardship Council, algumas das práticas de pesca mais destrutivas incluem a pesca com cianeto e práticas que recorrem ao uso de explosivos. Essas práticas visam anestesiar ou matar os peixes para facilitar sua captura. No entanto, são vistas como predatórias e insustentáveis.

ODS 14

Suponha que um barco da guarda costeira persegue um barco de pesca ilegal que está a 10 km de distância.

a. Que distância o barco da guarda costeira deverá percorrer para alcançar os pescadores se sua velocidade é o dobro da velocidade do barco de pesca e os dois barcos navegam com velocidade constante em uma mesma linha reta e no mesmo sentido? Justifiquem suas respostas de dois modos diferentes, sendo um deles pela fórmula da soma dos termos de uma P.G. infinita. **74. a.** 20 km; resposta pessoal.

b. Façam uma pesquisa a respeito da sobrepesca e da pesca ilegal e listem informações que destaquem a importância de legislações que protejam o meio ambiente e a vida marinha.


JORGE SAENZ/AP PHOTO/IMAGEPLUS

Barco de pesca ilegal apreendido. Foto de 2022.

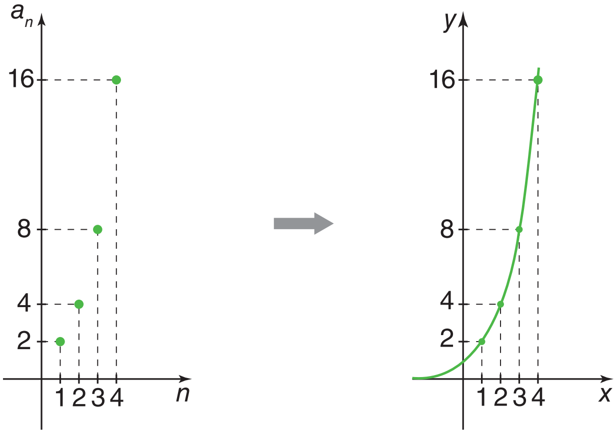
Para retomar os conteúdos estudados, resolva o exercício complementar 14.

74. b. Resposta pessoal. Converse com os estudantes sobre os impactos ao meio ambiente e à economia. Para saber mais, sugerimos o texto **Pesca predatória, o que é, história, tipos, impactos e consequências**, disponível em: https://123ecos.com.br/docs/pesca-predatoria/ (acesso em: 7 out. 2024).

A progressão geométrica e a função exponencial

A representação gráfica da P.G. (2, 4, 8, 16, ...), cujo termo geral é $a_n = 2 \cdot 2^{n-1}$, ou seja, $a_n = 2^n$, é formada pelos pontos (n, a_n) do plano cartesiano.

Observando que o termo geral $a_n = 2^n$ é identificado com a função exponencial $y = 2^x$, quando x assume apenas valores naturais não nulos, concluímos que a representação gráfica da P.G. (2, 4, 8, 16, ...) é formada por pontos do gráfico da função exponencial $y = 2^x$.



FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

Observação

- Para $n = 1$, temos (1, 2).
- Para $n = 2$, temos (2, 4).
- Para $n = 3$, temos (3, 8).
- Para $n = 4$, temos (4, 16).

⋮

Generalizando, consideremos a P.G. não constante $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...)$ de razão positiva q. Seu termo geral, $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, é equivalente a $a_n = \frac{a_1}{q} \cdot q^n$ e, portanto, a representação gráfica dessa P.G. é formada por pontos da função $y = \frac{a_1}{q} \cdot q^x$.

Dessa maneira, algumas importantes propriedades da função exponencial podem ser aplicadas na resolução de problemas que envolvam progressões geométricas.

75. d. Sim, pois podemos observar que a constante de variação é a razão da P.G. e o valor inicial é o primeiro termo.

EXERCÍCIO PROPOSTO

Faça os exercícios no caderno.

75. Benedito fez um empréstimo de R$ 1.500,00 em uma instituição financeira, a juro composto, e resolveu montar um quadro para verificar, nos primeiros 4 anos, o montante correspondente ao empréstimo caso ele esquecesse de pagar.

Montante da dívida

t (ano)	1	2	3	4
Montante (R$)	1.590,00	1.685,40	1.786,52	1.893,71

a. Qual é a taxa de juro anual que está sendo cobrada? **75. a.** 6%

b. Esses montantes formam uma sequência em P.G.? Qual é a razão? **75. b.** Sim, a razão da P.G. é 1,06.

c. Escreva a expressão do montante *M* em função do tempo *t* em anos. **75. c.** $M(t) = 1.500 \cdot (1{,}06)^t$

d. Analisando a expressão definida no item anterior, é possível afirmar que existe relação entre a P.G. e a função exponencial? Justifique.

e. Construa o gráfico definido no item **c**.
75. e. Resposta no final do livro.

ANÁLISE DA RESOLUÇÃO

Um estudante resolveu o exercício conforme a reprodução a seguir. Um erro foi cometido. Apontem o erro e refaçam a resolução no caderno, corrigindo-a.

Exercício

Resolva, em $\mathbb{R}$, a equação

$$x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{4} + \frac{x^4}{8} + \ldots = 6 - 4x,$$

em que o primeiro membro é a soma das infinitas parcelas da forma $\frac{x^n}{2^{n-1}}$, com $n \in \mathbb{N}^*$.

Resolução

$$\underbrace{x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{4} + \frac{x^4}{8} + \ldots}_{\text{soma } S_\infty \text{ de uma p.g.}} = 6 - 4x$$

Cálculo da soma S_∞

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = x \\ \text{razão: } \frac{x}{2} \\ S_\infty = \frac{a_1}{1 - q} \end{array}\right\} S_\infty = \frac{x}{1 - \frac{x}{2}} = \frac{x}{\frac{2 - x}{2}} = \frac{2x}{2 - x}$$

Substituindo S_∞ na equação inicial:

$$\frac{2x}{2 - x} = 6 - 4x$$

$$2x = (2 - x)(6 - 4x)$$

$$2x = 12 - 8x - 6x + 4x^2$$

$$4x^2 - 16x + 12 = 0$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 16 - 12 = 4$$

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{4}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm 2}{2} \begin{cases} x' = \frac{6}{2} = 3 \\ x'' = \frac{2}{2} = 1 \end{cases}$$

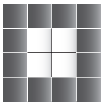
Logo, $S = \{1, 3\}$.

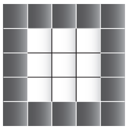
Análise da Resolução:
O estudante esqueceu de considerar a condição de existência da soma dos infinitos termos de uma P.G.
$0 < q < 1 \Rightarrow 0 < \frac{x}{2} < 1$
$\therefore 0 < x < 2$
Logo, $x = 1$.

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

Faça os exercícios no caderno.

1. Com azulejos quadrados brancos e cinza, todos do mesmo tamanho, construímos os seguintes mosaicos:





FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

A regra para construir esses mosaicos é a seguinte: inicialmente, formamos um quadrado com 1 azulejo branco cercado por azulejos cinza; em seguida, outro quadrado, este com 4 azulejos brancos, também cercado por azulejos cinza; e assim sucessivamente.

Considerando a sequência de mosaicos com número crescente de azulejos, responda às questões.

a. Quantos azulejos brancos terá o 15º mosaico dessa sequência? **1. a.** 225 azulejos brancos

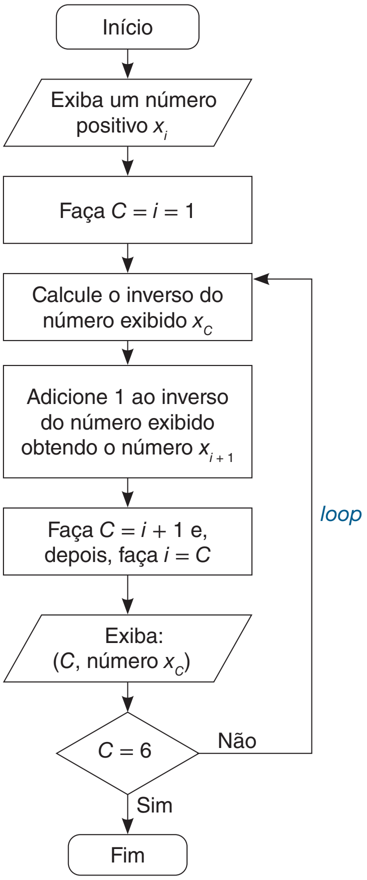
b. Quantos azulejos brancos terá o *n*-ésimo mosaico dessa sequência? **1. b.** n^2 azulejos

c. Quantos azulejos cinza terá o 20º mosaico dessa sequência? **1. c.** 84 azulejos cinza

d. Quantos azulejos cinza terá o *n*-ésimo mosaico dessa sequência? **1. d.** $(4n + 4)$ azulejos cinza

2. Quando é necessário repetir um trecho de um algoritmo, gera-se um ***loop***, uma estrutura de repetição de comandos que refaz um processamento, tantas vezes quantas forem estabelecidas. Em um *loop*, utilizamos um contador que enumera os valores obtidos, na ordem em que são exibidos. Observe o fluxograma a seguir.

Loop: palavra em inglês que significa “ciclo” ou “laço”.



ANDERSON DE ANDRADE PIMENTEL/ARQUIVO DA EDITORA

Determine a sequência $(x_1, x_2, x_3, ..., x_6)$ gerada por esse fluxograma, tal que:

a. $x_1 = 2$ **2. a.** $\left(2, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{13}{8}, \frac{21}{13}\right)$

b. $x_3 = \frac{25}{13}$ **2. b.** $\left(12, \frac{13}{12}, \frac{25}{13}, \frac{38}{25}, \frac{63}{38}, \frac{101}{63}\right)$

c. $x_3 = x_1 + \frac{1}{2}$ **2. c.** $\left(1, 2, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{13}{8}\right)$

3. Um algoritmo é uma sequência finita de etapas preestabelecidas que permite solucionar determinado tipo de problema. Por exemplo, o algoritmo de um *software* tem os seguintes comandos:

(1) Digite um número positivo x, que será exibido na tela do monitor;

(2) Digite a tecla R, com o que o número exibido anteriormente no monitor será substituído por sua raiz quadrada;

(3) Digite a tecla M, com o que o número exibido anteriormente no monitor será substituído pela sua metade;

(4) Digite a tecla Q, com o que o número exibido anteriormente no monitor será substituído pela sua quarta potência;

(5) Repita o processo a partir do passo (2), considerando o número exibido no monitor no passo (4);

(6) Interrompa o processo quando o monitor exibir o 395º número, na ordem de aparição no monitor, considerando como primeiro número aquele digitado no passo (1).

De acordo com esse algoritmo, faça o que se pede nos itens seguintes. **3. a.** (16, 4, 2, 16, 4, 2, 16, 4, 2, 16)

a. Construa os 10 primeiros termos da sequência, na ordem de aparições no monitor, considerando que no passo (1) seja digitado o número 16.

b. Qual será o último número exibido no monitor, ao final da execução desse algoritmo, considerando que no passo (1) seja digitado o número 16? **3. b.** 4

4. Um *show* de *rock* foi realizado em um estádio de futebol. No momento em que havia 3.204 espectadores no estádio, a contagem dos espectadores que entravam passou a ser feita por catracas que registraram o ingresso de 2.900 pessoas a cada 15 minutos, até completar a capacidade máxima do estádio, que é de 38.004 espectadores. Ninguém saiu antes do *show*, que começou quando a capacidade máxima do ginásio já tinha sido atingida.

MAURICIO SANTANA/GETTY IMAGES

Show em um festival de música em São Paulo (SP). Foto de 2023.

a. Construa a sequência crescente em que os termos representam o número de espectadores no interior do estádio a cada 15 minutos, a partir do instante em que a contagem das pessoas passou a ser feita por catracas. **4. a.** (3.204, 6.104, 9.004 ..., 38.004)

b. Durante quantos minutos as catracas estiveram em funcionamento? **4. b.** 195 minutos

5. Em todo dia útil, uma companhia aérea realiza 25 voos do aeroporto Santos Dumont, no Rio de Janeiro, ao aeroporto de Congonhas, em São Paulo.

O primeiro voo parte às 6 h 15 min, e o último, às 20 h 39 min. Sabendo que o intervalo entre dois voos consecutivos é sempre o mesmo, respondam aos itens a seguir.

a. Calculem o intervalo, em minuto, entre dois voos consecutivos. **5. a.** 36 minutos

b. Em que horário decola o 23º voo? **5. b.** 19 h 27 min

c. Qual é o horário do primeiro voo, após às 16h? **5. c.** 16 h 27 min

6. Resolva os itens a seguir, em que x, y e z são números reais. **6. b.** Resposta nas **Orientações Específicas** deste capítulo.

a. Determine x de modo que a sequência $(x - 1, 2x^2 - 1, 1 - 3x)$ seja uma P.A. crescente. **6. a.** $x = -1$

b. Mostre que a sequência $(4y + 7, y + 8, 9 - 2y)$ é P.A. para qualquer valor real de y.

c. Mostre que não existe valor real de z de modo que a sequência $(5z - 1, 3z + 6, z + 9)$ seja P.A.

6. c. Resposta nas **Orientações Específicas** deste capítulo.

7. O perímetro de um triângulo retângulo é 18 dm, e as medidas dos lados, em decímetro, estão em P.A., em determinada ordem. Calcule a área desse triângulo.

7. 13,5 dm^2

8. No Brasil, as Unidades Básicas de Saúde (UBS) são a porta de entrada para o Sistema Único de Saúde (SUS) e têm como principal objetivo oferecer um atendimento gratuito primário aos pacientes. Os casos mais graves e/ou urgentes devem ser encaminhados diretamente a um pronto atendimento ou a um hospital, onde há recursos adequados para tais atendimentos.


CADU DE CASTRO/PULSAR IMAGENS

Unidade Básica de Saúde do SUS em Amajari (RR). Foto de 2021.

Desde a inauguração de um posto de saúde, o número de atendimentos mensais a pacientes aumentou em progressão aritmética. No primeiro mês de funcionamento, foram 430 atendimentos, no segundo, 450 atendimentos, e assim por diante.

a. Calcule o número de atendimentos realizados nesse posto durante o 16º mês de funcionamento. **8. a.** 730 atendimentos

b. Calcule o número total de atendimentos desde a inauguração do posto até o final do 16º mês de funcionamento. **8. b.** 9.280 atendimentos

c. Calcule o número total de atendimentos, desde a inauguração do posto até o final do mês n de funcionamento. Dê a resposta em função de n. **8. c.** $10n^2 + 420n$ atendimentos

9. Forma-se uma pilha de folhas de papel, em que cada folha tem 0,1 mm de espessura. A pilha é formada da seguinte maneira: coloca-se uma folha na primeira vez e, em cada uma das vezes seguintes, tantas quantas já houverem sido colocadas anteriormente. Depois de 33 dessas operações, qual das medidas a seguir é a mais próxima da altura final da pilha? **9.** alternativa **d**

a. 30 m
b. 280 m
c. 5 km
d. 400 km
e. 12.700 km

10. Durante o ano de 2024, o montante acumulado mês a mês em uma aplicação financeira cresceu em progressão geométrica. Ao final de janeiro daquele ano, o montante era de R$ 100.000,00 e, ao final de dezembro do mesmo ano, era de R$ 110.000,00. Qual das alternativas apresenta uma expressão cujo resultado é o montante acumulado, em real, ao final do mês de julho de 2024? **10.** alternativa **d**

a. $100.000 \cdot \sqrt[11]{1,2}$
b. $100.000 \cdot \sqrt[11]{(1,2)^6}$
c. $100.000 \cdot \sqrt[11]{(1,1)^7}$
d. $100.000 \cdot \sqrt[11]{(1,1)^6}$
e. $100.000 \cdot \sqrt[12]{(1,1)^6}$

11. Mostre que a sequência $\left(x - 2, 5, \frac{25}{x - 2}\right)$ é P.G. para qualquer valor real de x, com $x \neq 2$.

11. Resposta nas **Orientações Específicas** deste capítulo.

12. (UFC) Sejam x e y números positivos. Se os números 3, x e y formam, nessa ordem, uma progressão geométrica; e se os números x, y e 9 formam, nessa ordem, uma progressão aritmética, então $x + y$ é igual a: **12.** alternativa **b**

a. $\frac{43}{4}$
b. $\frac{45}{4}$
c. $\frac{47}{4}$
d. $\frac{49}{4}$
e. $\frac{35}{4}$

Aproveite o contexto do **exercício complementar 8** para comentar com os estudantes que a Constituição Federal de 1988 definiu que a saúde é direito de todos e dever do Estado. Por esse motivo, o Sistema Único de Saúde (SUS) deve garantir o acesso universal e gratuito à saúde para todos os brasileiros, desde a gestação até o fim da vida.

13. Em 16/03/2021, dados do Imperial College London mostravam que a taxa de transmissão do vírus da covid-19 no Brasil era 1,23, ou seja, cada 100 infectados transmitiam o vírus para outras 123 pessoas saudáveis. Considere que a taxa de transmissão tenha se mantido em 1,23 por 16 semanas consecutivas e que, a partir do momento que uma pessoa era infectada, ela transmitia o vírus durante duas semanas apenas. Se João foi infectado no início dessas 16 semanas, quantas pessoas seriam infectadas a partir dele, ao final das 16 semanas, supondo que para cada infectado seja válida a taxa de transmissão apresentada? (Conte inclusive João.) **13.** aproximadamente 24 pessoas

14. (UFF-RJ) Uma forte chuva começa a cair na UFFRJ formando uma goteira no teto de uma das salas de aula. Uma primeira gota cai e 30 segundos depois cai uma segunda gota. A chuva se intensifica de tal forma que uma terceira gota cai 15 segundos após a queda da segunda gota. Assim por diante, o intervalo de tempo entre as quedas de duas gotas consecutivas reduz-se à metade na medida em que a chuva piora. Se a situação assim se mantiver, em quanto tempo, aproximadamente, desde a queda da primeira gota, a goteira se transformará em um fio contínuo de água?

14. aproximadamente 60 s

MATEMÁTICA SEM FRONTEIRAS

Plano de cargos e salários

ODS 5

ODS 8

Uma das responsabilidades do departamento de Recursos Humanos de uma empresa é estabelecer um plano de cargos e salários. Para isso, um comitê formado pelos departamentos Administrativo e de Recursos Humanos analisa os cargos considerando alguns atributos de cada função, chamados de fatores de avaliação, aos quais são atribuídos pesos, de acordo com a importância de cada um.

Para cada fator de avaliação, correspondem graus: I, II, III etc., em ordem crescente de importância. Por exemplo, os graus referentes ao fator de avaliação “escolaridade” são:

I. Ensino Fundamental completo
II. Ensino Médio completo
III. Ensino Superior completo
IV. Mestrado
V. Doutorado
VI. Pós-doutorado

Em seguida, são computados os totais de pontos, mínimo e máximo, que devem ser distribuídos aos graus. Esses valores são arbitrários, mas é comum adotar-se como mínimo o valor 100 e como máximo um número de 500 a 1.000. O total mínimo (100) é distribuído entre os fatores de avaliação, proporcionalmente aos pesos (os valores assim obtidos preenchem a coluna correspondente ao grau I dos fatores de avaliação); analogamente, o total máximo é distribuído entre os fatores de avaliação, proporcionalmente aos pesos (os valores obtidos preenchem as células do quadro correspondentes ao último grau dos fatores).

O quadro a seguir apresenta os fatores de avaliação referentes ao cargo de gerência e seus respectivos pesos. Nela, adotou-se 100 como total mínimo de pontos e 500 como total máximo. Assim, obtivemos os valores 19, 13, 13, 18, 14, 11 e 12 na coluna I do quadro e os valores 95, 65, 65, 90, 70, 55 e 60 nas últimas células das linhas, respectivamente.

O texto aborda a persistente desigualdade de gênero no mercado de trabalho, destacando a diferença salarial entre homens e mulheres no Brasil. Isso evidencia a necessidade de critérios mais justos e objetivos nos planos de cargos e salários e a importância de políticas efetivas para reduzir a discriminação no ambiente de trabalho. Também aponta que, embora algumas empresas adotem políticas de promoção de mulheres e incentivo à contratação de mulheres negras, LGBTQIAP+ e com deficiência, ainda há uma baixa adesão a iniciativas que promovam a igualdade de gênero de maneira mais abrangente. Apenas uma pequena porcentagem das empresas tem políticas de apoio à maternidade/paternidade estendida e auxílio-creche, essenciais para garantir condições mais equitativas para as mulheres no mercado de trabalho. Essas lacunas indicam a necessidade de um maior comprometimento das organizações com a criação de um ambiente de trabalho mais inclusivo e justo. Ao explorar essa temática, contribuímos para o desenvolvimento dos **ODS 5** e **8** e do **TCT Educação em direitos humanos**. Além disso, favorece o desenvolvimento das **competências gerais 1**, **6**, **7** e **9**.

Cargo: Gerência		**Matriz para a conversão de graus em pontos** **Total mínimo de pontos = 100 Total máximo de pontos = 500**					
Fatores de avaliação	**Ponderação (pesos)**	**I**	**II**	**III**	**IV**	**V**	**VI**
Escolaridade	19	19				95	——
Conhecimento específico	13	13			65	——	——
Responsabilidade pelo patrimônio	13	13					65
Experiência	18	18		90	——	——	——
Responsabilidade por contatos	14	14				70	——
Responsabilidade por supervisão	11	11				55	——
Complexidade	12	12				60	——

Os números de pontos atribuídos aos graus intermediários, entre o primeiro e o último grau considerados para cada fator, são obtidos por uma **interpolação aritmética** ou por uma **interpolação geométrica** entre o valor mínimo e o valor máximo de cada fator.

Por meio de um quadro como esse todos os funcionários da empresa são avaliados pelo mesmo critério, tornando a avaliação mais justa, com o mínimo de subjetividade.

Apesar de ser possível criar critérios menos subjetivos para o plano de cargos e de salários, há fatores que determinam desigualdades salariais. Segundo o 1º Relatório de Transparência Salarial, publicado em março de 2024 pelos ministérios da Mulher e do Trabalho e Emprego, as mulheres ganham 19,4% a menos que os homens no Brasil. A diferença de remuneração entre homens e mulheres também varia de acordo com o tipo de ocupação; em cargos de dirigentes e gerentes, chega a 25,2%.

No recorte por raça, as mulheres negras estão em menor número no mercado de trabalho e ganham, em média, 49,7% a menos que as demais mulheres.


FG TRADE/E+/GETTY IMAGES

O relatório registrou que 51,6% das empresas possuem planos de cargos e salários; 38,3% adotam políticas para promoção de mulheres a cargos de direção e gerência; 32,6% têm políticas de apoio à contratação de mulheres; e 26,4% adotam incentivos para contratação de mulheres negras.

Apenas 20,6% possuem políticas de incentivo à contratação de mulheres LGBTQIAP+, 23,3% incentivam o ingresso de mulheres com deficiência, e apenas 5,4% têm programas específicos de incentivo à contratação de mulheres vítimas de violência. Poucas empresas ainda adotam políticas como licença-maternidade/paternidade estendida (17,7%) e auxílio-creche (21,4%).

BRASIL. Secretaria de Comunicação Social. Mulheres recebem 19,4% a menos que os homens, aponta 1º Relatório de Transparência Salarial. **Secom**, Brasilia, DF, 25 mar. 2024. Disponível em: https://www.gov.br/secom/pt-br/assuntos/noticias/2024/03/mulheres-ganham-19-4-a-menos-que-os-homens-revela-1o-relatorio-de-transparencia-salarial. Acesso em: 31 ago. 2024.

Para complementar o trabalho com essa temática, sugerimos o **Infográfico clicável: Desigualdade de gênero no mercado de trabalho**. Esse recurso aborda dados sobre a desigualdade de gênero e raça no mercado de trabalho.

OBJETO DIGITAL **Infográfico clicável: Desigualdade de gênero no mercado de trabalho**

Atividades

Faça as atividades no caderno.

1. Copiem o quadro apresentado e preencham os espaços vazios de cada linha, empregando interpolações aritméticas entre o valor mínimo e o máximo dos graus. **Matemática sem fronteiras: 1.** Resposta no final do livro.
2. Copiem esse quadro e preencham os espaços vazios de cada linha, empregando interpolações geométricas entre o valor mínimo e o máximo dos graus. **2.** Resposta no final do livro.
3. Façam uma pesquisa acerca da desigualdade salarial por gênero no Brasil. Depois, conversem a respeito desse fato e da necessidade de políticas de incentivo que visem ampliar a participação de mulheres em diferentes cargos e trabalhos, inclusive na política. **3.** Resposta pessoal.

4. a. aproximadamente 10.222 t de lixo **4. b.** aproximadamente 121.329 t de lixo

VERIFIQUE O QUE APRENDEU NO CAPÍTULO 1

Além do processo de avaliação promovido pelo professor, é importante que você, estudante, realize uma autoavaliação. O objetivo desse instrumento é mensurar seu nível de aprendizagem em relação ao assunto desenvolvido no capítulo. Para ajudá-lo nessa tarefa, apresentamos as seguintes questões.

1. Uma escadaria de 280 degraus une o piso térreo ao último piso de um prédio de apartamentos. Cada degrau tem 10 cm de altura, e o piso térreo está a 48 cm de altura em relação ao nível da rua.

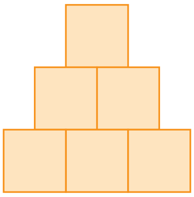
a. Escreva a sequência crescente formada pelas alturas, em relação ao nível da rua, do piso térreo e dos patamares dos degraus. **1. a.** (48, 58, 68, ..., 2.848)

b. Dê a lei de formação dessa sequência.

2. Existem infinitos números inteiros que resultam da adição de três números inteiros consecutivos; por exemplo, o número 99 é resultado da expressão $32 + 33 + 34$. Considere todos os números inteiros k, com $3 \leqslant k < 1.000$, que resultam da adição de três números inteiros consecutivos. Quantos são esses números? **2.** alternativa **a**

a. 333 **b.** 334 **c.** 335 **d.** 336 **e.** 337

3. Com o objetivo de clarear um ambiente, um arquiteto projetou parte de uma parede com 820 tijolos de vidro. Esses tijolos devem ser dispostos tal que, a partir da segunda fileira, cada tijolo se apoie sobre dois tijolos da fileira inferior até a última, que terá apenas um tijolo, conforme figura que apresenta as três últimas fileiras. O número de tijolos da primeira fileira deve ser: **3.** alternativa **c**



ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

a. 35 **b.** 38 **c.** 40 **d.** 45 **e.** 50

4. Em janeiro de determinado ano, uma pequena cidade produziu 10.000 toneladas de lixo. Devido ao crescimento constante da população, houve um aumento mensal de 0,2% na quantidade de lixo produzido durante os meses restantes daquele ano. De acordo com esses dados, responda aos itens seguintes.

a. Qual é a quantidade de lixo produzido no mês de dezembro do ano considerado?

b. Qual é a quantidade de lixo produzido durante todo o ano considerado?

1. b. $\begin{cases} a_1 = 48 \\ a_{n+1} = a_n + 10, \text{ se } n \in \mathbb{N}^* \text{ e } n \leqslant 280 \end{cases}$

ou $a_n = 48 + (n - 1) \cdot 10$, com $n \in \mathbb{N}^*$ e $n \leqslant 281$

Ferramenta de estudo

Um resumo é uma ferramenta de estudo que auxilia retomar o que foi estudado, podendo destacar conteúdos nos quais ainda apresenta dificuldades ou que não compreendeu.

Para elaborar um resumo, você pode seguir algumas dicas, como as sugeridas a seguir.

1. A cada conteúdo estudado, faça anotações detalhadas de tudo o que você aprendeu.

2. Ao finalizar o estudo dos tópicos do capítulo, retome suas anotações e elabore um texto, resumindo-as.

3. Para fazer o resumo, você também pode retomar os tópicos deste capítulo a fim de verificar ou relembrar conceitos, palavras-chave, situações-problema etc.

4. Organize em tópicos a sequência das informações que você pretende apresentar no resumo antes de escrevê-lo.

Agora, elabore um resumo utilizando o que você aprendeu neste capítulo. Compartilhe seu resumo com outros colegas e leia o resumo deles também, a fim de aprimorar seu registro.

Se teve dificuldades ou não resolveu algum exercício, retome os conteúdos abordados no capítulo. Após algumas tentativas, anote as dúvidas e converse com um colega que possa ajudá-lo. Se mesmo assim a dúvida persistir, pergunte ao professor na aula seguinte.

Gerencie bem seu tempo de estudo em casa e estabeleça metas diárias alcançáveis, planejando seus estudos, passo a passo.

Nesta seção, propomos uma avaliação e a elaboração de um resumo como ferramenta de estudo. Oriente os estudantes a fazerem essas atividades com atenção e, caso encontrem dificuldades, incentive-os a revisitarem os conteúdos estudados, para reforçar a compreensão.

CAPÍTULO

2

Trigonometria no triângulo retângulo


DIRCEU PORTUGAL/FOTOARENA

Tirolesa localizada no Parque Unipraias, em Balneário Camboriú, Santa Catarina. Foto de 2021.

Além da teoria

A fotografia é de uma mega tirolesa localizada em Balneário Camboriú (SC), na Estação Mata Atlântica, no topo do morro da Aguada. Essa tirolesa sai da Estação Mata Atlântica (ponto *A*) e vai até a Estação Laranjeiras (ponto *B*), localizada na praia de Laranjeiras. São 240 m de altura e 750 m de distância de uma estação a outra que são percorridos de 45 s a 1 min, atingindo uma velocidade de até 60 km/h.

1. Em sua opinião, conhecendo a medida do ângulo formado entre a reta $\overleftrightarrow{AB}$ e o plano do terreno, como poderia ser calculada a distância entre os pontos *A* e *B*?
2. Além da tirolesa, quais outros esportes radicais que utilizam conceitos de Trigonometria você conhece? Compartilhe com os colegas.

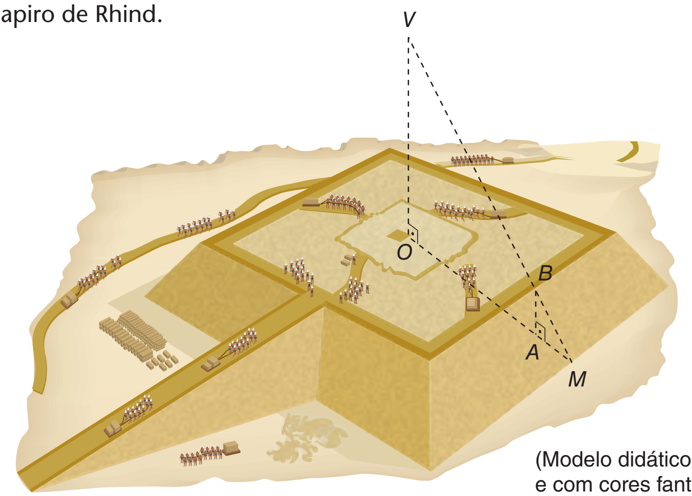
Além da teoria: 1. Resposta pessoal. Resposta possível: Utilizando conhecimentos relacionados à Trigonometria no triângulo retângulo. **2.** Resposta pessoal.

Fragmento do papiro de Rhind.

1. A origem da Trigonometria

O termo Trigonometria (do grego *trígónon*, “triângulo”, e *métron*, “medida”) foi criado em 1595 pelo matemático Bartholomeus Pitiscus para designar o ramo da Matemática que estuda as relações entre as medidas dos lados e as medidas dos ângulos de um triângulo. Entretanto, a origem desse campo de estudo é muito mais antiga.

O papiro de Rhind, escrito no Egito por volta de 1650 a.C., apresenta um texto matemático com 85 problemas. O de número 56, um dos mais antigos registros conhecidos sobre Trigonometria, trata da construção de pirâmides, em que era essencial manter a mesma inclinação nas faces — requisito que levou os construtores a manter constantes as razões entre as medidas dos lados dos triângulos retângulos esquematizados na figura a seguir, em que *O* é o centro da base, *M* é o ponto médio de um lado da base e *V* o vértice da pirâmide.



(Modelo didático sem escala e com cores fantasia.)

Peça aos estudantes que leiam o texto introdutório. Após a leitura, faça perguntas do tipo:

- Suponha que a ilustração da pirâmide egípcia apresentada nessa introdução represente a construção da pirâmide de Quéops, a maior do Egito. Originalmente, essa pirâmide tinha como base um quadrado com lados de 230 m. Se o patamar horizontal concluído da pirâmide, mostrado na ilustração, era um quadrado de lados de 138 m e estava a 58,4 m de altura em relação ao solo, qual era a altura original dessa pirâmide? (146 m)

A construção das pirâmides, marco histórico na humanidade, é explorada em um dos problemas do papiro de Rhind e favorece o trabalho com a área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas. Se possível, promova a participação do professor da área para uma conversa sobre os registros históricos e a construção das pirâmides.

Assim, a construção de cada patamar horizontal deveria obedecer à proporção:

$$\frac{AM}{AB} = \frac{OM}{OV}$$

Dessa maneira, todas as faces teriam a mesma inclinação e, portanto, todas elas terminariam no vértice *V*.

Atualmente, as razões entre as medidas dos lados de um triângulo retângulo são chamadas de **razões trigonométricas**.

2. Razões trigonométricas no triângulo retângulo

Todos os triângulos retângulos que têm um ângulo agudo de medida α são semelhantes entre si.

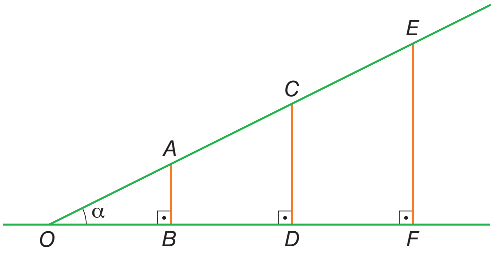
Observe alguns desses triângulos na figura a seguir.

Da semelhança entre os triângulos *OAB*, *OCD* e *OEF*, temos:

$$\frac{AB}{OA} = \frac{CD}{OC} = \frac{EF}{OE} = r_1$$

$$\frac{OB}{OA} = \frac{OD}{OC} = \frac{OF}{OE} = r_2$$

$$\frac{AB}{OB} = \frac{CD}{OD} = \frac{EF}{OF} = r_3$$



Observação

Uma das condições para que dois triângulos sejam semelhantes é quando os três ângulos internos de um deles são, respectivamente, congruentes aos três ângulos internos correspondentes do outro. Em consequência, as medidas dos lados de um desses triângulos são proporcionais às medidas dos lados correspondentes do outro.

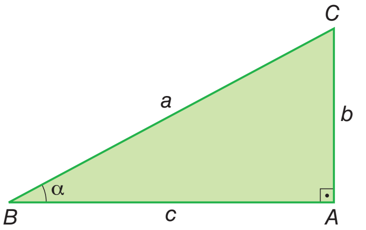
As constantes r_1, r_2 e r_3 são **razões trigonométricas** chamadas, respectivamente, de **seno de α** (sen α), **cosseno de α** (cos α) e **tangente de α** (tg α).

Como essas razões são as mesmas para todos os triângulos retângulos semelhantes entre si, podemos defini-las com base em apenas um deles.

Considere o triângulo *ABC* a seguir. Nele, temos:

Observação

Quando dizemos "cateto oposto a α", estamos nos referindo ao "cateto oposto ao ângulo de medida α". O mesmo vale para o "cateto adjacente a α".



$$\text{sen } \alpha = \frac{\text{medida do cateto oposto a } \alpha}{\text{medida da hipotenusa}} = \frac{b}{a}$$

$$\cos \alpha = \frac{\text{medida do cateto adjacente a } \alpha}{\text{medida da hipotenusa}} = \frac{c}{a}$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{\text{medida do cateto oposto a } \alpha}{\text{medida do cateto adjacente a } \alpha} = \frac{b}{c}$$

FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

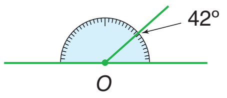
EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

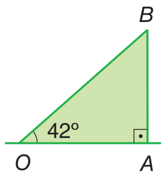
Refaça na lousa e com a colaboração dos estudantes, os **exercícios resolvidos 1** a **4** explorando outras estratégias de resolução.

1. Com o auxílio de uma régua graduada e de um transferidor, calcule o valor aproximado de sen 42°, cos 42° e tg 42°.

Resolução

Construímos um ângulo de 42° e traçamos uma perpendicular a um dos lados desse ângulo, conforme mostram as figuras a seguir.





FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

Medindo com auxílio da régua os lados do triângulo *ABO*, obtemos aproximadamente as seguintes medidas:

AB = 1,5 cm; *AO* = 1,7 cm; *BO* = 2,2 cm

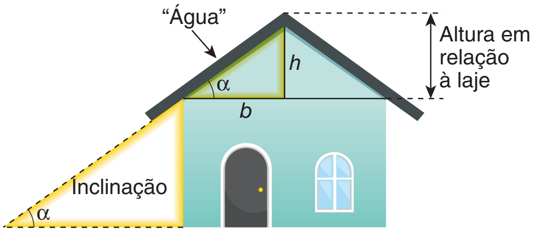
Assim, calculamos:

- $\text{sen } 42° = \frac{1{,}5}{2{,}2} \approx 0{,}7$
- $\cos 42° = \frac{1{,}7}{2{,}2} \approx 0{,}8$
- $\text{tg } 42° = \frac{1{,}5}{1{,}7} \approx 0{,}9$

Nota:

Quando medimos um segmento de reta com uma régua graduada, cometemos, inevitavelmente, erros de aproximação. Portanto, os resultados obtidos para sen 42°, cos 42° e tg 42° são valores aproximados. Existem métodos mais eficientes para calcular esses valores, qualquer que seja a precisão desejada.

2. A inclinação de cada "água" de um telhado é a medida α do ângulo agudo que o plano dessa "água" forma com um plano horizontal. Para facilitar a compreensão, vamos considerar a figura a seguir, que representa a parte frontal de uma casa cuja planta baixa seja retangular. A medida *h* é a altura máxima do telhado em relação à laje superior da casa, e *b* é metade da medida da largura da casa, estando *h* e *b* na mesma unidade de comprimento.



ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

Observações

- Cada um dos planos sobre os quais são distribuídas as telhas de um telhado é chamado de "água". A figura mostra um telhado com duas "águas".
- Planta baixa é o desenho técnico esquemático que se obtém de uma construção imaginando-a cortada por um plano horizontal a 1,50 m do piso e vista de cima.

Note que, conhecendo dois dos três valores α, *h* e *b*, podemos obter o valor desconhecido aplicando a relação: $\text{tg } \alpha = \frac{h}{b}$

Porém, na prática, os profissionais da construção civil costumam proceder de modo diferente no dia a dia. Eles têm um conhecimento prático adquirido e passado dos mais experientes para os novatos. Esses profissionais utilizam simplesmente o percentual obtido por $\frac{h}{b}$ com o qual determinam o que chamam de **declive do telhado**, dado suficiente para sua prática. Por exemplo, se na construção da casa representada anteriormente são conhecidos $h = 2{,}28$ m e $b = 4{,}0$ m, esses profissionais calculam $\frac{h}{b} = \frac{2,28}{4,00} = 0,57$ e com isso concluem que o declive do telhado é de 57%.

ILUSTRAÇÕES: ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

De acordo com essas informações, responda às questões a seguir.

a. Suponha que um arquiteto projetou um telhado em que cada uma das "águas" deve ter 20° de inclinação; porém, ao se comunicar com o empreiteiro da obra, o arquiteto deve fornecer o declive do telhado, que é a linguagem prática adotada na construção civil. Qual é o declive desse telhado?

b. Na figura anterior, suponha que uma "água" do telhado tem declive de 26%. Qual é a inclinação α dessa "água"?

Resolução

a. Para calcular o declive do telhado, precisamos calcular a tangente da inclinação 20°. Vamos obter esse valor usando uma calculadora científica.

Os procedimentos podem variar de uma calculadora para outra, dependendo da marca e do modelo usado. Vamos exemplificar um deles.

Inicialmente, configure a calculadora para o cálculo da medida de ângulos em grau. Isso é feito pressionando a tecla *mode*. No visor aparecerão estas opções:

Pressione a tecla 1, correspondente a *degree* (grau, em inglês). Assim, a calculadora estará configurada conforme precisamos.

A seguir, pressione as teclas na seguinte ordem:

tan 2 0 =

(Há calculadoras em que se deve pressionar:

2 0 tan =)

Assim, aparecerá no visor 0,363970234, que é um valor aproximado da tg 20°.

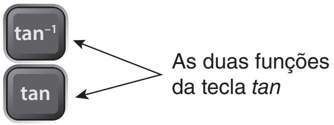
Logo, o declive do telhado é aproximadamente 36%.

b. O declive da "água" é a tangente da inclinação α. Vamos usar uma calculadora científica para calcular a medida α do ângulo agudo na equação $\text{tg}\,\alpha = 0{,}26$.

Inicialmente, configuramos a calculadora para o cálculo da medida de ângulos em grau, como foi feito no item **a**.

A tecla *shift* (que, em inglês, significa troca, substituição, mudança, alteração) deve ser pressionada para trocar a função de uma tecla. Por exemplo, a função da tecla tan é o cálculo da tangente de um ângulo conhecido, a tecla *shift* troca essa função para o cálculo da medida do ângulo de uma tangente conhecida.

Quando o valor da tangente é um número positivo, como neste caso ($\text{tg}\,\alpha = 0{,}26$), a medida do ângulo obtida na calculadora pela função $\tan^{-1}$ será sempre a de um ângulo agudo.



Assim, para obter a medida α do ângulo agudo, tal que $\text{tg}\,\alpha = 0{,}26$, pressionamos a seguinte sequência de teclas:

shift tan⁻¹ 0 . 2 6 =

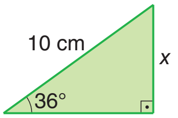
Com isso, aparecerá no visor 14,5742162, que é um valor aproximado da medida α, em grau.

Portanto, $\alpha \approx 14{,}57°$.

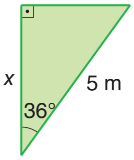
3. Sabendo que sen 36° = 0,59, cos 36° = 0,81 e tg 36° = 0,73, calcule o valor de *x* em cada figura.

ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

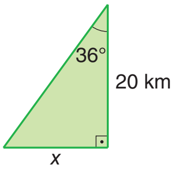
a.



b.



c.



Nota:

Os valores das razões trigonométricas apresentados neste exercício são aproximados. Para simplificar os enunciados e as resoluções, em outros exercícios também adotaremos valores aproximados como se fossem valores exatos das razões trigonométricas.

Resolução

a. A razão trigonométrica aplicada deve ser a que relaciona os elementos:

- ângulo agudo (medida 36°)
- cateto oposto (medida *x*)
- hipotenusa (medida 10 cm)

Tal razão é o **seno**. Assim, temos:

$$\text{sen}\,36° = \frac{x}{10} \Rightarrow 0{,}59 = \frac{x}{10} \therefore x = 5{,}9$$

Logo, *x* é igual a 5,9 cm.

b. As medidas relacionadas no triângulo retângulo são:

- ângulo agudo (medida 36°)
- cateto adjacente (medida *x*)
- hipotenusa (medida 5 m)

Dessa maneira, a razão trigonométrica adequada é o **cosseno**. Assim, temos:

$$\cos 36° = \frac{x}{5} \Rightarrow 0{,}81 = \frac{x}{5} \therefore x = 4{,}05$$

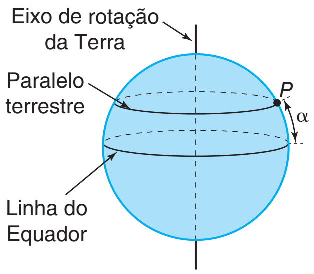
Logo, x é igual a 4,05 m.

c. A razão trigonométrica que relaciona o ângulo agudo (medida 36°), o cateto oposto (medida x) e o cateto adjacente (medida 20 km) é a **tangente**. Então, calculamos:

$$\text{tg } 36° = \frac{x}{20} \Rightarrow 0{,}73 = \frac{x}{20} \therefore x = 14{,}6$$

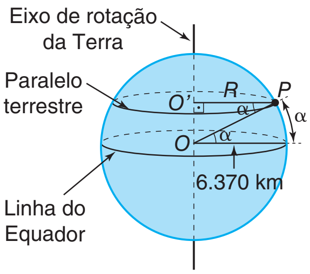
Logo, o valor de x é 14,6 km.

4. Um ponto P da superfície da Terra, ao norte da Linha do Equador, tem latitude α, com $\text{sen } \alpha = \frac{3}{5}$. Supondo que a Terra seja uma esfera perfeita com raio de medida 6.370 km, calcule a medida do raio do paralelo terrestre que passa por P.



Resolução

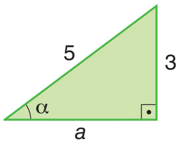
Indicando por O o centro da Terra e por O' e R o centro e o raio do paralelo que passa por P, respectivamente, esquematizamos:



Do triângulo OPO', temos:

$$\cos \alpha = \frac{R}{6.370}$$

Como $\text{sen } \alpha = \frac{3}{5}$, deduzimos que existe um triângulo retângulo com um ângulo agudo de medida α tal que o cateto oposto a esse ângulo mede 3 unidades e a hipotenusa mede 5 unidades:



Assim, a medida a do cateto adjacente a α pode ser obtida pelo teorema de Pitágoras:

$$a^2 + 3^2 = 5^2 \Rightarrow a = 4$$

Com isso, deduzimos que $\cos \alpha = \frac{4}{5}$.

Retornando ao triângulo OPO', temos:

$$\cos \alpha = \frac{R}{6.370} \Rightarrow \frac{4}{5} = \frac{R}{6.370}$$

$$\therefore R = 5.096$$

Concluímos, então, que a medida do raio do paralelo que passa por P é 5.096 km.

ILUSTRAÇÕES: ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

Reflexão Reflexão: Sim. Você encontrará informações nas **Orientações Específicas** do capítulo.

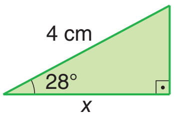
É possível relacionar as medidas dos ângulos internos com as medidas dos lados de um triângulo que não seja retângulo?

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Faça os exercícios no caderno.

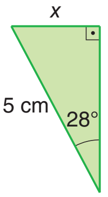
1. Sabendo que $\text{sen } 28° = 0{,}47$, $\cos 28° = 0{,}88$ e $\text{tg } 28° = 0{,}53$, calcule o valor de x em cada figura.

a.



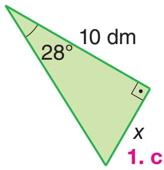
1. a. 3,52 cm

b.



1. b. 2,35 cm

c.

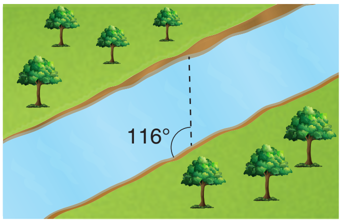


1. c. 5,3 dm

ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

2. Um barco atravessa um rio com 108 m de largura, partindo de um ponto de uma das margens, paralelas nesse trecho. A correnteza faz com que sua trajetória, em linha reta, forme um ângulo de 116° com a margem de partida. Calcule a distância percorrida pelo barco nessa travessia, dados: $\text{sen } 64° = 0{,}90$, $\cos 64° = 0{,}44$ e $\text{tg } 64° = 2{,}05$.

2. 120 m



(Modelo didático sem escala e com cores fantasia.)

Aproveite o contexto do **exercício 6** e do **Vídeo: Acessibilidade nas construções** para indicar uma pesquisa e conversa acerca da importância de leis e normas que visem a acessibilidade e propiciar o desenvolvimento das **competências gerais 9** e **10**. Os espaços públicos devem seguir normas específicas que garantam a inclusão das pessoas com deficiência e configuram um aspecto importante da inclusão.

3. Um teleférico deve unir os topos *A* e *B* de dois morros. Para calcular a quantidade de cabos de aço necessária, um engenheiro mediu as alturas dos morros em relação a um mesmo plano horizontal, obtendo 108 m e 161 m. Depois, mediu o ângulo que a reta $\overleftrightarrow{AB}$ forma com a horizontal, obtendo 32°.

a. Faça um esquema da situação proposta no texto.

b. Calcule a distância entre os pontos *A* e *B*, sabendo que sen 32° = 0,53, cos 32° = 0,85 e tg 32° = 0,62.

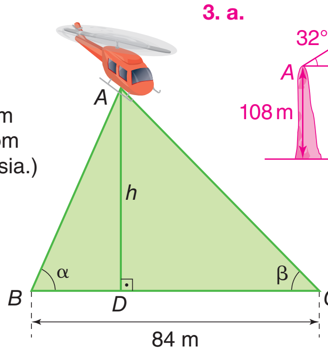
3. b. 100 m

4. Uma praça plana e horizontal tem o formato de um pentágono regular com 200 m de perímetro. Em cada vértice desse pentágono será instalado um poste vertical de iluminação. Para a escolha das lâmpadas adequadas, é necessário calcular a maior distância possível entre dois desses postes. Calcule essa distância, dados sen 54° = 0,81, cos 54° = 0,59 e tg 54° = 1,38. **4.** 64,8 m

5. Um helicóptero suspenso no ar, parado em um ponto *A*, é visto de dois pontos, *B* e *C*, de um terreno plano e horizontal sob ângulos de medidas α e β com o terreno, respectivamente.

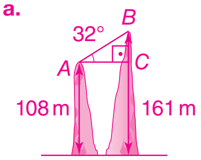
Sabe-se que os pontos *A*, *B* e *C* pertencem a um mesmo plano vertical e que a distância entre *B* e *C* é 84 m. Dado que sen $\alpha = \frac{12}{13}$ e tg $\beta = \frac{3}{4}$, calcule a altura *h*, em metro, em que se encontra o helicóptero em relação ao terreno. **5.** 48 m

(Modelo didático sem escala e com cores fantasia.)



ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

3. a.



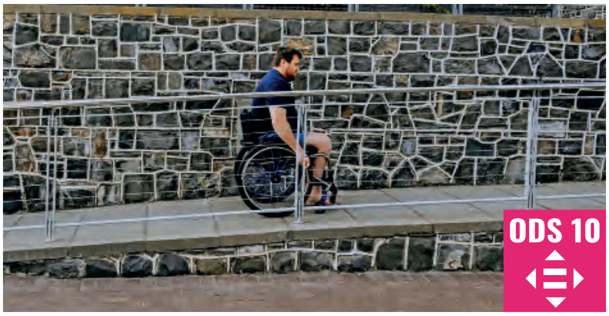
ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

6. (USF) As rampas são uma boa forma de assegurar a acessibilidade para cadeirantes e indivíduos com mobilidade reduzida. A acessibilidade a edificações, mobiliário, espaços e equipamentos urbanos é assegurada em lei.

A Associação Brasileira de Normas Técnicas (ABNT), de acordo com a Lei Brasileira de Inclusão da Pessoa com Deficiência (13.146/2015), regula a construção e define a inclinação das rampas, bem como os cálculos para a sua construção. As diretrizes de cálculo da ABNT indicam um limite máximo de inclinação de 8,33% (proporção de 1:12). Isso significa que uma rampa, para vencer um desnível de 1 m, deve ter, no mínimo, 12 m de comprimento e isso define que o ângulo de inclinação da rampa, em relação ao plano horizontal, não pode ser maior que 7°.

De acordo com as informações anteriores, para que uma rampa, com comprimento igual a 14 m e inclinação de 7° em relação ao plano, esteja dentro das normas da ABNT, ela deve servir para vencer um desnível com altura máxima de

Use: sen 7° = 0,12; cos 7° = 0,99 e tg 7° = 0,12.



CAREL VAN HUYSSTEEN/SHUTTERSTOCK

As rampas de acessibilidade promovem a inclusão e garantem a mobilidade com autonomia e segurança.

a. 1,2 m.

b. 1,32 m.

c. 1,4 m.

d. 1,56 m.

e. 1,68 m.

6. alternativa **e**

OBJETO DIGITAL **Vídeo: Acessibilidade nas construções**

Oriente os estudantes a consultar as páginas 6 e 7 para saber mais sobre este e os demais Objetivos de Desenvolvimento Sustentável.

7. Com o auxílio de uma calculadora científica, elabore um problema sobre a Trigonometria no triângulo retângulo (utilize como modelo os exercícios **2** a **6**). Em seguida, troque o problema elaborado com um colega para que um resolva o problema elaborado pelo outro. Por fim, analisem e discutam as resoluções. **7.** Resposta pessoal.

Para retomar os conteúdos estudados, resolva os exercícios complementares 1 a 3.

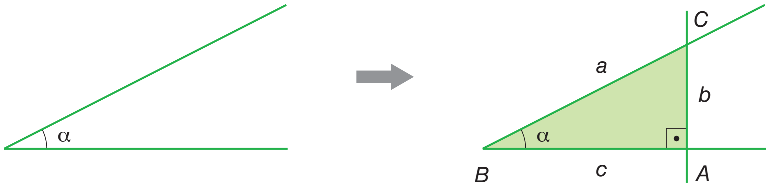
Relação entre o seno, o cosseno e a tangente de um ângulo agudo

Uma importante relação entre o seno, o cosseno e a tangente de um ângulo agudo é enunciada no teorema a seguir.

Dado um ângulo agudo de medida α, tem-se: $\text{tg}\ \alpha = \frac{\text{sen}\ \alpha}{\cos \alpha}$

Demonstração

Construímos um ângulo agudo de medida α e traçamos uma perpendicular a um dos lados do ângulo, obtendo um triângulo retângulo com lados de medidas *a*, *b* e *c*, conforme a figura.



ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

Calculando sen α e cos α e efetuando $\frac{\text{sen }\alpha}{\cos\alpha}$, concluímos que:

$$\frac{\text{sen }\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{b}{\cancel{a}}}{\frac{c}{\cancel{a}}} = \frac{b}{c} = \text{tg }\alpha$$

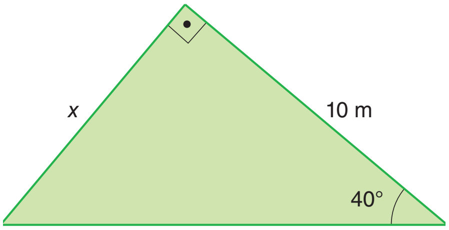
Reflexão

Considerando o triângulo da demonstração, para qual caso temos tg α igual a 1? Como esse triângulo retângulo pode ser classificado?

Para $b = c$ temos tg $\alpha = 1$, neste caso o triângulo retângulo é isósceles.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

5. Dados sen 40° = 0,64 e cos 40° = 0,77, determine o valor de *x* na figura a seguir.



Resolução

$\text{tg } 40° = \frac{x}{10}$

Como temos os valores sen 40° = 0,64 e cos 40° = 0,77, podemos determinar o valor de tg 40°:

$$\text{tg } 40° = \frac{\text{sen } 40°}{\cos 40°} = \frac{0,64}{0,77} \approx 0,83$$

Assim: $0,83 = \frac{x}{10} \Rightarrow x = 8,3$

Logo, a medida *x* é aproximadamente de 8,3 m.

Relação entre o seno e o cosseno de ângulos complementares

Vamos lembrar o conceito de ângulos complementares.

Dois ângulos agudos de medidas α e β são complementares se, e somente se, $\alpha + \beta = 90°$.

Dizemos também que as medidas α e β são complementares.

Aqui, vamos relacionar o seno e o cosseno de dois ângulos complementares por meio do seguinte teorema:

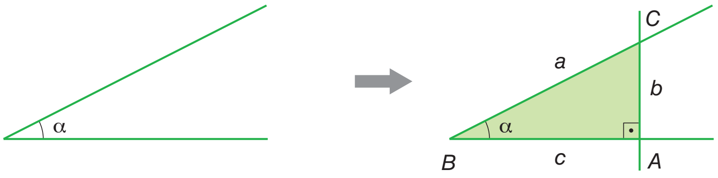
Se α é a medida, em grau, de um ângulo agudo, então:

- $\text{sen }\alpha = \cos(90° - \alpha)$
- $\cos\alpha = \text{sen }(90° - \alpha)$

Observe que α e (90° – α) são medidas complementares.

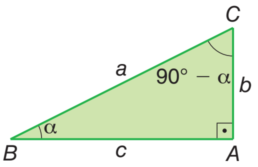
Demonstração

Construímos um ângulo agudo de medida α e traçamos uma perpendicular a um dos lados desse ângulo, obtendo o triângulo retângulo com lados de medidas *a*, *b* e *c*, conforme a figura.



Com a participação dos estudantes, demonstre que: sen **α** = cos (90° – **α**) e cos **α** = sen (90° – **α**), para qualquer ângulo agudo de medida **α**. Resuma essas relações: se dois ângulos agudos são complementares, então o seno de um deles é igual ao cosseno do outro.

Observe que o ângulo $\hat{C}$ é o complementar do ângulo $\hat{B}$, pois:



ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

$$\alpha + m(\hat{C}) = 90° \Rightarrow m(\hat{C}) = 90° - \alpha$$

Assim:

$$\left.\begin{aligned} \text{sen } \alpha &= \frac{b}{a} \\ \cos (90° - \alpha) &= \frac{b}{a} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{sen } \alpha = \cos (90° - \alpha)$$

$$\left.\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{c}{a} \\ \text{sen } (90° - \alpha) &= \frac{c}{a} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \cos \alpha = \text{sen } (90° - \alpha)$$

Desse modo, provamos que:

Se dois ângulos agudos são complementares, então o seno de um deles é igual ao cosseno do outro.

Exemplos

a. 30° é o complemento de 60°; logo: sen 30° = cos 60° e sen 60° = cos 30°

b. 12° é o complemento de 78°; logo: sen 12° = cos 78° e sen 78° = cos 12°

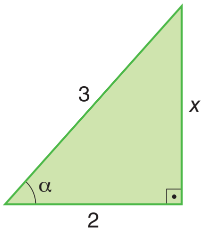
EXERCÍCIO RESOLVIDO

6. Sendo α a medida de um ângulo agudo tal que $\cos \alpha = \frac{2}{3}$, calcule tg (90° – α).

Resolução

$$\text{tg } (90° - \alpha) = \frac{\text{sen } (90° - \alpha)}{\cos (90° - \alpha)} = \frac{\cos \alpha}{\text{sen } \alpha}$$

Como $\cos \alpha = \frac{2}{3}$, deduzimos que existe um triângulo retângulo com um ângulo agudo de medida α tal que o cateto adjacente a esse ângulo mede 2 unidades e a hipotenusa mede 3 unidades.



ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

Assim, a medida *x* do cateto oposto a α pode ser obtida pelo teorema de Pitágoras:

$$x^2 + 2^2 = 3^2 \Rightarrow x = \sqrt{5}$$

Com isso, deduzimos que: $\text{sen } \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$

Concluímos, então, que:

$$\text{tg } (90° - \alpha) = \frac{\cos \alpha}{\text{sen } \alpha} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{\sqrt{5}}{3}} \Rightarrow$$

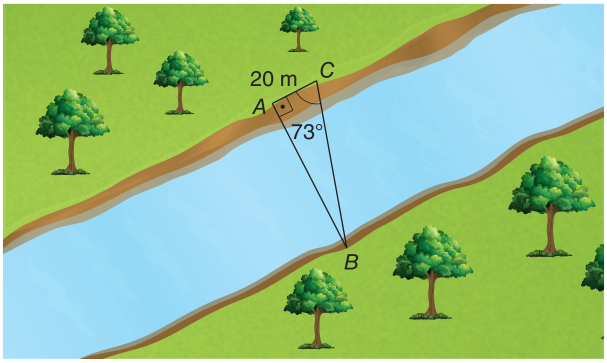
$$\Rightarrow \text{tg } (90° - \alpha) = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Faça os exercícios no caderno.

8. Um engenheiro deve medir a largura de um rio em um trecho de margens paralelas. Para isso, fixa um ponto A na margem em que está e um ponto B na margem oposta, tal que a reta $\overleftrightarrow{AB}$ é perpendicular às margens do rio. Em seguida, a partir de A, ele se desloca 20 m perpendicularmente a $\overleftrightarrow{AB}$ até um ponto C e mede o ângulo $A\hat{C}B$, obtendo 73°, conforme sugere o esquema. Calcule a medida da a largura do rio, dados: $\text{sen } 73° = 0{,}96$ e $\cos 73° = 0{,}30$ **8.** 64 m

ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA



(Modelo didático sem escala e com cores fantasia.)

9. De acordo com o quadro, calcule o valor da da seguinte expressão:

$E = \cos 69° + \text{tg } 37° - 2 \text{ sen } 53° + 3 \text{ sen } 25°$

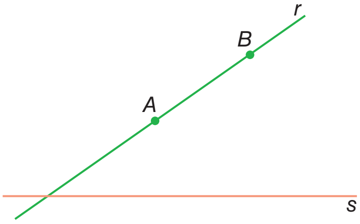
9. $E = 0{,}77$

Seno e cosseno de alguns ângulos

Medida do ângulo	Seno	Cosseno
21°	0,36	0,93
37°	0,60	0,80
65°	0,91	0,42

10. Na figura a seguir, as retas r e s formam entre si um ângulo de 37°, e o segmento $\overline{AB}$, contido em r, mede 18 cm.

FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA



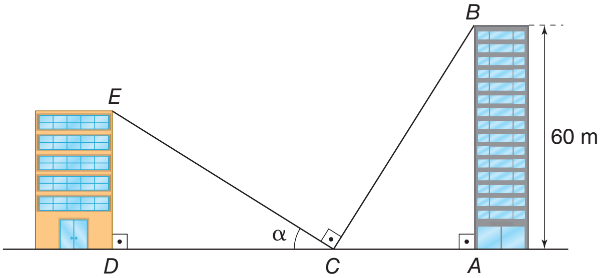
Calcule a medida da projeção ortogonal do segmento $\overline{AB}$ sobre a reta s. (Dado: $\text{sen } 53° = 0{,}8$)

10. 14,4 cm

11. Dois edifícios verticais, com bases sobre um terreno plano e horizontal, estão localizados na mesma margem de uma rua. No terreno vazio que há entre eles, uma construtora planeja erguer um novo edifício. Para aproveitar ao máximo a iluminação solar, os arquitetos do projeto estabeleceram no terreno o ponto ideal para a construção.

No esquema a seguir, $\overline{AB}$ e $\overline{DE}$ representam os edifícios já existentes e C representa o ponto ideal determinado pelos arquitetos, que será o centro da base do futuro edifício.

ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

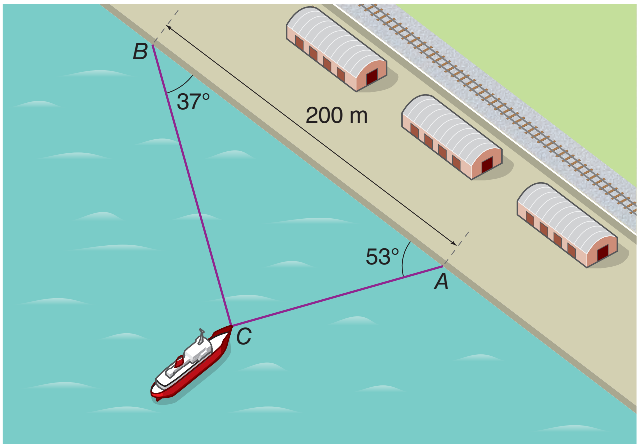


(Modelo didático sem escala e com cores fantasia.)

Observando que $\overline{CB}$ é perpendicular a $\overline{CE}$, que o ângulo de visada $D\hat{C}E$ tem medida α, e dado que $\text{sen } \alpha = \frac{5}{13}$, calcule a distância entre os pontos A e C. **11.** 25 m

12. A partir de dois pontos, A e B, da margem reta de um cais, vê-se a proa C de um navio ancorado tal que os ângulos $C\hat{A}B$ e $C\hat{B}A$ medem, respectivamente, 53° e 37°, conforme mostra a figura. **12.** 96 m

FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA



(Modelo didático sem escala e com cores fantasia.)

Reúna-se com um colega e calculem a distância entre o navio e o cais.

(Dados: $AB = 200$ m, $\text{sen } 53° = 0{,}8$ e $\cos 53° = 0{,}6$)

Para retomar os conteúdos estudados, resolva o exercício complementar 4.

O boxe **Mentes brilhantes** explora o princípio da fibra óptica e permite um trabalho com a área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias ao apresentar suas aplicações em diversos contextos, que podem ser explorados com o professor dessa área. Além disso, essa proposta explora o **ODS 9**.

Mentes brilhantes

ODS 9

Aplicações da Trigonometria

Para citar todos os campos do conhecimento nos quais a Trigonometria é aplicada, certamente ocuparíamos mais de uma página deste livro. Em vez disso, afirmamos que sua aplicação se estende a todas as áreas técnico-científicas que relacionam medidas lineares e/ou angulares. Por exemplo, no estudo da refração da luz, uma relação trigonométrica, conhecida como Lei de Snell-Descartes, descreve o desvio angular na trajetória de um raio de luz que passa por dois meios com diferentes índices de refração.

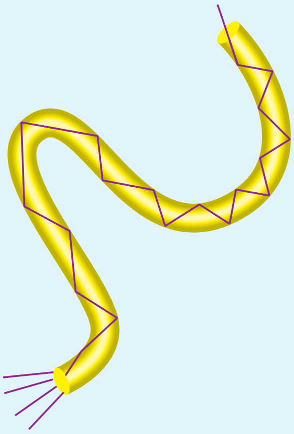

TINAFIELDS/ISTOCK/GETTY IMAGES

Ao passar da água para o ar, a luz sofre um desvio de direção, causando a impressão de que o lápis parcialmente imerso está quebrado.

Um exemplo de aplicação muito utilizada no dia a dia é a fibra óptica. Olhando para um objeto através de um tubo flexível e opaco, só será possível vê-lo se o tubo estiver com o formato reto e suas extremidades estiverem alinhadas com o objeto. Se o tubo estiver curvado, o objeto não será visto, pois em meios transparentes e homogêneos a luz se propaga em linha reta. Porém, é possível desviar a trajetória da luz, colocando um espelho na curva interna do tubo de modo que a luz seja refletida para o olho do observador.

Raciocinando desse modo, podemos fazer várias curvas no tubo e, por meio de uma composição de espelhos, tornar possível a visualização do objeto. Esse é o princípio da fibra óptica, percorrida pela luz através de reflexões sucessivas nas paredes da fibra, mesmo que ela apresente inúmeras curvas.

A transmissão da luz dentro da fibra é possível graças a uma diferença entre os índices de refração do revestimento e do núcleo: o núcleo apresenta sempre um índice de refração mais elevado que o do revestimento. Essa característica, aliada ao ângulo de incidência da luz, possibilita o fenômeno da reflexão total, que ocorre sempre que a medida θ do ângulo de incidência seja tal que: $\text{sen}\,\theta > \frac{n_{\text{menor}}}{n_{\text{maior}}}$ em que o numerador e o denominador da fração representam, respectivamente, o menor e o maior índice de refração dos dois meios pelos quais a luz pode se propagar.



Propagação de luz em uma fibra óptica.

ILUSTRAÇÕES: BRUNO MOTTA/ARQUIVO DA EDITORA

O termo fibra óptica surgiu em 1951, quando alguns pesquisadores criaram algumas fibras de vidro para guiar a luz. Porém, apenas em 1952 o físico indiano Narinder Singh Kapany cunhou a expressão *fibra óptica* e patenteou a invenção. Inicialmente, ele achava que as aplicações da fibra óptica ficariam restritas à Medicina, no aperfeiçoamento do endoscópio (instrumento utilizado para observar o interior do corpo humano). Porém, sua aplicação também é útil nas redes de comunicação telefônicas, televisivas, computadorizadas etc.

Um exemplo do uso de fibra óptica são os cabos submarinos de internet, responsáveis por mais de 90% das transmissões de dados entre países e continentes. Em 2024, existiam cerca de 485 cabos submarinos, com uma extensão total de quase 1,5 milhão de quilômetros. Esses cabos atravessam os oceanos Atlântico e Pacífico, passando por rotas estratégicas, como o canal de Suez no Egito, além de áreas remotas nos oceanos. A conexão por meio de fibra óptica garante uma constância de transmissão de dados em uma velocidade que alcança em torno de 10 *gigabits* por segundo.

OBJETO DIGITAL
Mapa clicável: Cabos submarinos de informática

Para trabalhar o tópico **Ângulo de 45°**, desenhe na lousa um quadrado de lado *a*, indicando por *d* a medida de uma diagonal e por α a medida de um ângulo agudo que a diagonal forma com um lado. Peça aos estudantes que calculem a medida α, em grau; a medida *d*, em função de *a*; sen 45°; cos 45°; e tg 45°. As respostas são, respectivamente: 45°; $a\sqrt{2}$; sen 45°= $\frac{\sqrt{2}}{2}$, cos 45°= $\frac{\sqrt{2}}{2}$ e tg 45°= 1.

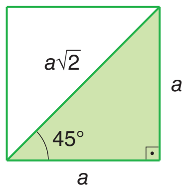
Ângulos notáveis

Para estudos posteriores de Trigonometria, convém conhecermos o seno, o cosseno e a tangente de alguns ângulos. Pela facilidade das demonstrações, escolhemos os ângulos de medidas 30°, 45° e 60°, que chamaremos de **ângulos notáveis**.

Ângulo de 45°

Estudamos anteriormente que a medida de cada diagonal de um quadrado cujo lado mede *a* é $a\sqrt{2}$ e que cada ângulo interno do quadrado é dividido por uma diagonal em dois ângulos de 45°.

Assim, temos:



$$\text{sen } 45° = \frac{\cancel{a}}{\cancel{a}\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

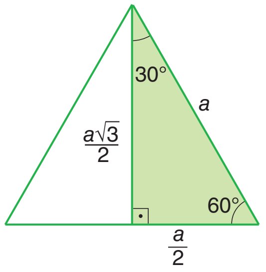
$$\cos 45° = \frac{\cancel{a}}{\cancel{a}\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{tg } 45° = \frac{\cancel{a}}{\cancel{a}} = 1$$

Ângulos de 30° e de 60°

Conforme também já estudamos, a medida de cada altura de um triângulo equilátero cujo lado mede *a* é $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Sabemos ainda que cada altura desse tipo de triângulo também é bissetriz interna e mediana.

Como cada ângulo interno do triângulo equilátero mede 60°, temos:



FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

$$\text{sen } 30° = \frac{\frac{\cancel{a}}{2}}{\cancel{a}} = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30° = \frac{\frac{\cancel{a}\sqrt{3}}{2}}{\cancel{a}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{tg } 30° = \frac{\frac{\cancel{a}}{\cancel{2}}}{\frac{\cancel{a}\sqrt{3}}{\cancel{2}}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

As aplicações práticas da Trigonometria no triângulo retângulo não se restringem, apenas, ao cálculo de distâncias, mas se estendem, também, à determinação de direções. Acompanhe um exemplo assistindo ao vídeo **Um caminho para o curral**. Disponível em: https://m3.ime.unicamp.br/recursos/1061. Acesso em: 10 jul. 2024.

Temos, ainda, que 60° é o complemento de 30°. Logo:

$$\text{sen } 60° = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60° = \text{sen } 30° = \frac{1}{2}$$

$$\text{tg } 60° = \frac{\text{sen } 60°}{\cos 60°} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}}{\frac{1}{\cancel{2}}} = \sqrt{3}$$

Reflexão: Não. O seno de um ângulo não é diretamente proporcional à medida do ângulo. Podemos constatar esse fato pelos valores: *sen* 30°= $\frac{1}{2}$ e *sen* 60°= $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Observe que 60° é o dobro de 30° e que $\frac{\sqrt{3}}{2}$ não é o dobro de $\frac{1}{2}$. Assim: $\frac{30°}{60°} \neq \frac{sen\ 30°}{sen\ 60°}$. O mesmo ocorre para o cosseno e para a tangente.

Reflexão

O seno de um ângulo é diretamente proporcional à medida do ângulo?

Podemos, então, montar o quadro a seguir, com os valores das razões trigonométricas dos ângulos notáveis.

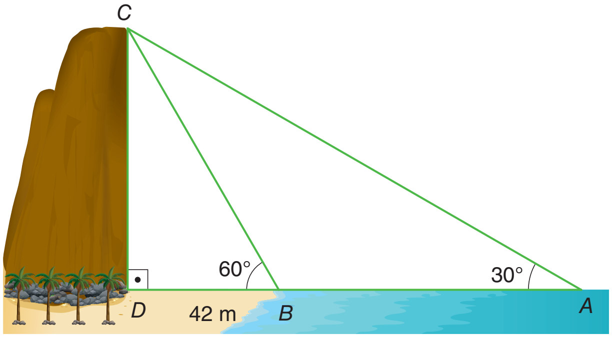
Quadro trigonométrico dos ângulos notáveis

	30°	45°	60°
sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Com a participação dos estudantes, explore a resolução do **exercício resolvido 7** na lousa. Incentive-os a resolver o exercício de outras maneiras e a compartilhar as estratégias de resolução com os colegas.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

7. Um barco, navegando em linha reta, passa por um ponto *A* da superfície do mar dirigindo-se a um ponto *B*, próximo à praia, onde deve atracar. Do ponto *A* vê-se sob um ângulo de 30° com a horizontal $\overleftrightarrow{AB}$ o topo *C* de um morro na praia, e do ponto *B* vê-se o topo *C* sob um ângulo de 60° com $\overleftrightarrow{AB}$. Considerando que os pontos *A* e *B* estão alinhados com um ponto *D* da reta vertical que passa por *C*, que $BD = 42$ m e que, para pequenas regiões, a superfície do mar pode ser considerada plana, calcule a medida *AB*.



(Modelo didático sem escala e com cores fantasia.)

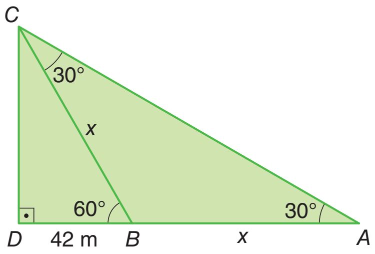
Resolução

O ângulo $C\hat{B}D$ é externo do triângulo *ABC*; logo:

$$m(C\hat{B}D) = m(B\hat{A}C) + m(B\hat{C}A) \Rightarrow 60° = 30° + m(B\hat{C}A)$$

$$\therefore m(B\hat{C}A) = 30°$$

Como $B\hat{C}A$ e $B\hat{A}C$ têm a mesma medida, deduzimos que o triângulo *ABC* é isósceles de base $\overline{AC}$. Assim, indicando por *x* a distância, em metro, do ponto *A* ao ponto *B*, obtemos o esquema a seguir.



Do triângulo retângulo *BCD*, deduzimos que:

$$\cos 60° = \frac{42}{x} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{42}{x}$$

$$\therefore x = 84$$

Concluímos, assim, que $AB = 84$ m.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Faça os exercícios no caderno.

13. Calcule o valor da expressão:

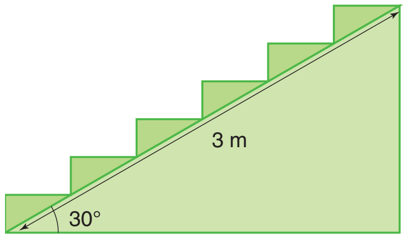
$$E = \frac{\text{sen}^2\ 45° + \cos^4\ 60°}{\text{tg}^4\ 60°}$$

(*Observação*: Expressões do tipo $\text{sen}^n\ \alpha$, $\cos^n\ \alpha$ e $\text{tg}^n\ \alpha$ devem ser interpretadas como $(\text{sen}\ \alpha)^n$, $(\cos\ \alpha)^n$ e $(\text{tg}\ \alpha)^n$, respectivamente.) **13.** $\frac{1}{16}$

14. Sabendo que a base de um triângulo isósceles mede 8 cm e que o ângulo do vértice mede 120°, calcule a medida da altura relativa à base deste triângulo.

14. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ cm

15. (UFPI) Dois níveis de uma praça estão ligados por uma rampa de 3 m de comprimento e 30° de inclinação, conforme a figura. Devem-se construir sobre a rampa 6 degraus de mesma altura. A altura de cada degrau será: **15.** alternativa **c**



- **a.** 0,20 m
- **b.** 0,23 m
- **c.** 0,25 m
- **d.** 0,27 m
- **e.** 0,28 m

16. (Unit-AL) As rampas de acesso são usadas pelos portadores de dificuldade de locomoção em que a inclinação (*i*), o comprimento da rampa na sua projeção horizontal (*c*) e a altura do desnível (*h*) atendem à Norma de Acessibilidade NBR 9050 que define como rampa qualquer superfície com inclinação de, no mínimo, 5%. Essas grandezas se relacionam de acordo com a seguinte relação: $i = \frac{h \cdot 100}{c}$, com i dado em porcentagem. A inclinação nada mais é do que a tangente do ângulo que a superfície faz com o plano horizontal.

Desse modo, a inclinação de uma rampa que possui 6 metros de projeção horizontal e precisa vencer um desnível de 0,42 m corresponde a: **16.** alternativa **d**

- **a.** 13%
- **b.** 11%
- **c.** 9%
- **d.** 7%
- **e.** 5%

Com o **exercício proposto 16**, retome a conversa acerca de acessibilidade e inclusão. Se os estudantes fizeram pesquisas nesse contexto, possibilite que compartilhem os resultados por meio de uma exposição oral ou da produção de materiais como cartazes ou postagens para as redes sociais. Enfatize a importância de respeitar as opiniões dos colegas e a necessidade de argumentar com base em fatos e informações confiáveis.

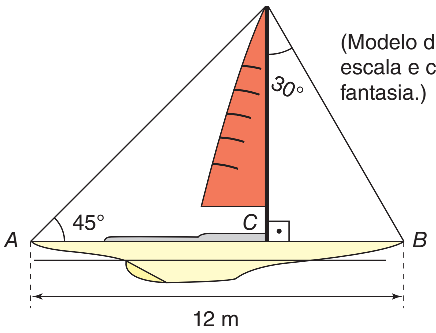
17. Os pontos *A* e *B*, extremos da popa e proa, respectivamente, de um veleiro de 12 m de comprimento, são presos ao topo *D* do mastro vertical *CD* por cabos esticados, conforme mostra a figura. Dado que os ângulos $D\hat{A}C$ e $B\hat{D}C$ medem 45° e 30°, respectivamente, calcule:

a. a altura do mastro;

b. a medida do cabo *AD*.

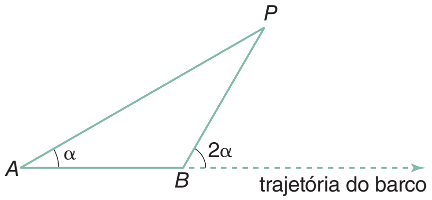
17.a. $6(3 - \sqrt{3})$ m ou, aproximadamente, 7,6 m

17. b. $6(3\sqrt{2} - \sqrt{6})$ m ou, aproximadamente, 10,76 m



(Modelo didático sem escala e com cores fantasia.)

18. (Enem) Para determinar a distância de um barco até a praia, um navegante utilizou o seguinte procedimento: a partir de um ponto *A*, mediu o ângulo visual α fazendo mira em um ponto fixo *P* da praia. Mantendo o barco no mesmo sentido, ele seguiu até um ponto *B*, de modo que fosse possível ver o mesmo ponto *P* da praia, no entanto sob um ângulo visual 2α. A figura ilustra essa situação:



Suponha que o navegante tenha medido o ângulo α = 30° e, ao chegar ao ponto *B*, verificou que o barco havia percorrido a distância *AB* = 2.000 m. Com base nesses dados e mantendo a mesma trajetória, a menor distância do barco até o ponto fixo *P* será:

a. 1.000 m.

b. $1.000\sqrt{3}$ m.

c. $2.000 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}$ m.

d. 2.000 m.

e. $2.000\sqrt{3}$ m.

18. alternativa **b**

19. Um balão meteorológico sobe verticalmente a partir de um ponto *A* do solo plano e horizontal. A 20 m de altura, o balão é visto de um ponto *B* do chão sob um ângulo de 30° com o solo e, pouco depois, é visto do mesmo ponto *B* sob um ângulo de 60° com o solo. Calcule a altura em que estava o balão quando foi visto sob o ângulo de 60°. **19.** 60 m

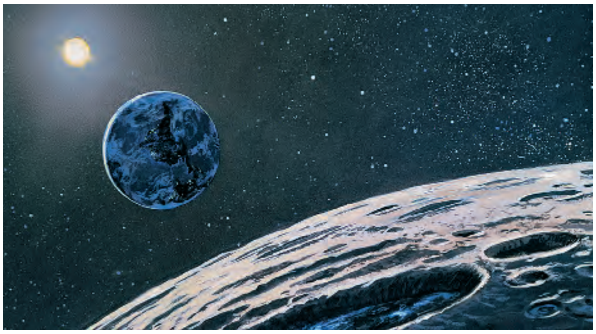
20. Elabore um problema sobre a trigonometria no triângulo retângulo que relacione ângulos notáveis e envolva uma situação do cotidiano. Em seguida, troque o problema elaborado com um colega para que um resolva o problema elaborado pelo outro. Por fim, analisem e discutam as resoluções. **20.** Resposta pessoal.

Para retomar os conteúdos estudados, resolva os exercícios complementares 5 a 7.

MATEMÁTICA SEM FRONTEIRAS

Distância da Terra à Lua

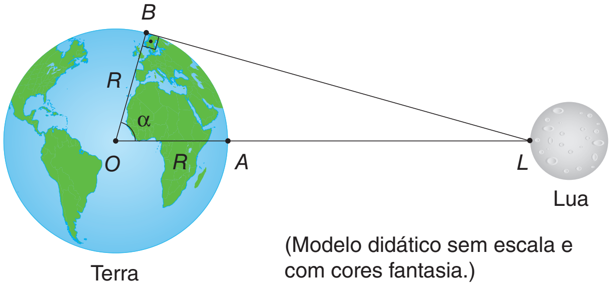
Utilizando as relações trigonométricas, os astrônomos calculam as dimensões de corpos celestes e a distância entre eles. Para exemplificar, mostraremos uma maneira de calcular a distância entre o planeta Terra e a Lua e a medida do raio desse satélite.



CHRIS BUTLLER/SCIENCE PHOTO LIBRARY/FOTOARENA

Representação artística da Terra e do Sol vistos da Lua.

Suponhamos que em um observatório astronômico *A* a Lua seja vista no zênite, isto é, na vertical; já no observatório *B*, ela seja vista na linha do horizonte, conforme representação esquemática a seguir.

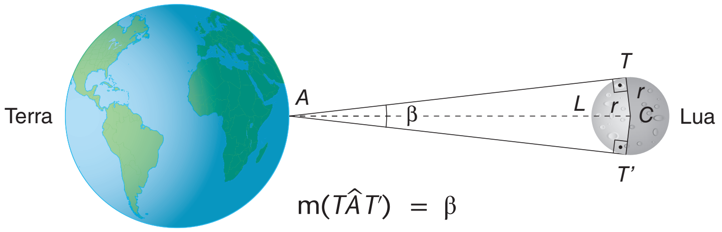


(Modelo didático sem escala e com cores fantasia.)

Conhecendo a medida *R* do raio da Terra e a medida α do ângulo central $A\hat{O}B$, que é igual à medida do arco $\overset{\frown}{AB}$, podemos obter a distância entre a Terra e a Lua (*AL*) da maneira descrita a seguir.

$$\cos\alpha = \frac{R}{AL + R} \Rightarrow AL = \frac{R}{\cos\alpha} - R$$

Para o cálculo da medida *r* do raio da Lua, inicialmente medimos o ângulo β formado pelas duas retas tangentes $\overleftrightarrow{AT}$ e $\overleftrightarrow{AT'}$ a um círculo máximo do satélite, conforme a figura a seguir, em que *C* representa o centro da Lua.



(Modelo didático sem escala e com cores fantasia.)

FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

Sendo *AL* = *d*, do triângulo retângulo *ACT*, obtemos:

$$\text{sen}\,\frac{\beta}{2} = \frac{r}{d+r} \Rightarrow r = \frac{d \cdot \text{sen}\,\frac{\beta}{2}}{1 - \text{sen}\,\frac{\beta}{2}}$$

Você sabe o que é um planetário?

Um planetário é um local onde ocorrem projeções sobre astronomia, e que simula o céu, sobretudo do noturno, de acordo com a data e o local de observação. Essas projeções são feitas em uma cúpula semiesférica. Há muitos planetários pelo Brasil. Se possível, faça uma visita a um deles, presencial ou virtual. A seguir, indicamos um *site* em que é possível obter informações e vídeos sobre os planetários.

BASSINI, A. *et al.* Planetário. **Parque CienTec**, [2021]. Disponível em: https://www.parquecientec.usp.br/passeio-virtual/astronomia/planetario. Acesso em: 10 jul. 2024.

Atividades

Faça as atividades no caderno.

1. O Sol é visto de um ponto do planeta Terra sob um ângulo de 0,53° aproximadamente. Sabendo que a distância da Terra ao Sol é de cerca de 150.000.000 km, calculem uma medida aproximada do raio do Sol. **1.** ≈ 693.000 km

2. A resposta depende do planeta escolhido pelos estudantes.

2. Pesquisem a distância do planeta Terra a algum planeta do Sistema Solar. Em seguida, pesquisem a medida do raio desse planeta. Considerando que esse planeta é visto de um ponto do planeta Terra sob um ângulo de medida α, utilizando as medidas pesquisadas, calculem o valor aproximado de α.

No boxe **Trabalho e juventudes**, incentive os estudantes a comentar a profissão de astrônomo e sua relação com os conhecimentos matemáticos. Solicite uma pesquisa a fim de que eles conheçam mais o mercado de trabalho para esses profissionais.

TRABALHO E JUVENTUDES

Astrônomo

FRANCISCO JAVIER RAMOS ROSELLON/
ALAMY/FOTOAREANA

O telescópio serve para ampliar a imagem de objetos astronômicos presentes no espaço.

O astrônomo é um profissional que estuda o universo e todos os elementos que o constituem (planetas, estrelas, galáxias etc.). Para exercer essa função, ele utiliza uma variedade de técnicas e instrumentos para obter informações e coletar dados sobre os corpos celestes.

As habilidades matemáticas, como o uso das relações trigonométricas, também estão presentes no cotidiano do astrônomo. É por meio do uso dessas relações que o profissional determina as dimensões de corpos celestes e a distância entre eles.

"Em 10 anos, telescópios extremamente grandes vão abrir o nosso acesso a distâncias extremas e a detalhes estruturais de buracos negros e sistemas planetários" [...] "Para que o Brasil participe do jogo, precisamos estimular nossa indústria em tecnologias de ponta e, é claro, temos que ampliar o número de pesquisadores na área".

KOPSCH, D. Quer ser astrônomo? Seja bom em matemática, física e… videogame. **Guia do estudante**, 1º dez. 2017. Disponível em: https://guiadoestudante.abril.com.br/orientacao-profissional/quer-ser-astronomo-seja-bom-em-matematica-fisica-e-videogame. Acesso em: 10 jul. 2024.

Quer saber mais sobre essa profissão? Faça uma pesquisa na internet e compartilhe com os colegas um resumo das informações que você obteve.

Trabalho e juventudes: Pesquisa pessoal.

ANÁLISE DA RESOLUÇÃO

Reúna-se com um colega. Apontem o erro cometido na resolução a seguir e, depois, refaçam a resolução no caderno, corrigindo-a.

Exercício

Calcule a medida *x*, em metro, do segmento $\overline{DE}$ da figura a seguir.

Análise da resolução: Na resolução da atividade, foi considerado que o quadrilátero *ABCE* fosse um quadrado, o que não é verdade.

Resolução correta:

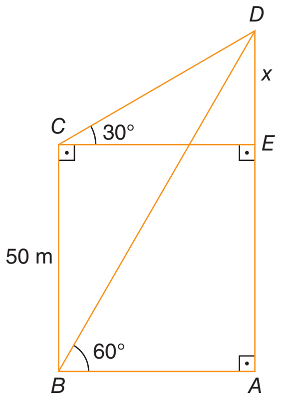
Os ângulos $C\hat{D}B$ e $C\hat{B}D$ medem 30° cada um; portanto, o triângulo *BCD* é isósceles, com $CB = CD = 50$ m.

Assim, no triângulo *CDE*, temos:

$$\text{sen } 30° = \frac{DE}{CD} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{x}{50}$$

$\therefore x = 25$

Logo, o segmento $\overline{DE}$ mede 25 m.



Utilize essa atividade para fazer uma avaliação diagnóstica e identificar o que os estudantes já conhecem sobre o assunto; enfatize o diálogo amigável, valorize o princípio do respeito à diversidade e à inclusão, procurando trabalhar com os diferentes níveis de conhecimentos e comportamentos.

Resolução

No triângulo CDE temos:

$$tg\ 30° = \frac{DE}{CE} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{x}{50}$$

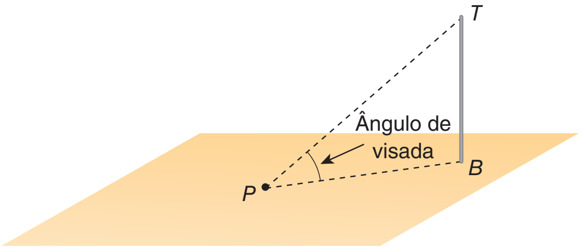
$$\therefore x = \frac{50\sqrt{3}}{3}$$

Logo, a medida do segmento $\overline{DE}$ é $\frac{50\sqrt{3}}{3}$ m.

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

Faça os exercícios no caderno.

1. Considere um poste vertical $\overline{BT}$ e um ponto *P*, com *B* e *P* localizados em um terreno plano e horizontal e $P \neq B$. O ângulo de vértice *P*, cujos lados passam pela base *B* e pelo topo *T* do poste, é chamado de **ângulo de visada** do poste a partir do ponto *P*. **1.** alternativa **d**



Ao movimentar o ponto *P* sobre o terreno, podemos afirmar que:

a. quando *P* se aproxima da base do poste, o ângulo de visada diminui.

b. quando *P* se afasta da base do poste, o ângulo de visada aumenta.

c. a tangente do ângulo de visada é diretamente proporcional à distância entre o ponto *P* e o poste.

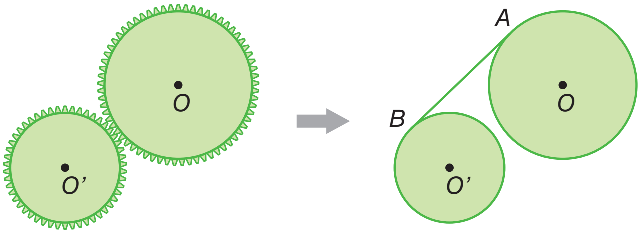
d. a tangente do ângulo de visada é inversamente proporcional à distância entre o ponto *P* e o poste.

e. a medida do ângulo de visada é diretamente proporcional à distância entre o ponto *P* e o poste.

Aproveite os **Exercícios complementares** para compor uma avaliação. Pode-se organizar os estudantes em duplas ou trios e orientá-los a resolver os exercícios individualmente para, depois, compararem as respostas e as resoluções com as dos colegas do grupo. Caso errem algum exercício, incentive-os a identificar e corrigir o erro com o apoio dos colegas.

ILUSTRAÇÕES: ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

2. As figuras a seguir mostram o projeto de uma engrenagem em que os dentes se apoiam sobre dois círculos de centros O e O' e raios medindo 8 cm e 6 cm, respectivamente. A reta $\overleftrightarrow{AB}$, tangente externa comum aos círculos nos pontos A e B, forma um ângulo agudo de medida α com a reta $\overleftrightarrow{OO'}$, tal que $\text{sen}\,\alpha = \frac{1}{8}$.

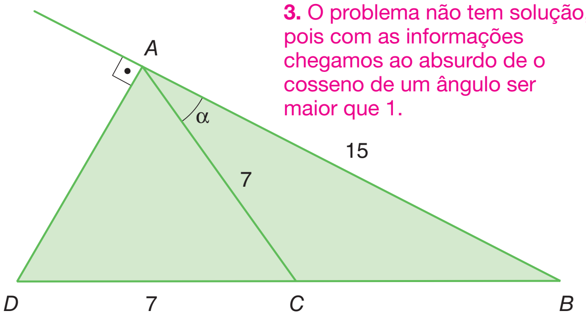


Para calcular a altura máxima de cada dente, o projetista necessita saber a distância entre esses círculos. Qual é essa distância? **2.** 2 cm

Nota: Quando uma reta *r* tangencia duas circunferências posicionando-as em um mesmo semiplano de origem *r*, ela é chamada de tangente externa comum a essas circunferências.

3. O professor de Matemática propôs o seguinte problema aos estudantes:

Na figura, α é a medida do ângulo agudo $B\hat{A}C$, $CA = CD = 7$ cm e $AB = 15$ cm. Calcule o valor de $\cos \alpha$.



3. O problema não tem solução, pois com as informações chegamos ao absurdo de o cosseno de um ângulo ser maior que 1.

Ao tentar resolver, os estudantes verificaram que o problema não tem solução. Tente resolvê-lo e, em seguida, converse com os colegas a respeito do que você verificou.

4. (Fuvest-SP) Dois pontos, A e B, estão situados na margem de um rio e distantes 40 m um do outro. Um ponto C, na outra margem do rio, está situado de tal modo que o ângulo $C\hat{A}B$ mede 75° e o ângulo $A\hat{C}B$ mede 75°. Determine a largura do rio. **4.** alternativa **b**

a. 40 m

b. 20 m

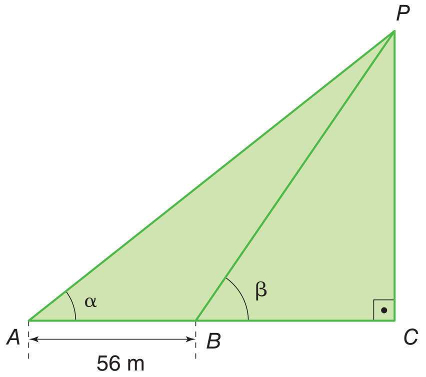
c. $20\sqrt{3}$ m

d. 30 m

e. 25 m

5. Uma torre vertical está localizada em um terreno plano e horizontal. Sobre esse terreno tomam-se dois pontos A e B, distantes 56 m um do outro, alinhados com a base C da torre. Do ponto A vê-se o ponto P mais alto da torre sob um ângulo agudo de medida α com o terreno. Do ponto B vê-se P sob um ângulo agudo de medida β com o terreno. Calcule a medida da altura da torre, dados: $\text{sen}\,\alpha = \frac{3}{5}$ e $\alpha + \beta = 90°$.

5. 96 m



6. Devido à grande distância entre o Sol e a Terra, os raios solares que incidem no planeta Terra podem ser considerados paralelos. Em um momento em que os raios solares formam ângulos de 34° com o plano da circunferência do equador terrestre, um prédio vertical de 60 m de altura projeta uma sombra de $20\sqrt{3}$ m sobre o terreno plano e horizontal que contém sua base. Admitindo que a Terra seja esférica e que o prédio esteja ao norte do equador, podemos concluir que o prédio está localizado em um ponto de latitude:

6. alternativa **e**

a. 4° norte.

b. 48° norte.

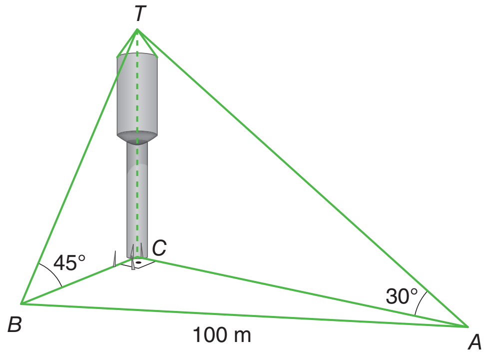
c. 44° norte.

d. 68° norte.

e. 64° norte.

7. (UFMS) A coluna vertical que sustenta uma caixa-d'água tem o centro de sua base num ponto C de um terreno plano e horizontal, conforme representada abaixo. O topo T da caixa-d'água é visto do ponto A sob um ângulo de 30° com o terreno, e do ponto B sob um ângulo de 45°. Sabendo-se que a medida do ângulo $B\hat{C}A$ é 90° e a distância entre os pontos A e B é 100 m, calcule, em metro, a altura do topo T em relação ao terreno.

7. 50 m



ILUSTRAÇÕES: ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

VERIFIQUE O QUE APRENDEU NO CAPÍTULO 2

Além do processo de avaliação promovido pelo professor, é de fundamental importância que você, estudante, realize uma autoavaliação. O objetivo desse instrumento é mensurar seu nível de aprendizagem em relação ao assunto desenvolvido no capítulo. Para ajudá-lo nessa tarefa, apresentamos as seguintes questões.

1. Uma pedra cai verticalmente do alto de um morro. Um observador localizado em um ponto *A* do terreno plano e horizontal, que contém a base do morro, vê a pedra sob um ângulo de 60° com o terreno, quando ela está em um ponto *B*, e sob um ângulo de 30° com o terreno, quando ela está em um ponto *C*, com $BC = 28$ m. Que distância percorreu a pedra desde o ponto *C* até o ponto *D* no qual ela se chocou com o solo? **1.** alternativa **d**

a. 7 m

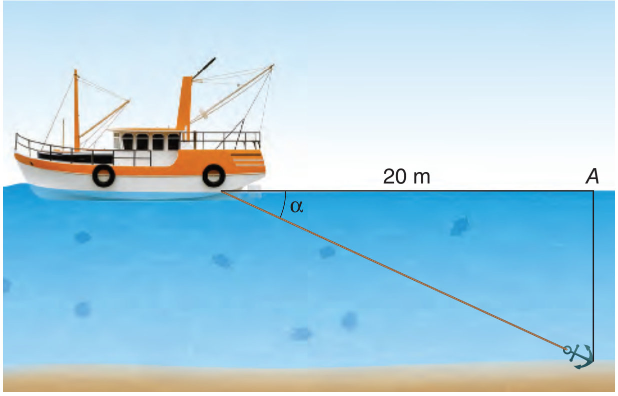
b. 10 m

c. 12 m

d. 14 m

e. 18 m

2. A âncora de um barco pesqueiro, depois de lançada, atingiu o fundo do rio. Como a profundidade do rio nesse ponto é menor que o comprimento da corda que prende a âncora ao barco, este se moveu 20 m em relação ao ponto *A*, de onde foi lançada a âncora, esticando completamente a corda, que formou um ângulo agudo de medida α com a superfície do rio, tal que sen $\alpha = \frac{5}{13}$. Calcule a profundidade aproximada do rio nesse ponto. **2.** alternativa **b**



(Modelo didático sem escala e com cores fantasia.)

a. 5,2 m

b. 8,3 m

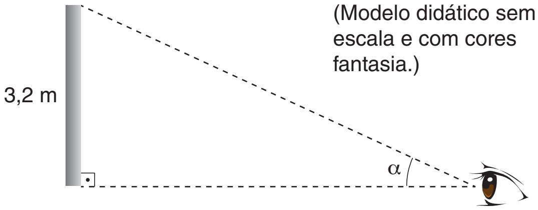
c. 9,4 m

d. 10,7 m

e. 13,5 m

Utilize o texto a seguir para responder às **questões 3** e **4**.

Em um cinema, os olhos de um espectador estão no mesmo plano horizontal que contém a base da tela vertical com 3,2 m de altura, conforme mostra a figura.



(Modelo didático sem escala e com cores fantasia.)

O espectador vê toda a extensão vertical da tela sob um ângulo agudo de medida α tal que sen $(90^\circ - \alpha) = \frac{15}{17}$.

3. Determine os valores de sen α, cos α e tg α. **3.** alternativa **c**

a. sen $\alpha = \frac{8}{15}$; cos $\alpha = \frac{15}{17}$; tg $\alpha = \frac{8}{17}$

b. sen $\alpha = \frac{15}{17}$; cos $\alpha = \frac{8}{17}$; tg $\alpha = \frac{8}{15}$

c. sen $\alpha = \frac{8}{17}$; cos $\alpha = \frac{15}{17}$; tg $\alpha = \frac{8}{15}$

d. sen $\alpha = \frac{8}{15}$; cos $\alpha = 1$; tg $\alpha = \frac{8}{15}$

e. sen $\alpha = \frac{2}{17}$; cos $\alpha = 1$; tg $\alpha = \frac{2}{17}$

4. A distância entre os olhos do espectador e a base da tela é: **4.** alternativa **c**

a. 2 m.

b. 4 m.

c. 6 m.

d. 8 m.

e. 10 m.

5. (Uece) Uma plantação de alface ocupa uma área de forma retangular. Essa área é tal que a distância entre seus cantos opostos é 150 m, e a medida do menor ângulo entre suas diagonais é 60 graus. Então, a medida, em m^2, da área considerada é: **5.** alternativa **d**

a. $5.625\sqrt{2}$.

b. $5.620\sqrt{3}$.

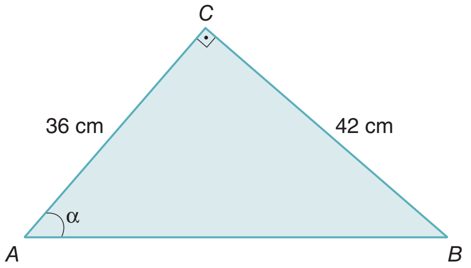
c. $5.615\sqrt{2}$.

d. $5.625\sqrt{3}$.

ILUSTRAÇÕES: ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

6. A figura seguinte mostra um triângulo retângulo *ABC*.

6. alternativa **a**



ILUSTRAÇÕES: ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

Após os estudantes resolverem os exercícios propostos na seção **Verifique o que aprendeu no capítulo 2**, oriente-os a corrigir os exercícios com base nas respostas apresentadas no final do livro. Caso errem algum, eles podem consultar os colegas a fim de obter explicações e tirar dúvidas. Além disso, a **Ferramenta de estudo** proposta pode servir de autoavaliação.

O valor de sen α − cos α é:

a. $\frac{1}{\sqrt{85}}$.

b. $\frac{6}{\sqrt{85}}$.

c. $\frac{1}{510}$.

d. $\frac{\sqrt{6}}{3.060}$.

Ferramenta de estudo

Ao término da resolução dos exercícios, copie no caderno a ficha a seguir, que lhe fornecerá uma visão geral sobre o seu desempenho neste capítulo. Assinale com um X a cada célula em que a resposta for "sim".

Ficha de Autoavaliação

Sobre o exercício...	1	2	3	4	5	6
Li, compreendi o texto, identifiquei os dados principais do problema e consegui resolvê-lo.	▨	▨	▨	▨	▨	▨
Li, compreendi o texto, identifiquei os dados principais do problema, mas não consegui resolvê-lo sozinho. Pedi ajuda.	▨	▨	▨	▨	▨	▨
Li, compreendi o texto, identifiquei os dados principais do problema, mas não consegui resolvê-lo sozinho. Não pedi ajuda. Até agora não sei resolvê-lo.	▨	▨	▨	▨	▨	▨
Tive dificuldade para compreender o texto do problema e não soube relacionar os dados. Pedi ajuda.	▨	▨	▨	▨	▨	▨
Tive dificuldade para compreender o texto do problema e não soube relacionar os dados. Não pedi ajuda. Até agora não sei resolvê-lo.	▨	▨	▨	▨	▨	▨
Não consegui resolvê-lo.	▨	▨	▨	▨	▨	▨

MODELO

A ficha de autoavaliação é apresentada neste momento, mas você pode copiá-la e preenchê-la sempre que considerar necessário verificar sua aprendizagem, adequando o número de colunas ao número de exercícios.

Se teve dificuldades ou não resolveu algum exercício, retome os conteúdos abordados no capítulo. Após algumas tentativas, anote as dúvidas e converse com um colega que possa ajudá-lo. Se mesmo assim a dúvida persistir, pergunte ao professor na aula seguinte. Gerencie bem seu tempo de estudo em casa e estabeleça metas diárias alcançáveis, planejando seus estudos, passo a passo.

CAPÍTULO 3

Circunferência trigonométrica: seno e cosseno

OBJETO DIGITAL **Vídeo: Satélites orbitando o planeta Terra**

ODS 9

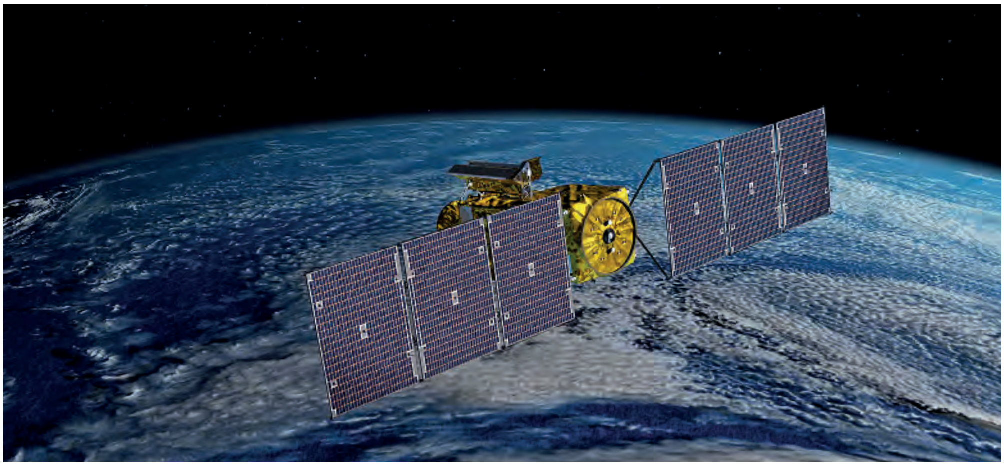

JPL-CALTECH/NASA

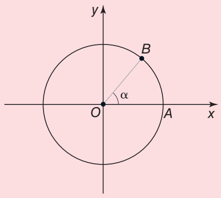
Ilustração do Surface Water and Ocean Topography (SWOT), satélite artificial que tem como objetivo prevenir inundações.

Em 2020, astrônomos documentaram uma explosão de luz altamente energética em uma das galáxias mais distantes já observadas. Menos de um ano depois, no entanto, as alegações do artigo ficaram em suspenso. [...] Krzysztof Kamiński, astrônomo do Instituto Observatório Astronômico da Polônia que identificou a posição [da explosão], disse que ficou "triste" por descobrir que "o sinal de raio gama era um satélite artificial".

Linhua Jiang, astrônomo da Universidade de Pequim que liderou a descoberta, disse que sua equipe sustenta o trabalho original. Ele acrescentou que a probabilidade de um satélite passar diretamente à frente da distante galáxia no momento exato era ínfima, na melhor das hipóteses. Na medida em que as órbitas da Terra se preenchem com satélites em um ritmo surpreendente, esta provavelmente não será a última vez que os cientistas debaterão se um satélite está sendo confundido com uma descoberta astronômica.

CHIOU, L. Com 9 mil satélites na órbita da Terra, astrônomos começam a ter dificuldade para estudar o céu noturno; entenda. **O Globo**, 13 jan. 2024. Disponível em: https://oglobo.globo.com/mundo/noticia/2024/01/13/com-9-mil-satelites-na-orbita-da-terra-astronomos-comecam-a-ter-dificuldade-para-estudar-o-ceu-noturno-entenda.ghtml. Acesso em: 12 jul. 2024.

Ao plano da órbita circular de um satélite ao redor da Terra pode ser associado um sistema cartesiano cuja unidade adotada nos eixos é o quilômetro, e a origem *O* é o centro da Terra e também da órbita, conforme mostra o esquema a seguir, em que *A* e *B* são pontos dessa órbita.



FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

Além da teoria

Além da teoria: Respostas pessoais.

1. O trecho da notícia apresentada nesta abertura destaca dois astrônomos de diferentes instituições de pesquisa. Em sua opinião, qual a importância da colaboração entre os institutos de pesquisa pelo mundo?
2. Pesquise aspectos positivos e negativos do lançamento de milhares de satélites orbitando o planeta. Depois, converse com os colegas a esse respeito.

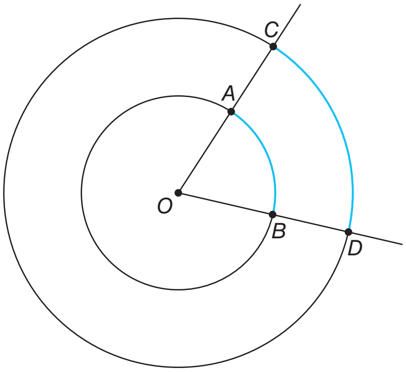
Como a expressão “medida de um arco” pode ter uma dupla interpretação, pois pode indicar a medida do ângulo central correspondente ou a do comprimento do arco, sugerimos que o professor as diferencie com as nomenclaturas: “medida angular de um arco” e “medida linear de um arco”.

1. O radiano, unidade de medida de arco e de ângulo

Na figura, o ângulo $C\hat{O}D$ determina os arcos $\overset{\frown}{AB}$ e $\overset{\frown}{CD}$ destacados em azul, sobre as duas circunferências de mesmo centro O.

Como estudado em geometria plana, embora os arcos $\overset{\frown}{AB}$ e $\overset{\frown}{CD}$ tenham comprimentos diferentes, eles têm a mesma medida em grau, que é a própria medida do ângulo central que os determina. Assim sendo, o “grau” não é unidade de medida de comprimento, mas de abertura de ângulo ou de arco.

Além do grau, existem outras unidades de abertura de ângulo ou de arco. Uma delas é o radiano, que definimos a seguir.



Observação

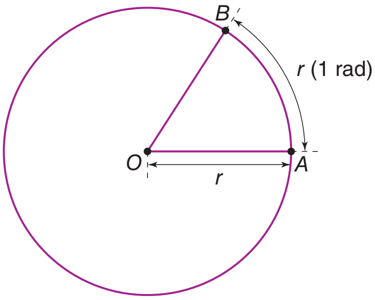
Lembre-se de que a circunferência corresponde a um arco de uma volta completa e, por isso, mede 360°; além disso, 1° equivale a 60′, e 1′ equivale a 60″.

ILUSTRAÇÕES: ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

Um radiano (1 rad) é a medida de um arco cujo comprimento é igual ao do raio da circunferência que o contém.

Observação

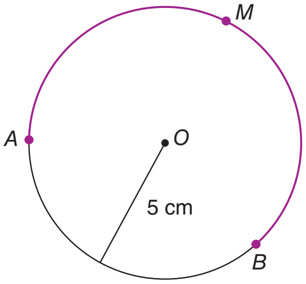
A medida da abertura de um arco de circunferência é a medida do ângulo central correspondente.



Define-se também a medida do ângulo central como sendo a medida, em radiano, do arco de circunferência determinado por ele. Assim, na figura anterior, tem-se que o ângulo $A\hat{O}B$ mede 1 rad.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

1. Determine a medida, em radiano, do arco $\overset{\frown}{AMB}$, de 20 cm, contido na circunferência de raio 5 cm, representados na figura.



FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

Resolução

Pela definição, nessa circunferência, cada arco de 1 rad tem 5 cm de comprimento. Assim, por meio de uma regra de três, determinamos a medida x, em radiano, do arco $\overset{\frown}{AMB}$:

Medida do arco (rad)	Comprimento do arco (cm)
1	5
x	20

Logo: $x = \frac{20}{5}$ rad $= 4$ rad

Observação

Por uma figura de linguagem denominada **metonímia**, admite-se chamar de raio da circunferência tanto o segmento que une o centro a um ponto da circunferência quanto a medida desse segmento.

Observação

Dizer que o arco $\overset{\frown}{AMB}$ mede 4 rad é o mesmo que dizer que o comprimento do arco é o quádruplo do comprimento do raio.

A medida da circunferência em radiano

Sabendo que uma circunferência mede 360°, como podemos determinar sua medida em radiano?

Para responder a essa pergunta, consideremos uma circunferência cujo raio tenha medida r. Como o comprimento dessa circunferência é $2\pi r$, podemos obter sua medida x, em radiano, por meio de uma regra de três:

Medida do arco (rad)	Comprimento do arco
1	r
x	$2\pi r$

Logo: $x = \frac{2\pi r}{r}$ rad $= 2\pi$ rad

Assim, concluímos que:

A medida de uma circunferência é 2π rad.

Conectado

Elabore um fluxograma que represente um algoritmo capaz de determinar a medida de um ângulo em radiano, dada sua medida em grau.

Conectado: Resposta no final deste livro.

Transformações de unidades

Dizemos que uma medida em radiano é equivalente a uma medida em grau se ambas são medidas de um mesmo arco; por exemplo, 2π rad é equivalente a 360°, pois são medidas de um arco de uma volta completa. Consequentemente, temos:

π rad é equivalente a 180°

Essa equivalência nos permite transformar unidades, ou seja, tendo a medida de um arco em grau, podemos obter a medida desse arco em radiano e vice-versa.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

2. Determine a medida, em radiano, equivalente a 150°.

Resolução

Lembrando que π rad é equivalente a 180°, basta resolver a regra de três:

Medida em radiano	Medida em grau
π	180
x	150

$x = \frac{150\pi}{180}$ rad $\Rightarrow x = \frac{5\pi}{6}$ rad

Logo, $\frac{5\pi}{6}$ rad equivalem a 150°.

3. Determine a medida, em grau, equivalente a $\frac{\pi}{3}$ rad.

Resolução

Medida em radiano	Medida em grau
π	180
$\frac{\pi}{3}$	x

$$x = \frac{180° \cdot \frac{\pi}{3}}{\pi} \Rightarrow x = 60°$$

Logo, 60° equivalem a $\frac{\pi}{3}$ rad.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

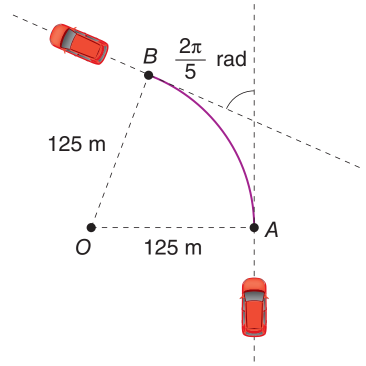
5. $\frac{10\pi}{9}$ rad/s ou, aproximadamente, 3,5 rad/s

Faça os exercícios no caderno.

1. Calcule a medida, em radiano, de um arco de 10 cm contido em uma circunferência com 2,5 cm de raio. **1.** 4 rad

2. O projeto de uma estrada estabelece que uma curva terá o formato de um arco $\overset{\frown}{AB}$ de uma circunferência com 125 m de raio, de modo que, imediatamente antes de *A* e imediatamente depois de *B*, os trechos da estrada serão retos e tangentes a $\overset{\frown}{AB}$ em *A* e *B*, respectivamente.

Do início ao final da curva, a estrada mudará sua direção em $\frac{2\pi}{5}$ rad,conforme mostra o esquema a seguir, em que *O* é o centro da circunferência que contém $\overset{\frown}{AB}$. Calcule o comprimento da curva, em metro. **2.** 50π m



ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

(Modelo didático sem escala e com cores fantasia.)

3. Determine a medida, em radiano, equivalente a:

- **a.** 30° **3. a.** $\frac{\pi}{6}$ rad
- **b.** 120° **3. b.** $\frac{2\pi}{3}$ rad
- **c.** 225° **3. c.** $\frac{5\pi}{4}$ rad
- **d.** 300° **3. d.** $\frac{5\pi}{3}$ rad
- **e.** 240° **3. e.** $\frac{4\pi}{3}$
- **f.** 330° **3. f.** $\frac{11\pi}{6}$

4. Determine a medida, em grau, equivalente a:

- **a.** $\frac{\pi}{4}$ rad **4. a.** 45°
- **b.** $\frac{3\pi}{2}$ rad **4. b.** 270°
- **c.** $\frac{7\pi}{6}$ rad **4. c.** 210°
- **d.** $\frac{2\pi}{5}$ rad **4. d.** 72°
- **e.** $\frac{5\pi}{3}$ rad **4. e.** 300°

5. O disco de vinil é uma mídia desenvolvida no início da década de 1950 para a reprodução musical. Um dos vários tipos de disco de vinil é o LP (*Long Play*), gravado para ser reproduzido a $\frac{100}{3}$ rpm (rotações por minuto). Ao ser reproduzido com essa especificação, qual é a velocidade de rotação de um LP em rad/s?

6. Segundo a astrônoma austro-americana Irene Fischer (1907-2009), Cristovão Colombo usou uma conversão errada de estádio para milha, e acabou chegando a um comprimento da circunferência do equador da Terra (considerada esférica) 30% menor do que o real. Consequentemente, esse erro se reproduziu para o cálculo do comprimento de qualquer linha sobre a superfície terrestre.

DEPARTAMENTO DO EXÉRCITO DOS ESTADOS UNIDOS

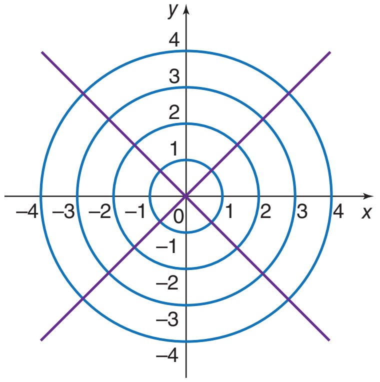
Irene Fischer em foto de 1966.

Elaborado com base em: FISCHER, I. Another Look at Eratosthenes' and Posidonius' Determinations of the Earth's Circumference. **Quarterly Journal of the Royal Astronomical Society**, v. 16, 1975. p. 152.

Suponham que, durante a viagem, Colombo planejasse percorrer um arco $\overset{\frown}{AB}$ de $\frac{\pi}{10}$ rad sobre um paralelo terrestre que, segundo seus cálculos equivocados, deveria ter 3.850 km de raio. Adotando $\pi = 3{,}14$, respondam aos itens a seguir.

- **a.** Que distância, em quilômetro, Colombo imaginava navegar ao percorrer o trecho $\overset{\frown}{AB}$? **6. a.** 1.208,9 km
- **b.** Que distância, em quilômetro, Colombo efetivamente navegaria ao percorrer o trecho $\overset{\frown}{AB}$? **6. b.** 1.727 km

7. Considere que em um sistema cartesiano sejam representadas circunferências com centro em *O*(0, 0) e semirretas com extremidade na origem formando, entre si, ângulos de $\frac{\pi}{4}$ rad, como indicado na figura. Elabore um problema cuja resolução utilize a relação entre grau e radiano envolvendo o deslocamento sobre essas semirretas ou circunferências. Depois, junte-se a um colega a fim de resolver o problema elaborado por ele. **7.** Resposta pessoal.



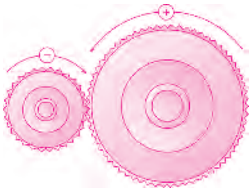
ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

Para retomar os conteúdos estudados, resolva os exercícios complementares 1 a 4.

2. Circunferência trigonométrica

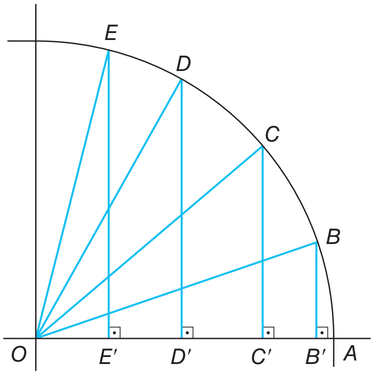
Comente o texto introdutório deste tópico, que mostra a extensão do conceito das razões trigonométricas para ângulos não agudos. Daí a necessidade da circunferência trigonométrica. Ressalte a conveniência de adotar o raio unitário: o seno do arco trigonométrico é a ordenada da extremidade do arco, e o cosseno é a abscissa (se o raio não fosse unitário, o seno seria a razão entre a ordenada da extremidade do arco e a medida do raio, nessa ordem, e o cosseno seria a razão entre a abscissa da extremidade do arco e a medida do raio, nessa ordem).

Mostre situações práticas em que sejam necessárias medidas maiores que 360° ou menores que 0°, conforme o seguinte exemplo: Duas rodas dentadas, engrenadas uma na outra, giram em sentidos contrários. No estudo dessa engrenagem, adotam-se um sentido como positivo e outro como negativo.



FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

Em qualquer triângulo retângulo, as razões trigonométricas seno, cosseno e tangente de um ângulo agudo não dependem do tamanho do triângulo, mas da medida do ângulo. Por isso, na construção de uma tabela com essas razões para vários ângulos, podemos considerar triângulos retângulos que tenham hipotenusas de mesma medida e variar a medida do ângulo agudo. Assim, teremos tantos triângulos retângulos quantos quisermos. Na figura a seguir, estão representados alguns desses triângulos.



Note que:

- os vértices B, C, D e E pertencem à mesma circunferência, cujo raio é a medida da hipotenusa dos triângulos;
- se adotarmos a medida da hipotenusa como unidade (1), o seno e o cosseno de um ângulo agudo de vértice O, em cada um desses triângulos, serão, respectivamente, a medida do cateto oposto e a medida do cateto adjacente a esse ângulo. Por exemplo, no triângulo retângulo BOB', com $m(B\widehat{O}B') = \alpha$, temos:

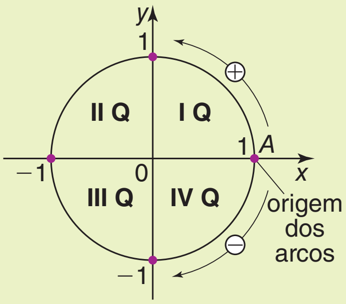
$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{BB'}{OB} = \frac{BB'}{1} = BB' \qquad \cos \alpha = \frac{OB'}{OB} = \frac{OB'}{1} = OB'$$

Ou seja, o seno e o cosseno de α são a medida do cateto oposto a α (BB') e a medida do cateto adjacente a α (OB'), respectivamente, quando a hipotenusa é adotada como unidade (1).

Essas ideias levaram os matemáticos a definirem as razões trigonométricas em uma circunferência, chamada de **circunferência trigonométrica**, na qual os conceitos de seno, cosseno e tangente são estendidos também para ângulos não agudos.

Em um plano, considere uma circunferência de raio r unitário ($r = 1$), cujo centro coincide com a origem de um sistema cartesiano ortogonal. Essa estrutura, com as convenções a seguir, é a circunferência trigonométrica.

- O ponto $A(1, 0)$ é a **origem dos arcos** a serem medidos na circunferência.
- Se um arco for medido no sentido **horário**, então, ao valor absoluto dessa medida será atribuído o sinal **negativo** (−).
- Se um arco for medido no sentido **anti-horário**, então, ao valor absoluto dessa medida será atribuído o sinal **positivo** (+).
- Os eixos coordenados dividem o plano cartesiano em quatro regiões, chamadas de **quadrantes** (**Q**); esses quadrantes são numerados no sentido anti-horário, a partir do ponto A, como mostra a figura.
- Os pontos dos eixos coordenados não pertencem a nenhum quadrante.

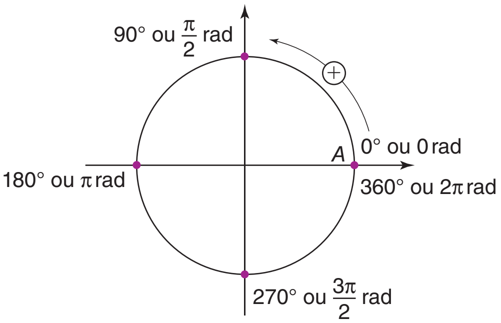


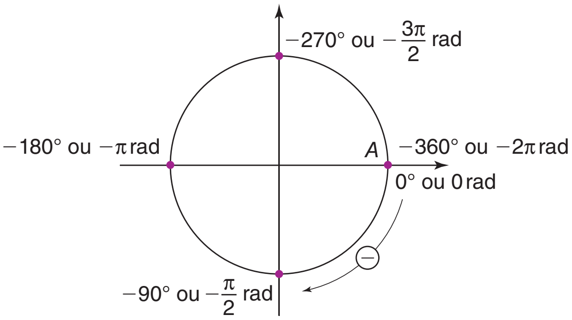
ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Arcos trigonométricos

Aos pontos da circunferência trigonométrica associamos medidas em grau ou em radiano. Cada medida associada a um ponto *M* qualquer indica a medida do arco $\overset{\frown}{AM}$, chamado de **arco trigonométrico**.

Exemplos



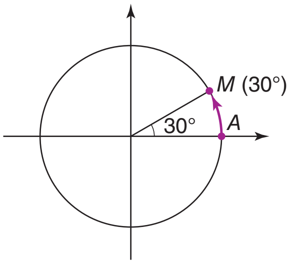


Observação

Na circunferência trigonométrica, os arcos que têm origem no ponto *A*(1, 0) são chamados de **arcos trigonométricos**.

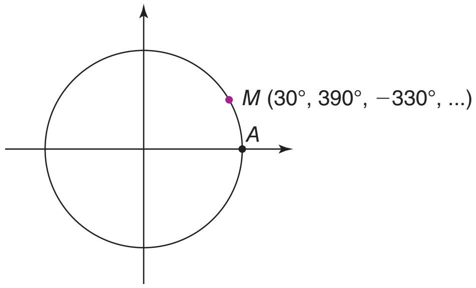
Arcos côngruos

Girando 30° no sentido anti-horário, a partir do ponto *A* da circunferência trigonométrica, paramos no ponto *M*; logo, 30° é uma medida associada ao ponto *M*.



Há, porém, infinitas outras medidas associadas ao ponto *M*. Por exemplo:

- Girando uma volta completa mais 30° no sentido anti-horário, a partir do ponto *A*, também paramos no ponto *M*. Logo, 360° + 30°, isto é, 390° também é uma medida associada ao ponto *M*.
- Girando 330° no sentido horário, a partir do ponto *A*, paramos no ponto *M*. Logo, −330° também é uma medida associada ao ponto *M*.



Observação

Quando a medida α estiver associada a um ponto *M* da circunferência trigonométrica, indicaremos: *M* (α).

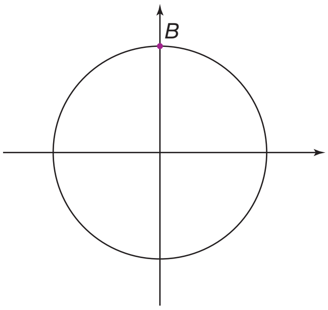
Arcos trigonométricos que têm a mesma extremidade são chamados de **arcos côngruos**.

Se α e β são medidas de arcos côngruos, indicamos: $\alpha \equiv \beta$ (lê-se: "α é côngruo a β").
Assim, no exemplo anterior, temos: $30° \equiv 390° \equiv -330°$.

ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

4. Calcule as medidas *x*, em grau, associadas ao ponto *B* da circunferência trigonométrica da figura, nas quatro primeiras voltas positivas ($0° \leqslant x < 1.440°$).



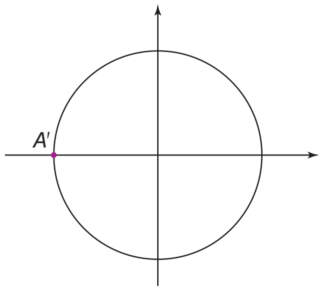
Resolução

A medida em grau associada ao ponto *B* na 1ª volta positiva é 90°. Assim, as outras medidas associadas ao ponto *B* são:

- na 2ª volta positiva: $90° + 360° = 450°$
- na 3ª volta positiva: $90° + 2 \cdot 360° = 810°$
- na 4ª volta positiva: $90° + 3 \cdot 360° = 1.170°$

Logo, as medidas dos arcos côngruos procuradas são: 90°, 450°, 810° e 1.170°.

5. Determine as medidas x, em radiano, associadas ao ponto A' da circunferência trigonométrica da figura, nas quatro primeiras voltas positivas ($0 \leqslant x < 8\pi$).



FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

Resolução

A medida em radiano associada ao ponto A' na 1ª volta positiva é π.

Assim, as outras medidas associadas ao ponto A' são:

- na 2ª volta positiva: $\pi + 2\pi = 3\pi$
- na 3ª volta positiva: $\pi + 2 \cdot 2\pi = 5\pi$
- na 4ª volta positiva: $\pi + 3 \cdot 2\pi = 7\pi$

Logo, as medidas dos arcos côngruos procurados são: π, 3π, 5π e 7π.

Observação

Para indicar a medida de um arco trigonométrico em radiano, não é necessário explicitar a unidade rad; basta escrever o número real associado ao ponto extremo do arco.
Explicaremos o porquê dessa convenção no tópico seguinte.

6. Calcule a medida x do arco da 1ª volta positiva ($0° \leqslant x < 360°$) que possui a mesma extremidade do arco de 1.140°.

Resolução

Inicialmente vamos desconsiderar do arco de 1.140° todas as voltas completas. Para isso, dividimos 1.140° por 360°:

$$\begin{array}{r|l} 1.140° & 360° \\ \hline 60° & 3 \end{array}$$

Assim, $1.140° = 3 \cdot 360° + 60°$, ou seja, o arco de 1.140° tem três voltas completas mais 60°. Logo, desconsiderando as voltas completas, obtemos a medida x do arco côngruo ao arco de 1.140° na 1ª volta positiva: $x = 60°$.

7. Determine a medida x do arco da 1ª volta positiva ($0 \leqslant x < 2\pi$) que tem a mesma extremidade dos arcos a seguir.

a. $\frac{17\pi}{2}$ rad

b. $\frac{19\pi}{3}$ rad

Resolução

Como no exercício resolvido **6**, basta desconsiderar de cada arco todas as voltas completas. Para isso, vamos transformar a medida de cada arco em uma adição de duas parcelas, de modo que uma delas represente o total de voltas completas contidas no arco, isto é:

a. $$\frac{17\pi}{2} = \frac{16\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \underbrace{8\pi}_{\text{quatro voltas completas}} + \frac{\pi}{2}$$

Desconsiderando as voltas completas, concluímos que $\frac{17\pi}{2} \equiv \frac{\pi}{2}$. Assim, a medida x procurada é $\frac{\pi}{2}$.

b. $$\frac{19\pi}{3} = \frac{18\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = \underbrace{6\pi}_{\text{três voltas completas}} + \frac{\pi}{3}$$

Desconsiderando as voltas completas, concluímos que $\frac{19\pi}{3} \equiv \frac{\pi}{3}$.

Assim, a medida x procurada é $\frac{\pi}{3}$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Faça os exercícios no caderno.

8. A medida de um arco trigonométrico $\widehat{AM}$ é 50°. Determine todas as medidas x associadas à extremidade M em cada uma das condições.

a. $0° \leqslant x < 1.080°$ **b.** $-720° \leqslant x < 0°$

8. a. 50°, 410° e 770° **8. b.** −310° e −670°

9. A medida de um arco trigonométrico $\widehat{AM}$ é $\frac{6\pi}{7}$ rad. Encontre todas as medidas x associadas à extremidade M em cada uma das condições.

a. $0 \leqslant x < 6\pi$ **b.** $-4\pi \leqslant x < 0$

9. a. $\frac{6\pi}{7}$ rad, $\frac{20\pi}{7}$ rad, $\frac{34\pi}{7}$ rad **9. b.** $-\frac{8\pi}{7}$ rad, $-\frac{22\pi}{7}$ rad

10. Calcule a medida do arco trigonométrico, da 1ª volta positiva, côngruo ao arco de cada medida indicada a seguir. Antes de resolver, faça um esquema considerando as seguintes etapas: compreender o problema, elaborar um plano de resolução, executar o plano elaborado e verificar; para sistematizar uma estratégia de resolução.

a. 2.923° **10. a.** 43°

b. −40° **10. b.** 320°

c. $\frac{45\pi}{11}$ rad **10. c.** $\frac{\pi}{11}$ rad

d. $\frac{38\pi}{5}$ rad **10. d.** $\frac{8\pi}{5}$ rad

e. $-\frac{\pi}{13}$ rad **10. e.** $\frac{25\pi}{13}$ rad

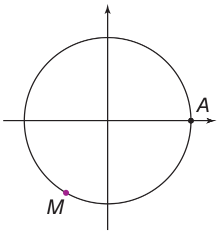
11. O ponto *M*, representado na figura, é extremidade de um arco trigonométrico de 2.040°. Determine a medida *x* associada ao ponto *M*:

a. com 0° ⩽ *x* < 360°, isto é, na 1ª volta do sentido positivo; **11. a.** 240°

b. com 360° ⩽ *x* < 720°, isto é, na 2ª volta do sentido positivo; **11. b.** 600°

c. com 720° ⩽ *x* < 1.080°, isto é, na 3ª volta do sentido positivo; **11. c.** 960°

d. com −360° ⩽ *x* < 0°, isto é, na 1ª volta do sentido negativo. **11. d.** −120°

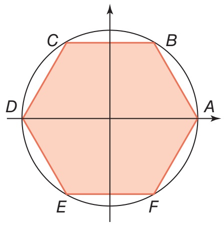


12. O hexágono regular *ABCDEF* da figura está inscrito na circunferência trigonométrica. Determine as medidas *x*, em radiano, associadas:

a. aos vértices desse hexágono, com $0 \leqslant x < 2\pi$; **12. a.** 0 rad, $\frac{\pi}{3}$ rad, $\frac{2\pi}{3}$ rad, π rad, $\frac{4\pi}{3}$ rad e $\frac{5\pi}{3}$ rad

b. ao vértice *C*, com $2\pi < x < 6\pi$; **12. b.** $\frac{8\pi}{3}$ rad e $\frac{14\pi}{3}$ rad

c. ao vértice *F*, com $-4\pi \leqslant x < 0$. **12. c.** $-\frac{\pi}{3}$ rad e $-\frac{7\pi}{3}$ rad



ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

Para retomar os conteúdos estudados, resolva o exercício complementar 5.

Conectado

Conectado: a. Será exibida na tela a medida 750°.
b. Será exibida a letra F.

Um programa de computador é a formalização de um algoritmo em qualquer linguagem capaz de ser transformada em instruções que serão executadas por um computador.

Por exemplo, considere o algoritmo formado pelos seguintes comandos:

Passo 1: Assinale, na circunferência trigonométrica, um arco trigonométrico $\overset{\frown}{AP_1}$ de medida α, com 0° < α < 360°.

Passo 2: A partir do ponto P_i, percorra no sentido anti-horário um arco de medida α, em grau, até um ponto P_{i+1}, com $i \in \mathbb{N}$ e $1 \leqslant i \leqslant 25$.

Passo 3: Se para algum valor de *i* do comando do passo 2, o ponto P_{i+1} coincidir com P_1, exiba na tela a maior medida possível, em grau, do arco trigonométrico $\overset{\frown}{AP_{i+1}}$ que obedeça a essa condição; se no comando do passo 2, não existir um número *i* tal que o ponto P_{i+1} coincida com P_1, exiba na tela a letra F ao final do procedimento.

De acordo com esse algoritmo, responda aos itens seguintes.

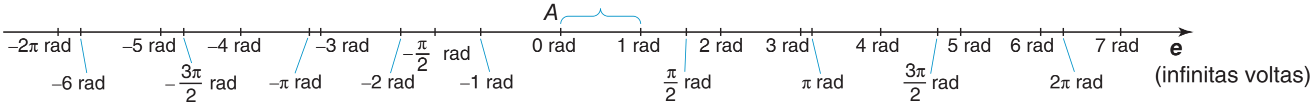
a. Se no passo 1 for assinalado um arco trigonométrico de medida 30°, o que aparecerá na tela ao final do procedimento executado pela máquina?

b. Se no passo 1 for assinalado um arco trigonométrico de medida 12°, o que aparecerá na tela ao final do procedimento executado pela máquina?

Ao trabalhar o tópico **Associando números reais aos pontos da circunferência trigonométrica**, enfatize que a associação identifica cada número real *x* com a medida *x* rad. Assim, de agora em diante, vamos indicar a medida de um arco trigonométrico simplesmente pelo número real *x*, em vez de *x* rad. Comente a expressão geral dos números reais associados a um ponto da circunferência trigonométrica, por exemplo: $x = 0 + k \cdot 2\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$. Enfatize que essa expressão pode ser representada de infinitas maneiras diferentes, por exemplo, $x = 6\pi + k \cdot 2\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$.

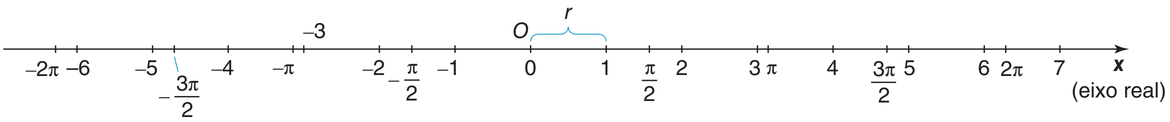
Associando números reais aos pontos da circunferência trigonométrica

É possível percorrer infinitas voltas na circunferência trigonométrica, no sentido anti-horário (positivo) e no sentido horário (negativo). Imagine, então, se pudéssemos "desenrolar" essas infinitas voltas, transformando-as em um eixo *e*. Cada ponto desse eixo corresponderia a um ponto da circunferência trigonométrica e, portanto, seria correspondente à extremidade de um arco trigonométrico. Considerando as medidas desses arcos em radiano, temos o eixo *e*:

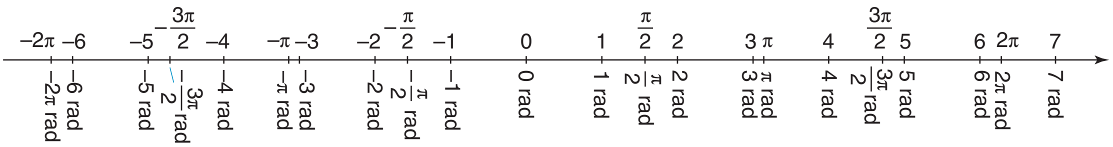


ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

Considerando um eixo real *x* subdividido em unidades iguais ao raio *r* da circunferência trigonométrica:



Sobrepondo esses dois eixos de modo que suas origens, *A* e *O*, coincidam, constatamos que cada ponto *M* de abscissa α rad do eixo *e* coincide com o ponto *M′* de abscissa α do eixo *x*, observe:



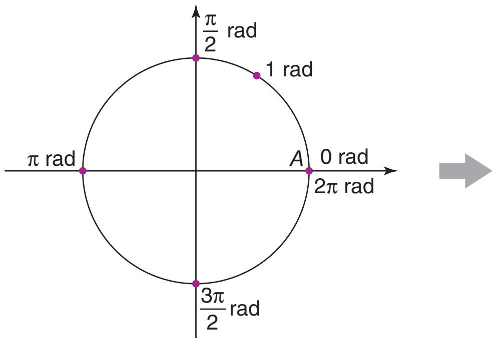
Dessa forma, identificamos cada medida α rad com o número real α.

Observação

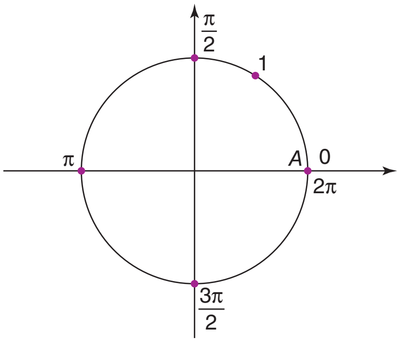
Na representação do eixo real, observe que o número π está entre 3 e 4, isso pode ser associado ao fato de que π é, aproximadamente, 3,1414.

Os números reais podem ser representados pelos pontos da circunferência trigonométrica, associando cada número real α à extremidade do arco trigonométrico de medida α rad.

Exemplos



Medidas em radiano associadas a pontos da circunferência trigonométrica.



Números reais associados a pontos da circunferência trigonométrica.

Note que a cada ponto da circunferência trigonométrica estão associados infinitos números reais. Por exemplo, considerando as infinitas voltas que podemos percorrer nos dois sentidos, horário e anti-horário, o ponto *A* da circunferência trigonométrica anterior é a extremidade dos arcos de medidas:

$$\dots,\ -4\pi \text{ rad},\ -2\pi \text{ rad},\ 0 \text{ rad},\ 2\pi \text{ rad},\ 4\pi \text{ rad},\ 6\pi \text{ rad},\ 8\pi \text{ rad},\ \dots$$

Logo, ao ponto *A* estão associados os infinitos números reais:

$$\dots,\ -4\pi,\ -2\pi,\ 0,\ 2\pi,\ 4\pi,\ 6\pi,\ 8\pi,\ \dots$$

Observando que a diferença entre dois termos consecutivos quaisquer dessa sequência é 2π, podemos representar todos esses números reais por:

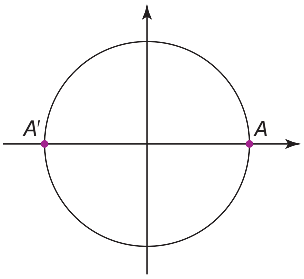
$$x = 0 + k \cdot 2\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}, \text{ ou, simplesmente, } x = k \cdot 2\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}$$

É importante ressaltar que existem infinitas expressões diferentes que podem representar os números reais associados ao ponto *A*. Basta adicionar a qualquer termo da sequência $(\dots, -4\pi, -2\pi, 0, 2\pi, 4\pi, 6\pi, 8\pi, \dots)$ um múltiplo de 2π; por exemplo: $x = 6\pi + k \cdot 2\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$.

Reflexão: Há grandezas cujas medidas são sempre positivas ou nulas, como o tempo; outras, no entanto, podem ter medidas positivas, negativas ou nulas, como a temperatura. Quando quisermos nos referir à medida de uma grandeza, considerando o seu sinal, positivo ou negativo, usamos a expressão “medida algébrica”. Assim, a “medida algébrica” de uma grandeza é aquela que leva em consideração o sinal positivo ou negativo associado à medida.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

8. Obtenha uma expressão que indique todos os números reais associados aos pontos *A* ou *A'* da circunferência trigonométrica representada na figura.



FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

Resolução

As medidas algébricas, em radiano, dos infinitos arcos com extremidades em *A* ou *A'* são:

$$\dots, -\pi \text{ rad}, 0 \text{ rad}, \pi \text{ rad}, 2\pi \text{ rad}, 3\pi \text{ rad}, 4\pi \text{ rad}, 5\pi \text{ rad}, \dots$$

Logo, os infinitos números reais associados a *A* ou *A'* são:

$$\dots, -\pi, 0, \pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi, 5\pi, \dots$$

Observando que a diferença entre dois termos consecutivos quaisquer dessa sequência é π, podemos representar todos esses números reais por:

$$x = 0 + k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}, \text{ ou, simplesmente, } x = k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}$$

Qualquer expressão que represente a soma de um termo dessa sequência com um múltiplo de π pode ser dada como resposta; por exemplo: $x = \pi + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$.

Reflexão

O que significa ”medida algébrica” citada no exercício resolvido **8**?

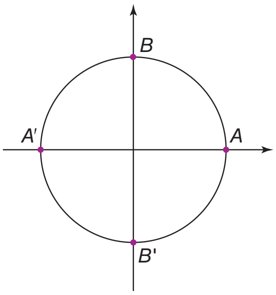
EXERCÍCIOS PROPOSTOS

13. c. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$

13. d. $x = k \cdot \frac{\pi}{2}$, com $k \in \mathbb{Z}$

Faça os exercícios no caderno.

13. A circunferência trigonométrica está dividida em quatro arcos congruentes pelos pontos *A*, *B*, *A'* e *B'*. Obtenham uma expressão que represente todos os números reais associados:



FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

13. a. $x = \pi + k \cdot 2\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$

13. b. $x = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$

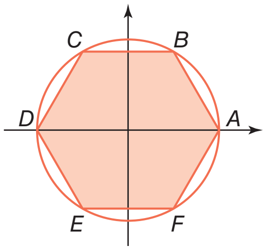
a. ao ponto *A'*;

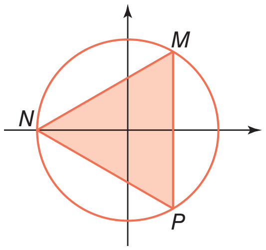
b. ao ponto *B*;

c. aos pontos *B* ou *B'*;

d. aos pontos *A*, *B*, *A'* ou *B'*.

14. Os polígonos inscritos nas circunferências trigonométricas a seguir são regulares.





ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Em relação à associação de números reais aos pontos da circunferência trigonométrica, obtenha uma expressão que represente os infinitos números reais associados aos vértices do:

a. hexágono regular *ABCDEF*; **14. a.** $k \cdot \frac{\pi}{3}$, com $k \in \mathbb{Z}$

b. triângulo equilátero *MNP*. **14. b.** $\frac{\pi}{3} + k \cdot \frac{2\pi}{3}$, com $k \in \mathbb{Z}$

15. A partir de 0 h 15 min, a cada 30 minutos parte um avião de um aeroporto *A* com destino a um aeroporto *B*. Qual das expressões a seguir representa todos os horários *x*, em hora, dos voos que partem de *A* com destino a *B*, em cada dia? **15.** alternativa **c**

a. $x = 0{,}15 + k \cdot 0{,}30$, com $k \in \mathbb{Z}$ e $0 \leqslant k < 24$

b. $x = 0{,}15 + k \cdot 0{,}30$, com $k \in \mathbb{Z}$ e $0 \leqslant k \leqslant 24$

c. $x = 0{,}25 + k \cdot 0{,}5$, com $k \in \mathbb{Z}$ e $0 \leqslant k < 48$

d. $x = 0{,}25 + k \cdot 0{,}5$, com $k \in \mathbb{Z}$ e $0 \leqslant k \leqslant 48$

e. $x = 0{,}15 + k \cdot 0{,}5$, com $k \in \mathbb{Z}$ e $0 \leqslant k < 36$

FBOLEMOS/SHUTTERSTOCK

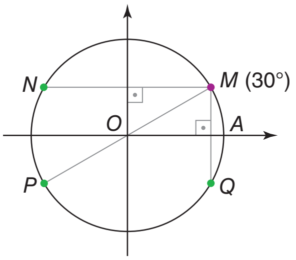
Avião em decolagem em Curitiba, Paraná. Foto de 2020.

16. De maneira geral, os ciclos de maré se repetem nos mesmos horários a cada 15 dias, em determinado local. Isso acontece porque o movimento de translação da Lua tem 24 horas e 50 minutos de duração. Dividindo esse tempo em 4 períodos, temos 6 h 12 min, que é o tempo de duração de cada maré e suas variações. A partir dessas informações, pesquisem outros dados acerca do período de marés e elaborem um problema utilizando uma expressão geral que descreva o período das marés. **16.** Resposta pessoal.

Para retomar os conteúdos estudados, resolva o exercício complementar 6.

3. Simetrias

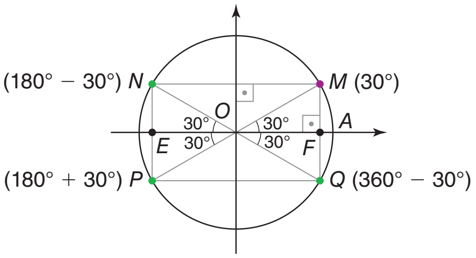
Conhecida uma medida, em grau ou radiano, associada a um ponto M da circunferência trigonométrica, é possível determinar as medidas associadas a pontos simétricos de M em relação aos eixos coordenados ou em relação à origem do sistema cartesiano. Esse procedimento permitirá, mais adiante, relacionar os valores das razões trigonométricas nos diferentes quadrantes.



Para exemplificar, consideremos, na circunferência trigonométrica, o ponto M associado à medida 30°. Pelo ponto M, tracemos três retas: a perpendicular ao eixo das ordenadas, a que passa pela origem do sistema e a perpendicular ao eixo das abscissas. Essas retas interseptam a circunferência nos pontos N, P e Q, respectivamente, conforme mostra a figura.

Os pontos N, P e Q são chamados de **simétricos** (ou correspondentes) do ponto M. Determinemos as medidas x (com $0° \leqslant x < 360°$) associadas a esses pontos:

- Os ângulos $N\hat{O}E$ e $M\hat{O}F$ têm a mesma medida, pois os triângulos NOE e MOF são congruentes. Logo, o arco trigonométrico $\widehat{AN}$ mede 180° − 30°, ou seja, 150°.
- Os ângulos $P\hat{O}E$ e $M\hat{O}F$ têm a mesma medida, pois são opostos pelo vértice. Logo, o arco trigonométrico $\widehat{AP}$ mede 180° + 30°, ou seja, 210°.
- Os ângulos $Q\hat{O}F$ e $M\hat{O}F$ têm a mesma medida, pois os triângulos QOF e MOF são congruentes. Logo, o arco trigonométrico $\widehat{AQ}$ mede 360° − 30°, ou seja, 330°.

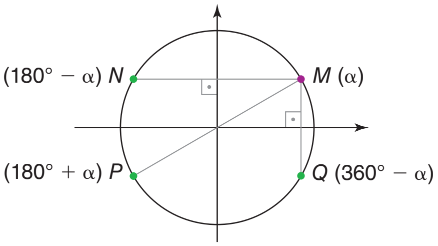


Observação

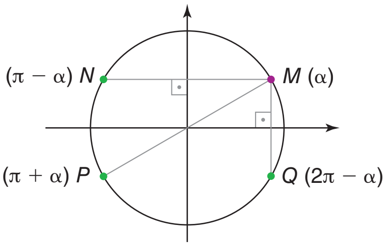
Dois triângulos são congruentes se for possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre seus vértices de modo que ângulos de vértices correspondentes sejam congruentes e lados opostos a vértices correspondentes sejam congruentes.

Generalizando esses resultados para a 1ª volta no sentido anti-horário da circunferência trigonométrica, temos:

Sendo α uma medida em grau

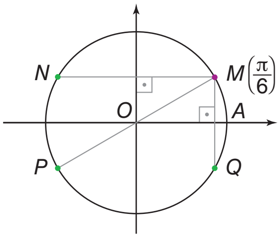


Sendo α uma medida em radiano

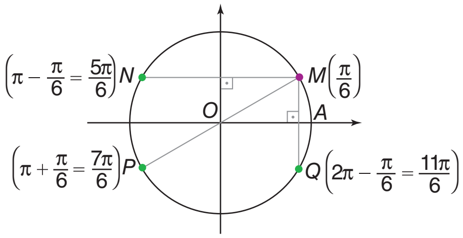


EXERCÍCIO RESOLVIDO

9. O ponto M da circunferência trigonométrica representada na figura está associado à medida $\frac{\pi}{6}$ rad. Determine as medidas x (com $0 \leqslant x < 2\pi$) associadas aos pontos N, P e Q.



Resolução



Logo: $N\left(\frac{5\pi}{6}\right)$, $P\left(\frac{7\pi}{6}\right)$ e $Q\left(\frac{11\pi}{6}\right)$

ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Faça os exercícios no caderno.

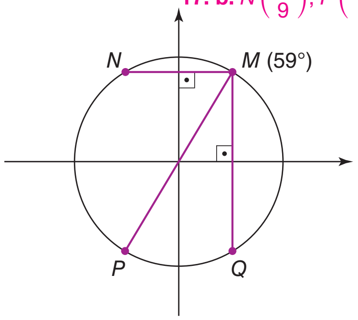
ILUSTRAÇÕES: ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

17. Em cada um dos itens a seguir, encontre as medidas associadas aos pontos *N*, *P* e *Q* na primeira volta do sentido anti-horário da circunferência trigonométrica.

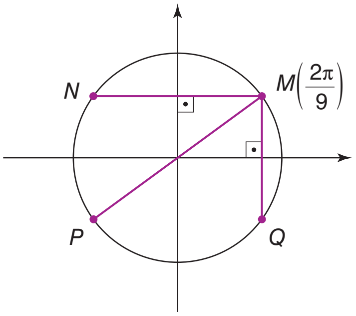
17. a. *N*(121°), *P*(239°) e *Q*(301°).

17. b. $N\left(\frac{7\pi}{9}\right)$, $P\left(\frac{11\pi}{9}\right)$ e $Q\left(\frac{16\pi}{9}\right)$.

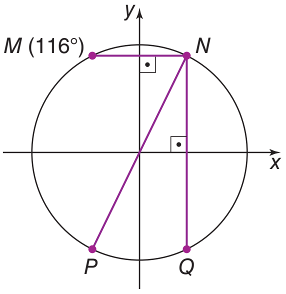
a. Medidas em grau.



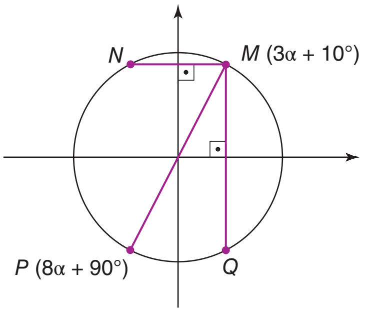
b. Medidas em radiano.



c. Medidas em grau. **17. c.** *N*(64°); *P*(244°); *Q*(296°)



18. Os pontos *M* e *P*, representados a seguir, são extremidades de arcos trigonométricos de medidas 3α + 10° e 8α + 90°, respectivamente, da primeira volta positiva da circunferência.



Nessas condições, conclui-se que *N* e *Q* são, respectivamente, extremidades de arcos trigonométricos de medidas: **18.** alternativa **c**

a. 100° e 280°

b. 105° e 285°

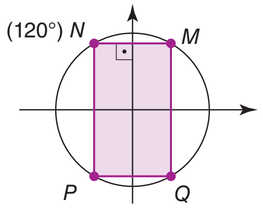
c. 110° e 290°

d. 115° e 295°

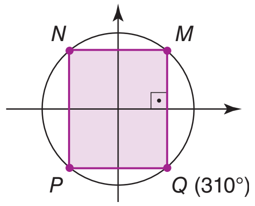
e. 120° e 300°

19. Nas circunferências trigonométricas de cada item, determine as medidas *x* (com 0° ⩽ *x* < 360°) associadas aos vértices dos retângulos.

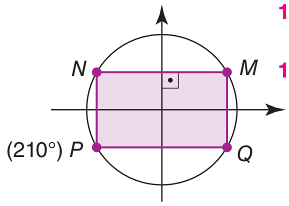
a.



c.



b.



19. a. *M*(60°); *P*(240°); *Q*(300°)

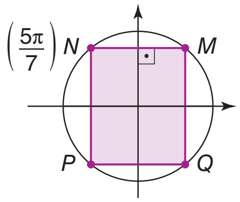
19. b. *M*(30°); *N*(150°); *Q*(330°)

19. c. *M*(50°); *N*(130°); *P*(230°)

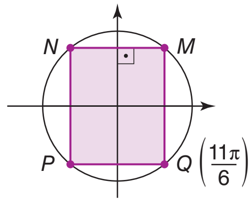
ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

20. Nas circunferências trigonométricas a seguir, quais são os números reais *x* (com 0 ⩽ *x* < 2π) associados aos vértices dos retângulos?

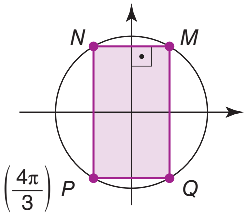
a.



c.



b.



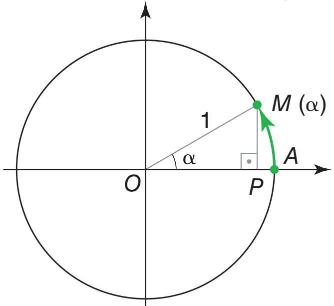
20. a. $M\left(\frac{2\pi}{7}\right)$; $Q\left(\frac{12\pi}{7}\right)$; $P\left(\frac{9\pi}{7}\right)$

20. b. $M\left(\frac{\pi}{3}\right)$; $Q\left(\frac{5\pi}{3}\right)$; $N\left(\frac{2\pi}{3}\right)$

20. c. $M\left(\frac{\pi}{6}\right)$; $P\left(\frac{7\pi}{6}\right)$; $N\left(\frac{5\pi}{6}\right)$

4. Seno e cosseno de um arco trigonométrico

Com base na ideia de seno e cosseno de um ângulo agudo de um triângulo retângulo, vamos estender o conceito de seno e cosseno para um arco trigonométrico.



A transição do triângulo retângulo para a circunferência trigonométrica pode ser compreendida ao considerarmos um arco trigonométrico $\widehat{AM}$ de medida α, com 0° < α < 90°, conforme indicado na figura.

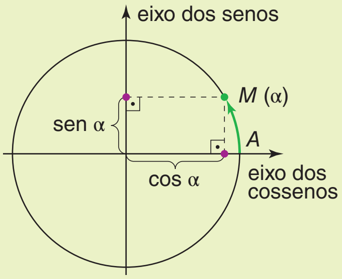
Como o raio da circunferência trigonométrica mede 1 e a medida do ângulo central $M\hat{O}A$ é igual à medida do arco $\widehat{AM}$, em grau ou radiano, temos no triângulo retângulo *OMP*:

$$\cos\alpha = \frac{OP}{1} = OP \qquad\qquad \text{sen}\,\alpha = \frac{PM}{1} = PM$$

Portanto, cos α e sen α são, respectivamente, a abscissa e a ordenada do ponto *M*. Ampliamos esse conceito para qualquer arco trigonométrico, pela definição a seguir.

Dado um arco trigonométrico $\widehat{AM}$ de medida α, chamam-se **cosseno** e **seno** de α a abscissa e a ordenada do ponto *M*, respectivamente.

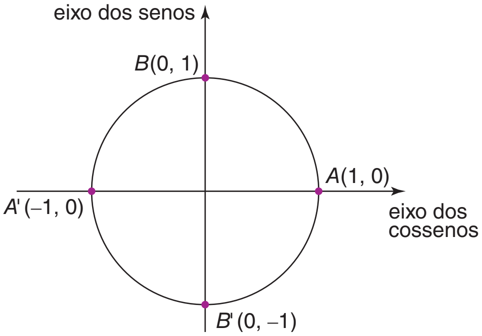
cos α = abscissa de *M*
sen α = ordenada de *M*



Assim, na circunferência trigonométrica, podemos nos referir ao eixo das abscissas como eixo dos cossenos e ao eixo das ordenadas como eixo dos senos.

Exemplo

Como o raio da circunferência trigonométrica é unitário (medida igual a 1), as coordenadas dos pontos *A*, *B*, *A′* e *B′* são as indicadas na figura:



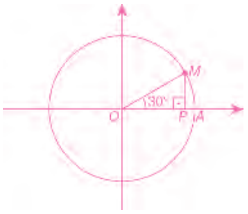
Então, pela definição de cosseno e de seno, temos:

- cos 0° = 1
- cos 90° = 0
- cos 180° = −1
- cos 270° = 0
- cos 360° = 1
- sen 0° = 0
- sen 90° = 1
- sen 180° = 0
- sen 270° = −1
- sen 360° = 0

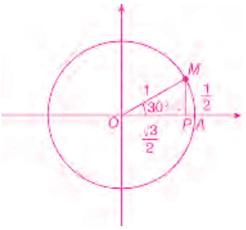
Observe que, como a circunferência trigonométrica tem raio unitário, temos, para qualquer arco de medida *x*:

$$-1 \leqslant \cos x \leqslant 1 \qquad\qquad -1 \leqslant \text{sen}\,x \leqslant 1$$

É importante que os estudantes percebam que as definições de seno e cosseno de um arco trigonométrico são extensões das definições de seno e cosseno de um ângulo agudo no triângulo retângulo. Para isso, podem ser adotados os seguintes procedimentos: Mostre um arco trigonométrico $\widehat{AM}$ de medida 30° e trace por *M* a perpendicular ao eixo das abcissas, determinando o triângulo *OMP*.

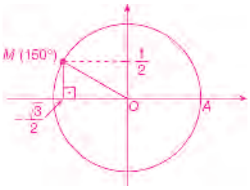


Pergunte: “Qual é a medida do segmento $\overline{OM}$?”; “Qual é o valor do sen 30°? (sen 30° = $\frac{PM}{OM} = \frac{PM}{1} = PM \Rightarrow$ $\Rightarrow PM = \frac{1}{2}$)”; “Qual é o valor do cos 30°? (cos 30° = $\frac{OP}{OM} = \frac{OP}{1} = OP \Rightarrow OP = \frac{\sqrt{3}}{2}$)”



Conclua que o cosseno do arco trigonométrico $\widehat{AM}$, de medida 30°, é a abscissa do ponto *M* e que o seno é a ordenada do ponto *M*. Pergunte: “Como definir o seno e o cosseno de 150°?”. Após a discussão, estenda o conceito de seno e de cosseno para qualquer quadrante, mostrando que:

sen 150° = $\frac{1}{2}$ e
cos 150° = $-\frac{\sqrt{3}}{2}$



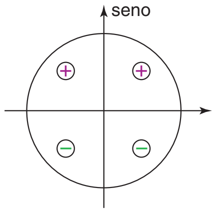
ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

Pergunte: “Qual é o sinal de cada um dos números: sen 30°, sen 120°, sen 220°, sen 310°, cos 60°, cos 110°, cos 290° e cos 340°?”. Após a discussão apresente os esquemas de sinais para o seno e para o cosseno.

Variação de sinal do seno

Já foi apresentado que o seno de um arco trigonométrico é a ordenada da extremidade desse arco. Como os pontos de ordenadas positivas são os do 1º e os do 2º quadrante e os pontos de ordenadas negativas são os do 3º e os do 4º quadrante, podemos organizar um esquema de sinais para o seno como o indicado na figura.



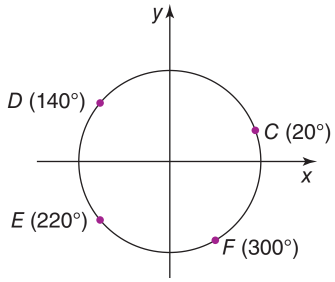
Esquema de sinais para valores do seno.

Exemplo

Os arcos trigonométricos de 20°, 140°, 220° e 300° têm extremidades nos pontos *C*, *D*, *E* e *F*, respectivamente, conforme mostra a figura.

Observando que:

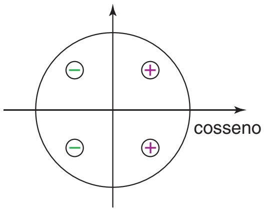
- *C* e *D* são pontos do 1º e do 2º quadrante e que sen 20° e sen 140° são as ordenadas desses pontos, respectivamente, temos sen 20° e sen 140° positivos;
- *E* e *F* são pontos do 3º e do 4º quadrante e que sen 220° e sen 300° são as ordenadas desses pontos, respectivamente, temos sen 220° e sen 300° negativos.



ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

Variação de sinal do cosseno

Já foi apresentado que o cosseno de um arco trigonométrico é a abscissa da extremidade desse arco. Como os pontos de abscissas positivas são os do 1º e os do 4º quadrante e os pontos de abscissas negativas são os do 2º e os do 3º quadrante, obtemos um esquema de sinais para o cosseno como apresentado na figura.



Esquema de sinais para valores do cosseno.

Exemplo

Na figura do exemplo anterior, observando que:

- *C* e *F* são pontos do 1º e do 4º quadrante e que cos 20° e cos 300° são as abscissas desses pontos, respectivamente, temos cos 20° e cos 300° positivos;
- *D* e *E* são pontos do 2º e do 3º quadrante e que cos 140° e cos 220° são as abscissas desses pontos, respectivamente, temos cos 140° e cos 220° negativos.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

10. Calcule o valor da expressão:

$$E = \frac{\text{sen } 180° + \cos 180° - \text{sen } 270°}{\text{sen } 90° + \cos 360°}$$

Resolução

Com base nos valores de seno e cosseno na circunferência trigonométrica, temos:

$$E = \frac{\text{sen } 180° + \cos 180° - \text{sen } 270°}{\text{sen } 90° + \cos 360°} =$$

$$= \frac{0 + (-1) - (-1)}{1 + 1} = \frac{0}{2} = 0$$

11. Determine o sinal, positivo ou negativo, de cada um dos produtos:

a. $P = \text{sen } 35° \cdot \cos 130° \cdot \text{sen } 290°$

b. $Q = \text{sen } 1 \cdot \cos 2 \cdot \text{sen } 3 \cdot \cos 4 \cdot \text{sen } 5$

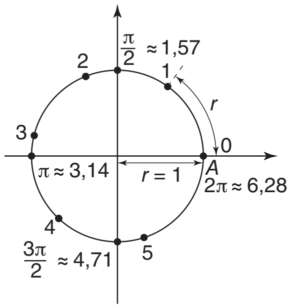
Resolução

a. Como 35°, 130° e 290° pertencem ao primeiro, segundo e quarto quadrantes, respectivamente, temos que: sen 35° > 0, cos 130° < 0 e sen 290° < 0. Logo,

$$P = \underbrace{\text{sen } 35°}_{+} \cdot \underbrace{\cos 130°}_{-} \cdot \underbrace{\text{sen } 290°}_{-}$$

Concluímos, então, que o produto *P* é positivo.

b. Como não apresentam a unidade “grau”, os números reais 1, 2, 3, 4 e 5 devem ser identificados com medidas em radiano. Assim, representando-os na circunferência trigonométrica, temos:



ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

Observando que os números 1, 3 e 5 pertencem ao primeiro, segundo e quarto quadrantes, respectivamente, deduzimos que: sen 1 > 0, sen 3 > 0 e sen 5 < 0.

Observando que os números 2 e 4 pertencem ao segundo e ao terceiro quadrante, respectivamente, deduzimos que: cos 2 < 0 e cos 4 < 0. Assim:

$$Q = \underbrace{\text{sen } 1}_{+} \cdot \underbrace{\cos 2}_{-} \cdot \underbrace{\text{sen } 3}_{+} \cdot \underbrace{\cos 4}_{-} \cdot \underbrace{\text{sen } 5}_{-}$$

Concluímos, então, que o produto Q é negativo.

Mentes brilhantes

As origens da Trigonometria

O astrônomo e matemático grego **Hiparco de Niceia** (190 a.C.-120 a.C.) é considerado um dos precursores da Trigonometria (embora, na época, essa ciência não tivesse ainda esse nome) e foi pioneiro na construção de uma tabela com valores das razões trigonométricas. Para isso, utilizou a concepção babilônica da divisão da circunferência em 360 graus, a divisão do grau em 60 minutos e a divisão do minuto em 60 segundos. Com base nessa graduação, estabeleceu os paralelos e os meridianos terrestres.

> "O comentador Teon de Alexandria (séc. IV) atribui a Hiparco um tratado em 12 livros que se ocupa da construção de uma tábua de cordas. Acredita-se que uma tábua de cordas posterior, devida a Claudio Ptolomeu, que fornece os comprimentos das cordas dos ângulos centrais de um círculo dado, de $\left(\frac{1}{2}\right)^{\circ}$ a 180°, com incrementos de $\left(\frac{1}{2}\right)^{\circ}$, pode ter-se baseado na de Hiparco. Divide-se o raio do círculo em 60 partes e se expressam os comprimentos das cordas sexagesimalmente em termos dessas partes. [...]"

EVES, H. **Introdução à história da matemática**.
5. ed. Campinas: Editora da Unicamp, 2011.

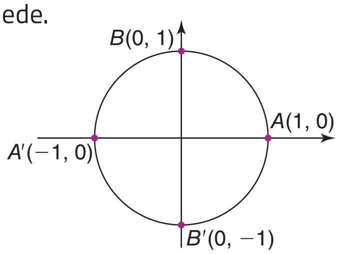
FÁBIO CORTEZ REIS/ARQUIVO DA EDITORA

Ilustração do busto de Hiparco de Niceia.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Faça os exercícios no caderno.

21. Observe a circunferência trigonométrica e calcule o que se pede.



FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

a. cos 0 e sen 0 **21. a.** 1 e 0

b. $\cos \frac{\pi}{2}$ e sen $\frac{\pi}{2}$ **21. b.** 0 e 1

c. $\cos \pi$ e sen π **21. c.** −1 e 0

d. $\cos \frac{3\pi}{2}$ e sen $\frac{3\pi}{2}$ **21. d.** 0 e −1

e. $\cos 2\pi$ e sen 2π **21. e.** 1 e 0

22. O valor numérico da expressão

$E = 5 \cos x + \cos (2x) - \text{sen } \frac{3x}{2}$, para $x = 180°$, é:

22. alternativa **e**

a. 0 **b.** −1 **c.** 1 **d.** 3 **e.** −3

23. Considerando que a variável x possa assumir qualquer valor real, respondam às questões a seguir.

a. É possível a igualdade $2 + 3 \text{ sen } x = 8$? **23. a.** não

b. Para que valores reais de m é possível a igualdade $2 + 3 \text{ sen } x = m$? **23. b.** $-1 \leqslant m \leqslant 5$

Considere o texto a seguir para responder os exercícios **24** e **25**.

Uma partícula se move sobre uma circunferência de centro O e raio de 5 centímetros, no sentido anti-horário e com velocidade escalar constante, completando uma volta a cada 3 segundos. Um sistema cartesiano ortogonal de origem O é fixado no plano da trajetória dessa partícula, e a unidade adotada nos eixos é o centímetro. No instante inicial ($t = 0$), a partícula passa pelo ponto (5, 0).

24. A função que expressa a abscissa da posição da partícula em cada instante t, em segundo, é:

a. $f(t) = 3 \cos \frac{5\pi t}{3}$

b. $f(t) = 5 \cos \frac{2\pi t}{3}$

c. $f(t) = 3 \cos \frac{3\pi t}{2}$

d. $f(t) = 2 \cos \frac{5\pi t}{3}$

e. $f(t) = 5 \cos \frac{3\pi t}{2}$

24. alternativa **b**

25. A função que expressa a ordenada da posição da partícula em cada instante t, em segundo, é:

a. $g(t) = 2 \text{ sen } \frac{5\pi t}{3}$

b. $g(t) = \text{sen } \frac{7\pi t}{4}$

c. $g(t) = \text{sen } 2\pi t$

d. $g(t) = 5 \text{ sen } \frac{2\pi t}{3}$

e. $g(t) = 5 \text{ sen } \frac{\pi t}{3}$

25. alternativa **d**

5. Redução ao 1º quadrante: seno e cosseno

No estudo da Trigonometria no triângulo retângulo, deduzimos a tabela trigonométrica dos ângulos notáveis.

Em razão da igualdade entre a medida do arco e a do ângulo central que determina esse arco na circunferência trigonométrica, se consideramos 30°, 45° e 60° medidas de arcos trigonométricos, os valores dessa tabela permanecem os mesmos.

O objetivo do estudo deste tópico é relacionar o seno e o cosseno de um arco do 2º, do 3º ou do 4º quadrante com o seno e o cosseno do arco correspondente no 1º quadrante. Para exemplificar, utilizaremos o quadro dos arcos notáveis.

Observe que esse quadro apresenta senos e cossenos de alguns arcos do 1º quadrante. Confira como usar esse quadro nos demais quadrantes acompanhando os exercícios resolvidos a seguir.

Arcos notáveis

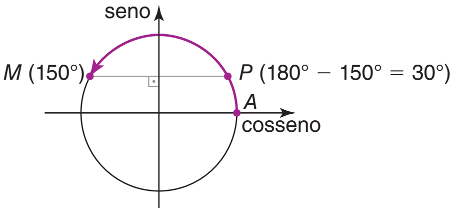
x	sen x	cos x
30° ou $\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
45° ou $\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
60° ou $\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

12. Usando o quadro dos arcos notáveis, calcule sen 150° e cos 150°.

Resolução

A extremidade M do arco de 150° pertence ao 2º quadrante. Traçando por M a reta perpendicular ao eixo dos senos, obtemos o ponto P, correspondente de M no 1º quadrante, conforme a figura. Os pontos M e P têm ordenadas iguais e abscissas opostas. Logo:



$$\text{sen } 150° = \text{sen } 30° = \frac{1}{2}$$

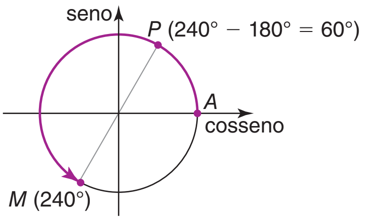
$$\cos 150° = -\cos 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

13. Usando o quadro dos arcos notáveis, calcule sen 240° e cos 240°.

Resolução

A extremidade M do arco de 240° pertence ao 3º quadrante. Traçando por M a reta que passa pelo centro da circunferência, obtemos o ponto P, correspondente de M no 1º quadrante, conforme a figura.

Os pontos M e P têm ordenadas opostas e abscissas opostas. Portanto:



$$\text{sen } 240° = -\text{sen } 60° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

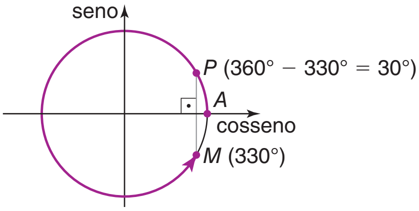
$$\cos 240° = -\cos 60° = -\frac{1}{2}$$

14. Usando o quadro dos arcos notáveis, calcule sen 330° e cos 330°.

Resolução

A extremidade M do arco de 330° pertence ao 4º quadrante. Traçando por M a reta perpendicular ao eixo dos cossenos, obtemos o ponto P, correspondente de M no 1º quadrante, conforme a figura.

Os pontos M e P têm ordenadas opostas e abscissas iguais. Logo:



$$\text{sen } 330° = -\text{sen } 30° = -\frac{1}{2}$$

$$\cos 330° = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

27. a. $N\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $P\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ e $Q\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

27. b. $M\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $N\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ e $Q\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

27. c. $M\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $N\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ e $P\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Faça os exercícios no caderno.

26. Consultando o quadro dos arcos notáveis, calcule:

a. sen 120° **26. a.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$

b. cos 120° **26. b.** $-\frac{1}{2}$

c. sen 210° **26. c.** $-\frac{1}{2}$

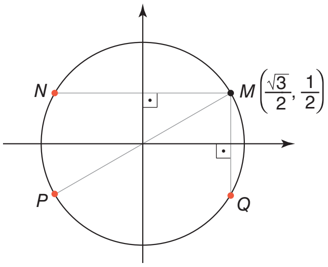
d. cos 210° **26. d.** $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

e. sen 300° **26. e.** $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

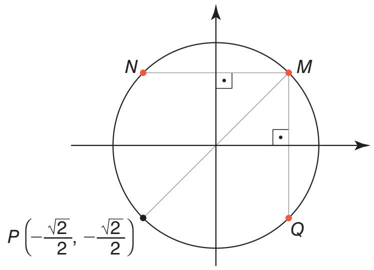
f. cos 300° **26. f.** $\frac{1}{2}$

27. Em cada um dos itens a seguir, determine as coordenadas dos pontos assinalados.

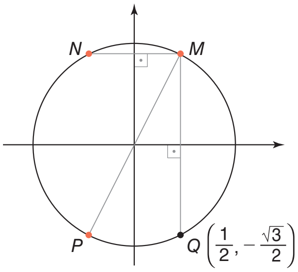
a.



b.



c.

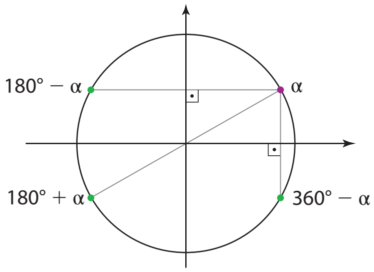


28. Consultando o exercício anterior, calcule o valor da expressão E em cada item a seguir.

a. $E = \text{sen } \frac{7\pi}{6} + \cos \frac{5\pi}{3} + \text{sen } \frac{11\pi}{6}$ **28. a.** $E = -\frac{1}{2}$

b. $E = \text{sen } \frac{2\pi}{3} + \cos \frac{3\pi}{4} - \text{sen } \frac{7\pi}{4}$ **28. b.** $E = \frac{\sqrt{3}}{2}$

29. Observando a figura, classifique cada uma das afirmações em verdadeira ou falsa.



a. sen (180° − α) = sen α **29. a.** verdadeira

b. sen (180° − α) = −sen α **29. b.** falsa

c. sen (180° + α) = sen α **29. c.** falsa

d. sen (180° + α) = −sen α **29. d.** verdadeira

e. sen (360° − α) = sen α **29. e.** falsa

f. sen (360° − α) = −sen α **29. f.** verdadeira

g. cos (180° − α) = cos α **29. g.** falsa

h. cos (180° − α) = −cos α **29. h.** verdadeira

i. cos (180° + α) = cos α **29. i.** falsa

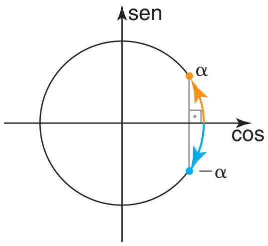
j. cos (180° + α) = −cos α **29. j.** verdadeira

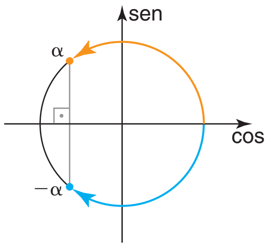
k. cos (360° − α) = cos α **29. k.** verdadeira

l. cos (360° − α) = −cos α **29. l.** falsa

(*Observação*: mesmo que a extremidade do arco de medida α não esteja no 1º quadrante, as relações anteriores que forem verdadeiras continuarão verdadeiras. Verifique!)

30. Observe que arcos trigonométricos de medidas opostas, α e −α, têm extremidades simétricas em relação ao eixo das abscissas:





Assim, concluímos que:

cos (−α) = cos α

sen (−α) = −sen α

De acordo com essa conclusão, calcule:

a. cos (−30°) **30. a.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$

b. $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ **30. b.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$

c. sen (−60°) **30. c.** $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

d. $\text{sen}\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$ **30. d.** $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

31. Dado que α, β e θ são medidas, em grau, dos ângulos internos de um triângulo, a expressão

E = sen (α + β) + cos (α + β) + cos (α + β − 180°)

é equivalente a: **31.** alternativa **a**

a. E = sen θ

b. E = cos θ

c. E = −sen θ

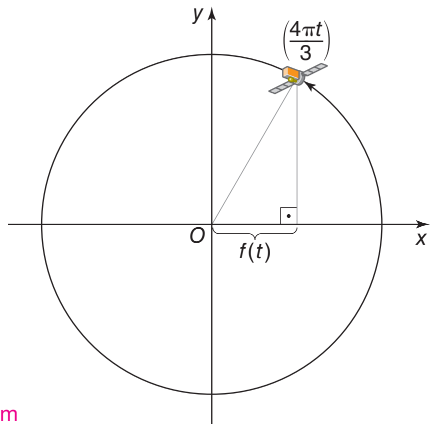
d. E = −cos θ

e. E = 3 cos θ

ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

32. Um satélite artificial gira em torno da Terra descrevendo uma circunferência cujo centro *O* coincide com o centro da Terra.

Ao plano da órbita desse satélite é associado um sistema cartesiano ortogonal de origem *O*, em que a unidade adotada nos eixos é o quilômetro. Em relação a esse sistema, o satélite gira no sentido anti-horário, tal que a função $f(t) = 300 \cos \frac{4\pi t}{3}$ expressa a abscissa da posição do satélite no instante *t*, em hora, em que $t = 0$ representa o início da medição do tempo, conforme ilustra o esquema a seguir.



a. Qual é a abscissa da posição do satélite 1,5 h após o início da medição do tempo? **32. a.** 300 km

b. Qual é a ordenada da posição do satélite 2,5 h após o início da medição do tempo? **32. b.** $-150\sqrt{3}$ km

c. Qual é a medida, em quilômetro, do raio da órbita do satélite? **32. c.** 300 km

d. Em quanto tempo o satélite completa uma volta ao redor da Terra? **32. d.** 1,5 h

---

Para retomar os conteúdos estudados, resolva os exercícios complementares 7 a 11.

ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

6. Relação fundamental da Trigonometria

Para qualquer arco trigonométrico de medida α, temos:

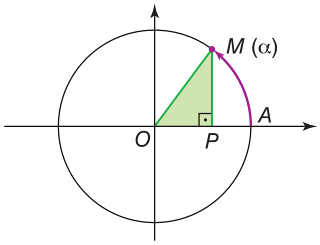
$$\text{sen}^2\, \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

Vamos demonstrar apenas o caso em que a extremidade do arco de medida α é um ponto do 1º quadrante; porém, é importante ressaltar que a relação continua verdadeira mesmo que essa extremidade não esteja no 1º quadrante.

Antes de apresentar a relação fundamental da Trigonometria, enfatize o significado da notação *sen*^{2} α: *sen*^{2} α = (*sen* α)^2. Por exemplo, sen^2 30° significa (sen 30°)^2, que é igual a $\left(\frac{1}{2}\right)^2$. A mesma explicação vale para *cos*^{2} α.
Demonstre na lousa a relação fundamental da Trigonometria apenas no 1º quadrante. Proponha como atividade complementar a demonstração da relação fundamental da Trigonometria nos demais quadrantes.

Demonstração

Seja α a medida de um arco trigonométrico com extremidade no 1º quadrante, conforme mostra a figura a seguir.



Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo *OMP*, temos: $(PM)^2 + (OP)^2 = (OM)^2$.

Sabemos que:

$$PM = \text{sen}\, \alpha,\ OP = \cos \alpha \text{ e } OM = 1 \text{ (raio)}$$

Logo:

$$\text{sen}^2\, \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

Observe que, da relação fundamental da Trigonometria, obtemos:

$$\text{sen}^2\, \alpha = 1 - \cos^2 \alpha \quad \text{e} \quad \cos^2 \alpha = 1 - \text{sen}^2\, \alpha$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

15. Dado que $\text{sen}\ \alpha = \frac{1}{3}$, com $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, calcule o valor de $\cos \alpha$.

Resolução

$$\text{sen}^2\ \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\therefore \cos^2 \alpha = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9} \Rightarrow \cos \alpha = \pm\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

Como α é uma medida do 2º quadrante, concluímos que $\cos \alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

16. Determinar os valores de $\text{sen}\ x$ e de $\cos x$ sabendo que $\text{sen}\ x = 3 \cos x$ e que $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$.

Resolução

$$\begin{cases} \text{sen}\ x = 3\ \cos x & (1) \\ \text{sen}^2\ x + \cos^2\ x = 1 & (2) \end{cases}$$

Substituindo (1) em (2), obtemos:

$$(3 \cos x)^2 + \cos^2 x = 1 \Rightarrow 10\ \cos^2 x = 1$$

$$\therefore \cos^2 x = \frac{1}{10} \Rightarrow \cos x = \pm\frac{1}{\sqrt{10}} = \pm\frac{\sqrt{10}}{10}$$

Como x é uma medida do 3º quadrante, temos:

$$\cos x = -\frac{\sqrt{10}}{10}$$

Substituindo $\cos x$ por $-\frac{\sqrt{10}}{10}$ em (1), obtemos:

$$\text{sen}\ x = -\frac{3\sqrt{10}}{10}$$

17. Resolver, em $\mathbb{R}$, a equação na variável x:

$$x^2 - 2x + \text{sen}^2\ \alpha = 0$$

Resolução

Na variável x, a equação polinomial é do 2º grau. Então:

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot \text{sen}^2\ \alpha =$$

$$= 4 - 4\,\text{sen}^2\ \alpha = 4\,(1 - \text{sen}^2\ \alpha)$$

Pela relação fundamental, $\text{sen}^2\ \alpha + \cos^2\ \alpha = 1$, temos $\cos^2\ \alpha = 1 - \text{sen}^2\ \alpha$ e, portanto, $\Delta = 4 \cos^2\ \alpha$. Assim:

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{4\ \cos^2 \alpha}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm 2\ \cos \alpha}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ x = 1 + \cos \alpha\ \text{ ou }\ x = 1 - \cos \alpha$$

Concluímos, então, que o conjunto solução da equação é: $S = \{1 + \cos \alpha,\ 1 - \cos \alpha\}$

18. Um encanamento cilíndrico está apoiado em uma canaleta em "V", conforme mostra a figura 1. A circunferência de centro O da figura 2 representa uma secção transversal do cano, em que A e B são pontos de tangência da circunferência nos lados do ângulo $A\hat{P}B$, que representa uma secção transversal da canaleta. Se a distância da circunferência ao vértice P é 4 cm e o ângulo $O\hat{P}A$ tem medida α, com $\cos \alpha = 0{,}6$, calcule a medida do raio do cano.

Figura 1

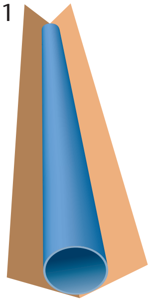
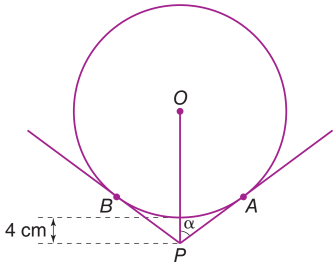


Figura 2



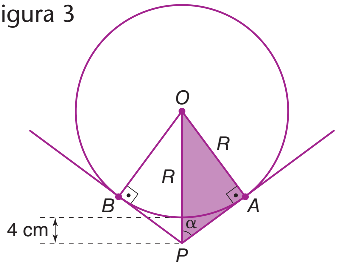
Resolução

Observando que os raios $\overline{OA}$ e $\overline{OB}$ são perpendiculares às retas tangentes $\overleftrightarrow{PA}$ e $\overleftrightarrow{PB}$, e indicando por R a medida, em centímetro, do raio da circunferência, esquematizamos, na figura 3, essas informações.

Do triângulo retângulo OPA, temos:

$$\text{sen}\ \alpha = \frac{R}{R + 4}\quad (1)$$

Figura 3



Como $\cos\ \alpha = 0{,}6$, calculamos $\text{sen}\ \alpha$ pela relação fundamental da Trigonometria:

$$\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \text{sen}^2\ \alpha + (0{,}6)^2 = 1$$

$$\therefore \text{sen}^2\ \alpha + 0{,}36 = 1 \Rightarrow \text{sen}^2\ \alpha = 0{,}64$$

$$\therefore \text{sen}\ \alpha = \pm 0{,}8$$

Como α é medida de um ângulo agudo, temos: $\text{sen}\ \alpha = 0{,}8\ \ (2)$

De (1) e (2), deduzimos que:

$$0{,}8 = \frac{R}{R + 4} \Rightarrow R = 0{,}8R + 3{,}2$$

$$\therefore\ 0{,}2R = 3{,}2 \Rightarrow R = 16$$

Concluímos, então, que o raio do cano mede 16 cm.

ILUSTRAÇÕES: ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Faça os exercícios no caderno.

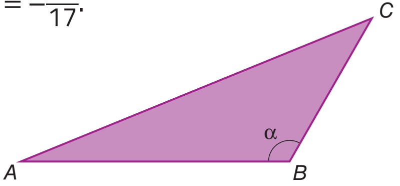
33. Dado que sen $\alpha = \frac{4}{5}$ e $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, calcule o valor de cos α. **33.** $-\frac{3}{5}$

34. Sendo cos $x = -\frac{1}{3}$ e $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$, calcule o valor de sen *x*. **34.** $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$

35. Determine sen β e cos β sabendo que sen β = 2 cos β e $\pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$. **35.** sen $\beta = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$; cos $\beta = -\frac{\sqrt{5}}{5}$

36. Obtenha *m*, com $m \in \mathbb{R}$, tal que: sen $x = \frac{m}{4}$ e cos $x = \frac{\sqrt{m+1}}{2}$ **36.** $m = 2$

37. No triângulo *ABC*, a medida do lado $\overline{BC}$ é 34 cm, e o ângulo obtuso $A\hat{B}C$ tem medida α, com cos $\alpha = -\frac{8}{17}$.



a. Copie esse triângulo em seu caderno e desenhe a altura relativa ao lado $\overline{AB}$.

37. a. Resposta no final deste livro.

b. Calcule a medida *h* da altura que você desenhou no item **a**. **37. b.** 30 cm

38. Resolva, em $\mathbb{R}$, a equação na variável *x*:

$$x^2 + 4x + 4\cos^2 \alpha = 0$$

38. $S = \{-2 + \text{sen } \alpha, -2 - \text{sen } \alpha\}$

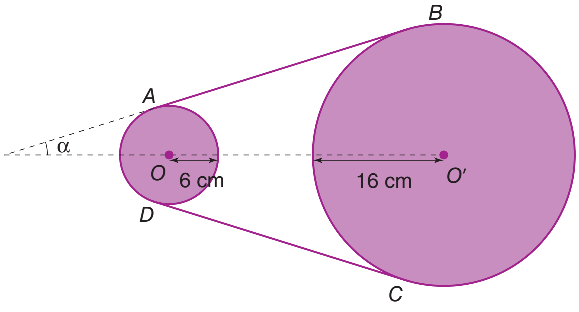
39. Determine o valor do cos *x*, sabendo que $3\,\text{sen}^2\, x - 4\,\text{sen}\, x + 1 = 0$ e que $0 < x < \frac{\pi}{2}$. **39.** $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

(*Sugestão*: faça a mudança de variável: sen *x* = *y*)

40. Sabendo que $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ e que $4\cos^2 x + 5\,\text{sen}\, x - 5 = 0$, calcule o valor de sen *x*. **40.** $\frac{1}{4}$

(*Sugestão*: substitua $\cos^2 x$ por $1 - \text{sen}^2\, x$)

41. Duas polias de centros *O* e *O'* e raios 6 cm e 16 cm, respectivamente, são conectadas por uma correia que as tangencia nos pontos *A*, *B*, *C* e *D*, conforme mostra a figura a seguir, em que α é a medida do ângulo agudo formado pelas retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{OO'}$, com cos $\alpha = \frac{12}{13}$. Calculem a distância entre os centros das polias. **41.** 26 cm



42. Elabore um problema envolvendo uma situação acerca da relação fundamental da Trigonometria. Depois, junte-se a um colega a fim de resolver o problema elaborado por ele.

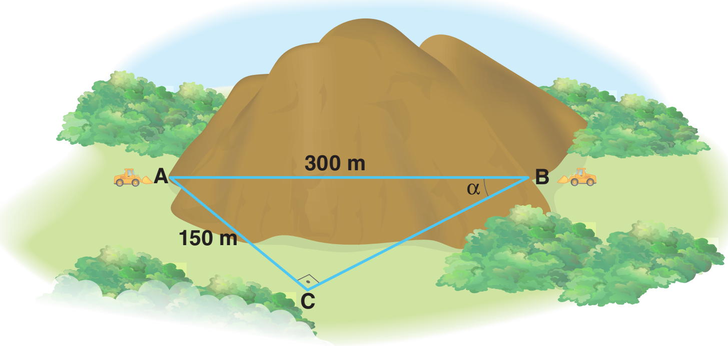
42. Resposta pessoal.

7. Equações trigonométricas

Várias situações do cotidiano envolvem questões sobre distâncias e ângulos. Algumas delas envolvem problemas que necessitam da resolução de equações trigonométricas para serem solucionados. Observe a situação a seguir.

Um túnel de 300 m de comprimento será construído em linha reta, unindo dois pontos, *A* e *B*, da base horizontal de uma montanha. Uma equipe fará a perfuração a partir de *A*, e outra equipe, a partir de *B*. Para determinar a direção das perfurações de modo que os dois trechos escavados se encontrem, um engenheiro cartógrafo fixou um ponto *C* no terreno próximo à montanha de modo que o ângulo $A\hat{C}B$ fosse reto e *AC* = 150 m.

(Modelo didático sem escala e com cores fantasia.)



Observe o esquema dessa situação, em que a medida α do ângulo $A\hat{B}C$ determina a direção das escavações.

Para calcular a medida α, o engenheiro observou que no triângulo retângulo *ABC* tem-se:

$$\text{sen } \alpha = \frac{150}{300} \Rightarrow \text{sen } \alpha = \frac{1}{2}$$

ILUSTRAÇÕES: ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

Como α é a medida de um ângulo agudo, conclui-se que α = 30°.

Assim, as escavações devem ser realizadas horizontalmente em linha reta, formando um ângulo de 30° com $\overline{BC}$.

Note que, ao determinar o valor de α, obtivemos uma solução da equação $\text{sen}\ \alpha = \frac{1}{2}$.

Equações do tipo sen $x = k$ ou cos $x = k$, sendo k uma constante real, são chamadas de **equações trigonométricas imediatas**.

Resolução de uma equação trigonométrica imediata

Resolver, em um universo U, uma equação do tipo sen $x = k$ (ou cos $x = k$), sendo k uma constante real, significa obter o conjunto solução S formado por todos os valores pertencentes a U que, atribuídos à variável x, tornam verdadeira a sentença sen $x = k$ (ou cos $x = k$).

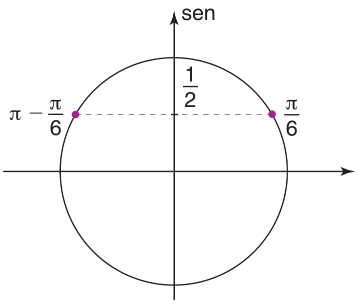
Resolveremos esse tipo de equação pelo método gráfico e, para isso, vamos utilizar o que foi explorado em alguns tópicos neste capítulo, como o quadro dos arcos notáveis e as simetrias de pontos na circunferência trigonométrica.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

19. Resolva a equação sen $x = \frac{1}{2}$ para $0 \leqslant x < 2\pi$.

Resolução

Para determinar os pontos da circunferência trigonométrica que têm ordenada $\frac{1}{2}$, considerando apenas a 1ª volta positiva, adotamos o esquema a seguir.



Observe que os valores de x, com $0 \leqslant x < 2\pi$, para os quais sen $x = \frac{1}{2}$, são:

$$x = \frac{\pi}{6} \text{ ou } x = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$$

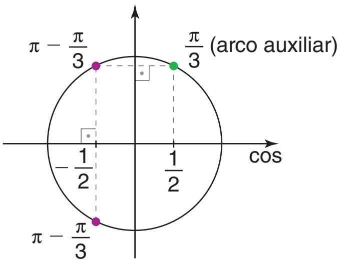
Logo: $S = \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right\}$

20. Resolva a equação cos $x = -\frac{1}{2}$ para $0 \leqslant x < 2\pi$.

Resolução

Devemos determinar os pontos da circunferência trigonométrica que têm abscissa $-\frac{1}{2}$, considerando apenas a 1ª volta positiva.

Observe, na figura a seguir, que esses pontos pertencem ao 2º e ao 3º quadrantes e, portanto, as medidas dos arcos com extremidades nesses pontos não estão no quadro trigonométrico dos arcos notáveis. Para usar o quadro de arcos notáveis, vamos buscar no 1º quadrante um **arco auxiliar**, isto é, um arco cujo cosseno seja igual a $\frac{1}{2}$.



Nesse caso, o arco auxiliar é o arco de medida $\frac{\pi}{3}$, pois $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$.

Finalmente, pelas simetrias, transportamos o arco auxiliar para o 2º e o 3º quadrantes.

Assim, os valores de x, com $0 \leqslant x < 2\pi$, para os quais cos $x = -\frac{1}{2}$, são:

$$x = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} \text{ ou } x = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$$

Logo: $S = \left\{\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right\}$

21. Resolva a equação sen $x = 1$:

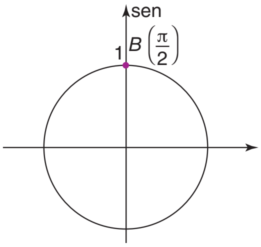
a. para $0 \leqslant x < 2\pi$;

b. em $\mathbb{R}$.

ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

Resolução

a. Precisamos determinar os pontos da circunferência trigonométrica que têm ordenada igual a 1, considerando apenas a 1ª volta positiva. O único ponto que satisfaz essa condição é o ponto *B*, representado na circunferência trigonométrica a seguir.



Assim, para $0 \leqslant x < 2\pi$, temos:

$$\text{sen } x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$$

Logo: $S = \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$

b. No universo $\mathbb{R}$, o conjunto solução *S* da equação é formado pelos números reais associados ao ponto *B* nas infinitas voltas da circunferência trigonométrica; logo:

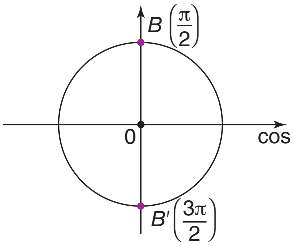
$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$$

22. Resolva a equação $\cos x = 0$:

a. para $0 \leqslant x < 2\pi$; **b.** em $\mathbb{R}$.

Resolução

a. Precisamos determinar os pontos da circunferência trigonométrica que têm abscissa igual a zero, considerando apenas a 1ª volta positiva. Na circunferência trigonométrica a seguir, os pontos que têm abscissa zero são *B* e *B'*.



Portanto, os valores de *x*, com $0 \leqslant x < 2\pi$, para os quais $\cos x = 0$, são $x = \frac{\pi}{2}$ ou $x = \frac{3\pi}{2}$

Logo: $S = \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\}$

b. No universo $\mathbb{R}$, o conjunto solução *S* da equação é formado pelos números reais associados aos pontos *B* ou *B'* nas infinitas voltas da circunferência trigonométrica; logo:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$$

23. Resolva a equação $2 \text{ sen}^2 x + \cos x - 1 = 0$:

a. para $0 \leqslant x < 2\pi$; **b.** em $\mathbb{R}$.

Resolução

a. Quando uma equação apresenta seno e cosseno, um recurso útil para transformá-la em uma equação equivalente, que apresente somente seno ou somente cosseno, é aplicar uma destas identidades: $\text{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$ ou $\cos^2 x = 1 - \text{sen}^2 x$.

Na equação proposta, vamos substituir $\text{sen}^2 x$ por $(1 - \cos^2 x)$, obtendo:

$$2(1 - \cos^2 x) + \cos x - 1 = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2 - 2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$$
$$\therefore -2\cos^2 x + \cos x + 1 = 0$$

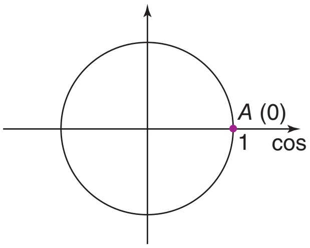
Efetuamos a mudança de variável $\cos x = t$, obtendo:

$$-2t^2 + t + 1 = 0$$
$$\Delta = 1^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 1 = 9$$
$$\therefore t = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2 \cdot (-2)} = \frac{-1 \pm 3}{-4} \Rightarrow t = 1 \text{ ou } t = -\frac{1}{2}$$

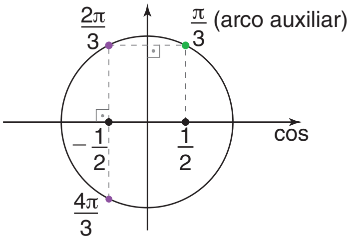
Como $\cos x = t$, temos $\cos x = 1$ ou $\cos x = -\frac{1}{2}$.

Resolvendo essas equações na 1ª volta positiva, obtemos:

- $\cos x = 1 \Rightarrow x = 0$



- $\cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{2\pi}{3}$ ou $x = \frac{4\pi}{3}$



Logo: $S = \left\{0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right\}$

b. Observando que as raízes obtidas no item **a** estão associadas a pontos que dividem a circunferência trigonométrica em três arcos congruentes, temos, no universo $\mathbb{R}$, o conjunto solução *S* da equação:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = k \cdot \frac{2\pi}{3}, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$$

ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

Reflexão: Resposta nas **Orientações Específicas** deste capítulo.

Reflexão

Para cada valor do seno, há infinitas medidas de arcos trigonométricos que têm esse seno. Por que a calculadora científica apresenta apenas um resultado?

Análise da resolução: O estudante cometeu um erro ao admitir que α é uma medida da primeira volta positiva da circunferência trigonométrica. Para determinar o intervalo de variação de α, multiplicamos por 2 os membros da desigualdade $0 \leqslant x < 2\pi$, obtendo $0 \leqslant 2x < 4\pi$. Como $\alpha = 2x$, concluímos que $0 \leqslant \alpha < 4\pi$, ou seja, α é uma medida da primeira ou da segunda volta da circunferência trigonométrica. Assim, temos:

$\alpha = \frac{\pi}{2}$ ou $\alpha = \frac{5\pi}{2}$

Como $\alpha = 2x$, concluímos que:

$2x = \frac{\pi}{2}$ ou $2x = \frac{5\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$ ou $x = \frac{5\pi}{4}$

Logo: $S = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right\}$

ANÁLISE DA RESOLUÇÃO

Apontem o erro cometido na resolução a seguir e, depois, refaçam-na no caderno, corrigindo-a.

Exercício

Resolva a equação $\text{sen } 2x = 1$ para $0 \leqslant x < 2\pi$.

Resolução

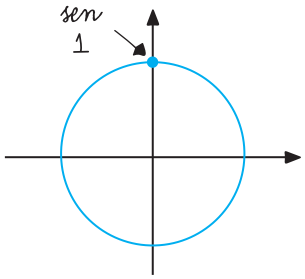
Substituindo $2x$ por α na equação, temos: $\text{sen } \alpha = 1$

$\therefore \alpha = \frac{\pi}{2}$

Assim:

$2x = \frac{\pi}{2} \Longrightarrow x = \frac{\pi}{4}$

Logo: $S = \left\{\frac{\pi}{4}\right\}$



ELISA NIEVAS/ARQUIVO DA EDITORA

TRABALHO E JUVENTUDES

Engenheiro cartógrafo

As pessoas formadas em engenharia cartográfica trabalham com aquisição, processamento, representação e análise espacial da geoinformação. Conhecimentos de Matemática, Física e Computação são essenciais para o desenvolvimento de uma carreira na área. O engenheiro cartógrafo tem como principal função definir o posicionamento espacial ou a localização sobre a superfície terrestre e gerar informações que permitam análises espaciais.

Além disso, esse profissional tem diferentes campos de atuação, como na Topografia, Geodésia, Cartografia, Sensoriamento Remoto, Agrimensura, Construção Civil e Geociências e Meio Ambiente.

No campo das Geociências, por exemplo, o profissional pode desenvolver estudos sobre a evolução do planeta em todos aspectos, inclusive quanto à formação de rochas, minerais e conteúdo fossilífero. A importância para a sociedade de pesquisas nessa área está, por exemplo, nos estudos acerca de mudanças climáticas e ambientais que já ocorreram no passado, pois isso pode auxiliar na compreensão das alterações atuais e futuras de mesmo tipo, sejam elas naturais ou causadas pelos seres humanos.

LUCIANA WHITAKER/PULSAR IMAGENS

Profissional utilizando um instrumento de precisão óptico que mede ângulos verticais e horizontais chamado teodolito, às margens da Rodovia Presidente Dutra, em Lavrinhas, SP. Foto de 2020.

Elaborado com base em: JULIANI, C. Geociências USP: contribuindo para o desenvolvimento da sociedade brasileira. **Jornal da USP**, 19 fev. 2024. Disponível em: https://jornal.usp.br/artigos/geociencias-usp-contribuindo-para-o-desenvolvimento-da-sociedade-brasileira/.; UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO (UFPE). Engenharia Cartográfica e de Agrimensura. **EXPO UFPE 2023**, 2023. Disponível em: https://sites.ufpe.br/expoufpe/engenharia-cartografica-e-de-agrimensura/. Acesso em: 12 jul. 2024.

No **exercício proposto 46**, há uma forte tendência de os estudantes dividirem os dois membros da equação $\text{sen}^4\, x = \text{sen}^2\, x$ por $\text{sen}^2\, x$, obtendo $\text{sen}^2\, x = 1$. Explique que essa divisão não é permitida, pois se perde a possibilidade de o sen x ser zero. Enfatize que a divisão dos dois membros de uma equação por um termo variável só é possível se esse termo for (com certeza) diferente de zero.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Faça os exercícios no caderno.

43. Resolva as equações a seguir para $0 \leqslant x < 2\pi$.

a. $\text{sen}\, x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ **43. a.** $S = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right\}$

b. $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ **43. b.** $S = \left\{\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right\}$

c. $\cos x = \frac{1}{2}$ **43. c.** $S = \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\}$

d. $\text{sen}\, x = -\frac{1}{2}$ **43. d.** $S = \left\{\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right\}$

e. $\cos x = 1$ **43. e.** $S = \{0\}$

f. $\text{sen}\, x = 0$ **43. f.** $S = \{0, \pi\}$

g. $\text{sen}\, x = 3$ **43. g.** $S = \varnothing$

h. $\cos x = -2$ **43. h.** $S = \varnothing$

44. Determine o conjunto solução das equações a seguir para $0° \leqslant x < 360°$.

a. $\cos x = \frac{1}{2}$ **44. a.** $S = \{60°, 300°\}$

b. $\text{sen}\, x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ **44. b.** $S = \{240°, 300°\}$

c. $\cos x = 1$ **44. c.** $S = \{0°\}$

d. $\text{sen}^2\, x = \frac{1}{4}$ **44. d.** $S = \{30°, 150°, 210°, 330°\}$

45. A **propriedade do produto nulo**, segundo a qual "o produto de números reais é igual a zero se, e somente se, pelo menos um dos fatores é igual a zero", é de grande utilidade na resolução de certas equações. Aplicando essa propriedade, resolvam as equações a seguir para $0 \leqslant x < 2\pi$. **45. a.** $S = \left\{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}\right\}$

a. $\text{sen}\, x \cdot \cos x = 0$

45. b. $S = \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right\}$

b. $(2\, \text{sen}\, x - 1)(2 \cos x + \sqrt{3}) = 0$

c. $2 \cdot \text{sen}\, x \cdot \cos x + \text{sen}\, x = 0$ **45. c.** $S = \left\{0, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}\right\}$

(*Sugestão*: Fatorem o primeiro membro.)

46. A soma dos valores de x, com $0 \leqslant x < 2\pi$, tal que $\text{sen}^4\, x = \text{sen}^2\, x$ é: **46. alternativa b**

a. 0

b. 3π

c. $\frac{\pi}{3}$

d. 2π

e. $\frac{3\pi}{2}$

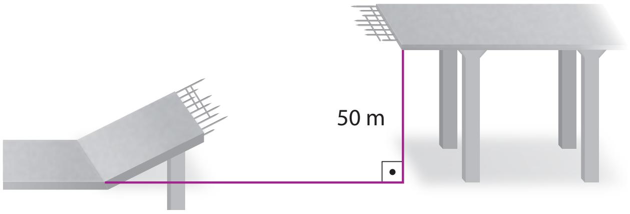
47. **Equação polinomial** é toda aquela que pode ser representada por um polinômio igualado a zero. Certas equações trigonométricas podem ser resolvidas com o auxílio de uma equação polinomial, bastando, para isso, uma mudança de variável. Resolvam as equações a seguir para $0 \leqslant x < 2\pi$.

a. $2\, \text{sen}^2\, x - \text{sen}\, x - 1 = 0$ (Façam a mudança de variável: $\text{sen}\, x = y$) **47. a.** $S = \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right\}$

b. $\cos^2 x - 4 \cos x + 3 = 0$ (Façam a mudança de variável: $\cos x = y$) **47. b.** $S = \{0\}$

c. $2\, \text{sen}^2\, x + 3 \cos x - 3 = 0$ **47. c.** $S = \left\{0, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\}$

48. Um engenheiro projetou uma rampa reta e plana com 100 m de comprimento, que vai unir dois patamares planos e horizontais entre os quais há um desnível vertical de 50 m.



ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

Iniciada a construção a partir do patamar inferior, é necessário determinar a inclinação da rampa para que a construção termine exatamente no nível do patamar superior. Essa inclinação é a medida α do ângulo agudo entre o plano da rampa e o plano horizontal. Determine a medida α, em grau. **48.** $\alpha = 30°$

49. a. $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi \text{ ou } x = \frac{7\pi}{4} + k \cdot 2\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

49. Resolva as equações a seguir no universo $\mathbb{R}$.

a. $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

b. $\text{sen}\, x = 0$ **49. b.** $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = 0 + k \cdot \pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\}$

c. $\text{sen}\, x - \cos^2 x = 1$

d. $\text{sen}^2\, x = \frac{1}{2}$ **49. c.** $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

49. d. $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{2}, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

50. No século XVIII, o matemático e naturalista francês Georges-Louis Leclerc (1707-1788), conde de Buffon, propôs um método curioso para o cálculo do número π. A demonstração da validade do método é fundamentada na Trigonometria. Pesquise na internet esse método e realize a experiência sugerida por ele, constatando que, quanto maior o número de repetições do experimento, mais o resultado se aproxima de π.

50. Respostas nas **Orientações Específicas** deste capítulo.

Reflexão **Reflexão:** Respostas nas **Orientações Específicas** deste capítulo.

Como resolver a equação $\text{sen}\, x = \frac{1}{4}$ para $0° \leqslant x < 360°$?

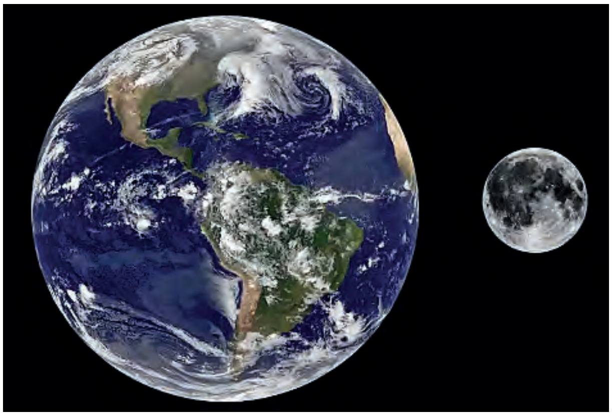
Para retomar os conteúdos estudados, resolva os exercícios complementares 12 a 15.

MATEMÁTICA SEM FRONTEIRAS

Distâncias no Sistema Solar

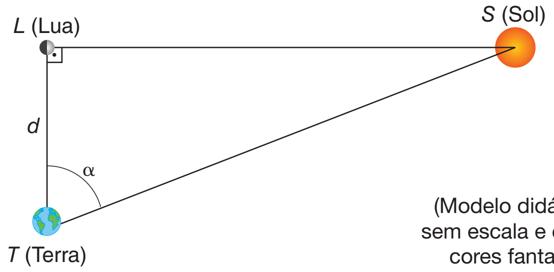
O matemático e astrônomo grego Aristarco de Samos (310 a.C.-230 a.C.) foi, pelo que se sabe, o primeiro a lançar a audaciosa hipótese heliocêntrica (o Sol no centro do Sistema Solar), antecipando-se em 1.700 anos ao astrônomo polonês Nicolau Copérnico (1473-1543), que usou o sistema heliocêntrico para descrever os movimentos dos corpos celestes.

JPL-CALTECH/NASA



Fotomontagem comparando o diâmetro da Terra e o da Lua.

Aristarco foi pioneiro no cálculo de distâncias entre corpos celestes. Um dos problemas a que dedicou especial atenção foi a determinação da distância entre a Terra e o Sol. Ele observou que, quando a Lua é avistada da Terra em seu quarto crescente ou minguante, os raios solares, que incidem na Lua, são perpendiculares à reta que passa pelos centros da Terra e da Lua:



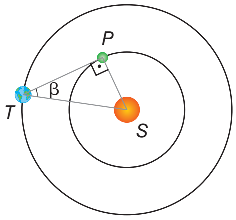
(Modelo didático sem escala e com cores fantasia.)

ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

Além disso, Aristarco estimou a medida α do ângulo $L\hat{T}S$. Com esse dado e conhecendo a distância d da Terra à Lua, podemos calcular a distância TS da Terra ao Sol da seguinte maneira:

$$\cos \alpha = \frac{d}{TS} \Rightarrow TS = \frac{d}{\cos \alpha}$$

Tendo a distância TS, podemos calcular outras distâncias no Sistema Solar. Por exemplo, se um planeta P tem raio orbital menor que o da Terra e a medida do ângulo $P\hat{T}S$ assume seu valor máximo β, então o ângulo $T\hat{P}S$ é reto, conforme esta representação esquemática:



PS: raio orbital do planeta P

TS: raio orbital do planeta Terra

(Modelo didático sem escala e com cores fantasia.)

Assim, a distância entre o Sol e o planeta P (raio orbital do planeta P) é dada por:

$$\text{sen } \beta = \frac{SP}{TS} \Rightarrow SP = TS \cdot \text{sen } \beta$$

Esse cálculo fornece uma boa aproximação, pois as órbitas elípticas dos planetas, além de poderem ser consideradas coplanares, são muito próximas de circunferência.

Elaborado com base em: COSTA, J. R. V. Aristarco de Samos e a distância Terra-Sol. **Astronomia no Zenite**, 21 jul. 2000. Disponível em: https://www.zenite.nu/aristarco-de-samos-e-a-distancia-terra-sol; OLIVEIRA FILHO, K. S.; SARAIVA, M. F. O. Distâncias dentro do Sistema Solar. **Departamento de Astronomia do Instituto de Física da UFRGS**, 18 out. 2023. Disponível em: http://astro.if.ufrgs.br/p1/node4.htm. Acesso em: 11 jul. 2024.

Atividades

Faça as atividades no caderno.

Dado que a distância entre a Terra e o Sol é de, aproximadamente,150.000.000 km, respondam aos itens a seguir.

1. O raio orbital do planeta Vênus (V) é menor que o da Terra (T). Sabendo que a distância entre o Sol (S) e o planeta Vênus é de 108.204.000 km, calculem um valor aproximado da medida máxima que assume o ângulo $V\hat{T}S$. **1.** ≈ 46,17°

2. Pesquisem um método para o cálculo da distância entre o Sol e um planeta com raio orbital maior que o raio da Terra. Redijam um texto explicando o método. **2.** Resposta pessoal.

3. O raio orbital do planeta Marte (M) é maior que o da Terra (T). Calculem a distância aproximada entre o Sol (S) e o planeta Marte, sabendo que, quando o ângulo $S\hat{M}T$ assume sua medida máxima, a medida do ângulo $T\hat{S}M$ é 48,8° aproximadamente. **3.** ≈ 227.721.000 km

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

Faça os exercícios no caderno.

ILUSTRAÇÕES: ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

1. (Enem) Em 20 de fevereiro de 2011 ocorreu a grande erupção do vulcão Bulusan nas Filipinas. A sua localização geográfica no globo terrestre é dada pelo GPS (sigla em inglês para Sistema de Posicionamento Global) com longitude de 124°3′0″ a leste do Meridiano de Greenwich.

Dado: 1° equivale a 60′ e 1′ equivale a 60″.

PAVARIN, G. **Galileu**, fev. 2012 (adaptado).

A representação angular da localização do vulcão com relação a sua longitude na forma decimal é:

a. 124,02°
b. 124,05°
c. 124,20°
d. 124,30°
e. 124,50°

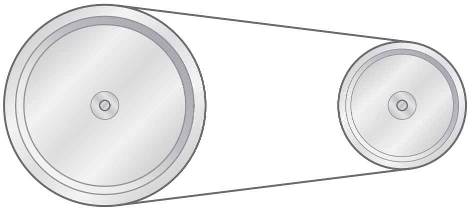
1. alternativa **b**

2. A Lua gira ao redor da Terra em uma órbita quase circular, com raio médio de 384.000 km, percorrendo aproximadamente $\frac{\pi}{15}$ rad por dia (24 horas) para leste em relação ao Sol. Admitindo que essa órbita seja uma circunferência, concluímos que a velocidade da Lua em volta da Terra é: **2.** alternativa **e**

a. $\frac{1.300\pi}{3}$ km/h
b. 25.600π km/h
c. 12.800π km/h
d. $\frac{2.203\pi}{5}$ km/h
e. $\frac{3.200\pi}{3}$ km/h

3. Duas polias acopladas por uma correia têm 18 cm e 12 cm de raio, respectivamente, e a velocidade angular da maior é de 1.000π rad/min.

Supondo que a correia não seja elástica e não derrape em torno das polias, responda os itens a seguir.



a. Qual é a velocidade angular da polia maior em grau por segundo? **3. a.** 3.000°/s

b. Qual é a velocidade angular da polia menor em radiano por segundo? **3. b.** 25π rad/s

c. Quando a polia menor gira 3.000π rad, quantos radianos gira a maior? **3. c.** 2.000π rad

d. Quando a polia maior gira 36.000°, quantos radianos gira a menor? **3. d.** 300π rad

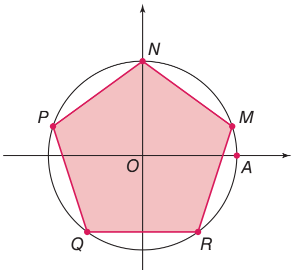
4. Suponha que um observador do pôr do Sol esteja sobre a linha do equador terrestre e que, por aproximação, a trajetória aparente do Sol durante o ocaso seja coplanar com o equador da Terra. Além disso, considere que o astro seja visível durante 12 h do dia, com velocidade constante.

Sabendo que o ângulo de visada do disco solar, observado da Terra, mede 32′ (trinta e dois minutos angulares), aproximadamente, calcule o tempo transcorrido no ocaso, desde o instante em que o Sol encosta na linha do horizonte até o instante em que desaparece completamente. **4.** 2 min 8 seg

JUNIOR ROZZO/ROZZO IMAGENS

Imagem aparente do Sol se aproximando da linha do horizonte em São Sebastião, São Paulo. Foto de 2022.

5. Observe o pentágono regular *MNPQR* de centro *O*, inscrito na circunferência trigonométrica, com o vértice *N* pertencente ao eixo das ordenadas.



a. Obtenha a medida α, em radiano, com $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, do arco trigonométrico com extremo em *M*. (Lembre-se de que a origem de todo arco trigonométrico é o ponto *A*.) **5. a.** $\frac{\pi}{10}$

b. Obtenha todas as medidas β, em radiano, com $0 < \beta < 6\pi$, dos arcos trigonométricos com extremo em *Q*. **5. b.** $\frac{7\pi}{10}$, $\frac{27\pi}{10}$ e $\frac{47\pi}{10}$

c. Obtenha todas as medidas θ, em radiano, com $-6\pi < \theta < 0$, dos arcos trigonométricos com extremo em *R*. **5. c.** $-\frac{3\pi}{10}$, $-\frac{23\pi}{10}$ e $-\frac{43\pi}{10}$

6. Considere os pontos da circunferência trigonométrica associados aos números reais *x* da forma: $x = \pi + k \cdot \frac{\pi}{4}$, com $k \in \mathbb{Z}$. Esses pontos são vértices de um:

a. quadrado.
b. pentágono regular.
c. hexágono regular.
d. octógono regular.
e. decágono regular.

6. alternativa **d**

7. Com o auxílio do quadro trigonométrico dos arcos notáveis, calcule:

a. sen $\frac{5\pi}{6}$ **7. a.** $\frac{1}{2}$

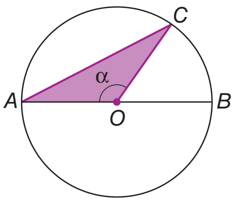
b. sen $\frac{4\pi}{3}$ **7. b.** $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

c. cos 300° **7. c.** $\frac{1}{2}$

d. cos $\frac{7\pi}{4}$ **7. d.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$

8. Na figura, a circunferência de centro O tem 12 cm de raio, e o ângulo obtuso $A\hat{O}C$ tem medida α com $\text{sen}\ \alpha = 0{,}8$.

Calcule a medida da projeção ortogonal do segmento $\overline{AC}$ sobre o diâmetro $\overline{AB}$. **8.** 19,2 cm



9. (UFMA) Simplificando a expressão

$$A = \frac{\cos(\pi + x) + \cos(-x) + \cos(\pi - x)}{\text{sen}(-x) + \text{sen}(\pi - x) + \cos x},$$

com $\cos x \neq 0$, obtemos: **9.** alternativa **d**

a. $A = \cos x$

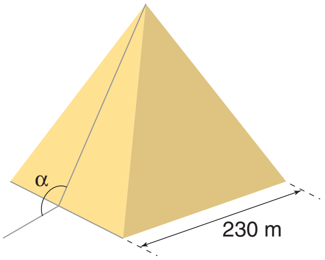
b. $A = 1$

c. $A = -\cos x$

d. $A = -1$

e. $A = \frac{1}{\cos x}$

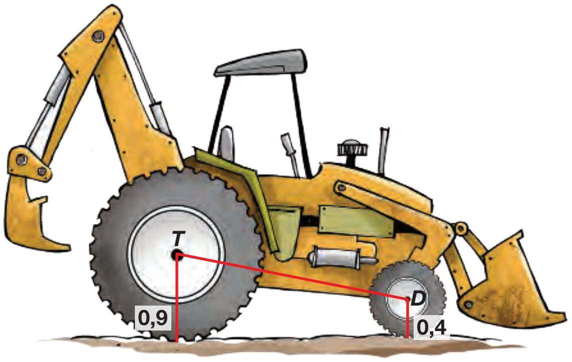
10. A pirâmide de Quéops (século XXVI a.C.), a maior do Egito, tem como base um quadrado de 230 m de lado. A reta que passa pelo centro da base e pelo ponto mais elevado (vértice) dessa pirâmide é perpendicular à base, e o segmento de reta com extremos no vértice e no ponto médio de um lado da base forma com o plano da base um ângulo obtuso de medida α tal que $\cos\alpha = -0{,}6$, aproximadamente. Calcule a medida, aproximada, da altura dessa pirâmide.



10. ≈ 153 m

11. Cada pneu traseiro de um trator tem raio de 0,9 m, e cada pneu dianteiro tem raio de 0,4 m.

Calcule a distância entre os centros T e D de dois pneus de um mesmo lado do trator, sabendo que a reta $\overleftrightarrow{TD}$ forma um ângulo obtuso de medida α com o solo plano, de modo que $\cos\alpha = -\frac{2\sqrt{6}}{5}$. **11.** 2,5 m



(*Sugestão*: obtenha $\cos(180° - \alpha)$ e, em seguida, $\text{sen}(180° - \alpha)$.)

12. Resolva as equações a seguir para $0 \leqslant x < 2\pi$.

a. $\text{sen}\ x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ **12. a.** $S = \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right\}$

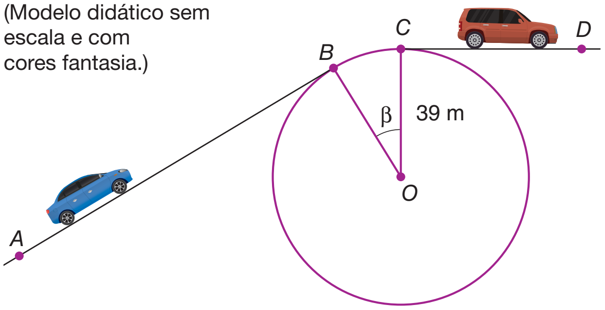
b. $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ **12. b.** $S = \left\{\frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right\}$

c. $\text{sen}\ x = -1$ **12. c.** $S = \left\{\frac{3\pi}{2}\right\}$

d. $\cos^2 x = \frac{1}{2}$ **12. d.** $S = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right\}$

e. $2\,\text{sen}^2 x + 7\cos x - 5 = 0$ **12. e.** $S = \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\}$

13. Para suavizar o final de um trecho em aclive de uma estrada, um engenheiro projetou-o com o perfil em forma de um arco $\widehat{BC}$ de uma circunferência de centro O e 39 m de raio. Os extremos B e C desse arco são pontos de tangência dos perfis $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ dos trechos retos que antecede e sucede $\widehat{BC}$, respectivamente, conforme a figura a seguir.

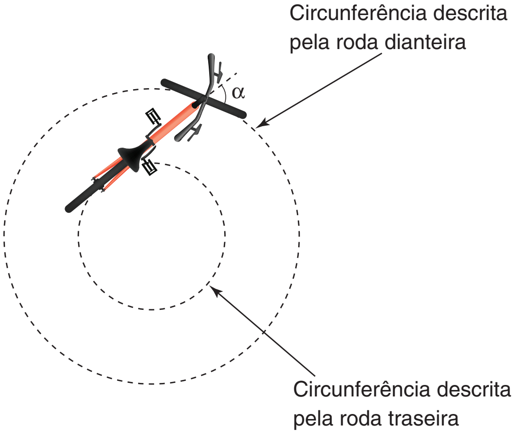

(Modelo didático sem escala e com cores fantasia.)

Dado que as retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{CD}$ formam um ângulo obtuso de medida α, com $\cos\alpha - \cos(180° - \alpha) = -1$, calcule:

a. a medida β do ângulo agudo $B\hat{O}C$; **13. a.** 60°

b. o comprimento do trecho $\widehat{BC}$ dessa estrada. **13. b.** 40,82 m

14. Ao projetar uma bicicleta, os engenheiros de uma indústria determinaram que a medida α do maior ângulo de esterçamento ocorre quando a roda dianteira descreve uma circunferência com 130 cm de raio e a traseira descreve uma circunferência com 65 cm de raio. Calcule a medida α, em grau.



(*Sugestão*: quando a bicicleta, em movimento, está na posição vertical, as projeções ortogonais das rodas sobre o piso plano e horizontal são tangentes às circunferências descritas.) **14.** $\alpha = 60°$

FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

GEORGE TUTUMI/ARQUIVO DA EDITORA

ILUSTRAÇÕES: ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

VERIFIQUE O QUE APRENDEU NO CAPÍTULO 3

Além do processo de avaliação promovido pelo professor, é importante que você, estudante, realize uma autoavaliação. O objetivo desse instrumento é mensurar seu nível de aprendizagem em relação ao assunto desenvolvido no capítulo. Para ajudá-lo nessa tarefa, apresentamos as seguintes questões.

1. Um ponto material em movimento circular uniforme percorre 16 cm a cada 8 min. Sabendo que o raio da circunferência descrita por esse movimento mede 4 cm, responda às questões a seguir.

a. Quantos radianos percorre o ponto material em 8 min? **1. a.** 2 rad

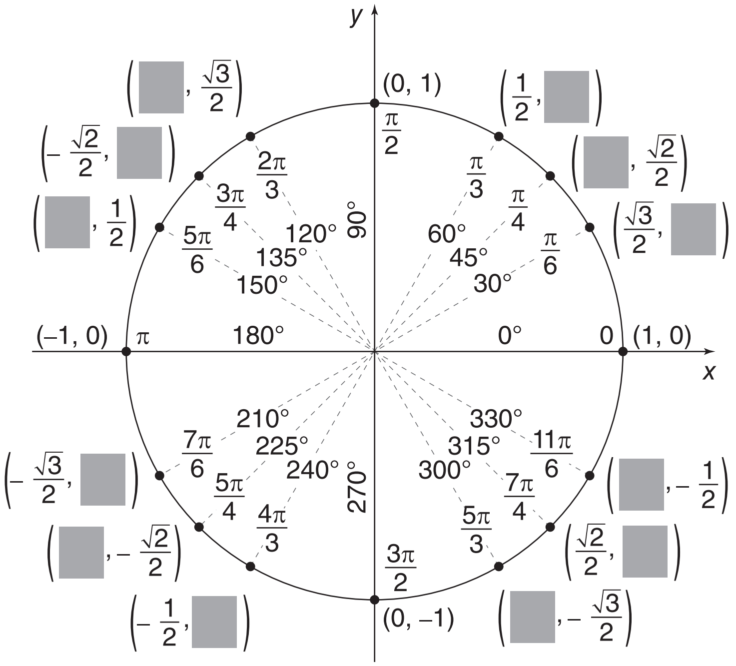
1. b. 5 voltas completas.

b. Adotando $\pi = 3{,}14$, quantas voltas completas o ponto material descreve em 62,8 min?

2. Calcule a medida x do arco trigonométrico da 1ª volta positiva ($0° \leqslant x < 360°$) que possui a mesma extremidade do arco de 1.140°. **2.** 60°

3. Copie a circunferência trigonométrica a seguir, no caderno, completando cada par ordenado com a coordenada que falta. **3.** Resposta no final do livro.

Na seção, propomos uma avaliação e uma ficha de autoavaliação como ferramenta de estudo. Oriente os estudantes a fazerem essas atividades com atenção e, caso encontrem dificuldades, incentive-os a revisitar os conteúdos estudados para reforçar a compreensão.



FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

4. Determine sen α e cos α sabendo que sen α = −4 cos α e $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. **4.** $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{17}}{17}$; $\text{sen}\ \alpha = \frac{4\sqrt{17}}{17}$

Ferramenta de estudo

Ao término da resolução dos exercícios, retome as orientações para compor um resumo, indicadas na seção **Verifique o que você aprendeu no Capítulo 1**, e elabore um texto apresentando uma síntese dos conteúdos estudados no Capítulo 3 a fim de ter uma perspectiva geral sobre o seu desempenho neste capítulo. Se teve dificuldades ou não resolveu algum exercício, retome os conteúdos abordados no capítulo. Após algumas tentativas, anote as dúvidas e converse com um colega que possa ajudá-lo. Se, ainda assim, a dúvida persistir, pergunte ao professor na aula seguinte.

Gerencie bem seu tempo de estudo em casa e estabeleça metas diárias alcançáveis, planejando seus estudos, passo a passo.

CAPÍTULO

4

Outras razões trigonométricas e adição de arcos

Essa abertura possibilita um trabalho interdisciplinar com Ciências Humanas e Sociais Aplicadas, explorando os instrumentos náuticos utilizados pelos marinheiros durante o período das grandes navegações (astrolábio, quadrante, sextante etc.). Além disso, é importante propor uma perspectiva da decolonialidade, relacionando a chegada dos portugueses no Brasil e as mudanças no povoamento indígena: de mais de milhões de indígenas que havia antes da colonização portuguesa, em 1500 estava na casa dos milhões de pessoas e em 2000 mal ultrapassava os 300 mil indivíduos, segundo o IBGE. Atualmente, esse número aumentou para cerca de 1,7 milhão.

Para orientar esse trabalho, pode-se utilizar como base fontes do IBGE como a sugerida a seguir.

IBGE. Território brasileiro e povoamento: história indígena. *In*: **Brasil**: 500 anos de povoamento. IBGE: Rio de Janeiro, 2000. Disponível em: https://brasil500anos.ibge.gov.br/territorio-brasileiro-e-povoamento/historia-indigena.html. Acesso em: 25 set. 2024.

TANCREDI SCARPELLI - COLEÇÃO PARTICULAR

SCARPELLI, Tandredi. Partida das três caravelas de Cristóvão Colombo [The departure of Cristopher Columbus' three ships]. Litografia colorizada. *In*: LORENZINI, Paolo. **Storia dei Viaggiatori**. Florença: Nerbini, 1937.

Além da teoria

Durante o período das grandes navegações, os marinheiros utilizavam um instrumento chamado de balestilha para medir a altura angular de uma estrela ou a distância angular entre duas estrelas, a fim de determinar a latitude em que navegavam. A balestilha é formada por uma régua geralmente de madeira, chamada de virote, que atravessa no ponto médio uma haste reta, chamada de soalha, que desliza perpendicularmente ao virote.

SCIENCE SOCIETY PICTURE LIBRAR/GETTY IMAGES

1. Pesquise outros instrumentos utilizados no período das grandes navegações.
2. Com a tecnologia, hoje dispomos de instrumentos de navegação mais modernos. Em sua opinião, seria possível utilizar os instrumentos de navegação do período das grandes navegações? **Além da teoria:** Respostas pessoais.

1. Tangente de um arco trigonométrico

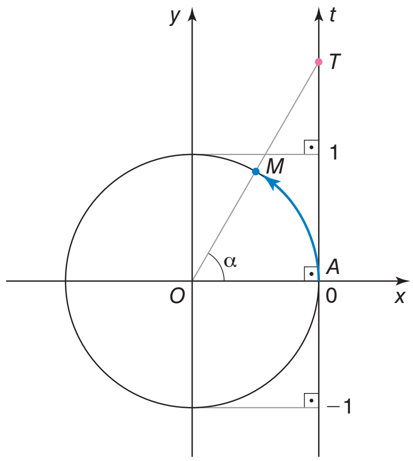
Assim como fizemos para o seno e o cosseno no capítulo anterior, vamos estender o conceito de **tangente** para um arco trigonométrico, tomando por base a ideia de tangente de um ângulo agudo de um triângulo retângulo. Para compreender essa extensão, considere o arco trigonométrico $\widehat{AM}$ de medida α, com $0° < \alpha < 90°$, e o eixo real *t* de origem *A*, com a mesma direção e a mesma orientação do eixo *Oy* e subdividido em unidades iguais ao raio da circunferência trigonométrica, conforme mostra a figura. Para determinar a tangente do arco $\widehat{AM}$, prolongamos o segmento $\overline{OM}$ até sua intersecção *T* com o eixo *t*.

Comente o texto introdutório, mostrando que a definição de tangente de um arco trigonométrico é uma extensão da definição de tangente de um ângulo agudo no triângulo retângulo.

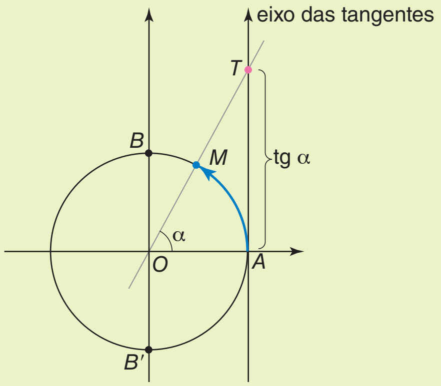
No triângulo retângulo *AOT*, temos:

$$\text{tg}\ \alpha = \frac{AT}{OA} = \frac{AT}{1} = AT$$

Portanto, a tangente de α é a medida do segmento de reta $\overline{AT}$ contido no eixo real *t*, que passará a ser chamado de **eixo das tangentes**. Ampliando essa ideia, vamos definir a tangente para qualquer arco trigonométrico cuja extremidade não pertença ao eixo das ordenadas.



Dado um arco trigonométrico $\widehat{AM}$ de medida α, com *M* não pertencente ao eixo das ordenadas, chama-se **tangente de α** a ordenada do ponto *T*, que é a intersecção da reta $\overleftrightarrow{OM}$ com o eixo das tangentes.



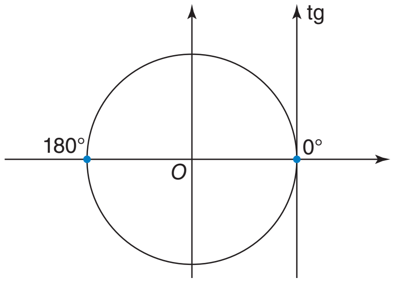
Observe que o ponto *M* não pode coincidir com *B* nem com *B*′, pois os prolongamentos dos raios $\overline{OB}$ e $\overline{OB'}$ não interceptam o eixo das tangentes. Por isso, dizemos que **não existe** tangente de um arco com extremidade em *B* ou em *B*′; por exemplo, na 1ª volta do sentido positivo da circunferência trigonométrica, não existe tg 90° nem tg 270°.

Reflexão: Observando o eixo real *t* das tangentes, na circunferência trigonométrica, constatamos que, por qualquer ponto de *t*, podemos traçar uma reta passando pelo centro da circunferência. Isso significa que, para qualquer número real, existem arcos trigonométricos cuja tangente é esse número, isto é, a tangente pode assumir qualquer valor em ℝ. Logo, não existem o menor nem o maior valor da tangente.

Exemplo

Para determinar tg 0° e tg 180°, marcamos na circunferência trigonométrica os pontos associados a 0° e a 180°, conforme indicado na figura. Como as retas que passam por esses pontos e pelo centro da circunferência interceptam o eixo das tangentes no ponto de ordenada zero, concluímos que:

$$\text{tg}\ 0° = 0 \text{ e tg}\ 180° = 0$$



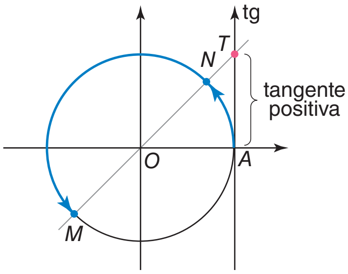
Reflexão

O menor valor que o seno e o cosseno assumem é −1 e o maior valor deles é 1. Quais são o menor e o maior valor que a tangente assume?

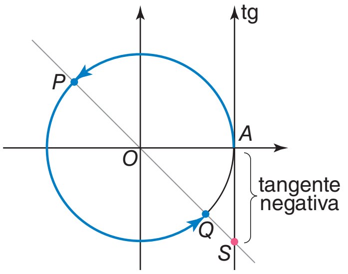
ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

Variação de sinal da tangente

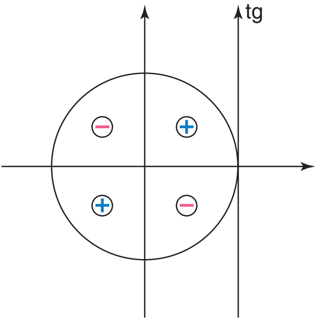
Se um arco trigonométrico tiver a extremidade no 1º ou no 3º quadrante, o prolongamento do raio que passa por essa extremidade interceptará o eixo das tangentes em um ponto *T* de ordenada positiva.



Se um arco trigonométrico tiver a extremidade no 2º ou no 4º quadrante, o prolongamento do raio que passa por essa extremidade interceptará o eixo das tangentes em um ponto *S* de ordenada negativa.



ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA



Esquema de sinais para a tangente.

Ou seja, a tangente de um arco de medida α é positiva para os arcos do 1º e do 3º quadrante e negativa para arcos do 2º e do 4º quadrante.

Em resumo, podemos representar o esquema de sinais como indicado no esquema de sinais para a tangente.

Pergunte aos estudantes: qual é o sinal de cada um dos números: tg 40°, tg 130°, tg 200° e tg 310°?
Após a discussão, apresente o resumo conforme o esquema de sinais para a tangente.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

1. Classifique em verdadeira ou falsa cada uma das afirmações a seguir.

a. $\operatorname{tg} 65° > \operatorname{tg} 50°$

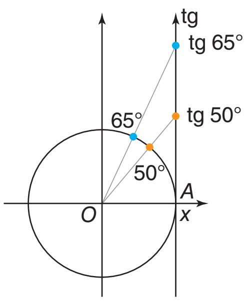
b. $\operatorname{tg} 140° < \operatorname{tg} 110°$

c. $\operatorname{tg} 50° \cdot \operatorname{tg} 310° < 0$

d. $\dfrac{\operatorname{tg}\frac{13\pi}{18}}{\operatorname{tg}\frac{16\pi}{9}} < 0$

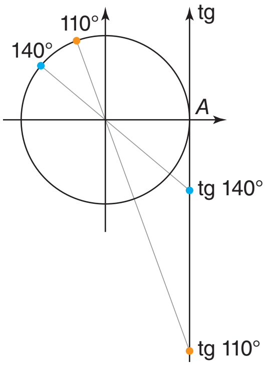
Resolução

a. Verdadeira, pois, representando tg 65° e tg 50° no sistema trigonométrico, temos:



Como as tangentes de 50° e de 65° são positivas, concluímos que a de maior módulo é a maior das duas, isto é, $\operatorname{tg} 65° > \operatorname{tg} 50°$.

b. Falsa, pois, representando a tg 140° e a tg 110° no sistema trigonométrico, temos:



Como as tangentes de 110° e de 140° são negativas, concluímos que a de menor módulo é a maior das duas, isto é, $\operatorname{tg} 140° > \operatorname{tg} 110°$.

c. Verdadeira, pois 50° pertence ao 1º quadrante, onde a tangente é positiva, e 310° pertence ao 4º quadrante, onde a tangente é negativa; logo, o produto $\operatorname{tg} 50° \cdot \operatorname{tg} 310°$ é negativo.

d. Falsa, pois $\frac{13\pi}{18}$ pertence ao 2º quadrante, onde a tangente é negativa, e $\frac{16\pi}{9}$ pertence ao 4º quadrante, onde a tangente também é negativa; logo, o quociente $\dfrac{\operatorname{tg}\frac{13\pi}{18}}{\operatorname{tg}\frac{16\pi}{9}}$ é positivo.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

A tangente como razão do seno pelo cosseno

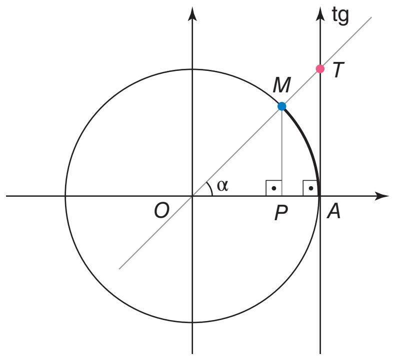
Com base no estudo do triângulo retângulo, sabe-se que a tangente de um ângulo agudo pode ser obtida pela razão do seno pelo cosseno desse ângulo. É possível generalizar esse fato para a tangente de qualquer arco trigonométrico de medida α, com cos α ≠ 0.

Se um arco trigonométrico tem medida α, com $\cos\alpha \neq 0$, então $\text{tg}\,\alpha = \dfrac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}$.

Demonstração

Faremos a demonstração para arcos do 1º quadrante, deixando como exercício a demonstração para os demais quadrantes.

Seja α a medida de um arco trigonométrico $\overset{\frown}{AM}$ com a extremidade *M* no 1º quadrante, isto é, $0° < \alpha < 90°$; traçando a reta $\overleftrightarrow{OM}$, obtemos:



FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

Pelo caso A.A. de semelhança de triângulos, temos $\triangle OTA \sim \triangle OMP$. Portanto:

$$\frac{AT}{OA} = \frac{PM}{OP}$$

Como $AT = \text{tg}\,\alpha$, $OA = 1$, $PM = \text{sen}\,\alpha$ e $OP = \cos\alpha$, concluímos que:

$$\frac{\text{tg}\,\alpha}{1} = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}$$

$$\therefore \text{tg}\,\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}$$

Demonstre, apenas no 1º quadrante, a relação $\text{tg}\,\alpha = \frac{(\text{sen}\,\alpha)}{(\cos\alpha)}$, para qualquer arco de medida α cuja extremidade não pertença ao eixo das ordenadas.
Proponha, como atividade, a demonstração dessa relação em qualquer quadrante.
Com a participação dos estudantes, explore na lousa a resolução do **exercício resolvido 2**.
A resolução proposta para esse exercício está alinhada ao pensamento computacional, uma habilidade que permite resolver problemas de forma eficiente, utilizando conceitos da computação para criar soluções genéricas.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

2. Dado que $\text{tg}\,\alpha = 3$ e que $180° < \alpha < 270°$, determine o valor de sen α e de cos α.

Observação

Lembre-se da relação fundamental da Trigonometria:
$\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha = 1$

Resolução

Vamos resolver esse exercício por etapas.

1. Compreender o problema

Inicialmente, vamos identificar o que se pede no problema e quais são as informações apresentadas por ele.

Neste caso, o problema apresenta o valor da tangente de α, informa que a medida de α é maior que 180° e menor que 270° e pede para determinar o valor do seno e do cosseno de α.

2. Elaborar um plano de resolução

Precisamos pensar e registrar um possível plano para a resolução do problema.

Para determinar o que se pede, vamos utilizar a relação fundamental da Trigonometria e escrever um sistema de equações.

Resolvendo o sistema, obteremos os valores que o problema solicita.

3. Executar o plano elaborado

$$\begin{cases} \text{tg}\,\alpha = 3 \\ \text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\,\alpha = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} = 3 \\ \text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\,\alpha = 1 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} \text{sen}\,\alpha = 3\cos\alpha & (1) \\ \text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\,\alpha = 1 & (2) \end{cases}$$

Substituindo (1) em (2), obtemos:

$$(3\cos\alpha)^2 + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow 10\cos^2\alpha = 1$$

$$\therefore \cos^2\,\alpha = \frac{1}{10} \Rightarrow \cos\alpha = \pm\sqrt{\frac{1}{10}} = \pm\frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$\therefore \cos\alpha = \pm\frac{\sqrt{10}}{10}$$

Como α é uma medida do 3º quadrante, isto é $180° < \alpha < 270°$, seu cosseno é negativo.

Portanto, $\cos\alpha = -\dfrac{\sqrt{10}}{10}$.

Substituindo cos α por $-\dfrac{\sqrt{10}}{10}$ em (1), obtemos $\text{sen}\,\alpha = -\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$.

4. Verificar

Para verificar a solução do problema, podemos calcular tg α pela razão entre os valores obtidos para o seno e o cosseno de α e verificar se resulta em 3, como é enunciado no problema.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Faça os exercícios no caderno.

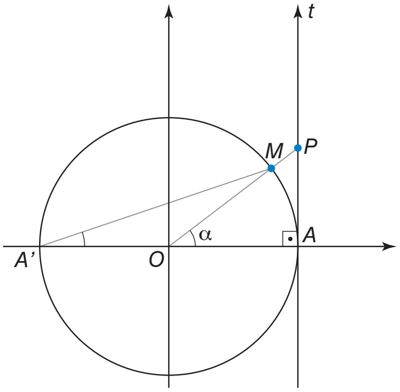
1. Determine, se existir:

a. tg π **1. a.** zero
b. tg $360°$ **1. b.** zero
c. tg $270°$ **1. c.** não existe

2. Dado que $\text{tg}\,\alpha = -2$ e $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, calcule sen α e cos α. **2.** $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{5}$; $\text{sen}\,\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

3. Dado que $\cos\alpha = -\frac{1}{3}$ e que $90° < \alpha < 180°$, calcule tg α. **3.** $-2\sqrt{2}$

4. Na circunferência trigonométrica a seguir, a ordenada do ponto M é $\frac{3}{5}$, t é o eixo das tangentes e o ângulo $A\hat{O}M$ mede α.



ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

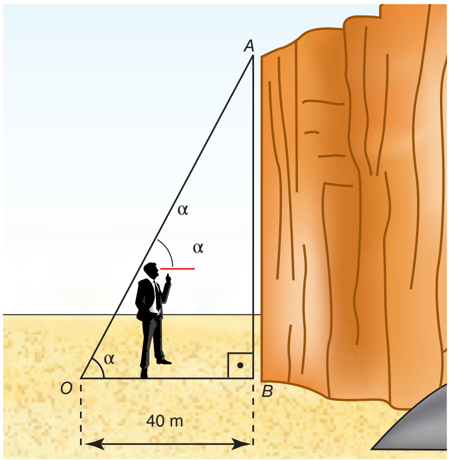
Calcule:

a. a ordenada do ponto P. **4. a.** $\frac{3}{4}$

b. a medida do ângulo $A\hat{A'}M$, em função de α. **4. b.** $\frac{\alpha}{2}$

c. tg $\frac{\alpha}{2}$ **4. c.** $\frac{1}{3}$

5. Para medir a altura $\overline{AB}$ de um paredão vertical cuja base está em um terreno plano e horizontal, uma pessoa fixou um ponto O do terreno, conforme a representação esquemática a seguir, e mediu o ângulo $A\hat{O}B$ e a distância OB. Sabendo que o ângulo $A\hat{O}B$ tem medida α, com $\text{sen}\,\alpha = \frac{15}{17}$ e $OB = 40$ m, qual é a altura $\overline{AB}$. **5.** 75 m



FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

(Modelo didático sem escala e com cores fantasia.)

6. Pesquise um contexto que envolva a relação entre tangente, seno e cosseno de um ânguloe elabore um problema. Em seguida, troque com um colega o problema elaborado para que um resolva o problema elaborado pelo outro. Por fim, analisem e discutam as resoluções. **6.** Resposta pessoal.

Para retomar os conteúdos estudados, resolva o exercício complementar 1.

2. Redução ao 1º quadrante

O fato de a medida de um arco trigonométrico ter a mesma medida do ângulo central correspondente garante que a tangente de um arco trigonométrico seja igual à tangente do ângulo central correspondente. Como consequência, o quadro trigonométrico dos ângulos notáveis continua válido para arcos trigonométricos. Assim, acrescentando os valores da tangente ao quadro trigonométrico dos arcos notáveis, temos:

Arcos notáveis

Arco x	sen x	cos x
30° ou $\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
45° ou $\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
60° ou $\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$

Para obter a tangente aplicamos a identidade:

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}$$

Conhecida a tangente de um arco trigonométrico do 1º quadrante, podemos calcular a tangente do correspondente desse arco em qualquer quadrante, conforme apresentado no exercício resolvido a seguir.

Com a participação dos estudantes, trabalhe na lousa a resolução do **exercício resolvido 3**. Resolva o item **a** e, depois, solicite aos estudantes que resolvam os demais itens antes de ler a resolução apresentada no livro. Após isso, eles podem comparar as estratégias e respostas com as do livro e compartilhar com a turma, caso tenham pensando de maneira diferente para resolver.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

3. Consultando o quadro trigonométrico dos arcos notáveis, determine o valor de:

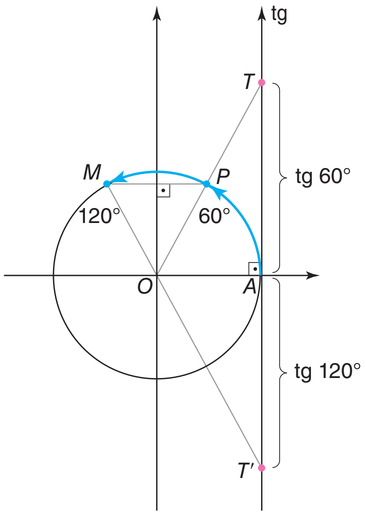
a. tg 120° **b.** tg $\frac{7\pi}{6}$ **c.** tg 300°

Resolução

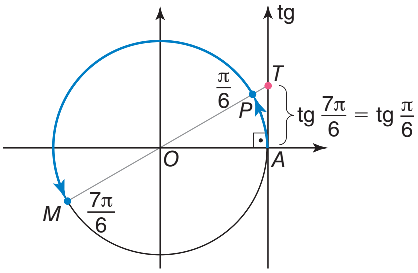
a. O correspondente, no 1º quadrante, da extremidade *M* do arco de 120° é o ponto *P*, extremidade do arco de 60°.

Como os triângulos *OTA* e *OT'A* da figura são congruentes, os pontos *T* e *T'* têm ordenadas opostas. Assim, concluímos que:

$$\text{tg } 120° = -\text{tg } 60° = -\sqrt{3}$$



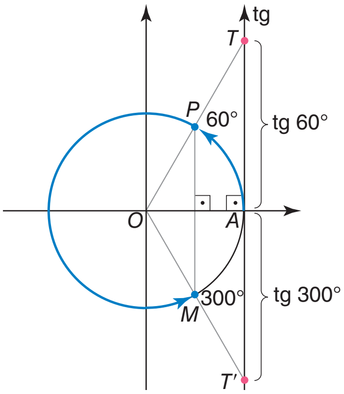
b. O correspondente, no 1º quadrante, da extremidade *M* do arco de $\frac{7\pi}{6}$ é o ponto *P*, extremidade do arco $\frac{\pi}{6}$.



Observe que a ordenada do ponto *T* da figura é simultaneamente tg $\frac{7\pi}{6}$ e tg $\frac{\pi}{6}$, isto é:

$$\text{tg } \frac{7\pi}{6} = \text{tg } \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

c. O correspondente, no 1º quadrante, da extremidade *M* do arco de 300° é o ponto *P*, extremidade do arco de 60°.



Como os triângulos *OTA* e *OT'A* da figura são congruentes, os pontos *T* e *T'* possuem ordenadas opostas. Concluímos que:

$$\text{tg } 300° = -\text{tg } 60° = -\sqrt{3}$$

ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Faça os exercícios no caderno.

7. Consultando o quadro dos arcos notáveis, determine:

a. tg 135° **7. a.** −1

b. tg $\frac{5\pi}{6}$ **7. b.** $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

c. tg 225° **7. c.** 1

d. tg $\frac{4\pi}{3}$ **7. d.** $\sqrt{3}$

e. tg 315° **7. e.** −1

f. tg $\frac{11\pi}{6}$ **7. f.** $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

8. Observando a figura a seguir, classifique em verdadeira ou falsa cada uma das afirmações.

a. tg (180° − α) = tg α

b. tg (180° − α) = −tg α

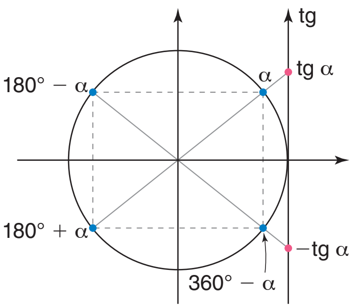
c. tg (180° + α) = tg α

d. tg (180° + α) = −tg α

e. tg (360° − α) = tg α

f. tg (360° − α) = −tg α

8. a. falsa
8. b. verdadeira
8. c. verdadeira
8. d. falsa
8. e. falsa
8. f. verdadeira



FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

(**Observação**: mesmo que a extremidade do arco de medida α não esteja no 1º quadrante, as relações anteriores que forem verdadeiras continuarão verdadeiras. Verifique!)

9. De acordo com as conclusões obtidas no exercício anterior, simplifique a expressão:

$$E=\frac{\text{tg}(180°+x)-\text{tg}(180°-x)+\text{tg}(360°-x)}{\text{tg}(360°+x)},$$

considerando que existe tg x e que tg $x \neq 0$. **9.** $E = 1$

10. (UFRGS-RS) Considere as afirmativas abaixo.

10. alternativa **d**

I. tg 92° = –tg 88°

II. tg 178° = tg 88°

III. tg 268° = tg 88°

IV. tg 272° = –tg 88°

Quais estão corretas?

a. Apenas I e III.

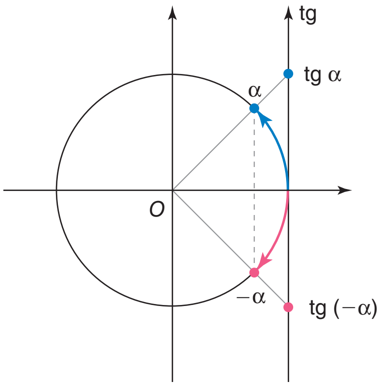
b. Apenas III e IV.

c. Apenas I, II e IV.

d. Apenas I, III e IV.

e. Apenas II, III e IV.

11. Dois arcos de medidas opostas quaisquer, α e –α, têm extremidades simétricas em relação ao eixo dos cossenos.



FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

Observando a figura, classifique em verdadeira ou falsa cada uma das afirmações.

a. tg (–α) = tg α **11. a.** falsa

b. tg (–α) = –tg α **11. b.** verdadeira

(**Observação**: mesmo que a extremidade do arco de medida α esteja em outro quadrante, a relação anterior que for verdadeira continuará verdadeira. Verifique!)

12. Considerando suas conclusões no exercício anterior, calcule:

a. tg $\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ **12. a.** –1 **c.** tg (–330°) **12. c.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$

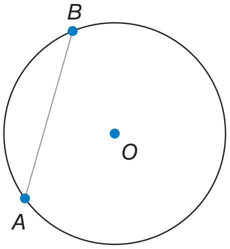
b. tg (–120°) **12. b.** $\sqrt{3}$

13. Simplifique a expressão: $E=\frac{\text{tg}(\pi+\alpha)-\text{tg}(2\pi-\alpha)}{\text{tg}(\pi-\alpha)+\text{tg}(-\alpha)}$, considerando que existe tg α e que tg α ≠ 0.

13. $E = -1$

14. Na circunferência de centro *O*, a corda $\overline{AB}$ mede 12 cm e o maior arco determinado pelos pontos *A* e *B* na circunferência tem medida 2α, em grau, com tg α = –1,2. Calcule a distância do ponto *O* à corda $\overline{AB}$.

14. 5 cm



ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

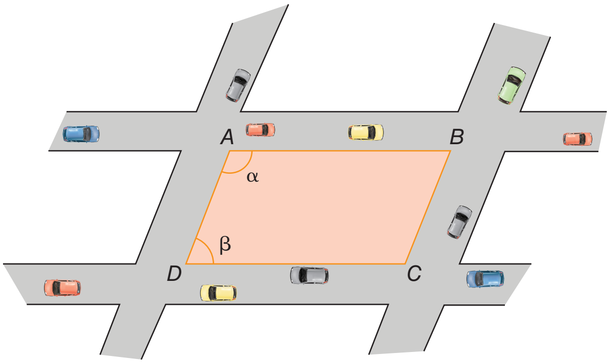
15. Uma praça de área medindo 33.600 m^2 tem o formato de um paralelogramo *ABCD*, conforme mostra a figura, em que *AB* = 280 m, α e β são as medidas, em grau, dos ângulos $D\hat{A}B$ e $A\hat{D}C$, respectivamente, e tg α = –2,4.

a. Calcule tg β. **15. a.** 2,4

b. Calcule tg (α + β). **15. b.** 0

c. Calcule tg (2α + β). **15. c.** 2,4

d. No ponto *E* do lado $\overline{DC}$, com $\overline{AE}$ perpendicular a $\overline{DC}$, há um posto de informações turísticas. Qual é a distância entre esse posto e um turista parado no ponto *D*? **15. d.** 50 m



(Modelo didático sem escala e com cores fantasia.)

FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

Para retomar os conteúdos estudados, resolva o exercício complementar 2.

Conectado: Resposta no final do livro. Esse tipo de atividade possibilita aos estudantes reconhecerem que um grupo de problemas pode ser resolvido por um mesmo algoritmo, representado aqui por um fluxograma; assim, são desenvolvidas habilidades relacionadas ao pensamento computacional. Incentive-os a comparar as respostas com os colegas, validando-as e reconhecendo que pode haver mais de um procedimento que resolve um mesmo problema.

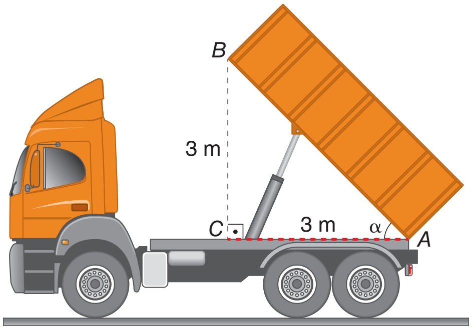
Conectado

Construa um fluxograma que permite obter a tangente de um ângulo, dado o seno e o cosseno desse ângulo. Em seguida, troque o fluxograma elaborado com um colega e peça para ele verificar os passos que são apresentados no fluxograma. Por fim, discutam sobre eles.

3. Equações trigonométricas

Inicie o assunto comentando o texto de introdução deste item. Defina equação trigonométrica em tangente.
Revise o quadro trigonométrico dos arcos notáveis e as simetrias de pontos na circunferência trigonométrica (α, $\pi - \alpha$, e $2\pi - \alpha$).

Um caminhão basculante, estacionado em um terreno plano e horizontal, tem a caçamba com fundo e laterais retangulares. Ela pode girar, no máximo, α graus em torno de um eixo horizontal fixo em sua parte traseira inferior. Na figura, o ponto A representa a localização do eixo, e $\overline{AB}$ representa a base de uma lateral da caçamba. Quando esta atinge sua inclinação máxima, o ponto B fica a 3 m de distância da reta vertical e do plano horizontal que passam por A. Qual é a inclinação máxima α da caçamba?



ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

A medida α do ângulo agudo de inclinação máxima da caçamba é tal que:

$$\text{tg } \alpha = \frac{3}{3} \Rightarrow \text{tg } \alpha = 1$$

Como α é a medida de um ângulo agudo, concluímos que $\alpha = 45°$.
Note que, ao determinar o valor de α, obtivemos uma solução da equação: $\text{tg } \alpha = 1$

Equações do tipo $\text{tg } x = k$, sendo k uma constante real, são chamadas de **equações trigonométricas imediatas**.

A resolução desse tipo de equação pode ser feita pelo método gráfico, como fizemos para o seno e o cosseno. Para isso, precisaremos de resultados já vistos, como o quadro trigonométrico dos arcos notáveis e a simetria de pontos na circunferência trigonométrica.

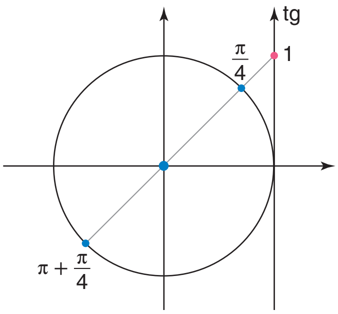
Com a participação dos estudantes, refaça os **exercícios resolvidos 4** a **6**, possibilitando que eles utilizem diferentes estratégias de resolução a fim de compará-las.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

4. Resolva a equação $\text{tg } x = 1$, para $0 \leqslant x < 2\pi$.

Resolução

Marcamos no eixo das tangentes o ponto de ordenada igual a 1 e traçamos por ele a reta que passa pelo centro da circunferência trigonométrica. Essa reta intercepta a circunferência em dois pontos, conforme indicado na figura, aos quais estão associadas as raízes da equação.



FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

Assim, considerando apenas a 1ª volta positiva da circunferência, que é o universo da equação, temos:

$$x = \frac{\pi}{4} \text{ ou } x = \frac{5\pi}{4}$$

Logo: $S = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right\}$

5. Resolva a equação $\text{tg } x = -1$:

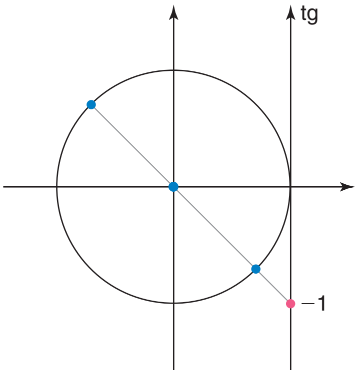
a. para $0 \leqslant x < 2\pi$;

b. em $\mathbb{R}$.

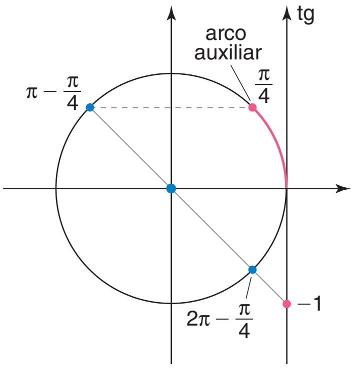
Resolução

a. Marcamos no eixo das tangentes o ponto de ordenada -1 e traçamos por ele a reta que passa pelo centro da circunferência trigonométrica.

Essa reta intercepta a circunferência em dois pontos, conforme a figura a seguir, aos quais estão associadas as raízes da equação.



Como esses pontos estão fora do 1º quadrante, devemos buscar o arco auxiliar nesse quadrante, de modo que possamos usar o quadro trigonométrico dos arcos notáveis:



Pelas simetrias, considerando o universo da equação, encontramos as soluções:

$$x = \frac{3\pi}{4} \text{ ou } x = \frac{7\pi}{4}.$$

Logo: $S = \left\{\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right\}$

b. No universo $\mathbb{R}$, o conjunto solução S da equação é formado pelos números reais associados aos pontos obtidos no item **a**, nas infinitas voltas da circunferência trigonométrica; logo:

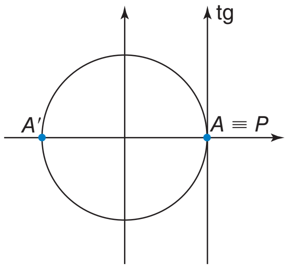
$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{3\pi}{4} + k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$$

6. Resolva a equação tg $x = 0$:

a. para $0 \leqslant x < 2\pi$; **b.** em $\mathbb{R}$.

Resolução

a. Marcamos no eixo das tangentes o ponto P de ordenada zero e, em seguida, traçamos por P a reta que passa pelo centro da circunferência trigonométrica. Essa reta intercepta a circunferência nos pontos A e A'.



ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

Logo, no universo considerado, temos:

$$x = 0 \text{ ou } x = \pi$$

Portanto: $S = \{0, \pi\}$

b. No universo $\mathbb{R}$, o conjunto solução S da equação é formado pelos números reais associados aos pontos obtidos no item **a**, nas infinitas voltas da circunferência trigonométrica; logo:

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\}$$

17. b. $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{6} + k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$ **17. c.** $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{2\pi}{3} + k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Faça os exercícios no caderno.

16. Resolva as equações para $0 \leqslant x < 2\pi$.

a. tg $x = \sqrt{3}$

16. a. $S = \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right\}$

b. tg $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$

16. b. $S = \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right\}$

c. tg $x = -\sqrt{3}$

16. c. $S = \left\{\frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\}$

d. tg $x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

16. d. $S = \left\{\frac{5\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right\}$

17. Resolva, em $\mathbb{R}$, as equações dos itens **b** e **c** do exercício anterior.

18. Resolva a equação sen $x = \sqrt{3}$ cos x, para $0 \leqslant x < 2\pi$. (*Sugestão*: divida ambos os membros por cos x. Justifique por que essa divisão é permitida.)

18. $S = \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right\}$

19. Obtenha o conjunto solução das equações a seguir, para $0 \leqslant x < 2\pi$.

19. a. $S = \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right\}$

a. $\text{tg}^2\, x = \frac{1}{3}$

19. b. $S = \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right\}$

b. $(\text{tg}^2\, x - 3)(\text{tg}^4\, x - 1) = 0$

(*Sugestão*: aplique a propriedade do produto nulo.)

c. $\text{tg}^2\, x - \text{tg}\, x = 0$ (*Sugestão*: fatore o primeiro membro e aplique a propriedade do produto nulo.)

19. c. $S = \left\{0, \pi, \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right\}$

20. Resolva, em $\mathbb{R}$, as equações:

a. $\frac{1 + \text{tg}\, x}{4} = \text{tg}\, x - \frac{1}{2}$

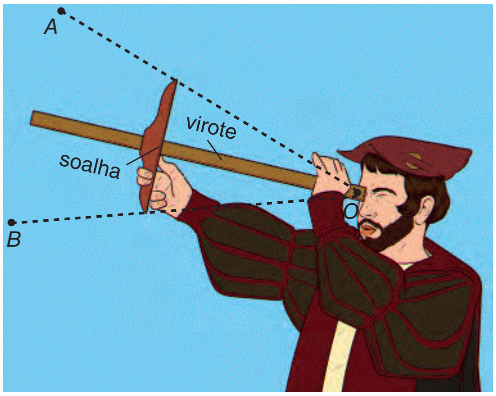
20. a. $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{4} + k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

b. $\frac{3 + \text{tg}\, x}{\text{tg}\, x} - 1 = \text{tg}\, x$

20. b. $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{3} + k\pi \text{ ou } x = \frac{2\pi}{3} + k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

21. Estudamos, na abertura deste capítulo, que durante o período das grandes navegações, os marinheiros utilizavam um instrumento chamado balestilha. Para usá-lo, era preciso posicionar uma das extremidades do virote próximo ao olho do observador (indicada por O) de tal maneira que os extremos da soalha ficassem sobre os lados do ângulo $A\hat{O}B$.

Assim, a distância angular entre as estrelas era a medida do ângulo $A\hat{O}B$, conforme mostra a imagem a seguir.



MARCOS DE LIMA/ARQUIVO DA EDITORA

21. a. Resposta no final do livro.

Um marinheiro mediu a distância angular entre duas estrelas, *A* e *B*, com uma balestilha cuja soalha tem 40 cm de comprimento e foi posicionada a 45 cm de distância do extremo *O* de observação.

a. Representando por segmentos de reta o virote e a soalha, faça um esquema que descreva essa situação.

b. Usando uma calculadora científica, obtenha a distância angular entre as estrelas *A* e *B*. (Na época das grandes navegações, os marinheiros dispunham de quadros trigonométricos para cálculos como esse.)

22. Resposta pessoal.

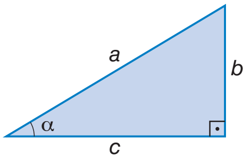
21. b. Aproximadamente 48°

22. Elabore um problema envolvendo uma situação contextualizada sobre equações trigonométricas. Em seguida, troque com um colega o problema elaborado para que um resolva o problema elaborado pelo outro. Por fim, analisem e discutam as resoluções.

Para retomar os conteúdos estudados, resolva o exercício complementar 3.

4. Secante, cossecante e cotangente

No triângulo retângulo, estudamos três razões trigonométricas: o seno, o cosseno e a tangente, que revisamos a seguir.



FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

$$\text{sen } \alpha = \frac{\text{medida do cateto oposto a } \alpha}{\text{medida da hipotenusa}} = \frac{b}{a}$$

$$\cos \alpha = \frac{\text{medida do cateto adjacente a } \alpha}{\text{medida da hipotenusa}} = \frac{c}{a}$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{\text{medida do cateto oposto a } \alpha}{\text{medida do cateto adjacente a } \alpha} = \frac{b}{c}$$

As recíprocas (inversas) dessas razões também são chamadas de razões trigonométricas e recebem nomes especiais: a recíproca do seno é chamada de **cossecante** (cossec), a do cosseno é chamada de **secante** (sec) e a da tangente é chamada de **cotangente** (cotg), ou seja:

$$\text{cossec } \alpha = \frac{\text{medida da hipotenusa}}{\text{medida do cateto oposto a } \alpha} = \frac{a}{b}$$

$$\sec \alpha = \frac{\text{medida da hipotenusa}}{\text{medida do cateto adjacente a } \alpha} = \frac{a}{c}$$

$$\text{cotg } \alpha = \frac{\text{medida do cateto adjacente a } \alpha}{\text{medida do cateto oposto a } \alpha} = \frac{c}{b}$$

Generalizando, podemos definir as razões recíprocas do seno, cosseno e tangente de um arco trigonométrico de medida α, desde que seja obedecida a condição de existência de cada razão, da seguinte maneira:

- $\text{cotg } \alpha = \frac{\cos \alpha}{\text{sen } \alpha}$, para $\text{sen } \alpha \neq 0$
- $\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}$, para $\cos \alpha \neq 0$
- $\text{cossec } \alpha = \frac{1}{\text{sen } \alpha}$, para $\text{sen } \alpha \neq 0$

Observe que, pela definição de cotg α, se além de sen α ≠ 0 tivermos também cos α ≠ 0, então:

Exercício resolvido 7, item b: Se achar necessário, mostrar aos estudantes outro modo de resolver:

$$\text{cotg } 30° = \frac{1}{\text{tg } 30°} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \frac{\cancel{3}\sqrt{3}}{\cancel{3}} = \sqrt{3}$$

$$\boxed{\text{cotg } \alpha = \frac{1}{\text{tg } \alpha}}$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

7. Calcule:

a. cotg 30°   **b.** sec 180°   **c.** cossec 90°

Resolução

a. $\text{cotg } 30° = \dfrac{\cos 30°}{\text{sen } 30°} = \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}}{\frac{1}{\cancel{2}}} = \sqrt{3}$

b. $\sec 180° = \dfrac{1}{\cos 180°} = \dfrac{1}{-1} = -1$

c. $\text{cossec } 90° = \dfrac{1}{\text{sen } 90°} = \dfrac{1}{1} = 1$

8. Resolva a equação sec $x = 2$ para $0 \leqslant x < 2\pi$.

Resolução

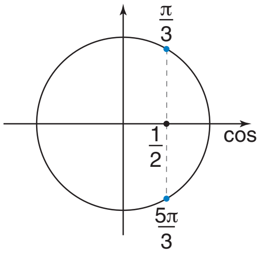
Condição de existência: $\cos x \neq 0$

$\sec x = 2 \Rightarrow \dfrac{1}{\cos x} = 2$

$\therefore \cos x = \dfrac{1}{2}$

$\therefore x = \dfrac{\pi}{3}$ ou $x = \dfrac{5\pi}{3}$

Logo: $S = \left\{\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{5\pi}{3}\right\}$



FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

Conectado

Verifique se alguns estudantes têm conhecimento de linguagem de programação e oriente-os a escrever um pequeno programa que resolva a situação proposta neste **Conectado**. Depois, eles podem expor aos demais colegas a estrutura utilizada e comparar com os algoritmos escritos por eles.

Utilizando conceitos de programação que estudamos anteriormente, escreva um algoritmo que permite calcular a cotangente de um ângulo dada sua medida em grau. Em seguida, troque o algoritmo com um colega e peça para ele verificar se os passos estão corretos. Por fim, discutam sobre eles.

Conectado: Resposta pessoal.

29. Esse exercício traz informações e um pouco do aspecto histórico dos aquedutos, o que pode promover uma reflexão sobre impactos socioambientais das construções, favorecendo o trabalho com aspectos da área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Faça os exercícios no caderno.

23. Calcule o valor numérico da expressão:

$$E = \frac{\sec 60° + \text{cossec } 30° - \text{cotg}^2\, 30°}{\sec 0° + \text{tg } 45°}$$

23. $\frac{1}{2}$

24. Dada a função $f(x) = 4 \text{ cossec } \dfrac{x}{2} - \sec(2x)$, calcule:

a. $f(3\pi)$ **24. a.** –5

b. $f(\pi) + f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$ **24. b.** 13

25. $S = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right\}$

25. Resolva a equação cossec $x = \sqrt{2}$, para $0 \leqslant x < 2\pi$.

26. (UFMG) Determine todos os valores de x pertencentes ao intervalo $]0, \pi[$ que satisfazem a equação $3 \text{ tg } x + 2 \cos x = 3 \sec x$. **26.** $\frac{\pi}{6}$ e $\frac{5\pi}{6}$

27. Dado que cotg $x = 3$ e $\pi < x < \dfrac{3\pi}{2}$, calcule cossec x.

27. $-\sqrt{10}$

28. Sendo α a medida de um arco trigonométrico do 2º quadrante tal que sec α = –1,25, uma relação correta para α é: **28.** alternativa **c**

a. sen α = 0,8

b. cos α = 0,6

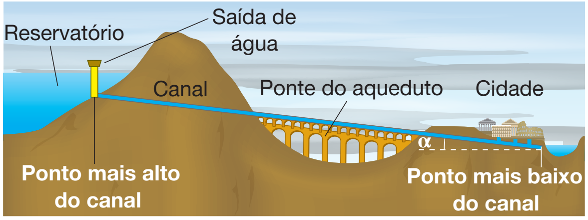
c. tg α = –0,75

d. cotg α = –2

e. cossec α = –1,7

29. Um aqueduto é um canal destinado a conduzir água por gravidade de um lugar para outro. Ele pode ser construído sob o solo, em tubulações ou túneis; na superfície do solo, em valas; ou acima do solo, sobre pontes.

Na Roma antiga foram construídos vários aquedutos. O primeiro foi o *Aqua Appia*, construído no ano 312 a.C. Media, aproximadamente, 16,4 km de comprimento e tinha uma inclinação constante α, conforme sugere a figura, com cossec α = 1.640. Calcule o desnível vertical, em metro, entre o ponto mais alto do canal do *Aqua Appia* e o seu ponto mais baixo. (Embora o *Aqua Appia* não fosse retilíneo, o desnível pode ser calculado como se fosse.) **29.** 10 m



ERICSON GUILHERME LUCIANO/ ARQUIVO DA EDITORA

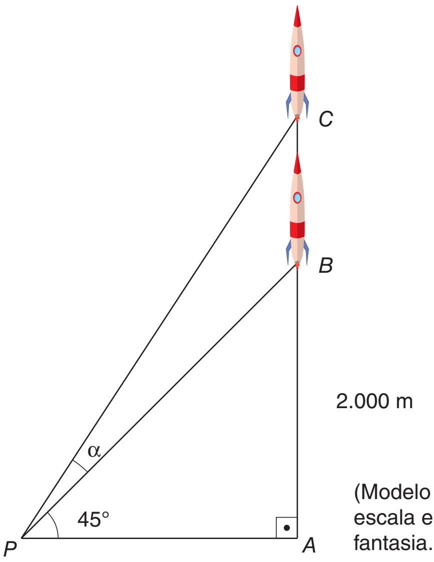
(Modelo didático sem escala e com cores fantasia.)

Para retomar os conteúdos estudados, resolva os exercícios complementares 4 e 5.

5. Seno, cosseno e tangente da soma de arcos

Um foguete, lançado verticalmente de um ponto *A* de um terreno plano e horizontal, foi monitorado de um ponto *P* desse terreno. Quando ele atingiu 2.000 m de altura, em relação ao solo, sua base situava-se em um ponto *B* que era visto de *P* sob um ângulo de 45° com o terreno. Logo depois, sua base situava-se em um ponto *C* tal que o ângulo $B\hat{P}C$ media α, com $\text{tg}\ \alpha = 0{,}2$, conforme mostra o esquema a seguir. Que distância percorreu o foguete de *B* até *C*?

ILUSTRAÇÕES: ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA



(Modelo didático sem escala e com cores fantasia.)

Observando que o triângulo retângulo *ABP* é isósceles, pois cada um dos ângulos $A\hat{B}P$ e $A\hat{P}B$ mede 45°, deduzimos que $PA = AB = 2.000$ m. Assim, indicando por *x* a medida, em metro, do segmento $\overline{BC}$, temos:

$$\text{tg}\ (45° + \alpha) = \frac{AB + BC}{PA} \Rightarrow \text{tg}\ (45° + \alpha) = \frac{2.000 + x}{2.000}$$

Observe que a continuidade dessa resolução depende do desenvolvimento da tangente da soma dos ângulos de medidas 45° e α. Esse tipo de desenvolvimento é o objetivo deste tópico, em que vamos estudar importantes identidades trigonométricas que envolvem o seno, o cosseno ou a tangente da soma de ângulos ou de arcos trigonométricos.

Para entender a necessidade dessas identidades, vamos começar pela análise da sentença a seguir:

$$\text{sen}\ (a + b) = \text{sen}\ a + \text{sen}\ b$$

Ela é verdadeira para quaisquer valores reais atribuídos às variáveis *a* e *b*?

Acompanhe o que acontece, por exemplo, ao atribuirmos às variáveis *a* e *b* os valores π e $\frac{\pi}{2}$, respectivamente:

$$\text{sen}\ \left(\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \text{sen}\ \pi + \text{sen}\ \frac{\pi}{2} = 0 + 1$$

$$\therefore \text{sen}\ \left(\frac{3\pi}{2}\right) = 1 \qquad \textbf{(Falso!)}$$

Essa igualdade é falsa, pois $\text{sen}\ \left(\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \text{sen}\ \left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1$. Concluímos, então, que a sentença $\text{sen}\ (a + b) = \text{sen}\ a + \text{sen}\ b$ não é verdadeira para quaisquer números reais *a* e *b*.

Conclusões análogas são obtidas para o cosseno e a tangente.

Se julgar conveniente, solicite aos estudantes que pesquisem a demonstração das identidades indicadas. Eles podem fazer esse estudo e, depois, apresentá-lo aos colegas.

A seguir, apresentamos seis identidades, chamadas de **fórmulas de adição de arcos**, que nos auxiliarão em cálculos do seno, cosseno ou tangente da soma ou da diferença de arcos trigonométricos.

Observação

Nas identidades (5) e (6) estão pressupostas as condições de existência.

1. $\text{sen}\,(a + b) = \text{sen}\,a \cdot \cos b + \text{sen}\,b \cdot \cos a$

2. $\text{sen}\,(a - b) = \text{sen}\,a \cdot \cos b - \text{sen}\,b \cdot \cos a$

3. $\cos\,(a + b) = \cos a \cdot \cos b - \text{sen}\,a \cdot \text{sen}\,b$

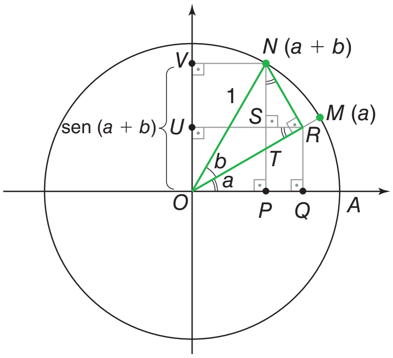
4. $\cos\,(a - b) = \cos a \cdot \cos b + \text{sen}\,a \cdot \text{sen}\,b$

5. $\text{tg}\,(a + b) = \dfrac{\text{tg}\,a + \text{tg}\,b}{1 - \text{tg}\,a \cdot \text{tg}\,b}$

6. $\text{tg}\,(a - b) = \dfrac{\text{tg}\,a - \text{tg}\,b}{1 + \text{tg}\,a \cdot \text{tg}\,b}$

Demonstração da identidade (1) no 1º quadrante

Vamos considerar no 1º quadrante os arcos trigonométricos $\overset{\frown}{AM}$ e $\overset{\frown}{AN}$, de medidas a e $a + b$, respectivamente, e traçar as perpendiculares auxiliares mostradas na figura.



FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

Temos:

- $P\hat{O}T \cong S\hat{R}T$, pois $\overline{SR} \,//\, \overline{OP}$
- $T\hat{N}R \cong T\hat{O}P$, pois os triângulos TNR e TOP são semelhantes
- Do triângulo ONR:

$$\begin{cases} \text{sen}\,b = \dfrac{RN}{ON} = \dfrac{RN}{1} \\ \cos b = \dfrac{OR}{ON} = \dfrac{OR}{1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} RN = \text{sen}\,b \\ OR = \cos b \end{cases}$$

Observação

Demonstra-se que a identidade (1) é válida também para medidas a e b fora do 1º quadrante.

- Do triângulo RUO:

$$\text{sen}\,a = \frac{OU}{OR} = \frac{OU}{\cos b} \Rightarrow OU = \text{sen}\,a \cdot \cos b$$

- Do triângulo RSN:

$$\cos a = \frac{SN}{RN} = \frac{SN}{\text{sen}\,b} \Rightarrow SN = \text{sen}\,b \cdot \cos a$$

Como $UV = SN$ e $OV = PN$, $\text{sen}\,(a + b) = \dfrac{PN}{ON} = \dfrac{OV}{1} = OV = OU + UV$, concluímos que:

$$\text{sen}\,(a + b) = \text{sen}\,a \cdot \cos b + \text{sen}\,b \cdot \cos a$$

Demonstração da identidade (5)

Observação

A demonstração da identidade (6) é análoga à demonstração da identidade (5).

Pela definição de tangente e pelas identidades (1) e (3), temos:

$$\text{tg}\,(a + b) = \frac{\text{sen}\,(a + b)}{\cos\,(a + b)} = \frac{\text{sen}\,a \cdot \cos b + \text{sen}\,b \cdot \cos a}{\cos a \cdot \cos b - \text{sen}\,a \cdot \text{sen}\,b}$$

Dividimos o numerador e o denominador dessa expressão por $\cos a \cdot \cos b$ (com $\cos a \cdot \cos b \neq 0$), obtendo:

$$\text{tg}\,(a + b) = \frac{\dfrac{\text{sen}\,a \cdot \cos b}{\cos a \cdot \cos b} + \dfrac{\text{sen}\,b \cdot \cos a}{\cos a \cdot \cos b}}{\dfrac{\cos a \cdot \cos b}{\cos a \cdot \cos b} - \dfrac{\text{sen}\,a \cdot \text{sen}\,b}{\cos a \cdot \cos b}} = \frac{\text{tg}\,a + \text{tg}\,b}{1 - \text{tg}\,a \cdot \text{tg}\,b}$$

Reflexão

Quais são as condições de existência das identidades 5 e 6?

Reflexão: Poderíamos destacar as condições de existência para os arcos a e b, porém é mais simples salientá-las para tg a e tg b. Assim, as condições de existência são:
Para a identidade 5: existem tg a e tg b, e $\text{tg}\,a \cdot \text{tg}\,b \neq 1$
Para a identidade 6: existem tg a e tg b, e $\text{tg}\,a \cdot \text{tg}\,b \neq -1$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

9. Calcule sen 75°.

Resolução

O arco de 75° é a soma dos arcos notáveis de 45° e 30°.

Assim, temos:

$$\text{sen } 75° = \text{sen } (45° + 30°) = \text{sen } 45° \cdot \cos 30° + \text{sen } 30° \cdot \cos 45° =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\therefore \text{sen } 75° = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

10. Calcule cos 15°.

Resolução

O arco de 15° é a diferença entre os arcos notáveis de 45° e 30°, nesta ordem. Então:

$$\cos 15° = \cos (45° - 30°) = \cos 45° \cdot \cos 30° + \text{sen } 45° \cdot \text{sen } 30° =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\therefore \text{sen } 15° = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

(**Nota**: também poderíamos ter representado 15° como a diferença entre 60° e 45°, nesta ordem.)

11. Resolva, para $0 \leqslant x < 2\pi$, a equação:

$$\text{sen } \left(\frac{\pi}{3} + x\right) + \cos \left(\frac{\pi}{6} + x\right) = \sqrt{3}$$

Resolução

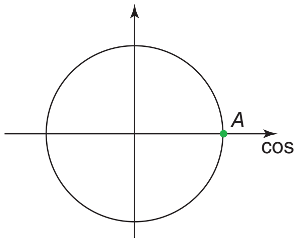
$$\text{sen } \left(\frac{\pi}{3} + x\right) + \cos \left(\frac{\pi}{6} + x\right) = \sqrt{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{sen } \frac{\pi}{3} \cdot \cos x + \text{sen } x \cdot \cos \frac{\pi}{3} + \cos \frac{\pi}{6} \cdot \cos x - \text{sen } \frac{\pi}{6} \cdot \text{sen } x = \sqrt{3}$$

$$\therefore \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \cos x + \frac{1}{2} \cdot \text{sen } x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \cos x - \frac{1}{2} \cdot \text{sen } x = \sqrt{3} \Rightarrow 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \cos x = \sqrt{3}$$

$$\therefore \cos x = 1$$

Logo: $S = \{0\}$



FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

12. Calcule tg 105°.

Resolução

O arco de 105° é a soma dos arcos notáveis de 60° e 45°. Assim, temos:

$$\text{tg } 105° = \text{tg } (60° + 45°) = \frac{\text{tg } 60° + \text{tg } 45°}{1 - \text{tg } 60° \cdot \text{tg } 45°} = \frac{\sqrt{3} + 1}{1 - \sqrt{3} \cdot 1} = \frac{\sqrt{3} + 1}{1 - \sqrt{3}}$$

Racionalizando o denominador, concluímos que:

$$\text{tg } 105° = \frac{\sqrt{3} + 1}{1 - \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3} + 1}{1 - \sqrt{3}} \cdot \frac{1 + \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}} = -2 - \sqrt{3}$$

Observação

Observe que os valores obtidos nos exercícios resolvidos **9** e **10** são iguais (sen 75° = cos 15°). Isso ocorreu porque os arcos de 75° e 15° são complementares.

Com a participação dos estudantes, refaça os **exercícios resolvidos 9** a **12**. Eles podem ser utilizados como um instrumento avaliativo: primeiro, proponha aos estudantes que leiam e conversem acerca das resoluções apresentadas no livro; depois, indique outros exercícios similares e verifique se os estudantes conseguem resolvê-los utilizando as estratégias usadas no livro ou outras próprias.

34. b. $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{3} + k \cdot 2\pi,\ \text{com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Faça os exercícios no caderno.

30. Calcule:

a. cos 75° **30. a.** $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

b. sen 15° **30. b.** $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

c. tg $\frac{5\pi}{12}$ **30. c.** $2 + \sqrt{3}$

31. Calcule o valor de cada expressão:

a. sen 10° · cos 20° + sen 20° · cos 10° **31. a.** $\frac{1}{2}$

b. cos 5° · cos 55° − sen 5° · sen 55° **31. b.** $\frac{1}{2}$

c. $\dfrac{\text{tg}\frac{\pi}{3} - \text{tg}\frac{\pi}{12}}{1 + \text{tg}\frac{\pi}{3} \cdot \text{tg}\frac{\pi}{12}}$ **31. c.** 1

32. Dado que $\cos a = \frac{\sqrt{5}}{5}$ e que $\frac{3\pi}{2} < a < 2\pi$, calcule $\text{sen}\left(\frac{\pi}{4} + a\right)$. **32.** $-\frac{\sqrt{10}}{10}$

33. (UFJF-MG) A expressão $\text{sen}\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right)$, em que θ é um número real, é igual a:

a. 1

b. $\text{tg}\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$

c. cos θ

d. sen θ **33.** alternativa **c**

34. Resolva a equação $\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \cos(\pi - x) = 1$:

a. para $0 \leqslant x < 2\pi$;

b. em $\mathbb{R}$

34. a. $S = \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\}$

35. Sabendo que $\text{tg}\, x = 2\sqrt{3}$, calcule:

a. tg $(x + 60°)$ **35. a.** $-\frac{3\sqrt{3}}{5}$

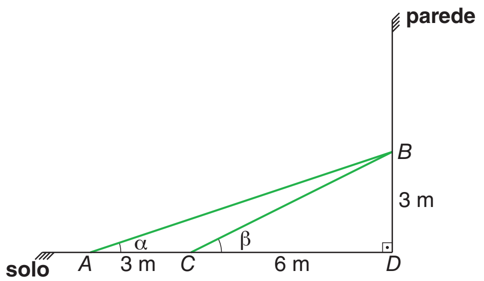
b. tg $(x - 60°)$ **35. b.** $\frac{\sqrt{3}}{7}$

36. Considerando α a medida de um ângulo agudo, com tg α = 0,2, determine o valor de *x* tal que:

$$\text{tg}\,(45° + \alpha) = \frac{2.000 + x}{2.000}$$

(**Nota**: ao resolver este exercício, você terá concluído a resolução do problema que introduziu o tópico 5, na página 107.) **36.** 1.000

37. Um pedreiro escorou duas vigas retas, $\overline{AB}$ e $\overline{CB}$, em uma parede vertical, de modo que os pontos *A* e *C* do solo estão em uma reta horizontal que passa por um ponto *D* da parede, conforme mostra a figura a seguir.

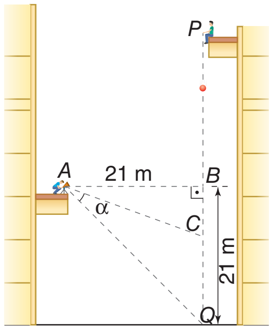


FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

Calcule a soma das medidas α e β, em grau, dos ângulos agudos que as vigas formam com o solo.
(*Sugestão*: inicie calculando tg (α + β).) **37.** α + β = 45°

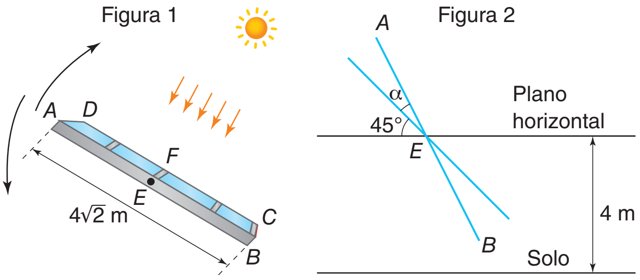
38. Em uma experiência, uma bola é abandonada em queda livre de um ponto *P*, percorrendo uma trajetória retilínea até atingir um ponto *Q* do solo plano e horizontal. De um ponto *A*, distante 21 m de $\overleftrightarrow{PQ}$ e a 21 m de altura, em relação ao solo, a bola é observada, registrando-se sua passagem por dois pontos *B* e *C* tais que $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{PQ}$ e $m(C\hat{A}Q) = \alpha$, conforme sugere o esquema a seguir, com tg α = 0,4. Que distância a bola percorreu de *C* a *Q*?

38. 12 m



(Modelo didático sem escala e com cores fantasia.)

39. A figura 1, a seguir, mostra um painel solar retangular *ABCD*, com $4\sqrt{2}$ m de comprimento, que gira automaticamente em torno de um eixo horizontal, de modo a captar a máxima energia da luz do Sol. O eixo de rotação está a 4 m de altura em relação ao solo, plano e horizontal, e une os pontos médios *E* e *F* dos lados paralelos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$.



(Modelo didático sem escala e com cores fantasia.)

Em dado momento, o painel tinha uma inclinação de 45° em relação ao plano horizontal que contém o eixo de rotação. Em um momento depois, sua inclinação tinha aumentado α graus, conforme sugere o esquema da figura 2, com sen α = 0,6. Neste segundo momento, qual era a distância do ponto *B* ao solo?

40. Resposta pessoal. **39.** 1,2 m

40. Inspirando-se nos exercícios anteriores, pesquise um contexto que envolva as fórmulas de adição de arcos e elabore um problema. Em seguida, troque com um colega o problema elaborado para que um resolva o problema elaborado pelo outro. Por fim, analisem e discutam as resoluções.

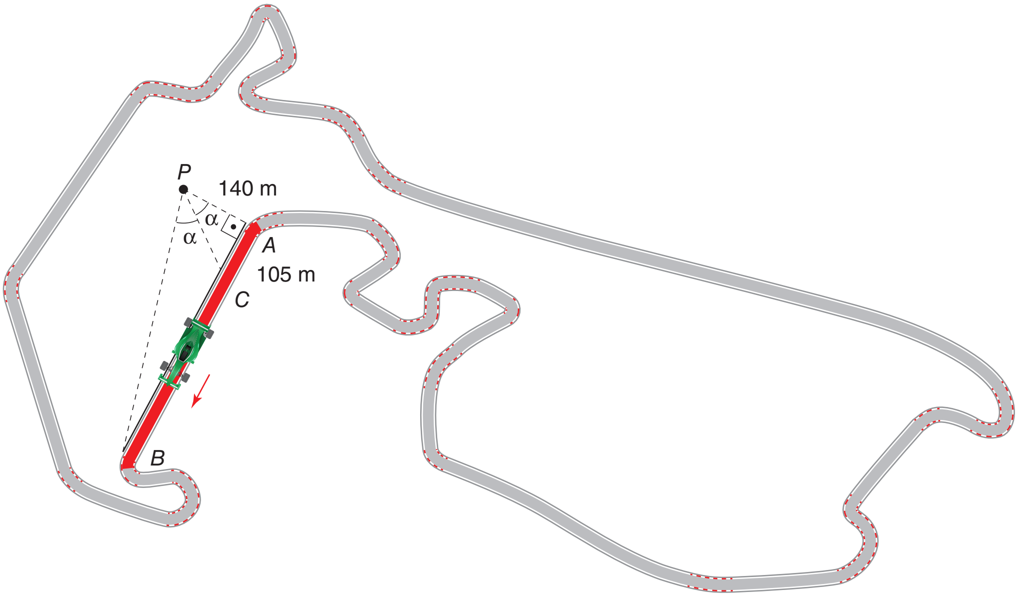
ILUSTRAÇÕES: ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

Para retomar os conteúdos estudados, resolva os exercícios complementares 6 a 9.

Aproveite os **exercícios propostos 39** e **40** para fazer uma avaliação. Os estudantes podem ser organizados em duplas ou trios e, de maneira colaborativa, resolver esses exercícios; depois, podem expor na lousa o problema elaborado e as estratégias de resolução aos demais colegas.

6. Seno, cosseno e tangente do arco duplo

Durante um treino, um carro de Fórmula 1 entra em um trecho reto $\overline{AB}$ da pista, enquanto é monitorado de um ponto P, distante 140 m de A, com $\overleftrightarrow{PA}$ perpendicular a $\overleftrightarrow{AB}$. Quando o carro percorre 105 m desse trecho, a partir de A, ele atinge um ponto C, tal que $\overrightarrow{PC}$ é bissetriz do ângulo $A\hat{P}B$, conforme sugere o esquema. Qual é o comprimento do trecho $\overline{AB}$?



(Modelo didático sem escala e com cores fantasia.)

Sugerimos que você assista ao vídeo **Os ângulos e as torres**, no qual se analisa a desproporcionalidade entre a medida de um ângulo e o seu seno (ou cosseno ou tangente). Disponível em: https://m3.ime.unicamp.br/recursos/1145. Acesso em: 28 ago. 2024.

Sendo α a medida dos ângulos $A\hat{P}C$ e $C\hat{P}B$ e x a distância AB, temos:

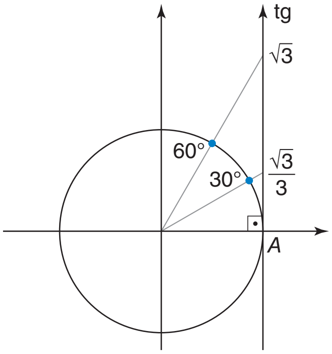
$$\begin{cases} \text{tg}\ \alpha = \dfrac{105}{140} \\ \text{tg}\ 2\alpha = \dfrac{x}{140} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{tg}\ \alpha = \dfrac{3}{4} \\ \text{tg}\ 2\alpha = \dfrac{x}{140} \end{cases}$$

Note que a continuidade dessa resolução depende da relação entre tg α e tg 2α. Esse tipo de relação é o objetivo deste tópico, em que vamos estudar importantes identidades trigonométricas que envolvem o seno, o cosseno ou a tangente do arco duplo.

Para iniciar esse estudo, vamos refletir sobre a questão a seguir.

Na função $y = \text{tg}\ x$, as medidas x dos arcos são diretamente proporcionais aos correspondentes valores y da tangente? Em outras palavras, na função $y = \text{tg}\ x$, podemos afirmar que $\text{tg}\ (kx) = k\text{tg}\ x$ para qualquer constante real k?

Analisando um caso particular, vamos considerar um arco de 30° e um arco com o dobro dessa medida, isto é, um arco de 60°, e comparar as tangentes desses dois arcos.



Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

Observando que tg 60° $= \sqrt{3}$ não é o dobro de tg 30° $= \frac{\sqrt{3}}{3}$, constatamos que:

$$\text{tg}\,(2 \cdot 30°) \neq 2 \cdot \text{tg}\,30°$$

Concluímos, assim, que, na função $y = \text{tg}\,x$, as medidas x dos arcos **não** são diretamente proporcionais aos correspondentes valores y da tangente.

A não proporcionalidade entre as medidas dos arcos e os correspondentes valores da função é uma característica comum a todas as funções trigonométricas. Por isso, para cada uma delas, é necessário um estudo dos **arcos múltiplos**: duplos, triplos, quádruplos etc. A seguir, apresentamos três importantes identidades envolvendo arcos duplos.

Observação

Na identidade (3) estão pressupostas as condições de existência.

1. $\text{sen}\,2x = 2 \cdot \text{sen}\,x \cdot \cos x$

2. $\cos 2x = \cos^2 x - \text{sen}^2\,x$

3. $\text{tg}\,2x = \dfrac{2\,\text{tg}\,x}{1 - \text{tg}^2\,x}$

Demonstração

Substituindo $2x$ por $x + x$ e aplicando as fórmulas de adição de arcos, temos:

1. $\text{sen}\,2x = \text{sen}\,(x + x) = \text{sen}\,x \cdot \cos x + \text{sen}\,x \cdot \cos x = 2 \cdot \text{sen}\,x \cdot \cos x$

2. $\cos 2x = \cos\,(x + x) = \cos x \cdot \cos x - \text{sen}\,x \cdot \text{sen}\,x = \cos^2 x - \text{sen}^2\,x$

3. $\text{tg}\,2x = \text{tg}\,(x + x) = \dfrac{\text{tg}\,x + \text{tg}\,x}{1 - \text{tg}\,x \cdot \text{tg}\,x} = \dfrac{2\,\text{tg}\,x}{1 - \text{tg}^2\,x}$

Como consequências de (2), temos as seguintes identidades.

- $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$
- $\cos 2x = 1 - 2\,\text{sen}^2\,x$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

13. Sabendo que $\text{sen}\,x = \frac{3}{5}$ e que $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, calcule $\text{sen}\,2x$.

Resolução

Sabemos que $\text{sen}\,2x = 2 \cdot \text{sen}\,x \cdot \cos x$; logo, para esse cálculo necessitamos também do valor de $\cos x$.

Pela relação fundamental da Trigonometria,

$\text{sen}^2\,x + \cos^2 x = 1$, temos:

$$\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \cos^2 x = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$$

$$\therefore \cos x = \pm\frac{4}{5}$$

Como x é um arco do 2º quadrante, temos:

$$\cos x = -\frac{4}{5}$$

Assim:

$$\text{sen}\,2x = 2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) = -\frac{24}{25}$$

14. Sabendo que $\cos x = \frac{1}{3}$, calcule $\cos 2x$.

Resolução

Sabemos que $\cos 2x = \cos^2 x - \text{sen}^2\,x$

Substituindo $\text{sen}^2\,x$ por $(1 - \cos^2 x)$, temos:

$$\cos 2x = \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) = 2 \cdot \cos^2 x - 1$$

Assim:

$$\cos 2x = 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 - 1 = -\frac{7}{9}$$

15. Resolva, para $0 \leqslant x < 2\pi$, a equação $\text{sen}\,2x = 2\,\text{sen}\,x$.

Resolução

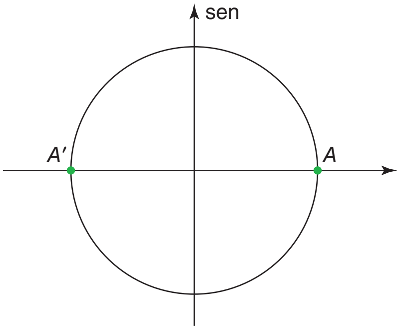
Substituímos $\text{sen}\,2x$ por $2 \cdot \text{sen}\,x \cdot \cos x$, obtendo:

$$2 \cdot \text{sen}\,x \cdot \cos x = 2 \cdot \text{sen}\,x \Rightarrow \text{sen}\,x \cdot \cos x = \text{sen}\,x$$

$$\therefore \text{sen}\,x \cdot \cos x - \text{sen}\,x = 0 \Rightarrow \text{sen}\,x\,(\cos x - 1) = 0$$

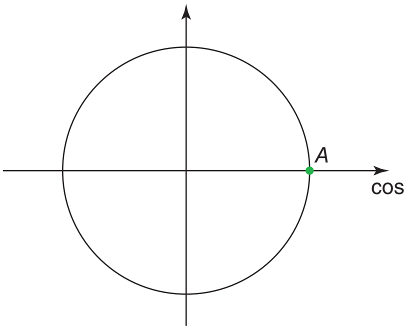
Pela propriedade do produto nulo, temos: sen $x = 0$ ou cos $x = 1$

- sen $x = 0$



Portanto: $x = 0$ ou $x = \pi$

- cos $x = 1$



Portanto: $x = 0$

Logo: $S = \{0, \pi\}$

16. Sendo tg $x = 5$, calcule tg $2x$.

Resolução

$$\text{tg } 2x = \frac{2 \cdot \text{tg } x}{1 - \text{tg}^2\, x} = \frac{2 \cdot 5}{1 - 5^2} = -\frac{10}{24}$$

Portanto: tg $2x = -\dfrac{5}{12}$

ANÁLISE DA RESOLUÇÃO

Reúna-se com um colega. Apontem o erro cometido na resolução e conversem sobre o que pode tê-lo causado. Refaçam a resolução no caderno e depois conversem com o professor e outros colegas para expor a estratégia de raciocínio usada por vocês.

Exercício

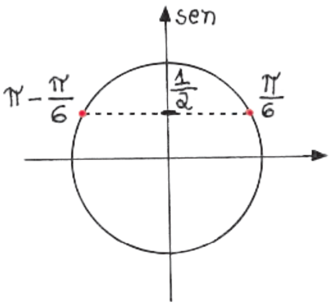
Resolva a equação sen $2x$ = cos x, para $0 \leqslant x < 2\pi$.

Resolução

$\text{sen } 2x = \cos x \Longrightarrow 2 \text{ sen } x \cdot \cos x = \cos x$

Dividindo por cos x ambos os membros dessa equação, temos:

$2 \text{ sen } x = 1 \Longrightarrow \text{sen } x = \frac{1}{2}$



Logo, $x = \frac{\pi}{6}$ ou $x = \frac{5\pi}{6}$; portanto, $s = \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right\}$.

Análise da resolução: Ao dividir por cos x ambos os membros, o estudante admitiu que cos $x \neq 0$ e, por isso, perdeu a possibilidade de cos x ser igual a zero. Como consequência, perdeu raízes da equação. Uma possível resolução correta é obtida por meio de uma equação equivalente com um dos membros igual a zero. Observe:

sen $2x$ = cos x ⇒

⇒ 2 sen x cos x = cos x

∴ 2 sen x cos x − cos x = 0 ⇒

⇒ cos x (2 sen x − 1) = 0

Pela propriedade do produto nulo, temos:

cos x = 0 ou 2 sen x − 1 = 0 ⇒

⇒ cos x = 0 ou sen $x = \frac{1}{2}$

Resolvendo essas equações, concluímos que:

$x = \frac{\pi}{2}$ ou $x = \frac{3\pi}{2}$ ou $x = \frac{\pi}{6}$ ou $x = \frac{5\pi}{6}$

Logo: $S = \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right\}$

Reflexão

Quais são as fórmulas de arco triplo?

Reflexão:

sen $3x$ = 3 sen x − 4 sen³ x

cos $3x$ = 4 cos³ x − 3 cos x

tg $3x = \dfrac{3 \text{ tg } x - \text{tg}^3\, x}{1 - 3 \text{ tg}^2\, x}$

Você encontrará informações nas **Orientações Específicas** deste capítulo.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Faça os exercícios no caderno.

41. Sabendo que sen $x = -\frac{5}{13}$ e que $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$, calcule sen $2x$ e cos $2x$. **41.** sen $2x = \frac{120}{169}$; cos $2x = \frac{119}{169}$

42. Dado tg $x = 3$, calcule tg $2x$. **42.** $-\frac{3}{4}$

43. Sendo α a medida de um ângulo agudo, com tg $\alpha = \frac{3}{4}$, determine o valor de x tal que tg $2\alpha = \frac{x}{140}$.

(**Nota**: ao resolver este exercício, você terá concluído a resolução do problema que introduziu o tópico 6, na página 111.) **43.** 480

44. (Fuvest-SP) O valor de (tg 10° + cotg 10°) · sen 20° é:

a. $\frac{1}{2}$

b. 1

c. 2

d. $\frac{5}{2}$

e. 4

44. alternativa **c**

45. Calcule o valor do cos x, sabendo que cos $\frac{x}{2} = \frac{3}{5}$.

$\left(\textit{Sugestão}: \cos x = \cos\left(2 \cdot \frac{x}{2}\right)\right)$ **45.** $-\frac{7}{25}$

46. Dado que cos $x = \frac{1}{8}$ e que $0 < x < \frac{\pi}{2}$, calcule cos $\frac{x}{2}$. **46.** $\frac{3}{4}$

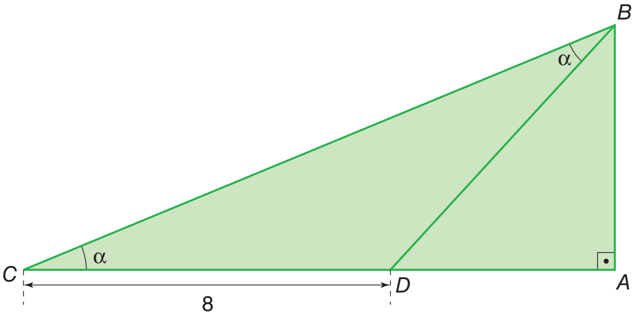
47. Resolva as equações a seguir no intervalo $[0, 2\pi[$.

a. sen $2x = \cos x$

b. cos $2x = \text{sen } x$

c. tg $2x = -\text{tg } x$

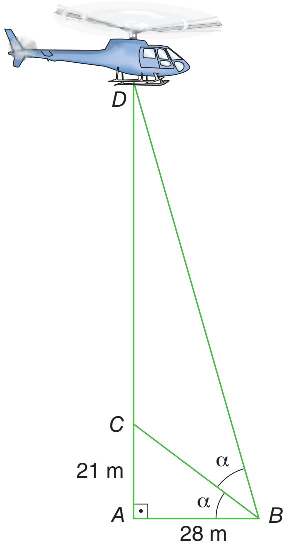
48. Sabendo que sen $\alpha = \frac{\sqrt{3}}{4}$, calcule a medida do segmento $\overline{DA}$ na figura a seguir. **48.** 5



ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

(*Sugestão*: use o teorema do ângulo externo de um triângulo.)

49. Um helicóptero, que decola verticalmente a partir de um ponto A de uma pista plana e horizontal, é observado de um ponto B da pista, localizado a 28 m de A. Ao subir 21 m, até um ponto C, o helicóptero é visto sob um ângulo de medida α com a pista; e, quando atinge um ponto D, é visto sob um ângulo de medida 2α, conforme a representação esquemática a seguir.

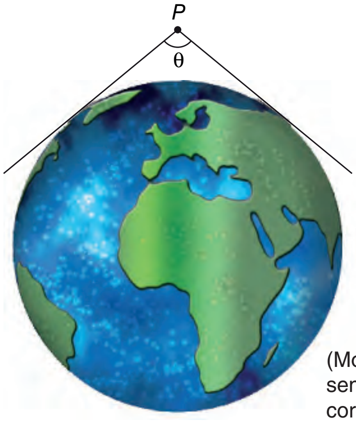


(Modelo didático sem escala e com cores fantasia.)

FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

A que altura, em relação à pista, está o helicóptero ao atingir o ponto D?
49. 96 m

50. De um ponto P do espaço, um astronauta vê a Terra sob um ângulo de medida θ, conforme indicado no esquema.



(Modelo didático sem escala e com cores fantasia.)

FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

Admitindo que o raio da Terra meça 6.400 km e que cos $\theta = -0{,}62$, conclui-se que o ponto P está, em relação à superfície da Terra, a uma altura de aproximadamente: **50.** alternativa **e**

a. 300 km

b. 530 km

c. 580 km

d. 623 km

e. 711 km

51. Elabore um problema sobre as fórmulas de arco duplo que envolva uma situação do cotidiano (utilize como modelo os exercícios **49** e **50**). Em seguida, troque com um colega o problema elaborado para que um resolva o problema elaborado pelo outro. Por fim, analisem e discutam as resoluções. **51.** Resposta pessoal.

Para retomar os conteúdos estudados, resolva os exercícios complementares 10 a 12.

47. a. $S = \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}\right\}$ **47. b.** $S = \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}\right\}$ **47. c.** $S = \left\{0, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\}$

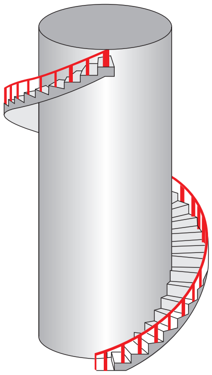
Os exercícios complementares propostos podem ser utilizados de diferentes maneiras. Por exemplo, pode-se indicá-los logo após a resolução de cada seção de exercícios propostos ou ao final do capítulo. É importante utilizar diferentes modos de organização dos estudantes, favorecendo o trabalho colaborativo entre eles.

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

Um modo é organizá-los em pequenos grupos, propor que cada um resolva alguns dos exercícios desta seção e, depois, que os grupos troquem as resoluções entre si, a fim de corrigi-las.

Faça os exercícios no caderno.

1. Uma escada em espiral será construída em torno de um reservatório cilíndrico medindo 15 m de altura, dando exatamente uma volta ao redor do reservatório, desde um ponto da base inferior até um ponto da base superior. O engenheiro responsável pelo projeto calculou que a inclinação da escada em relação ao plano horizontal deve ser α, em toda a sua extensão, com $\text{sen}\,\alpha = \frac{3}{5}$ e $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

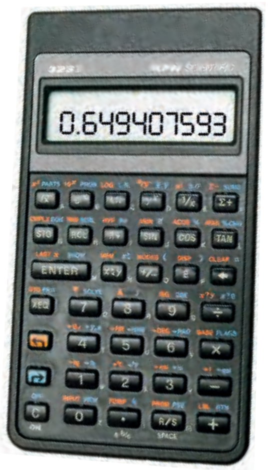


FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

Calcule a medida do raio da base do reservatório. (**Observação**: planificando a superfície lateral de um cilindro, obtém-se um retângulo.)

1. $\frac{10}{\pi}$ m ou, aproximadamente, 3,18 m

2. Usando uma calculadora científica, Lucas obteve $\text{tg}\ 33° = 0{,}649407593$ e $\text{tg}\ 213° = 0{,}649407593$. Como o visor dessa calculadora mostra apenas dez dígitos, ele ficou em dúvida se essas tangentes são mesmo iguais ou apresentam diferença nas próximas casas decimais, não mostradas no visor. Como Lucas poderia esclarecer essa dúvida?

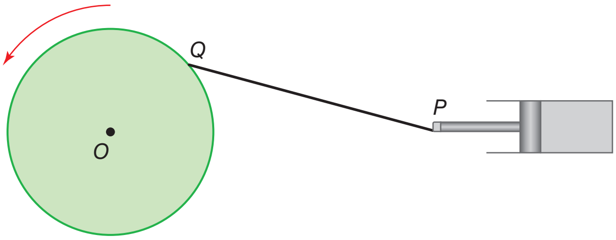


PETER JORDAN/ALAMY/FOTOARENA

2. Sabemos que $\text{tg}\ (180° + \alpha) = \text{tg}\ \alpha$; logo: $\text{tg}\ 213° = \text{tg}\ (180° + 33°) =$ $= \text{tg}\ 33°$

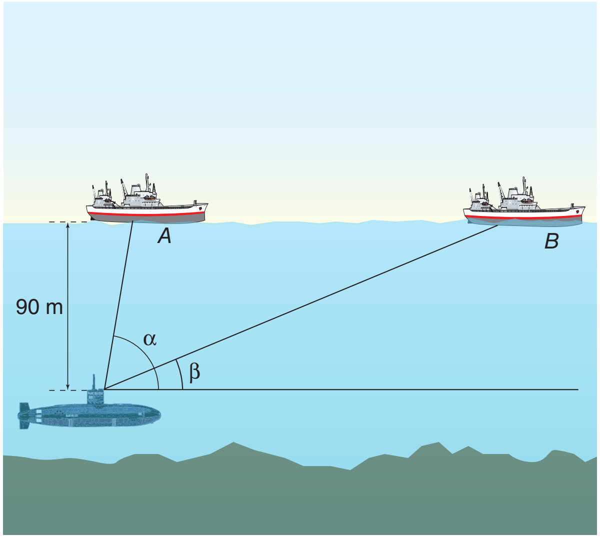
3. Uma haste rígida medindo 15 cm de comprimento liga o ponto P do extremo móvel de um pistão a um ponto Q da borda de uma peça circular de centro O e raio medindo 5 cm. O movimento de vaivém do pistão faz o ponto Q girar em torno de O, como sugere o esquema a seguir, em que a haste $\overline{PQ}$ e a circunferência estão no mesmo plano. Qual é a medida máxima atingida pelo ângulo agudo $Q\hat{P}O$? (Dê a resposta com aproximação de três casas decimais.)

3. $\alpha \approx 18{,}435°$



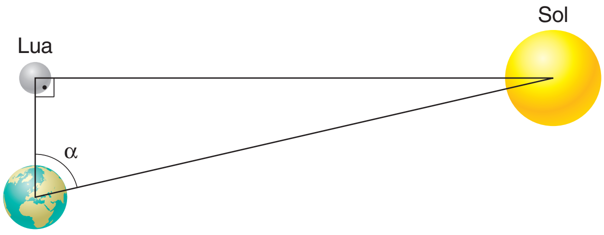
4. Um submarino, a 90 m de profundidade, detecta à sua frente dois navios sob ângulos de medidas α e β com a horizontal, conforme a representação esquemática a seguir, de modo que $\text{cotg}\ \alpha = \frac{1}{6}$ e $\sec \beta = \frac{13}{12}$. Calcule a distância entre os navios.

4. 201 m



(Modelo didático sem escala e com cores fantasia.)

5. No instante em que observamos a Lua em quarto crescente, os raios solares são perpendiculares à reta que passa pelo centro da Terra e pelo centro da Lua, conforme mostra o esquema.



(Modelo didático sem escala e com cores fantasia.)

ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

Considerando que no momento da observação a distância da Terra ao Sol seja $1{,}5 \cdot 10^8$ km e que a medida α do ângulo agudo formado pelas direções Terra-Lua e Terra-Sol seja tal que $\sec \alpha = 390{,}625$, calcule a distância da Terra à Lua. 5. 384.000 km

6. Faça o que se pede.

a. Se $x + y = \frac{\pi}{4}$, $\text{sen}\ x = \frac{12}{13}$ e $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, calcule $\cos y$. 6. a. $\frac{7\sqrt{2}}{26}$

b. Se $\alpha - \beta = \frac{\pi}{3}$, $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$ e $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, calcule $\text{sen}\ \beta$. 6. b. $\frac{\sqrt{6} - 3}{6}$

c. Se $a + b = \frac{\pi}{6}$ e $\text{tg}\ a = 3\sqrt{3}$, calcule $\text{tg}\ b$. 6. c. $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$

7. alternativa **b**

7. (Ufop) Se sen $(\alpha + \beta) + \text{sen}(\alpha - \beta) = m$ e $\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) = n$, em que $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ e $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$, então pode-se afirmar que $\frac{m}{n}$ equivale a:

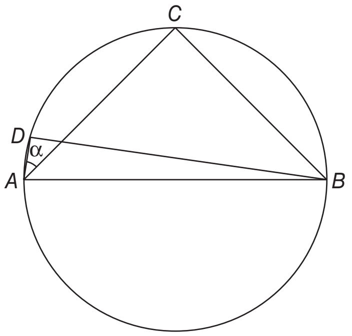
a. $\frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\beta}$

b. $-\text{cotg}\,\beta$

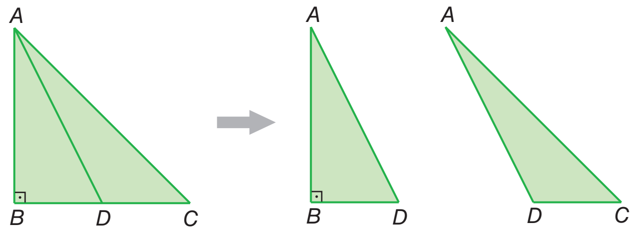
c. $\frac{\cos\beta}{\text{sen}\,\alpha}$

d. $-\text{tg}\,\beta$

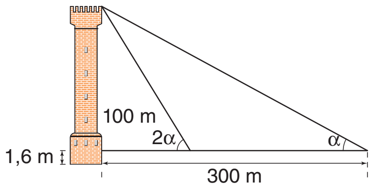
8. Na figura, os triângulos *ABC* e *ABD* estão inscritos na circunferência de diâmetro $\overline{AB}$. Dado que $AD = 1$ cm, $DB = 7$ cm e $AC = BC$, calcule a medida α, em grau, do ângulo $C\hat{A}D$. **8.** $\alpha \approx 36{,}87°$



9. Uma placa de aço tem o formato de um triângulo isósceles, *ABC*, retângulo em *B*. Para construir uma escultura com essa placa, um artista pretende cortá-la a partir do vértice *A*, separando-a em dois triângulos de mesma área, conforme mostram as figuras a seguir. Qual deve ser a tangente do menor ângulo interno do triângulo *ADC*? **9.** $\frac{1}{3}$



10. (Ufes) Uma pessoa, quando situada a 300 metros de uma torre, avista o topo da torre sob um ângulo α em relação à horizontal. Quando está a 100 metros da torre, ela vê o topo da torre sob um ângulo 2α (observe a representação esquemática a seguir). O nível dos olhos dessa pessoa está a 1,6 metro da horizontal em que está situada a base da torre.



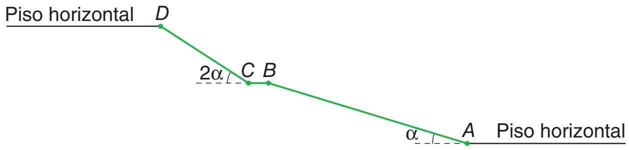
(Modelo didático sem escala e com cores fantasia.)

a. Determine o valor de α. **10. a.** $\alpha = 30°$

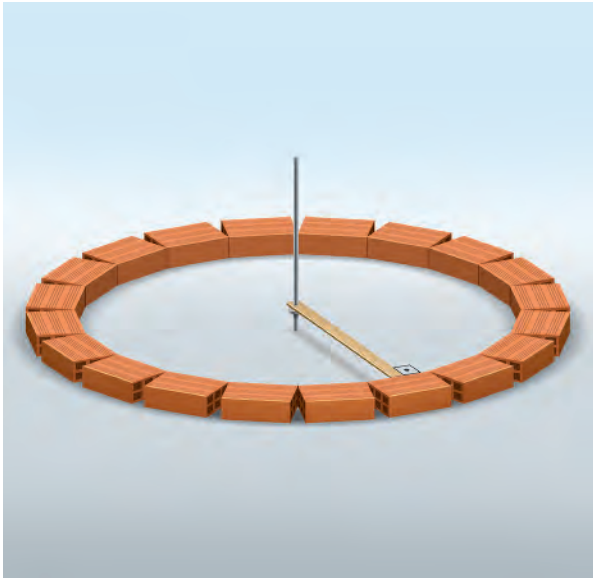
b. Determine a altura dessa torre.

10. b. $(100\sqrt{3} + 1{,}6)$ m ou, aproximadamente, 174,8 m

11. A linha *ABCD* na figura indicada a seguir simboliza o perfil de uma laje que une dois pisos planos e horizontais. Os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ representam rampas, sobre as quais serão construídas escadas, e $\overline{BC}$ representa um patamar horizontal cuja altura em relação ao piso inferior é metade da altura entre os dois pisos horizontais. As rampas $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ têm inclinações α e 2α, respectivamente, em relação ao plano horizontal. Dado que o comprimento da linha *ABCD* é 15,6 m, $BC = 1$ m e $\cos\alpha = 0{,}96$, calcule os comprimentos *AB* e *CD* das rampas. **11.** 9,6 m e 5 m



12. Para construir a tampa de uma fossa séptica circular, os pedreiros utilizam conhecimentos práticos relacionados à etnomatemática, ou seja, ao uso de conceitos matemáticos no cotidiano sem recorrer a formalizações teóricas. Para garantir que os tijolos fiquem corretamente alinhados ao longo da circunferência, de modo que a tampa seja simétrica e estável, uma das estratégias tradicionais que eles costumam usar é fixar uma estaca no centro da circunferência. Nessa estaca, prendem um pedaço de madeira, que é utilizado como guia ao rotacionar, garantindo que cada tijolo seja assentado com o ângulo correto em relação ao centro, como na imagem a seguir.



ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

Elabore um problema envolvendo a construção da tampa de uma fossa séptica, como a apresentada, porém que explore as razões trigonométricas estudadas neste capítulo. Em seguida, troque com um colega o problema elaborado para que um resolva o problema elaborado pelo outro. Por fim, analisem e discutam as resoluções.

12. Resposta pessoal.

ILUSTRAÇÕES: ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

TRABALHO E JUVENTUDES

Pedreiro

Uma das profissões mais antigas, o pedreiro trabalha na construção civil realizando tarefas associadas à construção e à manutenção de estruturas de alvenaria.

O profissional, além de ter um bom conhecimento técnico sobre os materiais e o uso das ferramentas, também precisa não só saber ler um projeto no papel para transformá-lo em uma estrutura física mas também ter conhecimentos em Matemática.

Embora não seja óbvio, a Matemática desempenha um papel importante na execução do trabalho de um pedreiro. Ele precisa ter conhecimento sobre ângulos, linhas retas, retângulos, triângulos etc., pois esses conceitos são aplicados na medição e marcação das fundações, paredes, pisos e tetos, garantindo a correta disposição e alinhamento dos elementos estruturais; precisa construir superfícies niveladas e garantir que as estruturas tenham o escoamento adequado de água, o que requer a compreensão de conceitos como proporção, razão e porcentagem, que são usados para calcular a inclinação correta em tetos, pisos e rampas; e precisa saber calcular a área de uma superfície para determinar a quantidade de tinta que será usada ou a quantidade de pisos ou azulejos necessários para cobrir essa superfície.

Quer saber mais sobre essa profissão? Faça uma pesquisa na internet e compartilhe com os colegas um resumo das informações que você obteve.

Trabalho e juventudes: Pesquisa pessoal.

Profissional verificando o alinhamento dos blocos assentados.

STURTI/E+/GETTY IMAGES

SERGIO RANALLI/PULSAR IMAGENS

Profissional instalando um piso tátil em uma calçada, essencial para orientar e garantir a segurança de pessoas com deficiência visual, facilitando a mobilidade em espaços públicos e promovendo a inclusão e a acessibilidade.

O contexto deste **Trabalho e juventudes** favorece uma abordagem com o **TCT Trabalho** e a **competência geral 6**. Incentive os estudantes a pesquisarem conteúdos matemáticos que profissionais da construção civil utilizam em seus trabalhos, valorizando esses saberes a partir de uma abordagem da etnomatemática.
Os estudantes também podem pesquisar o salário de pedreiros no município e determinar a média salarial desses profissionais.
Verifique se há alguns estudantes que conheçam pessoas que trabalham nessa área e incentive-os a compartilhar com os demais os aspectos da profissão.

Com a seção **Matemática sem fronteiras**, exploramos textos sobre aplicações práticas do assunto desenvolvido no capítulo. O conteúdo apresentado tem dois objetivos: primeiro, contextualizar a teoria matemática por meio de situações reais; segundo, despertar a curiosidade dos estudantes para aplicações mais elaboradas. Nesse caso, exploramos um estudo sobre "O teodolito".

MATEMÁTICA SEM FRONTEIRAS

Aproveite esse momento para propor aos estudantes que acessem o **Infográfico clicável: Como funciona o teodolito óptico-mecânico**.

Sugerimos que o professor oriente os estudantes a lerem o texto e a resolverem, em grupos, os exercícios das atividades.

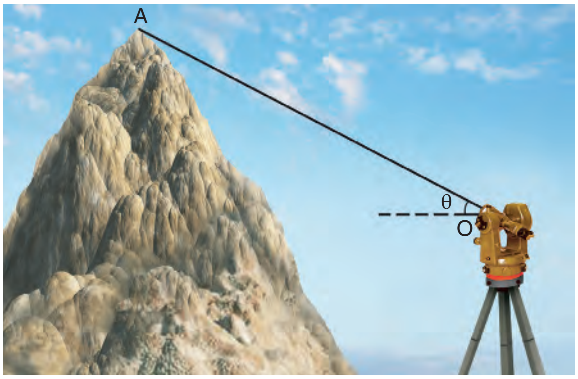
O teodolito

OBJETO DIGITAL **Infográfico clicável: Como funciona o teodolito óptico-mecânico?**

Você já deve ter observado em grandes obras de construção de estradas, pontes, viadutos, barragens etc. um profissional olhando através da luneta de um instrumento acoplado a um tripé. Esse instrumento óptico é o teodolito, usado em Engenharia, Topografia, Agrimensura etc., para auxiliar em medições indiretas de grandes distâncias ou alturas.

CANDYBOX PHOTOGRAPHY/ALAMY/FOTOARENA

Apoiada no tripé, a luneta permite que um observador, *O*, mire um referencial, *A*, após o que o teodolito indica a medida θ do ângulo agudo que o segmento $\overline{OA}$ forma com o plano horizontal.



PAULO MANZI/ARQUIVO DA EDITORA

(Modelo didático sem escala e com cores fantasia.)

Para entender melhor esse mecanismo, você pode construir um teodolito caseiro, fixando um fio de prumo no centro de um transferidor, conforme mostra a figura 1. Com esse equipamento, é possível fazer medições de ângulos em relação a referenciais inacessíveis. Por exemplo, mirando o topo de um edifício na mesma reta da linha de fé do transferidor, conforme mostra a figura 2, observa-se que o fio de prumo estaciona sobre um ponto da escala do transferidor. Considerando a medida associada a esse ponto, calcula-se a medida do ângulo que a linha de fé forma com o terreno plano horizontal que contém a base do edifício.

Figura 1

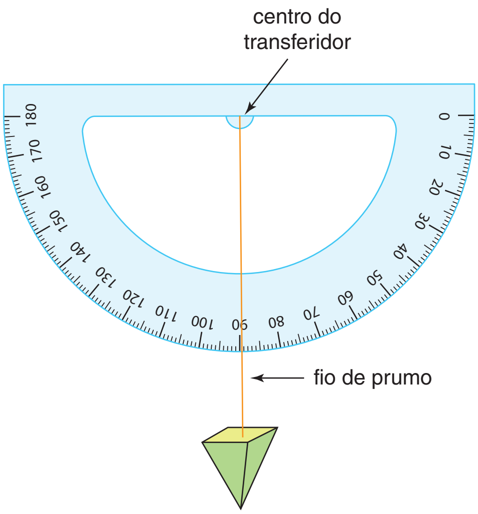
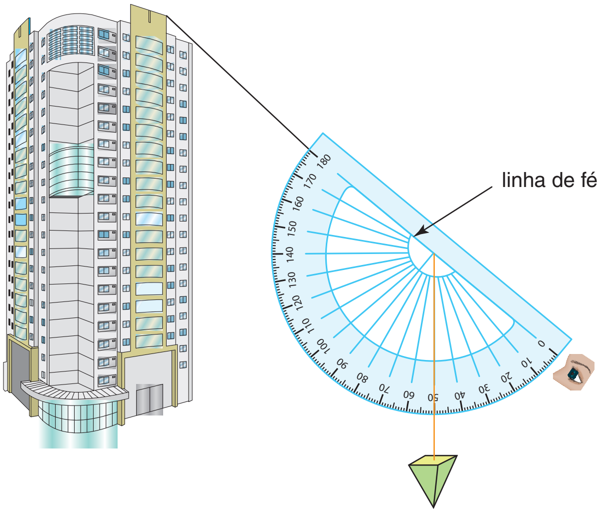


Figura 2



(Modelo didático sem escala e com cores fantasia.)

ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

Atividades

Faça as atividades no caderno.

1. Quando o observador mirou o topo do edifício, conforme mostrado na figura 2, qual era a medida do ângulo que a reta suporte da linha de fé formava com o terreno plano e horizontal que contém a base do edifício? **1.** 40°

2. Se, na situação mostrada na figura 2, o olho de mira do observador estava a 1,73 m de altura em relação ao terreno e a 50 m de distância do edifício, qual é a altura do edifício? **2.** ≈ 43,73 m

O contexto desta seção **Educação midiática** favorece o desenvolvimento das **competências gerais 4**, **5** e **7**, pois os estudantes poderão desenvolver conteúdos utilizando diferentes linguagens, utilizar tecnologias de comunicação de maneira crítica e argumentar com base em fatos e informações confiáveis para formular e defender ideias que respeitem e promovam os direitos humanos.

EDUCAÇÃO MIDIÁTICA

Organize os estudantes em grupos e proponha que leiam o conteúdo desta seção e anotem as opiniões que surgirem acerca do tema. Depois, eles devem apresentá-las aos demais grupos, e uma conversa com todos pode ser mobilizada.

ODS 16

Liberdade de expressão × discurso de ódio

Organizem-se em grupos para ler os textos e, depois, responder às questões propostas.

O direito à liberdade de expressão e de pensamento é fundamental nos Estados democráticos, como o Brasil, e garantido pela Constituição Federal de 1988. Ao dispor de liberdade de expressão, as pessoas podem manifestar publicamente ideias, críticas ou opiniões sem temer represálias ou censura. No entanto, o direito à liberdade de expressão não pode ser interpretado como um direito que está acima da dignidade humana.

Após a criação da internet, das mídias e redes sociais, o direito à liberdade de expressão tornou-se foco de discussões de instituições civis e jurídicas, porque o limite entre opinião pessoal e ofensa vem sendo ultrapassado com frequência por determinados grupos e pessoas.

O direito à liberdade de expressão é garantido pelo Artigo 5º da Constituição e incisos IV e IX:

BASSANO VACCARINI. FOTO: JOEL SILVA/FOTOARENA

VACCARINI, Bassano. **Direitos Humanos e Liberdade de Expressão**. 1981. Escultura em cimento. Exposta em praça pública de Altinópolis (SP). Foto de 2009. O formato do painel lembra um livro aberto e os elementos sugerem denúncia e protesto pela liberdade.

> Art. 5º Todos são iguais perante a lei, sem distinção de qualquer natureza, garantindo-se aos brasileiros e aos estrangeiros residentes no País a inviolabilidade do direito à vida, à liberdade, à igualdade, à segurança e à propriedade, nos termos seguintes:
>
> IV - é livre a manifestação do pensamento, sendo vedado o anonimato;
>
> IX - é livre a expressão da atividade intelectual, artística, científica e de comunicação, independentemente de censura ou licença;

BRASIL. **Constituição da República Federativa do Brasil de 1988**. Brasília, DF: Presidência da República, 1988. Disponível em: https://www.planalto.gov.br/ccivil_03/constituicao/constituicao.htm. Acesso em: 14 jun. 2024.

> O direito de manifestar livremente opiniões, ideias e pensamentos faz parte do tratado de uma sociedade democrática e simboliza a liberdade de expressão. Exercê-la requer responsabilidade, consciência e informação para que seu exercício seja legítimo. Vale lembrar que a liberdade de expressão esbarra no respeito à opinião do outro e respeito à sua integridade moral. Esses também são princípios democráticos de uma sociedade que contempla o bem-estar e integridade de todos.
>
> A defesa da liberdade de expressão na web tem que considerar esses princípios para que não haja distorção do seu exercício. Para tanto, se faz necessária a educação on-line, no sentido de orientar um comportamento que considere os Direitos Humanos o pilar de orientação da conduta, individual ou coletiva, na vida real e também na internet. [...]

O EXERCÍCIO da liberdade de expressão como manifestação democrática. **Safernet Brasil**, [*s. d.*]. Disponível em: https://new.safernet.org.br/content/liberdade-de-express%C3%A3o. Acesso em: 14 jun. 2024.

De acordo com os textos, a liberdade de expressão é garantida por lei, mas é preciso utilizá-la com responsabilidade, pois liberdade de expressão não é liberdade de agressão.

O que é o discurso de ódio?

Pergunte aos estudantes o que é discurso de ódio para eles e peça que anotem. Depois, eles devem ler o conteúdo que explica isso e retomar suas anotações, para ampliar a compreensão do tema.

Conteúdo que...

- ⚠ ... incita ou incentiva a violência contra uma pessoa ou um grupo de pessoas por meio de expressões racistas, homofóbicas, transfóbicas, discriminatórias e misóginas, como os ataques contra as mulheres, entre outras manifestações.
- ⚠ ... desumaniza e inferioriza todas as pessoas de um grupo.
- ⚠ ... tem como alvo grupos que, historicamente, sofreram, e ainda sofrem, preconceito e discriminação.

Oriente os estudantes a tabular os dados obtidos na pesquisa utilizando os recursos de uma planilha eletrônica, se possível; assim, eles podem representar os dados por meio de gráficos e produzir um relatório com base na análise gráfica.

Incentive os estudantes a fazerem uma pesquisa acerca de como o discurso de ódio chega nas pessoas. Por meio de um questionário anônimo realizado na escola, eles podem obter informações e categorizar as principais motivações para essa prática danosa, as quais podem estar associadas ao racismo estrutural, a questões de gênero, xenofobia, LGBTfobia, entre outros. É relevante expor os dados obtidos e propor práticas que cultivem a valorização da diversidade, abordando aspectos das **competências gerais 9** e **10**.

Fique atento!

- Até mesmo pessoas do nosso convívio podem promover discurso de ódio, mas, quando ele é disseminado por figuras públicas com muitos seguidores, esse tipo de discurso pode viralizar.
- Assuntos polarizados, em que um grupo (ou uma pessoa) considera inimigo quem é diferente ou pensa diferente, tendem a produzir esse tipo de discurso.
- Quanto maior o alcance de uma publicação com discurso de ódio, maior é a chance de incentivar atos violentos contra alguém ou contra um grupo de pessoas.
- Postagens que têm discurso de ódio repetem os padrões de preconceito, discriminação e desumanização de pessoas ou grupo de pessoas que já existem na sociedade. O fato de inúmeras postagens serem anônimas e viralizarem protege os abusadores e expõe as vítimas continuamente.


CÁSSIO BITTENCOURT/ARQUIVO DA EDITORA

Atitudes para enfrentar discursos de ódio

Explore o que é importante fazer ao perceber um conteúdo com discurso de ódio nas redes sociais. Incentive os estudantes a compartilharem as melhores ações com a comunidade escolar a fim de promover a cultura de paz.

Utilize o silêncio estratégico

Ao receber uma postagem com discurso de ódio, você pode ignorá-la e não repostá-la, contribuindo para ela não se replique.

Edite informações para não propagar discursos de ódio

Se você receber um conteúdo que tenha desinformação ou discurso de ódio e considerar importante ajudar a combatê-los, apague as informações do autor ou da fonte original (inclusive o *link*) e informe na sua postagem que se trata de uma desinformação ou de uma agressão.

Não reaja e não comente para não dar destaque

O mais importante quando recebemos ou nos deparamos com publicações ou conteúdos que sejam mentirosos ou preconceituosos é não interagir com eles. Qualquer comentário ou reação (inclusive um *emoji* manifestando que você é contra aquele conteúdo) vai engajar a publicação e fazê-la chegar a mais pessoas.

Denuncie

É importante sempre denunciar conteúdos com discurso de ódio na própria plataforma em que foi produzido e em outros meios, como os *sites* de agências que conferem informações ou denunciando em uma delegacia *on-line* com a ajuda de um adulto. Para isso, reúna o máximo de informações possível para provar o discurso de ódio, como captura de tela do conteúdo e endereços eletrônicos dos envolvidos.

O princípio da liberdade de expressão não pode ser usado como defesa por quem dissemina o ódio!

Elaborado com base em CUNHA, J.; AFONSO, N. Eleições sem ódio: como a desinformação e o discurso de ódio podem influenciar pessoas durante o período eleitoral. **Safernet Brasil**, 2022. Disponível em: https://saferlab.org.br/eleicoessemodio.pdf. Acesso em: 17 jun. 2024.

Atividades

Faça as atividades no caderno.

Ainda, em grupos, com base nas informações apresentadas, respondam às questões e façam o que é proposto a seguir.

1. Leiam este inciso da Constituição Federal de 1988: "IV - é livre a manifestação do pensamento, sendo vedado o anonimato". O que significa "sendo vedado o anonimato"? **1.** Significa que as pessoas devem ser identificáveis ao expressar suas opiniões.

2. Vocês conhecem pessoas que já foram vítimas de discurso de ódio? **2.** Resposta pessoal.

3. Reflitam sobre as ideias apresentadas ao receber ou se deparar com publicações que reproduzem discursos de ódio. Vocês pretendem mudar alguma atitude em relação a essas práticas? **3.** Respostas pessoais.

4. Para compartilhar atitudes cidadãs que combatam desinformação e discursos de ódio, criem uma campanha incentivando a conferência de informações em sites especializados e o combate aos discursos de ódio com base nas informações que foram apresentadas. **4.** Resposta pessoal.

VERIFIQUE O QUE APRENDEU NO CAPÍTULO 4

Para aperfeiçoar os estudos, você pode retomar os exercícios propostos no decorrer deste capítulo, rever suas resoluções ou utilizar os **Exercícios complementares** para estudar com os colegas. Você também pode utilizar as questões propostas a seguir para verificar sua aprendizagem.

O conteúdo desta seção é mais um momento oportuno para fazer uma avaliação dos estudantes que pode estar associada à autoavaliação proposta por meio da **Ferramenta de estudo**.

1. Qual das alternativas apresenta o resultado da expressão $E = \dfrac{\text{tg } 60° + \text{tg } 150° - \text{tg } 180°}{\text{tg } 210° - \text{tg } 300°}$?

a. $\frac{1}{2}$ **b.** $-\frac{1}{2}$ **c.** $\frac{1}{4}$ **d.** $4 + 2\sqrt{3}$ **e.** $4 - 2\sqrt{3}$

1. alternativa **a**

2. Quais são os valores de senα e cosα tais que $\text{tg}\alpha = \frac{3}{4}$ e $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$?

a. $\text{sen } \alpha = \frac{5}{3}$ e $\cos \alpha = \frac{4}{3}$

b. $\text{sen } \alpha = \frac{4}{5}$ e $\cos \alpha = \frac{3}{5}$

c. $\text{sen } \alpha = \frac{3}{5}$ e $\cos \alpha = \frac{4}{5}$

d. $\text{sen } \alpha = \frac{3}{4}$ e $\cos \alpha = \frac{5}{4}$

e. $\text{sen } \alpha = \frac{3}{5}$ e $\cos \alpha = \frac{3}{5}$

2. alternativa **c**

3. Dado que $\text{cotg } x = 2$ e que $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$, então sec x é:

3. alternativa **e**

a. $\sec x = -\frac{\sqrt{5}}{5}$

b. $\sec x = \frac{\sqrt{5}}{5}$

c. $\sec x = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$

d. $\sec x = \frac{\sqrt{5}}{2}$

e. $\sec x = -\frac{\sqrt{5}}{2}$

4. No quadrilátero $ABCD$, a seguir, os ângulos $D\hat{A}C$ e $C\hat{A}B$ têm medidas iguais.

Sabendo que $AD = 5$ cm e $DC = 3$ cm, calcule a distância do ponto D à reta $\overleftrightarrow{AB}$.

a. 4,5 cm

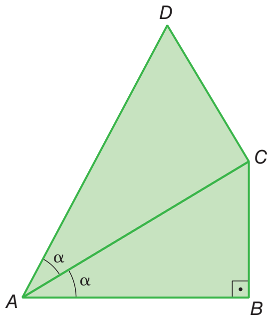
b. 4,6 cm

c. 4,7 cm

d. 4,8 cm

e. 4,9 cm

4. alternativa **d**



FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

Ferramenta de estudo

O mapa conceitual é uma ferramenta que representa de forma gráfica as relações entre conceitos, ou entre palavras que usamos para representar conceitos.

A seguir, apresentamos uma sugestão de elaboração de um mapa conceitual.

1. Retome os tópicos deste capítulo e faça um levantamento de informações relevantes para a elaboração do mapa. Por exemplo: conceitos, palavras-chave, situações-problema etc.
2. Escolha uma estrutura para o mapa e defina os recursos visuais que serão utilizados. Por exemplo: caixas, linhas, setas, cores, imagens, entre outros.
3. Organize a sequência das informações compondo ramificações que relacionem os conteúdos.

Agora, construa um mapa conceitual utilizando o que você aprendeu neste capítulo.

Se teve dificuldades em construir o mapa conceitual ou não resolveu algum exercício, retome os conteúdos abordados no capítulo. Após algumas tentativas, anote as dúvidas e converse com um colega que possa ajudá-lo. Se mesmo assim a dúvida persistir, pergunte ao professor na aula seguinte. Gerencie bem seu tempo de estudo em casa e estabeleça metas diárias alcançáveis, planejando seus estudos passo a passo.

CAPÍTULO 5

Funções trigonométricas e resolução de triângulos

Discotecagem

Basicamente, o equipamento de um *DJ* (*disc jockey*) é composto de dois toca-discos e um *mixer*, que permite que duas músicas sejam sincronizadas. Assim, o *DJ* consegue misturar os sons das músicas, passando de uma para outra sem interromper a batida, mantendo o agito da festa.

A figura 1 representa um trecho de cinco segundos de uma música. O som do primeiro disco, representado pelo gráfico amarelo, agita o público com uma música de 144 bpm, um ritmo bem intenso. Pelos fones, só o *DJ* ouve o som do segundo disco, representado pelo gráfico azul, com a música que vai entrar em seguida. O ritmo original dela é menor, 120 bpm.

Com o *pitch* do toca-discos em que está o segundo disco, o *DJ* aumenta a rotação do aparelho, acelerando o ritmo da música até as mesmas 144 bpm da música ouvida pelo público.

Igualadas as bpm das músicas, na hora certa o *DJ* pode deixar o som do segundo disco ir para as caixas, sobrepondo-o ao do primeiro disco e trocando-os sem pausas (figura 2).

FABRIKASIMF/SHUTTERSTOCK

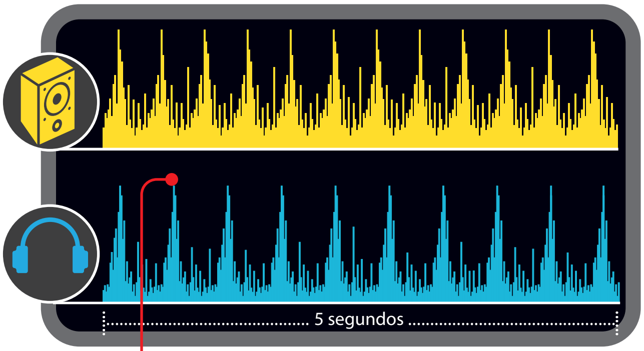


Figura 1.

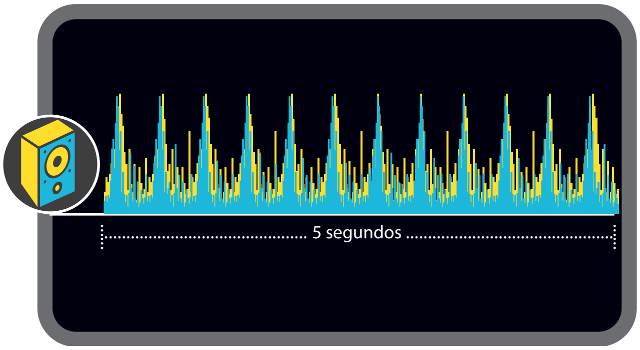


Figura 2.

ILUSTRAÇÕES: CIRO MACCORD FOTO: INFOGRÁFICO: MILTON RODRIGUES ALVES FOTO: BERNARDBODO/ISTOCK/GETTY IMAGES

Os picos do gráfico são as batidas da música, como uma percussão pulsando periodicamente. Um dos jeitos de contar esse ritmo é em batida por minuto (bpm).

Além da teoria

1. Você já foi em uma festa com *DJ* e percebeu a troca de músicas?
2. Como o ritmo de uma música pode influenciar o "agito" da festa?
3. A situação apresentada envolve movimentos periódicos. Você conhece outras situações? Cite pelo menos uma.

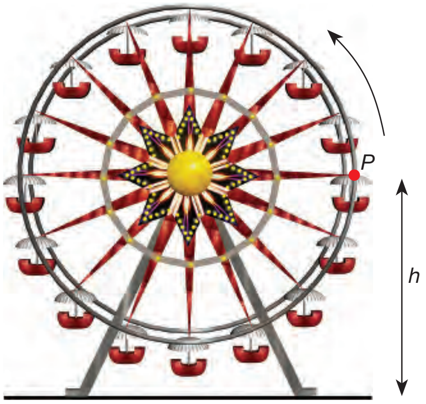
Além da teoria: Respostas pessoais.

1. Funções trigonométricas

Considere um ponto *P* marcado na borda de uma roda-gigante que, do ponto de vista de um observador, gira no sentido anti-horário a uma velocidade escalar constante, completando uma volta em 8 minutos.

MC MEDIASTUDIO/SHUTTERSTOCK

Roda-gigante Ain Dubai, localizada na ilha Bluewaters, em Dubai, nos Emirados Árabes Unidos. Ela tem 250 m de altura e, em 2021, foi considerada a maior roda-gigante do mundo. Foto de 2023.



LIGIA DUQUE/ARQUIVO DA EDITORA

A altura *h* do ponto *P*, em relação ao terreno plano e horizontal, varia em função do tempo *t*. Sendo 20 m a medida do raio da roda-gigante, 3 m a menor altura do ponto *P* em relação ao terreno e $t = 0$ um instante em que o ponto *P* esteja à menor altura, o gráfico dessa função pode ser obtido marcando-se no plano cartesiano os pontos (t, h), com *t* em minuto e *h* em metro. A figura 1 mostra o gráfico de quando o ponto *P* gira uma volta completa; a figura 2, de quando *P* gira três voltas completas.

Discuta detalhadamente o texto introdutório deste tópico acerca da roda-gigante. Com essa introdução, os estudantes darão um significado concreto à função seno.
Peça outros exemplos de movimentos que possam ser associados a um gráfico do mesmo tipo, por exemplo, o movimento circular de um satélite em torno da Terra, o movimento da extremidade de um ponteiro em um relógio analógico, o movimento de um ponto do pneu de um automóvel etc.
Defina as funções $f(x) = \text{sen } x$ e $g(x) = \cos x$, destacando seu domínio e conjunto imagem.

Figura 1

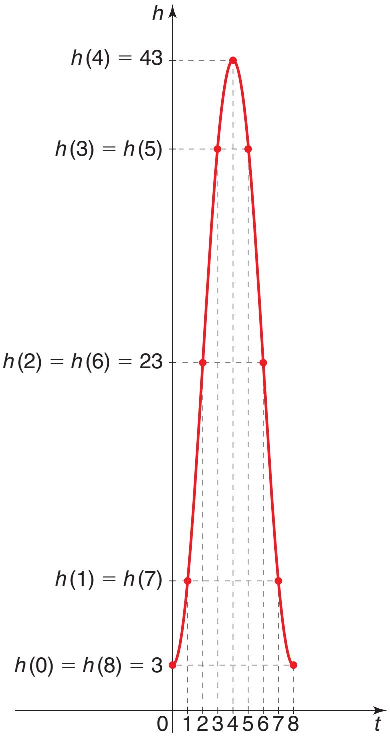
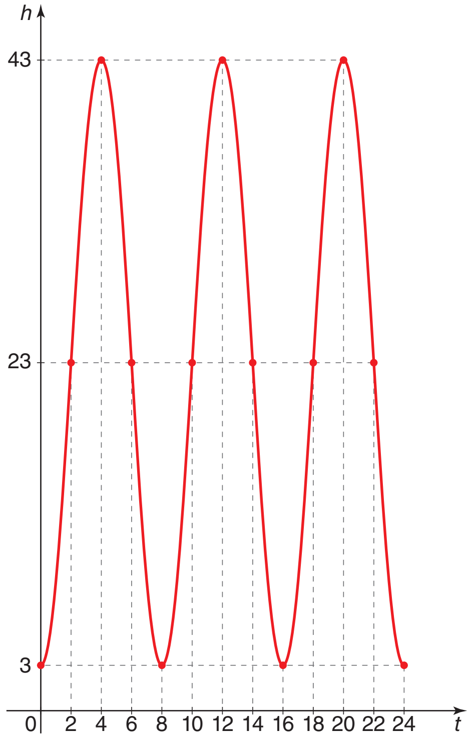


Figura 2



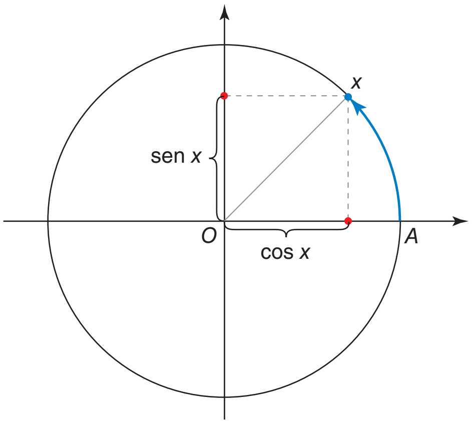
ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Observe que o gráfico se repete a cada volta concluída pelo ponto *P*. Isso ocorre porque *P* realiza o mesmo movimento em intervalos de tempo iguais. As funções que melhor modelam esse tipo de movimento são as funções trigonométricas seno e cosseno, que estudaremos neste capítulo. Por exemplo, o movimento do ponto *P* pode ser representado pela função $h(t) = 23 - 20 \cos \frac{\pi t}{4}$.

A seguir, definimos as funções seno e cosseno.

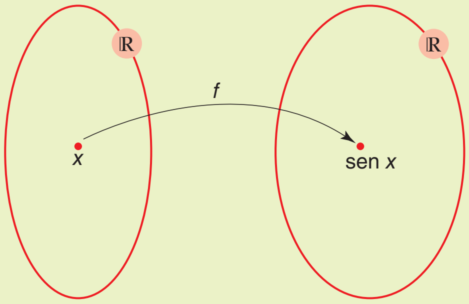
Definições

A cada número real *x* podemos associar um único sen *x* e um único cos *x*.



Esses fatos nos permitem definir as funções trigonométricas dadas por $f(x) = \text{sen } x$ e $g(x) = \cos x$.

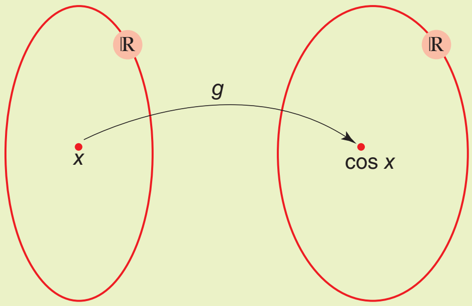
$f(x) = \text{sen } x$



$D(f) = \mathbb{R}$

$Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid -1 \leqslant y \leqslant 1\}$

$g(x) = \cos x$

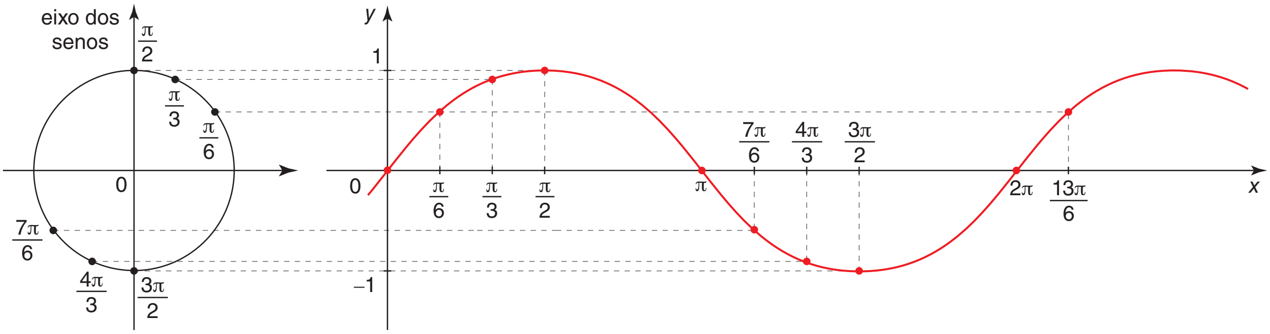


$D(g) = \mathbb{R}$

$Im(g) = \{y \in \mathbb{R} \mid -1 \leqslant y \leqslant 1\}$

2. Gráfico da função *f*(*x*) = sen *x*

A seguir, temos o gráfico da função $f(x) = \text{sen } x$ e a relação com alguns pontos da circunferência trigonométrica.



$D(f) = \mathbb{R}$

$Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid -1 \leqslant y \leqslant 1\}$

Observe que o gráfico é obtido pela repetição da figura determinada quando *x* assume todos os valores de uma volta completa da circunferência trigonométrica; por isso, dizemos que essa função é periódica e que seu período é 2π.

ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

Utilizando a linguagem precisa, dizemos que a função $f(x) = \text{sen } x$ é periódica porque existe pelo menos um número real positivo p que, para qualquer x real, satisfaz a condição $\text{sen }(x + p) = \text{sen } x$. Por exemplo:

$$\text{sen }(x + 2\pi) = \text{sen } x$$
$$\text{sen }(x + 4\pi) = \text{sen } x$$
$$\text{sen }(x + 6\pi) = \text{sen } x$$
etc.

O menor número positivo p que satisfaz essa condição é chamado de **período** da função $f(x) = \text{sen } x$; esse número é 2π.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Esboce o gráfico da função $f(x) = 3 \text{ sen } x$.

Resolução

Para esboçar o gráfico, construímos um quadro, atribuindo à variável x alguns valores e calculando os correspondentes valores de y. Para facilitar, atribuímos a x os valores 0, $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$ e 2π.

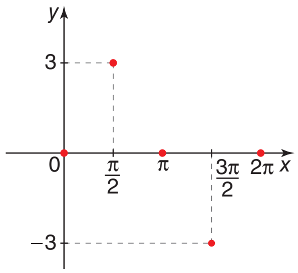
$f(x) = 3$ sen x

x	y
0	0
$\frac{\pi}{2}$	3
π	0
$\frac{3\pi}{2}$	-3
2π	0

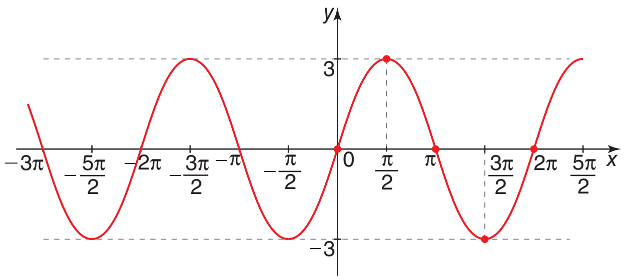
Na lousa, com a participação dos estudantes, refaça os **exercícios resolvidos 1** a **5**, incentivando-os a compartilhar e conversar sobre diferentes estratégias de resoluções de problemas similares.

Note que atribuímos a x somente valores positivos; porém, poderíamos ter atribuído valores negativos, já que o domínio da função seno é $\mathbb{R}$.

Marcando no plano cartesiano os pontos (0, 0), $\left(\frac{\pi}{2}, 3\right)$, $(\pi, 0)$, $\left(\frac{3\pi}{2}, -3\right)$ e $(2\pi, 0)$, temos:



O gráfico da função passa por esses cinco pontos e tem o seguinte traçado:



$D(f) = \mathbb{R}$; $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid -3 \leqslant y \leqslant 3\}$; $p = 2\pi$

Devemos entender que esse traçado é apenas uma parte do gráfico que deve ser imaginado ao longo de todo o eixo das abscissas, repetindo a figura obtida de acordo com os valores que x assume a cada volta da circunferência trigonométrica.

Conectado: Ao comparar o gráfico de f e de g, temos que o conjunto imagem de f é o intervalo $[-1, 1]$ e o conjunto imagem de g é o intervalo $[-a, a]$. Além disso, as raízes de f e de g coincidem.
Se $a > 0$, em cada intervalo entre duas raízes consecutivas de f e de g, então ambas as funções têm ponto máximo nesse intervalo ou ambas têm ponto mínimo nesse intervalo.
Se $a < 0$, em cada intervalo entre duas raízes consecutivas de f e de g, se uma das funções tem ponto máximo nesse intervalo, a outra tem ponto mínimo e vice-versa.

Observação

Acompanhe como calculamos o valor de y quando $x = \frac{\pi}{2}$:

$y = 3 \cdot \text{sen } x$

$y = 3 \cdot \text{sen } \frac{\pi}{2}$

$y = 3 \cdot 1$

$y = 3$

Conectado

Utilize um *software* de geometria dinâmica e obtenha o gráfico de $f(x) = \text{sen } x$. Depois, obtenha o gráfico de $g(x) = a \cdot \text{sen } x$, em que a é um número real diferente de 0 (zero).

Converse com os colegas acerca de como o fator a influencia no gráfico da função g comparado ao gráfico da função f.

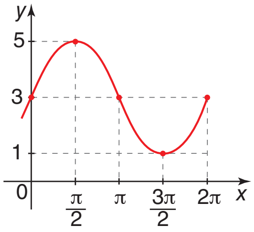
ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

2. Esboce o gráfico da função g dada por $g(x) = 3 + 2\ \text{sen}\ x$.

Resolução

$g(x) = 3 + 2\ \text{sen}\ x$

x	y
0	3
$\frac{\pi}{2}$	5
π	3
$\frac{3\pi}{2}$	1
2π	3



$D(g) = \mathbb{R};\ Im(g) = \{y \in \mathbb{R} \mid 1 \leqslant y \leqslant 5\};\ p = 2\pi$

Observação

Acompanhe como se calcula o valor de y quando $x = \pi$:

$y = 3 + 2\ \text{sen}\ x$

$y = 3 + 2\ \text{sen}\ \pi$

$y = 3 + 2 \cdot 0$

$y = 3$

3. Esboce o gráfico da função $h(x) = \text{sen}\ 2x$.

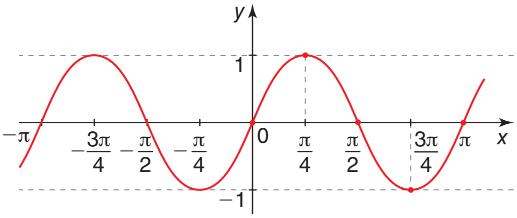
Resolução

Quando o arco da função seno for da forma $ax + b$, com $a \neq 0$ e $a \neq 1$, ou $a = 1$ e $b \neq 0$, construímos um quadro com três colunas: a primeira para o arco $(ax + b)$, a segunda para valores de x e a terceira para valores de y.

Para obter o gráfico correspondente a um período da função definida por $y = \text{sen}\ 2x$, atribuímos ao arco $2x$ os valores $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ e 2π e, em seguida, determinamos os valores correspondentes de x e y.

$h(x) = \text{sen}\ 2x$

$2x$	x	y
0	0	0
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{4}$	1
π	$\frac{\pi}{2}$	0
$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	-1
2π	π	0



$D(h) = \mathbb{R};\ Im(h) = \{y \in \mathbb{R} \mid -1 \leqslant y \leqslant 1\};\ p = \pi$

Observação

Acompanhe como se calcula o valor de y quando $x = \frac{3\pi}{4}$:

$y = \text{sen}\ 2x$

$y = \text{sen}\left(2 \cdot \frac{3\pi}{4}\right)$

$y = \text{sen}\ \frac{3\pi}{2}$

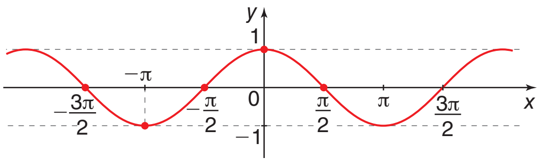
$y = -1$

4. Esboce o gráfico da função $f(x) = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.

Resolução

$f(x) = \text{sen}\ \frac{\pi}{2} - x$

$\frac{\pi}{2} - x$	x	y
0	$\frac{\pi}{2}$	0
$\frac{\pi}{2}$	0	1
π	$-\frac{\pi}{2}$	0
$\frac{3\pi}{2}$	$-\pi$	-1
2π	$-\frac{3\pi}{2}$	0



$D(f) = \mathbb{R};\ Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid -1 \leqslant y \leqslant 1\};\ p = 2\pi$

Observação

Acompanhe como se calcula o valor de y quando $x = -\pi$:

$y = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

$y\ =\ \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - (-\pi)\right)$

$y = \text{sen}\ \frac{3\pi}{2}$

$y = -1$

5. Determine os valores reais de m de modo que exista a igualdade $\text{sen}\ x = 5m - 1$.

Resolução

Sabemos que $-1 \leqslant \text{sen}\ x \leqslant 1$.

Logo: $-1 \leqslant 5m - 1 \leqslant 1$

Adicionando 1 a cada membro dessa dupla desigualdade, obtemos: $0 \leqslant 5m \leqslant 2$

Dividindo por 5 os membros dessa última desigualdade, concluímos que: $0 \leqslant m \leqslant \frac{2}{5}$

Portanto, a igualdade $\text{sen}\ x = 5m - 1$ só existe se $m \in \mathbb{R}$ e $0 \leqslant m \leqslant \frac{2}{5}$.

ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Faça os exercícios no caderno.

1. Esboce o gráfico das funções dadas pelas leis a seguir determinando o domínio, o conjunto imagem e o período em cada caso. **1.** Respostas no final do livro.

a. $f(x) = 4 \text{ sen } x$

b. $z(x) = -4 \text{ sen } x$

c. $g(x) = \text{sen } 4x$

d. $h(x) = 3 \text{ sen } \frac{x}{2}$

e. $v(x) = 3 \text{ sen } \left(x - \frac{\pi}{3}\right)$

f. $t(x) = -4 + 2 \text{ sen } 2x$

g. $r(x) = \left|\text{sen } \frac{x}{2}\right|$

h. $s(x) = 3 + \left|\text{sen } \frac{x}{2}\right|$

2. Considerando a função $f(x) = 4 + 2 \text{ sen } x$, classifique como verdadeira ou falsa cada uma das afirmações a seguir.

a. $f(0) = 4$ **2. a.** verdadeira

b. $f(x) = f(-x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. **2. b.** falsa

c. O valor máximo da função f é 6. **2. c.** verdadeira

d. A função f assume seu valor mínimo para

$x = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$. **2. d.** falsa

e. A equação $f(x) = 0$ apresenta exatamente duas soluções para $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$. **2. e.** falsa

3. Sabendo que o valor mínimo da função f definida por $f(x) = k + \text{sen } 5x$ é -3:

a. determine o número real k; **3. a.** -2

b. determine o valor máximo de f. **3. b.** -1

4. Faça o que se pede.

a. Obtenha os valores reais de m de modo que exista a igualdade $\text{sen } x = 6m - 5$. **4. a.** $\frac{2}{3} \leqslant m \leqslant 1$

b. Determine os valores reais de k para que a equação $\text{sen } x = 5 - 2k$, na variável x, não admita solução. **4. b.** $k < 2$ ou $k > 3$

c. Determine os valores reais de p para que a equação $|\text{sen } x| = \frac{2p + 1}{3}$, na variável x, admita solução. **4. c.** $-\frac{1}{2} \leq p \leq 1$

5. Em uma ilha, certo tipo de vegetação é abundante em determinadas épocas do ano e escassa em outras. A área S, em quilômetro quadrado, ocupada por essa vegetação na ilha, ao longo do ano, pode ser expressa por meio da função definida por:

$$S(t) = 100 + 50 \text{ sen } \frac{\pi t}{6},$$

em que $t = 1$, $t = 2$, $t = 3$, ..., $t = 12$ representam o final dos meses de janeiro, fevereiro, março, ... e dezembro, respectivamente.

a. Qual é a área da ilha ocupada por essa vegetação ao final do mês de junho? **5. a.** 100 km^2

b. Ao longo do ano, qual é a maior área da ilha ocupada por essa vegetação? **5. b.** 150 km^2

c. Em que mês essa vegetação atinge a maior área? **5. c.** março

d. Ao longo do ano, qual é a menor área da ilha ocupada por essa vegetação? **5. d.** 50 km^2

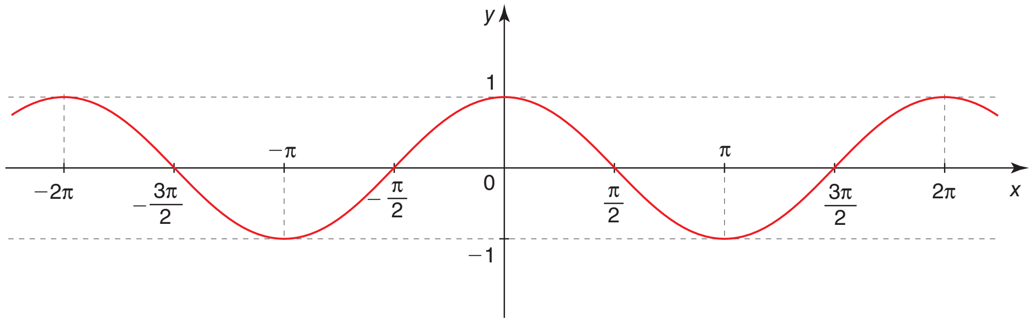
e. Em que mês essa vegetação atinge a menor área? **5. e.** setembro

f. Em que meses do ano a área ocupada por essa vegetação é de 125 km^2? **5. f.** janeiro e maio

3. Gráfico da função g(x) = cos x

Observando que $\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \text{sen } \frac{\pi}{2} \cdot \cos x - \text{sen } x \cdot \cos \frac{\pi}{2} = 1 \cdot \cos x - \text{sen } x \cdot 0 = \cos x$, concluímos que o gráfico da função $g(x) = \cos x$ é o gráfico da função $f(x) = \text{sen } \left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, construído no exercício resolvido 4, ou seja:

Poderíamos repetir os procedimentos geométricos aplicados na construção do gráfico de $f(x) = \text{sen } x$, porém não é preciso; basta observar que $\cos x = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$. Assim, o gráfico da função $g(x) = \cos x$ é o gráfico da função $g(x) = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, ou seja, esse gráfico é uma translação horizontal de $\frac{\pi}{2}$ para a esquerda do gráfico da função $f(x) = \text{sen } x$.



FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

$$D(g) = \mathbb{R};\ Im(g) = \{y \in \mathbb{R} \mid -1 \leqslant y \leqslant 1\};\ p = 2\pi$$

Com a colaboração dos estudantes, refaça na lousa os **exercícios resolvidos 6** e **7**.

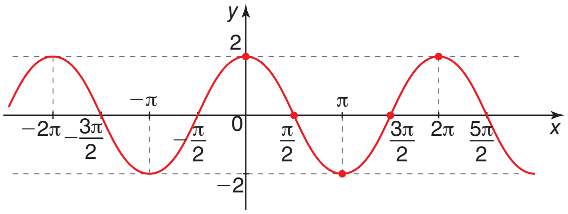
EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

6. Esboce o gráfico da função $f(x) = 2 \cos x$.

Resolução

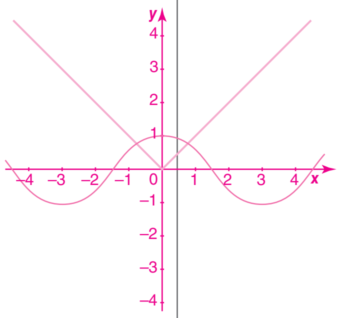
$f(x) = 2 \cos x$

x	y
0	2
$\frac{\pi}{2}$	0
π	-2
$\frac{3\pi}{2}$	0
2π	2



$D(f) = \mathbb{R}$; $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid -2 \leqslant y \leqslant 2\}$; $p = 2\pi$

8.



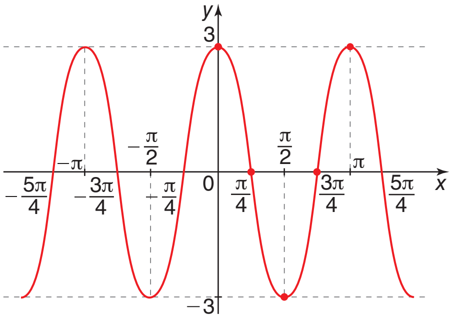
ERICSON GUILHERME LUCIANO

7. Esboce o gráfico da função $f(x) = 3 \cos 2x$.

Resolução

$f(x) = 3 \cos 2x$

$2x$	x	y
0	0	3
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{4}$	0
π	$\frac{\pi}{2}$	-3
$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	0
2π	π	3



$D(f) = \mathbb{R}$; $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid -3 \leqslant y \leqslant 3\}$; $p = \pi$

ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

Se julgar necessário, no **exercício proposto 6**, comente que o gráfico do item **b** é obtido por uma reflexão, em relação ao eixo *Ox*, do gráfico do item **a**. Além de que o gráfico do item **c** é obtido por uma translação vertical de três unidades para baixo, também do gráfico do item **a**.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Faça os exercícios no caderno.

6. Respostas no final do livro.

6. Esboce o gráfico de cada uma das funções a seguir, determinando seu domínio, conjunto imagem e período.

a. $f(x) = 5 \cos x$

b. $g(x) = -5 \cos x$

c. $h(x) = -3 + 5 \cos x$

d. $v(x) = \cos 4x$

e. $z(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

f. $t(x) = |\cos 2x|$

g. $r(x) = 2 - |\cos 2x|$

7. Faça o que se pede:

a. Calcule o valor máximo da função $f(x) = 2 - 3 \cos x$. **7. a.** 5

b. Determine o menor valor real positivo de x para que a função $g(x) = -3 + 5 \cos 2x$ assuma seu valor mínimo. **7. b.** $\frac{\pi}{2}$

c. Obtenha os valores reais de k de modo que exista a igualdade $\cos^2 x = 2k - 6$. **7. c.** $3 \leq k \leq \frac{7}{2}$

8. (Uespi) O número de soluções reais, distintas, da equação $\cos(x) = |x|$ é igual a: **8.** alternativa **c**

a. 0

b. 1

c. 2

d. 3

e. 4

(*Sugestão*: Construa no mesmo plano cartesiano os gráficos das funções definidas por $y = \cos x$ e $y = |x|$.)

9. A pressão que o sangue exerce sobre as paredes das artérias é chamada de pressão arterial. Quando o músculo cardíaco se contrai, enviando sangue para a artéria aorta, tem-se a pressão sistólica (máxima); quando o músculo relaxa, para se encher novamente de sangue, tem-se a pressão diastólica (mínima).

KURHAN/SHUTTERSTOCK

O esfigmomanômetro é um instrumento utilizado para medir a pressão arterial.

O **exercício proposto 9** aborda o **ODS 3**. Trabalhe questões acerca de hábitos saudáveis como praticar atividades físicas e ter uma alimentação com base em alimentos naturais ou pouco processados. Incentive uma pesquisa e possibilite aos estudantes compartilharem os resultados em uma apresentação, exposição de cartazes ou postagens nas redes sociais.

Admita que, durante o procedimento de medição da pressão arterial P, de um ser humano, em milímetro de mercúrio (mmHg), a pressão variou em função do tempo t, em segundo, de acordo com a equação $P(t) = 100 - 20\cos\left(\frac{8\pi t}{3}\right)$, em que $t = 0$ corresponde ao início do procedimento.

Supondo que essa medição tenha durado o tempo necessário para que P assumisse seus valores máximo e mínimo, responda às questões a seguir.

a. Quais foram as medidas das pressões sistólica e diastólica obtidas nessa medição?

9. a. 120 mmHg e 80 mmHg

b. Após o início dessa medição, em quanto tempo a pressão arterial atingiu seu valor máximo pela primeira vez?

9. b. 0,375 s

c. Faça uma pesquisa a respeito de práticas cotidianas que favorecem a regulação da pressão arterial e práticas que podem prejudicar a pressão arterial. Depois, converse com os colegas a respeito da importância de hábitos saudáveis.

9. c. Pesquisa pessoal.

Para retomar os conteúdos estudados, resolva os exercícios complementares 1 e 2.

Período das funções seno e cosseno

Oriente os estudantes a consultar as páginas 6 e 7 para saber mais sobre este e os demais Objetivos de Desenvolvimento Sustentável.

Obtemos o período da função $y = a + b \cdot \text{sen}(mx + q)$ ou da função $y = a + b \cdot \cos(mx + q)$, em que a, b, m e q são números reais, com $b \neq 0$ e $m \neq 0$, fazendo a medida $(mx + q)$ assumir todos os valores reais associados a uma volta completa da circunferência trigonométrica. Por exemplo, quando essa medida assume os valores de 0 a 2π, temos:

$$0 \leqslant mx + q \leqslant 2\pi \Rightarrow -q \leqslant mx \leqslant 2\pi - q$$

(1) Se $m > 0$:

$$-q \leqslant mx \leqslant 2\pi - q \Rightarrow -\frac{q}{m} \leqslant x \leqslant \frac{2\pi - q}{m}$$

Assim, o período p da função é a diferença entre o maior e o menor valor obtido para x, nessa ordem, isto é:

$$p = \frac{2\pi - q}{m} - \left(-\frac{q}{m}\right) \Rightarrow p = \frac{2\pi}{m}$$

(2) Se $m < 0$:

$$-q \leqslant mx \leqslant 2\pi - q \Rightarrow -\frac{q}{m} \geqslant x \geqslant \frac{2\pi - q}{m}$$

Calculando o período p, temos:

$$p = -\frac{q}{m} - \frac{2\pi - q}{m} \Rightarrow p = -\frac{2\pi}{m}$$

Por (1) e (2), concluímos que: $p = \frac{2\pi}{|m|}$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

8. Determine o período das funções:

a. $y = 3\ \text{sen}\ 2x$

b. $y = 2 + 6\cos(-4x)$

c. $y = 2\ \text{sen}\ \frac{x}{3}$

d. $y = 3 - 4\cos\left(\pi x + \frac{\pi}{5}\right)$

Resolução

a. $p = \frac{2\pi}{|2|} = \frac{2\pi}{2} = \pi$

b. $p = \frac{2\pi}{|-4|} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

c. $p = \frac{2\pi}{\left|\frac{1}{3}\right|} = \frac{2\pi}{\frac{1}{3}} = 6\pi$

d. $p = \frac{2\pi}{|\pi|} = \frac{2\pi}{\pi} = 2$

9. A *London Eye*, também conhecida como *Millennium Wheel* (Roda do Milênio), é uma das maiores rodas-gigantes do mundo. Podemos descrever seu movimento de giro por meio de uma função trigonométrica. Por exemplo, considerando um extremo A de um diâmetro horizontal da roda, o movimento desse ponto pode ser descrito por meio da função

$f(t) = 71 + 64\ \text{sen}\ \frac{\pi t}{15}$, em que $f(t)$ é a altura, em metro, do ponto *A* em relação ao terreno no instante *t*, em minuto, a partir do início da medição do tempo ($t = 0$).

a. Qual é a altura máxima atingida pelo ponto *A*?

b. Em quantos minutos a roda dá uma volta completa?

Resolução

a. A altura máxima atingida pelo ponto *A* é o valor máximo da função *f*. Para calcular esse valor, vamos determinar o conjunto imagem de *f*.

Temos:

$$-1 \leqslant \text{sen}\ \frac{\pi t}{5} \leqslant 1$$

Multiplicando os membros dessa igualdade por 64, chegamos a:

$$-64 \leqslant 64\ \text{sen}\ \frac{\pi t}{15} \leqslant 64$$

Adicionando 71 aos membros da desigualdade, obtemos:

$$71 - 64 \leqslant 71 + 64\ \text{sen}\ \frac{\pi t}{15} \leqslant 71 + 64 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 7 \leqslant f(t) \leqslant 135$$

Portanto, a altura máxima atingida pelo ponto *A* é 135 m.

b. O tempo necessário para o ponto *A* girar uma volta completa é o período *p* da função *f*, ou seja:

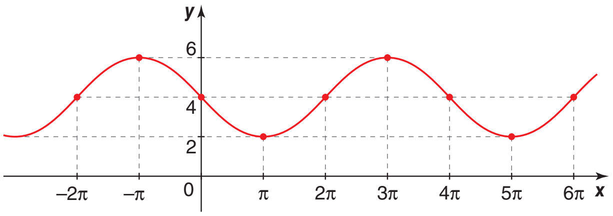
$$p = \frac{2\pi}{\left|\frac{\pi}{15}\right|} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{15}} = 30$$

Logo, a roda completa uma volta em 30 minutos.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Faça os exercícios no caderno.

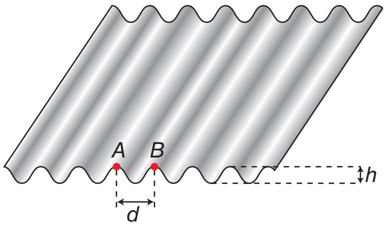
10. Observe parte do gráfico da função $f(x) = a + 2\ \text{sen}\ (mx)$ representado na figura. Determine as constantes reais *a* e *m*. **10.** $a = 4$ e $m = -\frac{1}{2}$



ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

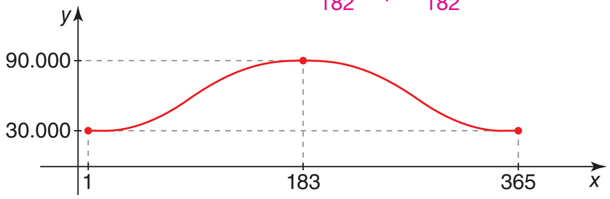
11. O perfil de uma telha ondulada, representada na figura, pode ser descrito por $f(x) = 5\cos\frac{x}{2}$, em que os valores absolutos de *x* e $f(x)$ indicam medidas em centímetro. Calcule as medidas *h* e *d* indicadas na figura, considerando que *A* e *B* são cristas de ondas.

11. $h = 10$ cm; $d = 4\pi$ cm $\approx 12{,}56$ cm



12. Um estudo do departamento de planejamento de uma indústria revelou que as vendas de seu produto, em unidades diárias, variaram nos 365 dias do ano anterior do seguinte modo: no primeiro dia do ano, as vendas estiveram no patamar mínimo, de 30.000 unidades; no 183º dia do ano, o dia central, as vendas atingiram o patamar máximo de 90.000 unidades; e, no 365º dia do ano, voltaram ao patamar mínimo. Para programar a produção, os técnicos representaram em um plano cartesiano os pontos cuja abscissa é o número do dia do ano anterior, de 1 a 365, e a ordenada é o número de unidades vendidas no respectivo dia. Em seguida, aproximaram esses pontos pelo gráfico, que representa a função $f(x) = a + b\cos(mx + q)$, cujos valores mínimo e máximo coincidem com os patamares mínimo e máximo de vendas do produto. Determine os números *a*, *b*, *m* e *q*, sabendo que são todos positivos e *q* é o menor possível.

12. $a = 60.000$, $b = 30.000$, $m = \frac{\pi}{182}$ e $q = \frac{181\pi}{182}$



ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

Para retomar os conteúdos estudados, resolva os exercícios complementares 3 e 4.

4. Movimentos periódicos

Quando um móvel repete o mesmo movimento consecutivamente em intervalos de tempo iguais, dizemos que ele realiza **um movimento periódico**. O tempo necessário para a realização de cada um desses movimentos recebe o nome de **período** (*p*); e o número de movimentos realizados em determinada unidade de tempo é chamado de **frequência** (*F*) do movimento.

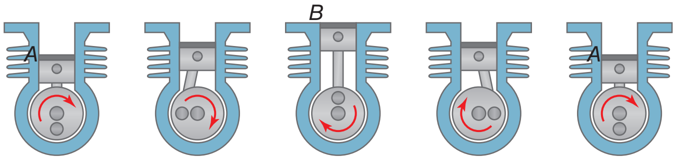
Comente que móvel é todo e qualquer corpo que muda de posição com o decorrer do tempo.

Exemplos

a. Cada pistão de um motor é uma peça cilíndrica que, quando em funcionamento, realiza um movimento periódico de vaivém no interior de outra peça, também cilíndrica.

O esquema da figura 1 representa um pistão partindo da posição *A*, indo até *B* e voltando à posição *A*. Essa trajetória de ida e volta é uma oscilação completa do pistão. O tempo decorrido em uma oscilação completa é o período do movimento do pistão, e o número de oscilações por unidade de tempo é a frequência do movimento do pistão.

Figura 1



ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

b. O fenômeno de elevação e abaixamento das águas do mar recebe o nome de maré. O maior e o menor nível das águas do mar são chamados, respectivamente, de maré alta e maré baixa. O tempo decorrido entre duas marés altas consecutivas (ou entre duas marés baixas consecutivas) é de 12 horas, aproximadamente. Esse movimento das águas do mar é considerado periódico, de período $p = 12$ h e frequência $F = \frac{1}{12}$ oscilação por hora.

As marés são provocadas pela força gravitacional da Lua e, secundariamente, pela do Sol sobre a Terra.

c. O ciclo astronômico de dia e noite é outro exemplo de fenômeno periódico natural. Ele ocorre devido à rotação da Terra em torno do próprio eixo. Por esse motivo, funções trigonométricas podem ser usadas para descrever esse fenômeno, considerando algumas variáveis como período do ano e localização geográfica do ponto a ser considerado.

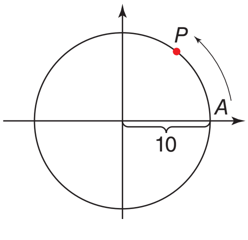
O movimento periódico e as funções trigonométricas

As funções trigonométricas são periódicas, isto é, repetem-se em intervalos consecutivos e de mesmo comprimento. As funções definidas por $f(x) = \text{sen } x$ e $g(x) = \cos x$, por exemplo, repetem-se a cada volta completa na circunferência trigonométrica. Por isso, essas funções são utilizadas para descrever fenômenos periódicos, como o movimento das marés, a propagação de ondas, o movimento dos planetas, o batimento cardíaco, as estações do ano etc.

O chamado movimento periódico circular é fundamental para entender a relação entre as funções trigonométricas e os movimentos periódicos.

Exemplo

Figura 2



FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

No plano cartesiano, considere uma circunferência com 10 cm de raio, centrada na origem do sistema, e um ponto *P* girando sobre essa circunferência no sentido anti-horário, com velocidade constante e frequência de 80 rotações por minuto. Vamos descrever o movimento desse ponto por meio de uma função trigonométrica. Por descrever o mesmo movimento em intervalos consecutivos e de mesma duração, o movimento desse ponto é periódico, de frequência $F = 80$ rpm e período $p = \frac{1}{80}$ min, pois esse é o tempo que o ponto leva para completar uma volta na circunferência.

Para descrever o movimento do ponto, precisamos determinar a medida α do arco $\overset{\frown}{AP}$ em função do tempo *t*, considerando como instante zero um instante em que *P* passe pelo ponto *A*. Para isso, montamos a regra de três:

Medida do arco (rad)	**Tempo (min)**
2π	$\frac{1}{80}$
α	t

$$\Rightarrow \alpha = 160\pi t \text{ rad}$$

Comente os exemplos citados no livros e também outros: se um pêndulo realiza uma oscilação completa a cada dois segundos, dizemos que realiza um movimento periódico de frequência $F = \frac{1}{2}$ oscilação por segundo e período $p = 2$ s.
Peça outros exemplos de movimentos periódicos, por exemplo, movimentos de rotação e de translação da Terra, respiração dos animais, movimento de rotação dos ponteiros de um relógio etc.

Observação

Observe que o período é o inverso da frequência, ou seja: $p = \frac{1}{F}$

OBJETO DIGITAL

Infográfico clicável: Duração do dia: um fenômeno periódico natural

Introduza o assunto, reiterando que as funções trigonométricas são periódicas, isto é, repetem-se em intervalos consecutivos e de mesmo comprimento. As funções $f(x) = \text{sen } x$ e $g(x) = \cos x$, por exemplo, repetem-se a cada volta completa na circunferência trigonométrica. Por isso, essas funções são utilizadas para descrever fenômenos periódicos, como o movimento das marés, a propagação de ondas, o movimento dos planetas, o batimento cardíaco etc.
O chamado movimento circular uniforme é fundamental para entender a relação entre as funções trigonométricas e os movimentos periódicos.
Comente o exemplo apresentado neste item.

Observação

Abreviamos "rotações por minuto" por rpm.

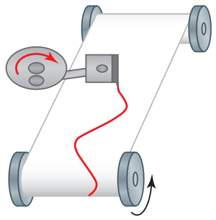
Saliente que, muitas vezes, o movimento periódico não se associa explicitamente a uma circunferência, mas, com uma pequena dose de imaginação, conseguimos relacionar o fenômeno com um movimento circular uniforme. Por exemplo, discuta o exemplo do pistão, apresentado nesse item. Esta pode ser uma oportunidade de trabalho integrado com Física, na área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias.

Sugira uma análise sobre o movimento circular feito pelo pistão de um motor ao realizar um movimento periódico de vaivém no interior de outra peça, também cilíndrica. Esse exemplo pode ser explorado em parceria com o professor de Física. Extrapolando esse raciocínio, é possível descrever o movimento das marés por meio de uma função trigonométrica, como se o mar fosse um imenso pistão que sobe e desce.

Conclua que qualquer movimento periódico que possa ser associado a um movimento circular uniforme, como o movimento de um pêndulo, a propagação de ondas, o movimento dos braços de uma pessoa durante uma caminhada, os batimentos cardíacos etc., pode ser descrito por uma função trigonométrica.

Observação

Para exemplificar esses resultados, imagine um lápis fixo na cabeça do pistão em movimento. Ao desenhar uma linha em uma folha de papel que transpasse dois carretéis, obtemos a figura a seguir. Se a velocidade com que giram os carretéis é a mesma do ponto P, a linha desenhada é o gráfico das funções f e g, a menos da localização do sistema cartesiano.



ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

Considere um momento em que P esteja no 1º quadrante. Como o raio mede 10 cm, temos, pelo triângulo OPM representado na figura 3:

$$\cos \alpha = \frac{x}{10} \Rightarrow x = 10 \cos \alpha = 10 \cos (160\pi t)$$

$$\text{sen } \alpha = \frac{y}{10} \Rightarrow y = 10 \text{ sen } \alpha = 10 \text{ sen } (160\pi t)$$

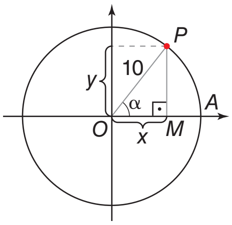


Figura 3

Podemos generalizar essas relações para os outros quadrantes e descrever o movimento do ponto P, em função do tempo t, em minuto, por meio de:

- sua abscissa: $f(t) = 10 \cos (160\pi t)$ ou
- sua ordenada: $g(t) = 10 \text{ sen } (160\pi t)$

Associando um movimento circular a um movimento periódico

Muitas vezes, o movimento periódico não se associa explicitamente a uma circunferência. Ainda assim, é possível relacionar o fenômeno a um movimento circular.

Exemplo

Considere um pistão em movimento periódico tal que seu percurso seja 20 cm e o trajeto de ida e volta (40 cm) seja realizado 80 vezes por minuto. Imaginemos uma circunferência de diâmetro 20 cm, com o centro na origem de um sistema cartesiano, de modo que, quando um ponto P gire na circunferência, uma haste rígida $\overline{MP}$ acompanhe o movimento do pistão, conforme esquema representado na figura 4.

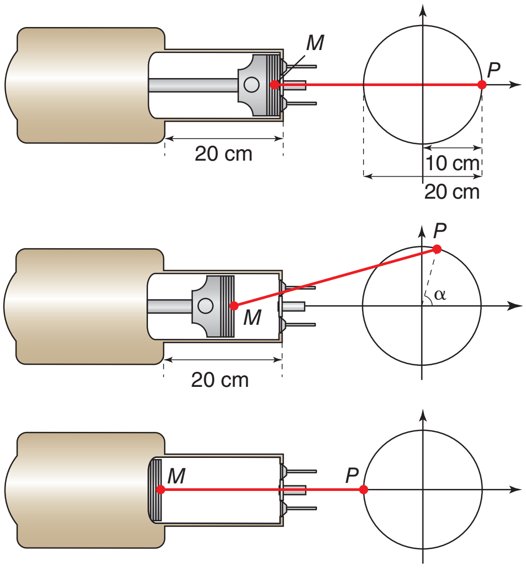


Figura 4

Proponha algumas questões sobre movimentos periódicos.

- Em uma bicicleta, a distância entre o centro O da coroa e o eixo de cada pedal é 20 cm, e, quando ela está em uma posição vertical, em relação à pista plana e horizontal, a distância entre o ponto O e a pista é de 30 cm. Se em um passeio, nessas condições, cada pedal da bicicleta girou 120 voltas por minuto, determine a altura h do eixo E de um dos pedais, em relação à pista, em função do tempo t, em minuto, a partir de um instante em que E esteve na posição mais distante da pista.

($h = 30 + 20 \cos (\frac{\pi t}{60} - x)$ mm)

ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

Assim, usando os cálculos do exemplo anterior e admitindo que a velocidade de P seja constante, podemos descrever o movimento do pistão pelo movimento do ponto P, em função do tempo t, em minuto:

- pela abscissa do ponto P: $f(t) = 10 \cos (160\pi t)$ ou
- pela ordenada do ponto P: $g(t) = 10 \text{ sen } (160\pi t)$

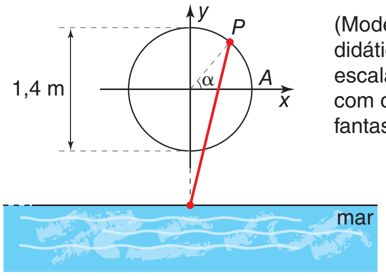
Extrapolando esse raciocínio, é possível descrever o movimento das marés por meio de uma função trigonométrica, como se o mar fosse um imenso pistão que sobe e desce. Enfim, muitos movimentos periódicos, como o movimento de um pêndulo, a propagação de ondas, o movimento dos braços de uma pessoa durante uma caminhada, os batimentos cardíacos etc., podem ser descritos por uma função trigonométrica.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

10. Em uma região, em determinado dia, a amplitude das marés é 1,4 m, e o intervalo de tempo entre duas marés altas consecutivas (ou entre duas marés baixas consecutivas) é de 12 horas. Sabendo que uma maré alta ocorre às 3 h, descreva, por meio de uma função trigonométrica, o movimento das marés nessa região em função do horário *t*, em hora, nesse dia.

Resolução

Imaginemos, em um plano vertical, uma circunferência acima do nível do mar e uma haste rígida ligando um ponto *P* da circunferência a um ponto do nível do mar, no prolongamento do eixo *Oy*, conforme mostra a figura a seguir.



(Modelo didático sem escala e com cores fantasia.)

FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

O subir e descer da maré, que lembra o movimento de um imenso pistão, provoca um movimento circular do ponto *P*. Supondo esse movimento com velocidade constante e no sentido anti-horário, vamos calcular a medida α do arco $\widehat{AP}$, em função do tempo *t*, em hora, em que $t = 0$ corresponda a um instante em que *P* passou pelo ponto *A*:

Medida do arco (rad)	**Tempo (min)**
2π	12
α	*t*

$$\Rightarrow \alpha = \frac{\pi t}{6} \text{ rad}$$

Assim, podemos descrever o movimento da maré nesse dia, em função do tempo *t*, em hora $(0 \leqslant t \leqslant 24)$:

- pela ordenada do ponto *P*: $f(t) = 0{,}7 \text{ sen } \frac{\pi t}{6}$ ou
- pela abscissa do ponto *P*: $g(t) = 0{,}7 \cos \frac{\pi t}{6}$

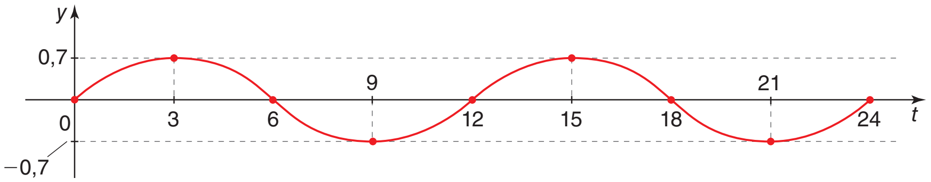
Observação

A amplitude das marés é a diferença entre os níveis da maré alta e da maré baixa. Ela varia dependendo da posição da Lua.
Note que, como o intervalo entre duas marés altas consecutivas é de 12 horas, o ponto *P* deve demorar 12 horas para percorrer toda a circunferência.

Notas:

1. O período *p* da função $f(t) = 0{,}7 \text{ sen } \frac{\pi t}{6}$ ou da função $g(t) = 0{,}7 \cos \frac{\pi t}{6}$ é dado por $p = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{6}} = 12$. Esse período, no contexto do problema, chamado de período das marés, é o tempo, em hora, transcorrido entre duas marés altas (ou duas marés baixas) consecutivas.

2. O gráfico da função *f* dada por $f(t) = 0{,}7 \text{ sen } \frac{\pi t}{6}$, para $0 \leqslant t \leqslant 24$, é:



Interpretando esse gráfico no contexto do problema, concluímos, por exemplo, que:

- à zero hora, a maré estava em seu nível médio;
- às 3 h e às 15 h, a maré estava em seu nível máximo, 0,7 m acima do nível médio;
- às 9 h e às 21 h, a maré estava em seu nível mínimo, 0,7 m abaixo do nível médio.

3. A amplitude da maré varia de acordo com a posição da Lua em relação ao Sol e à Terra. Nessa questão, admitimos que a amplitude da maré calculada com quaisquer marés alta e baixa de um mesmo dia seja a mesma, o que é muito próximo da realidade, pois a variação da posição da Lua em relação ao Sol e à Terra é pequena em 24 horas.

4. O enunciado informa que uma maré alta ocorre às 3 h. Usamos essa informação ao adotar o sentido anti-horário e a posição do ponto *P* no instante zero. Se adotássemos o sentido horário, nessa mesma posição inicial, às 3 h ocorreria uma maré baixa.

FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

TRABALHO E JUVENTUDES

Oceanógrafo

ODS 13 ODS 14

Reflexão

Como as mudanças climáticas afetam o nível do mar e quais são os impactos delas nos oceanos?

Reflexão: Resposta pessoal.

A Oceanografia é a ciência que estuda o oceano e as zonas costeiras, tanto sob os aspectos bióticos (relacionados aos seres vivos) e abióticos (relacionados à água, à costa, ou seja, às partes que não envolvem os seres vivos), como também quanto aos processos naturais e sociais que atuam nestes ambientes considerando, portanto, atividades socioeconômicas e culturais e os processos de governança e gestão.

Dentre as áreas de atuação da ciência oceanográfica podem ser citadas: a modelagem e as previsões climáticas; a investigação de novos recursos renováveis e não renováveis; o diagnóstico, o controle e a mitigação da poluição; a conservação, recuperação e manejo de ambientes naturais e seus recursos; a adequação de obras e atividades humanas ao ambiente marinho; o desenvolvimento de tecnologias e estratégias para a melhoria das atividades de cultivo, extração e beneficiamento do pescado.

[...]

A Oceanografia, como ciência moderna, teve seu nascimento associado à viagem do veleiro “H.M.S. Challenger”, iniciada em 23 de dezembro de 1872, que partiu da Inglaterra e percorreu os oceanos Atlântico, Índico e Pacífico, em uma viagem de três anos e mais de 110 mil quilômetros. Vários estudos oceanográficos foram realizados neste cruzeiro, de modo que a missão realizada pelo H.M.S Challenger marcou o início da Oceanografia com sua característica multi e interdisciplinar, com estudos físicos, químicos, geológicos e biológicos integrados do meio marinho. Os resultados da expedição estão contidos em um informe oficial de 50 volumes, que servem de referência à ciência oceanográfica até hoje.

UNIVERSIDADE de São Paulo. Oceanografia. **Instituto Oceanográfico**, c2014. Disponível em: https://www.io.usp.br/index.php/graduacao/oceanografia. Acesso em: 18 jul. 2024.

As mudanças climáticas afetam o nível do mar de duas formas principais: expansão térmica e derretimento de gelo. Se julgar conveniente, pode-se propor uma atividade integrada com o professor de Física abordando o **TCT Educação ambiental** e os **ODS 13** e **14**. Os estudantes podem pesquisar os fenômenos físicos associados à expansão térmica e como isso afeta diferentes regiões do planeta, por exemplo, ao causar inundações, comprometer colheitas ou mesmo ameaçar comunidades litorâneas e insulares.

Como exemplo de pioneirismo nesta área em 1970, Sylvia Alice Earle, oceonógrafa estadunidense, liderou o Tektite II, uma expedição exclusivamente feminina, abrindo precedentes para que futuras expedições aquáticas incluíssem mulheres em suas equipes. Earle liderou mais de 100 expedições submarinas durante sua carreira, acumulando mais de 7 mil horas subaquáticas. Suas missões científicas a levaram a lugares como as Ilhas Galápagos, a China e as Bahamas.

Quer saber mais sobre a profissão de oceanógrafo? Faça uma pesquisa na internet e compartilhe com os colegas um resumo das informações que você obteve.

Aproveite esse contexto para reforçar a importância da pesquisa e do monitoramento dos oceanos para a preservação da vegetação e vida marinha, associando isso ao trabalho das pessoas oceanógrafas.


NASA/HULTON ARCHIVE/GETTY IMAGES

Cientistas da expedição Tektite II, com técnico do equipamento de mergulho usado na expedição. Ilhas Virgens (EUA), julho de 1970.

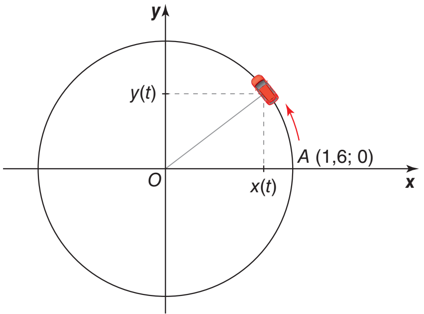
Sugerimos o documentário **Mission Blue**, com direção de Robert Nixon e Fisher Stevens. Este documentário retrata a campanha da oceanógrafa Sylvia Earle para salvar os oceanos do mundo de várias ameaças, como a pesca abusiva e os resíduos tóxicos.

Trabalho e juventudes: Pesquisa e resumo pessoais.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Faça os exercícios no caderno.

13. Uma montadora de automóveis possui uma pista de provas circular de centro *O* e raio 1,6 km. Ao plano dessa pista é associado um sistema cartesiano de eixos cuja origem coincide com o centro *O* e a unidade adotada nos eixos é o quilômetro. Um ponto *A* da pista é determinado por *A*(1,6; 0).



ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

13. alternativa **c**

Um veículo com velocidade escalar constante completa 10 voltas por hora, no sentido anti-horário dessa pista. Considerando o início da marcação do tempo *t*, em hora, em um instante no qual o veículo passa pelo ponto *A*, qual das alternativas a seguir apresenta as funções $x(t)$ e $y(t)$ que expressam a abscissa e a ordenada do ponto em que está o automóvel em cada instante *t*, em relação ao sistema de eixos adotado:

a. $x(t) = 1{,}6 \cos(10\pi t)$ e $y(t) = 1{,}6 \operatorname{sen}(10\pi t)$

b. $x(t) = 3{,}2 \cos\left(\frac{10\pi t}{3}\right)$ e $y(t) = 3{,}2 \operatorname{sen}\left(\frac{10\pi t}{3}\right)$

c. $x(t) = 1{,}6 \cos(20\pi t)$ e $y(t) = 1{,}6 \operatorname{sen}(20\pi t)$

d. $x(t) = 1{,}6 \cos(2\pi t)$ e $y(t) = 1{,}6 \operatorname{sen}(2\pi t)$

e. $x(t) = 0{,}8 \cos(\pi t)$ e $y(t) = 0{,}8 \operatorname{sen}(\pi t)$

14. Um pistão realiza um movimento periódico no interior de um cilindro, percorrendo 16 cm na subida e 16 cm na descida, de modo que cada oscilação completa, de 32 cm (subida e descida), é realizada pelo pistão em $\frac{1}{60}$ min.

Considerando que no instante zero o pistão está subindo e que sua cabeça (tampa) está a 8 cm da base inferior do cilindro, a função que descreve a altura $f(t)$, atingida pela cabeça do pistão em relação à base inferior, em função do tempo *t*, em minuto, é:

14. alternativa **d**

a. $f(t) = 8 \cos(60\pi t)$

b. $f(t) = 16 \cos(60\pi t)$

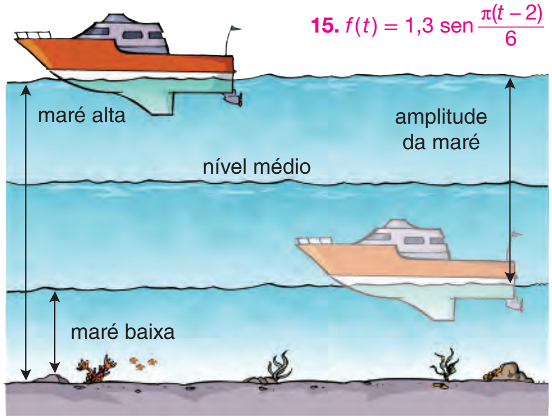
c. $f(t) = 8 \cos(120\pi t)$

d. $f(t) = 8 \operatorname{sen}(120\pi t)$

e. $f(t) = 16 \cos\left(\frac{\pi t}{60}\right)$

15. Em uma região, em determinado dia, a amplitude da maré é 2,6 m, e o intervalo de tempo entre duas marés altas consecutivas (ou entre duas marés baixas consecutivas) é de 12 horas. Sabendo que uma maré alta ocorre às 5 h, descreva, por meio de uma função trigonométrica, o movimento das marés nessa região em função do horário *t*, em hora, durante um dia. (Suponha que a amplitude seja constante nesse dia.)

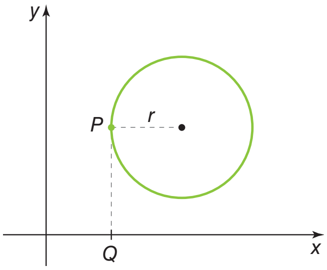
15. $f(t) = 1{,}3 \operatorname{sen} \frac{\pi(t-2)}{6}$



GEORGE TUTUMI/ARQUIVO DA EDITORA

(Modelo didático sem escala e com cores fantasia.)

16. (Enem) Considere um ponto *P* em uma circunferência de raio *r* no plano cartesiano. Seja *Q* a projeção ortogonal de *P* sobre o eixo *x*, como mostra a figura, e suponha que o ponto *P* percorra, no sentido anti-horário, uma distância $d \leqslant r$ sobre a circunferência.



ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Então, o ponto *Q* percorrerá, no eixo *x*, uma distância dada por: **16.** alternativa **b**

a. $r\left(1 - \operatorname{sen} \frac{d}{r}\right)$

b. $r\left(1 - \cos \frac{d}{r}\right)$

c. $r\left(1 - \operatorname{tg} \frac{d}{r}\right)$

d. $r \operatorname{sen}\left(\frac{r}{d}\right)$

e. $r \cos\left(\frac{r}{d}\right)$

17. Resposta pessoal.

17. Elaborem e resolvam um problema sobre fenômenos periódicos que envolva uma situação do cotidiano.

Para retomar os conteúdos estudados, resolva o exercício complementar 5.

ANÁLISE DA RESOLUÇÃO

Um estudante resolveu o exercício conforme a reprodução a seguir. Um erro foi cometido. Apontem o erro e refaçam a resolução em uma folha, corrigindo-a.

Exercício

Construa o gráfico da função definida por $y = \text{sen}^2\, x$ para $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$.

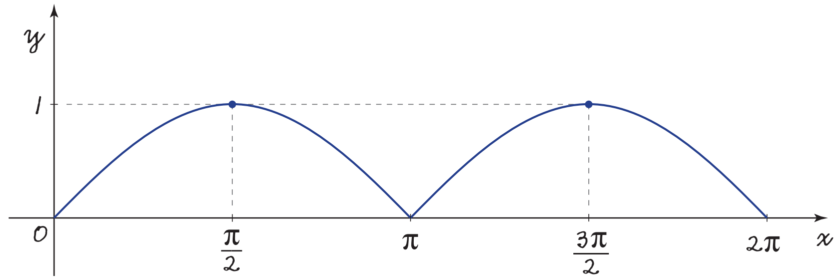
Resolução

Alguns pontos do gráfico são:

$y = \text{sen}^2\, x$

x	y
0	0
$\frac{\pi}{2}$	1
π	0
$\frac{3\pi}{2}$	1
2π	0

Marcando esses pontos no plano cartesiano e esboçando o gráfico:



Embora o gráfico pedido passe pelos pontos obtidos no quadro, seu traçado está incorreto.
Resolução correta:
Pela fórmula de arco duplo ($\cos 2x = \cos^2 x - \text{sen}^2\, x$) e pela relação fundamental ($\text{sen}^2\, x + \cos^2 x = 1$), temos: $\cos 2x =$
$= 1 - \text{sen}^2\, x - \text{sen}^2\, x \Rightarrow$
$\Rightarrow \cos 2x = 1 - 2\,\text{sen}^2\, x$
$\therefore \text{sen}^2\, x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \cos 2x$

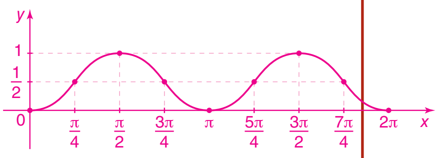
Assim, o gráfico da função $y = \text{sen}^2\, x$ é o mesmo da função $y = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \cos 2x$.

Atribuindo os valores 0, $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$ e 2π ao arco $2x$ da função $y = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \cos 2x$, obtemos o quadro:

$y = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \cos 2x$

$2x$	x	$f(x)$
0	0	0
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}$
π	$\frac{\pi}{2}$	1
$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{1}{2}$
2π	π	0

Assim, um esboço do gráfico para $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$ é:



FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

Conectado

1. Acesse um programa gratuito para a construção de gráficos matemáticos e instale-o no computador. Recorra a ele quando estiver estudando as funções. Isso o ajudará muito.

Com o auxílio desse programa, faça o que se pede:

a. Construa o gráfico da função definida por $y = \text{sen}\, x$ e, no mesmo plano cartesiano (na mesma tela), construa o gráfico da função definida por $y = b\,\text{sen}\, x$, atribuindo a b qualquer valor real não nulo e diferente de 1. Que transformação ocorreu do primeiro gráfico para o segundo?

b. Construa o gráfico da função definida por $y = \cos x$ e, no mesmo plano cartesiano (na mesma tela), construa o gráfico da função definida por $y = a + \cos x$, atribuindo a a qualquer valor real não nulo. Que transformação ocorreu do primeiro gráfico para o segundo?

c. Construa o gráfico da função definida por $y = \text{sen}\, x$ e, no mesmo plano cartesiano (na mesma tela), construa o gráfico da função definida por $y = \text{sen}\,(kx)$, atribuindo a k qualquer valor real não nulo e diferente de 1. Que transformação ocorreu do primeiro gráfico para o segundo?

d. Tente generalizar suas observações dos itens anteriores.

Como sugestão, você pode assistir ao vídeo **Desenhando ondas** e acompanhar como os sons musicais podem ser representados por funções trigonométricas. Disponível em: https://m3.ime.unicamp.br/recursos/1086. Acesso em: 17 jul. 2024.

Conectado: Ao plotar os gráficos em um *software* de Geometria dinâmica, os estudantes podem perceber que, no item **a**, a mudança do primeiro para o segundo gráfico está relacionada à amplitude; no item **b**, há uma translação vertical do gráfico, e no item **c**, a alteração está relacionada ao período do gráfico.

Neste boxe **Mentes brilhantes**, incentive os estudantes a pesquisarem e conversarem sobre o papel das mulheres na ciência e a importância de romper com o ciclo de discriminação por gênero e de qualquer outro tipo. Favoreça uma conversa respeitosa e incentive os estudantes a apresentarem argumentos com base em dados obtidos por meio de fontes confiáveis. Ao abordar questões de gênero como essa proposta, desenvolve-se o **ODS 5** e contribui para a mobilização das **competências gerais 7** e **9**. Além disso, os estudantes podem reconhecer que as conquistas científicas normalmente são fruto do trabalho de pessoas diversas.

Mentes brilhantes

A descoberta do efeito estufa


PICTORIAL PRESS LTD/ALAMY/FOTOARENA

Eunice Newton Foote (1819-1888).

O matemático e físico francês Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768-1830) desenvolveu um importante trabalho de Termodinâmica sobre a propagação de calor. Os aspectos matemáticos desse trabalho fundamentam-se na decomposição de funções periódicas em séries trigonométricas, que ficaram conhecidas como **séries de Fourier**.

Na década de 1820, os estudos de Fourier levaram-no a considerar que a atmosfera da Terra poderia agir como um isolante que impediria a perda de calor do planeta. Essa hipótese de Fourier é reconhecida como a primeira citação do que atualmente é definido como "efeito estufa".

Já em 1856, em um congresso científico nos Estados Unidos, o cientista Joseph Henry (1797-1878) apresentou evidências inéditas de que o gás carbônico tinha capacidade considerável de esquentar sob exposição solar e que isso poderia ter efeitos no clima do planeta. Contudo, quem constatou tais evidências teria sido a cientista amadora estadunidense Eunice Newton Foote (1819-1888).

Provavelmente, Henry apresentou o trabalho no lugar de Foote a fim de destacá-la como autora, mas sem causar grandes polêmicas, pois, na sociedade da época havia grande distinção de gênero na educação e na produção científica, de modo que os homens eram mais privilegiados em questão ao acesso de recursos e de reconhecimento.

ODS 5

Segundo um relato de 1857, Henry teria introduzido a pesquisa de Eunice Foote com a afirmação de que "a ciência não tem país ou sexo".

Elaborado com base em: ALTMAN, Max. Hoje na História: 1830 – Físico e matemático Jean Baptiste Fourier morre em Paris. OperaMundi, **UOL**, 16 maio 2014. Disponível em: https://operamundi.uol.com.br/historia/hoje-na-historia-1830-fisico-e-matematico-jean-baptiste-fourier-morre-em-paris/; ALVIM, Mariana. Eunice Foote: a feminista que descobriu o efeito estufa e foi esquecida, agora homenageada pelo Google. **BBC News Brasil**, 8 mar. 2023. Disponível em: https://www.bbc.com/portuguese/articles/cqv816ewjx7o. Acesso em: 17 jul. 2024.

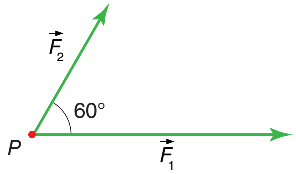
Reflexão

1. Você acredita que as descobertas científicas são obtidas de maneira colaborativa ou mais individual? Converse com os colegas e o professor acerca da importância da colaboração científica.

2. Para você, o que significa a afirmação "a ciência não tem país ou sexo"? Pesquise o papel das mulheres na Ciência e converse com os colegas a esse respeito.

Reflexão: Respostas pessoais.

5. Resolução de triângulos

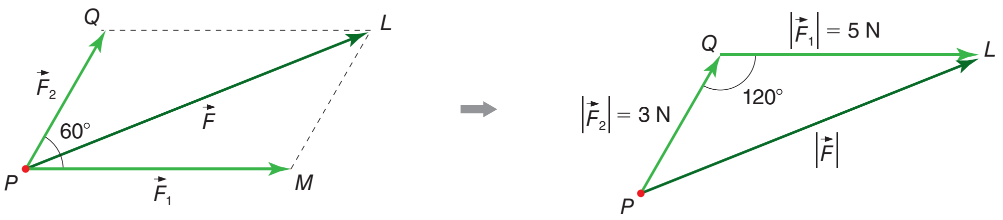


Sobre um ponto material P, são aplicadas apenas duas forças $\vec{F_1}$ e $\vec{F_2}$, de intensidades 5 N e 3 N, respectivamente, conforme mostra a figura.

Qual é a intensidade da força resultante $\vec{F}$ que atua sobre esse ponto?

Para resolver esse problema clássico da Dinâmica, lembramos que o vetor resultante $\vec{F}$ tem origem P e é representado pela diagonal do paralelogramo do qual $\vec{F_1}$ e $\vec{F_2}$ são lados consecutivos.

Assim, para calcular a intensidade de $\vec{F}$, que indicamos por $|\vec{F_1}|$, devemos calcular a medida do lado $\overline{PL}$ do triângulo PQL a seguir.



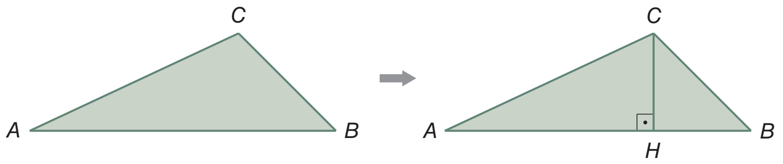
ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Deparamos aqui com um problema que relaciona as medidas dos lados com a medida de um ângulo interno de um **triângulo não retângulo** (no caso, o triângulo *PQL*). Esse tipo de relação é o objeto de estudo deste item.

Embora as razões trigonométricas sejam definidas apenas em triângulos retângulos, é possível aplicá-las em situações que envolvam **triângulos não retângulos**. Para isso, basta traçar uma altura do triângulo não retângulo, obtendo assim triângulos retângulos, como mostram os exemplos a seguir.

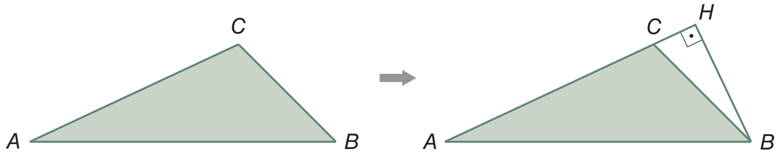
Exemplos

a.



A altura $\overline{CH}$ decompõe o **triângulo não retângulo** *ABC* em dois **triângulos retângulos**: *HBC* e *HAC*.

b.



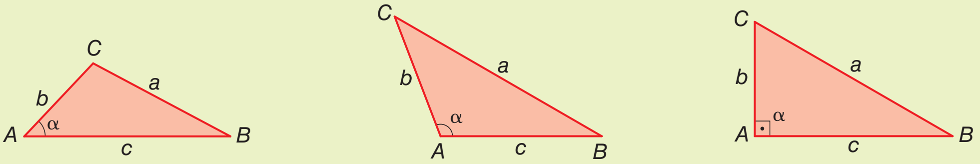
A altura $\overline{BH}$ possibilita a composição dos **triângulos retângulos** *HBC* e *HBA* a partir do **triângulo não retângulo** *ABC*.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Pelos processos de composição ou decomposição mostrados nesses exemplos, podemos relacionar as medidas dos ângulos internos com as medidas dos lados de um triângulo não retângulo por meio das razões trigonométricas, como comprovam os teoremas a seguir.

Lei dos cossenos

Consideremos três casos em que a, b e c são medidas dos lados de um triângulo e α a medida do ângulo oposto ao lado de medida a.



Nos três casos apresentados, vale a relação:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha$$

Reflexão

Conhecendo as medidas dos lados de um triângulo, é possível calcular a medida dos ângulos internos desse triângulo?

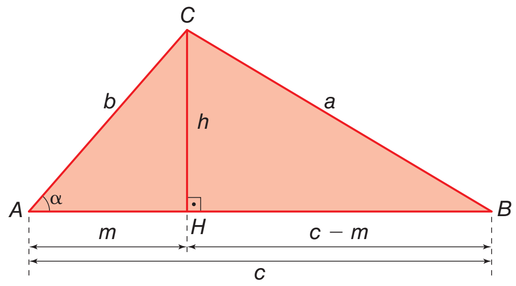
Reflexão: Conhecendo as medidas dos lados de um triângulo, é possível calcular a medida de cada ângulo interno desse triângulo pela lei dos cossenos. Por exemplo, no **exercício resolvido 13** da página seguinte, conhecemos as medidas 3, 4 e 6 dos lados do triângulo e calculamos o cosseno do ângulo oposto ao lado de medida 6, obtendo $\cos\alpha = -\frac{11}{24}$. Com o auxílio de uma calculadora científica, encontramos: $\alpha \approx 117{,}28°$. Podemos repetir o raciocínio para cada um dos outros lados, obtendo a medida dos outros ângulos internos.

Demonstração

Demonstraremos apenas o caso em que $\alpha < 90°$.

Sejam:

- $\overline{CH}$ a altura relativa ao lado $\overline{AB}$;
- $\overline{AH}$ a projeção ortogonal do lado $\overline{AC}$ sobre o lado $\overline{AB}$;
- $\overline{BH}$ a projeção ortogonal do lado $\overline{BC}$ sobre o lado $\overline{AB}$.



ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

Aplicando o teorema de Pitágoras nos triângulos retângulos *HBC* e *HAC*, temos:

$$h^2 + (c - m)^2 = a^2 \qquad (1)$$
$$h^2 + m^2 = b^2 \qquad (2)$$

Subtraindo membro a membro as igualdades (1) e (2), obtemos:

$$(c - m)^2 - m^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow c^2 - 2cm + m^2 - m^2 = a^2 - b^2$$
$$\therefore a^2 = b^2 + c^2 - 2cm \qquad (3)$$

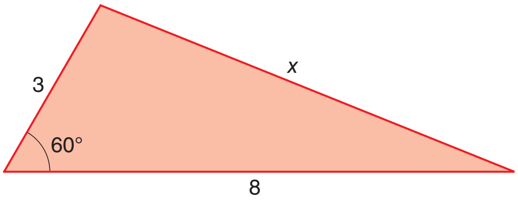
Do triângulo *HAC*, temos: $\cos \alpha = \frac{m}{b} \Rightarrow m = b \cdot \cos \alpha$ (4)

Substituindo (4) em (3), obtemos, finalmente:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

11. Determine o valor de *x* no triângulo representado a seguir.

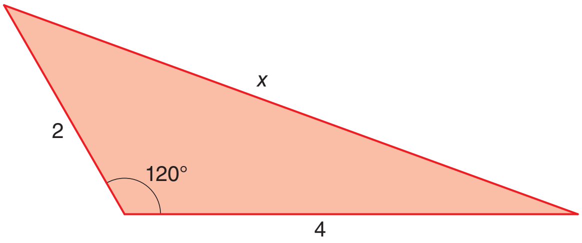


Resolução

Aplicando a lei dos cossenos, temos:

$$x^2 = 3^2 + 8^2 - 2 \cdot 3 \cdot 8 \cdot \cos 60°$$
$$x^2 = 9 + 64 - 48 \cdot \frac{1}{2}$$
$$\therefore x^2 = 49 \Rightarrow x = 7$$

12. Determine o valor de *x* no triângulo representado a seguir.

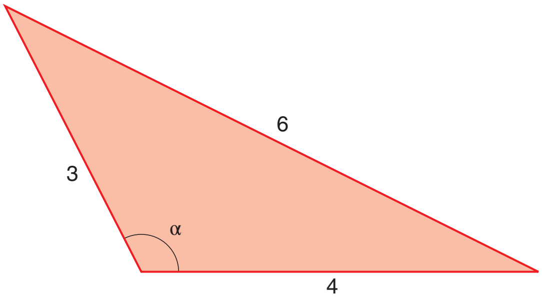


Resolução

Aplicando a lei dos cossenos, temos:

$$x^2 = 2^2 + 4^2 - 2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot \cos 120°$$
$$x^2 = 4 + 16 - 16 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$$
$$\therefore x^2 = 28 \Rightarrow x = 2\sqrt{7}$$

13. Determine o valor do cos α no triângulo representado a seguir.



Resolução

Aplicando a lei dos cossenos, temos:

$$6^2 = 3^2 + 4^2 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cos \alpha$$
$$36 = 9 + 16 - 24 \cos \alpha$$
$$\therefore 24 \cos \alpha = -11 \Rightarrow \cos \alpha = -\frac{11}{24}$$

ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

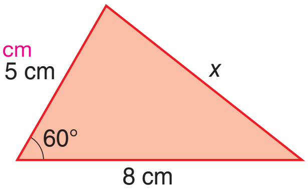
EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Faça os exercícios no caderno.

18. Calcule a medida x indicada nos triângulos representados a seguir.

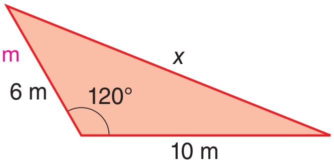
a.

18. a. 7 cm



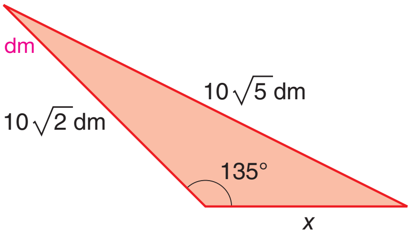
b.

18. b. 14 m



c.

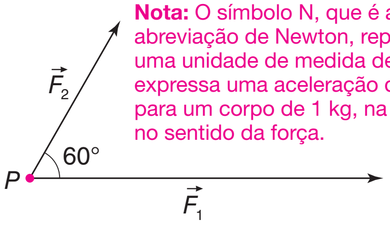
18. c. 10 dm



19. Sabe-se que sobre um ponto material P, são aplicadas apenas duas forças, $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$, de intensidades $|\vec{F}_1| = 5$ N e $|\vec{F}_2| = 3$ N, conforme mostra a figura. Calcule a intensidade da força resultante que atua sobre esse ponto.

19. 7 N

Nota: O símbolo N, que é a abreviação de Newton, representa uma unidade de medida de força que expressa uma aceleração de 1 m/s^2 para um corpo de 1 kg, na direção e no sentido da força.



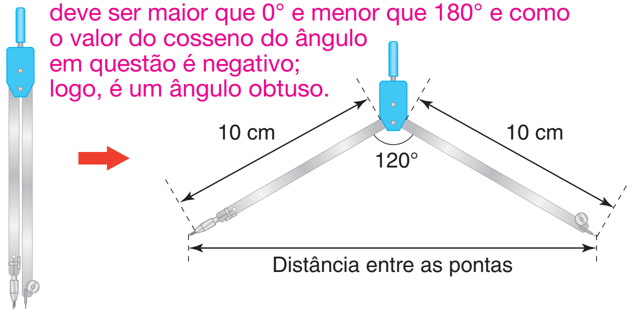
20. Os lados de um triângulo medem 4 cm, 5 cm e 7 cm.

a. Calcule o cosseno do maior ângulo interno desse triângulo. **20. a.** $-\frac{1}{5}$

b. O maior ângulo interno desse triângulo é agudo, reto ou obtuso? Justifique sua resposta.

20. b. Como o ângulo interno de um triângulo deve ser maior que 0° e menor que 180° e como o valor do cosseno do ângulo em questão é negativo; logo, é um ângulo obtuso.

21. Reúna-se com um colega para fazer esta atividade. Cada haste de determinado compasso tem 10 cm de comprimento, e a abertura entre elas varia de 0° a 120°.



a. Para cada medida θ, em grau, do ângulo de abertura entre as hastes fica determinada uma única distância d entre as pontas do compasso. Obtenham a lei de associação que expressa a distância d, em centímetro, em função de θ. **21. a.** $d = 10\sqrt{2(1 - \cos \theta)}$

b. Qual é a distância, em centímetro, entre as pontas do compasso quando o ângulo de abertura entre as hastes é 60°? **21. b.** 10 cm

c. Qual é a distância máxima, em centímetro, entre as pontas do compasso? **21. c.** $10\sqrt{3}$ cm

d. Na função obtida no item **a**, qual deve ser a medida θ para que uma circunferência traçada com o compasso tenha comprimento igual a 20π cm? **21. d.** 60°

22. Elaborem e resolvam um problema sobre a lei dos cossenos que envolva uma situação do cotidiano.
22. Resposta pessoal.

ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

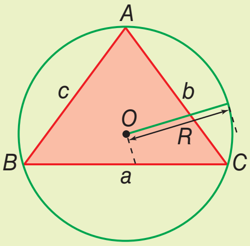
Para retomar os conteúdos estudados, resolva o exercício complementar 6.

Lei dos senos

Sendo $AB = c$, $AC = b$ e $BC = a$ as medidas dos lados de um triângulo ABC, temos:

$$\frac{a}{\text{sen } \hat{A}} = \frac{b}{\text{sen } \hat{B}} = \frac{c}{\text{sen } \hat{C}} = 2R,$$

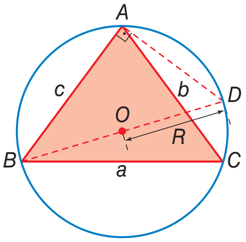
em que R é a medida do raio da circunferência circunscrita ao triângulo.



FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

Demonstração

Demonstraremos apenas o caso em que o centro O da circunferência circunscrita é interior ao triângulo.



Sendo $\overline{BD}$ um diâmetro dessa circunferência, o ângulo $D\hat{A}B$ é reto, pois está inscrito em uma semicircunferência. Assim, temos: sen $\hat{D} = \frac{c}{2R}$

Porém, os ângulos $\hat{D}$ e $\hat{C}$ são congruentes, pois estão inscritos na mesma circunferência e determinam o mesmo arco.
Logo, temos:

$$\text{sen } \hat{D} = \text{sen } \hat{C} = \frac{c}{2R} \Rightarrow 2\text{R} = \frac{c}{\text{sen } \hat{C}}$$

Traçando por A um diâmetro $\overline{AD'}$, temos, de maneira análoga:

$$2R = \frac{b}{\text{sen } \hat{B}}$$

Traçando por C um diâmetro $\overline{CD''}$, temos, de maneira análoga:

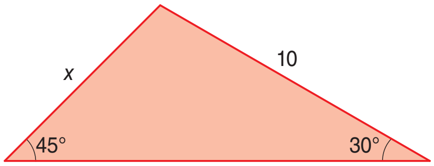
$$2R = \frac{a}{\text{sen } \hat{A}}$$

Portanto: $\frac{a}{\text{sen } \hat{A}} = \frac{b}{\text{sen } \hat{B}} = \frac{c}{\text{sen } \hat{C}} = 2R$

ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

14. Determine a medida x no triângulo indicado a seguir.



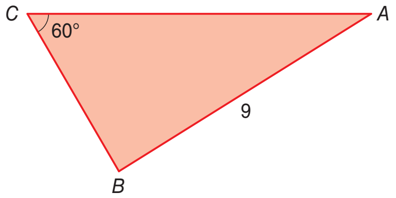
Resolução

Aplicando a lei dos senos, temos:

$$\frac{x}{\text{sen } 30°} = \frac{10}{\text{sen } 45°} \Rightarrow \frac{x}{\frac{1}{2}} = \frac{10}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$\therefore x = 5\sqrt{2}$

15. Calcule a medida R do raio da circunferência circunscrita ao triângulo ABC.



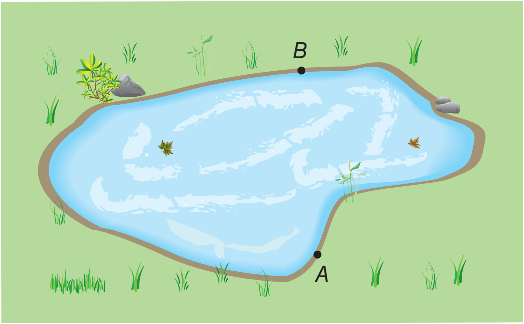
Resolução

Pela lei dos senos, a razão entre a medida de um lado do triângulo e o seno do ângulo oposto a esse lado é igual ao diâmetro da circunferência circunscrita ao triângulo. Logo:

$$\frac{9}{\text{sen } 60°} = 2R \Rightarrow \frac{9}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2R$$

$\therefore R = 3\sqrt{3}$

16. Dois pontos, A e B, estão localizados na margem de um lago, conforme mostra a figura.

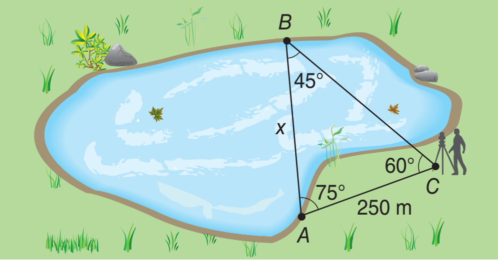


(Modelo didático sem escala e com cores fantasia.)

Para calcular a distância entre esses pontos, um topógrafo caminhou em linha reta 250 m a partir de A até um ponto C, com $m(B\hat{A}C) = 75°$. Depois, mediu o ângulo $A\hat{C}B$, obtendo 60°. Com esses dados, obteve a distância AB. Qual é essa distância, em metro?

Resolução

A soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo qualquer é 180°; logo, no triângulo *ABC*, deduzimos que $A\hat{B}C$ mede 45°. Sendo x a distância, em metro, entre os pontos *A* e *B*, temos o esquema:



(Modelo didático sem escala e com cores fantasia.)

ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

Pela lei dos senos, concluímos que:

$$\frac{x}{\text{sen } 60°} = \frac{250}{\text{sen } 45°}$$

$$\frac{x}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{250}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$\therefore x = \frac{250\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

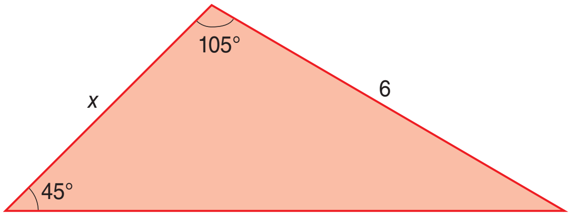
$$x = 125\sqrt{6}$$

A distância *AB* é $125\sqrt{6}$ m ou, aproximadamente, 306 m.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Faça os exercícios no caderno.

23. Determine a medida x na no triângulo representado a seguir. **23.** $3\sqrt{2}$



24. (Ufes) No triângulo *ABC* da figura a seguir, o cosseno do ângulo obtuso α é igual a: **24.** alternativa **d**

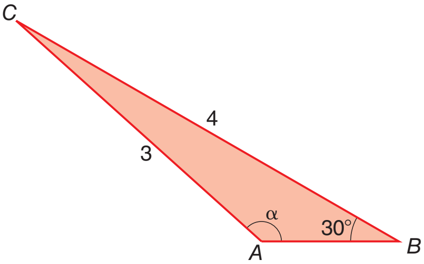
a. $\frac{1}{9}$

b. $-\frac{1}{2}$

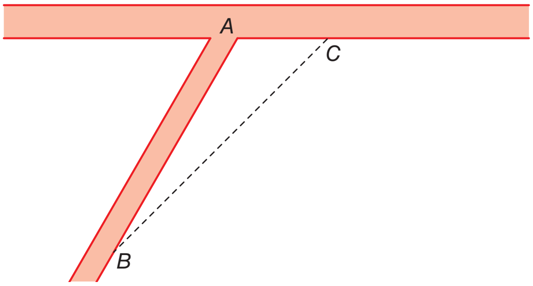
c. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

d. $-\frac{\sqrt{5}}{3}$

e. $\frac{\sqrt{5}}{2}$

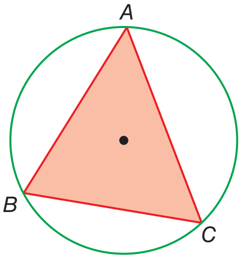


25. Dois rios são retos nas proximidades do ponto *A* de confluência de ambos. Pela construção de um canal, o curso do rio afluente deve ser desviado, ligando, em linha reta, um ponto *B* a um ponto *C*, conforme mostra a figura a seguir.



Sabendo que $m(B\hat{A}C) = 120°$, $m(A\hat{B}C) = 15°$ e $BA = 800$ m, calcule o comprimento do canal a ser construído de *B* a *C*. **25.** $400\sqrt{6}$ m ou, aproximadamente, 980 m

26. (Uepa-PA) Sobre uma circunferência de raio r tomamos os pontos *A*, *B* e *C* (veja figura). O arco $\overset{\frown}{AB}$ mede 120° e a corda $\overline{AB}$ mede 12 cm. Calcule o valor de r. **26.** $4\sqrt{3}$ cm



ERICSON GUILHERME LUCIANO/ ARQUIVO DA EDITORA

27. Elaborem e resolvam um problema sobre a lei dos senos que envolva uma situação do cotidiano.
27. Resposta pessoal.

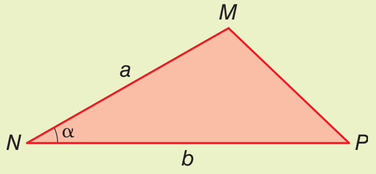
Para retomar os conteúdos estudados, resolva o exercício complementar 7.

6. Cálculo da área de um triângulo

Já estudamos o cálculo da área de um triângulo como a metade do produto da medida da base pela medida da altura relativa a essa base. Neste item, o cálculo dessa área será feito em função das medidas de dois lados e da medida do ângulo determinado por eles. O teorema a seguir mostra como isso é feito.

A área A de um triângulo MNP, em que $NM = a$, $NP = b$ e $m(M\hat{N}P) = \alpha$, é dada por:

$$A = \frac{1}{2}ab \cdot \text{sen}\ \alpha$$

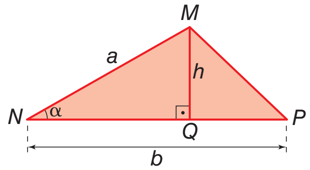


Demonstração

Seja h a medida da altura relativa ao lado $\overline{NP}$.

Assim, a área A desse triângulo é dada por:

$$A = \frac{bh}{2} \qquad \text{(I)}$$



Observação

Este teorema continua válido para $\alpha > 90°$ ou $\alpha = 90°$.

No triângulo MNQ, temos $\text{sen}\ \alpha = \frac{h}{a}$ ou, ainda:

$$h = a \cdot \text{sen}\ \alpha \qquad \text{(II)}$$

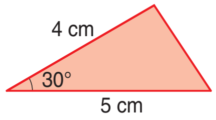
Substituindo (II) em (I), obtemos a área do triângulo em função de a, b e α:

$$A = \frac{ba \cdot \text{sen}\ \alpha}{2} \Rightarrow A = \frac{1}{2}ab \cdot \text{sen}\ \alpha$$

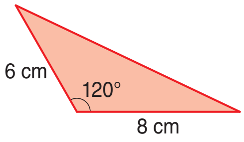
EXERCÍCIO RESOLVIDO

17. Calcule a área de cada um dos triângulos.

a.



b.



Resolução

a. $A = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 5 \cdot \text{sen}\ 30° = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 5 \cdot \frac{1}{2} = 5$

Portanto, $A = 5\ \text{cm}^2$.

b. $A = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 \cdot \text{sen}\ 120° = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 12\sqrt{3}$

Portanto, $A = 12\sqrt{3}\ \text{cm}^2$.

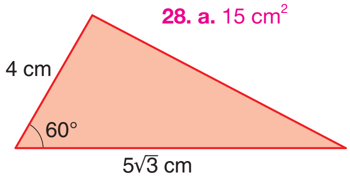
EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Faça os exercícios no caderno.

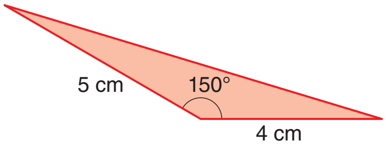
28. Calcule a área de cada um dos triângulos.

a.

28. a. 15 cm^2



b.



28. b. 5 cm^2

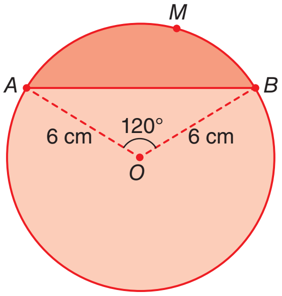
29. 30° ou 150°

29. Em um triângulo ABC de área 20 cm^2, tem-se que $AB = 8$ cm e $AC = 10$ cm. Calcule a medida do ângulo $B\hat{A}C$.

30. Toda corda de um círculo divide-o em duas partes chamadas de "segmentos circulares". Calcule a área do segmento circular laranja-escuro no círculo de centro O a seguir.

(*Sugestão*: Subtraia da área do setor circular $AOBM$ a área do triângulo AOB.)

30. $3(4\pi - 3\sqrt{3})$ cm^2



Para retomar os conteúdos estudados, resolva os exercícios complementares 8 e 9.

ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

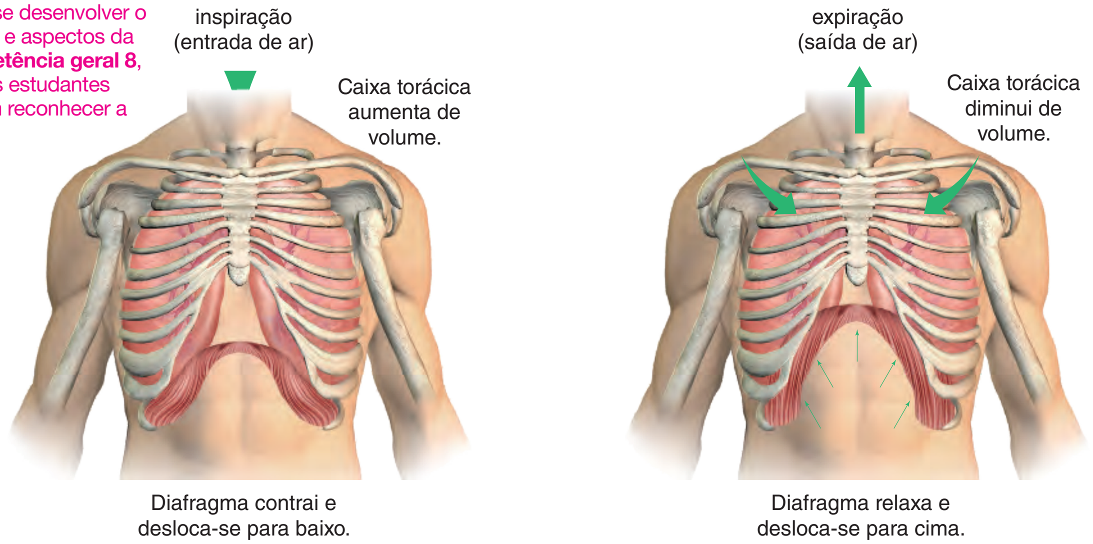
Nesta seção **Matemática sem fronteiras** exploramos textos sobre aplicações práticas do assunto desenvolvido no capítulo. O conteúdo apresentado tem dois objetivos: primeiro, contextualizar a teoria matemática por meio de situações reais; segundo, despertar a curiosidade dos estudantes para aplicações mais elaboradas.

MATEMÁTICA SEM FRONTEIRAS

Nesse caso, exploramos um modelo trigonométrico aplicado no estudo sobre *O ciclo respiratório*, em trabalho que promove integração com a área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias ao expor aplicações do conhecimento científico. Sugerimos que o professor oriente os estudantes a ler o texto e a resolver, em grupos, as atividades. Particularmente, com base na atividade 3, pode-se desenvolver o **ODS 3** e aspectos da **competência geral 8**, pois os estudantes podem reconhecer a importância de exercícios respiratórios e outras técnicas para auxiliarem, por exemplo, em situações de ansiedade e gerenciamento das emoções.

O ciclo respiratório

O ciclo respiratório é constituído de uma inspiração e da expiração consecutiva. A inspiração, em que ocorre a entrada de ar nos pulmões, é causada pela contração da musculatura do diafragma e dos músculos intercostais. O diafragma desloca-se para baixo e as costelas elevam-se, provocando o aumento da caixa torácica, com consequente redução da pressão interna em relação à externa, promovendo a entrada do ar nos pulmões. A expiração, em que ocorre a saída de ar dos pulmões, é causada pelo relaxamento da musculatura do diafragma e dos músculos intercostais. O diafragma desloca-se para cima e as costelas abaixam, diminuindo o volume da caixa torácica, com consequente aumento da pressão interna, forçando o ar a sair dos pulmões.



Modelo didático sem escala e com cores fantasia.

ILUSTRAÇÕES: LIGIA DUQUE/ARQUIVO DA EDITORA

Em uma situação de repouso, um jovem adulto e saudável inspira e expira 500 mL de ar a cada ciclo respiratório, em um período de 5 segundos. Os pulmões nunca ficam completamente sem ar; mesmo após a expiração, um volume residual de 1.200 mL de ar permanece neles. Esses volumes são valores médios, pois podem variar de uma pessoa para outra.

Elaborado com base em: SOUZA, M. H. L.; ELIAS, Decio O. **Fundamentos da circulação extracorpórea**. 2. ed. Rio de Janeiro: Centro Editorial Alfa Rio, 2006.

Atividades

Faça as atividades no caderno.

Por ser um movimento periódico, o ciclo respiratório pode ser descrito por uma função trigonométrica. Assumindo como padrão os valores apresentados nesse texto, faça o que se pede nas questões a seguir.

1. Adotando a função cosseno como modelo, obtenha uma equação $V(t) = a + b \cos(mt)$, com $\{a, b, m\} \subset \mathbb{R}$, em que $V(t)$ expressa o volume, em mililitro, de ar nos pulmões em função do tempo t, em segundo, considerando $t = 0$ um instante em que a quantidade de ar nos pulmões seja apenas o volume residual. **1.** $V(t) = 1.450 - 250 \cos \frac{2\pi t}{5}$

2. De acordo com a função obtida no exercício anterior, calcule o volume, em mililitro, de ar nos pulmões no instante $t = \frac{5}{6}$ s. **2.** 1.325 mL

3. Faça uma pesquisa a respeito da importância de respirar corretamente e de como técnicas de respiração podem trazer benefícios para a saúde mental e emocional. Depois, compartilhe com o professor e os colegas os resultados da pesquisa.

ODS 3

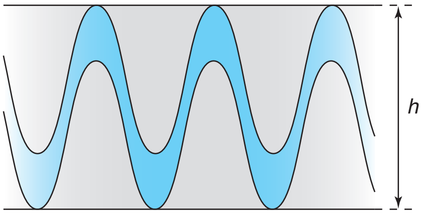
3. Resposta pessoal. Essa atividade possibilita trabalhar aspectos da **competência geral 8**, do **ODS 3** e do **TCT Saúde**. Diferentes técnicas de respiração e relaxamento auxiliam no controle da ansiedade ou em melhor qualidade de sono, por exemplo.

Aproveite os **Exercícios complementares** para propor atividades em que os estudantes possam compartilhar estratégias de resolução. Uma possibilidade é organizá-los em duplas e solicitar que resolvam os exercícios. Depois, cada dupla comenta a estratégia utilizada com outra dupla e comparam as respostas e resoluções. É interessante que atividades como essas sejam utilizadas como ferramenta de avaliação.

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

Faça os exercícios no caderno.

1. Em um mesmo plano cartesiano *xOy*, em que a unidade adotada nos eixos *Ox* e *Oy* é o metro, um arquiteto projetou uma calçada a ser construída na orla reta de uma praia. No piso serão desenhadas ondas representadas entre os gráficos das funções f e g definidas por $f(x) = 4$ sen x e $g(x) = 3 + 4$ sen x. O gráfico de f tangenciará uma margem da calçada, e o de g tangenciará a outra margem, conforme mostra a figura. Calcule a medida h da largura da calçada, em metro. **1.** 11 m



FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

2. (Enem) Segundo o Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), produtos sazonais são aqueles que apresentam ciclos bem definidos de produção, consumo e preço.

Resumidamente, existem épocas do ano em que a sua disponibilidade nos mercados varejistas ora é escassa, com preços elevados, ora é abundante, com preços mais baixos, o que ocorre no mês de produção máxima da safra.

A partir de uma série histórica, observou-se que o preço P, em reais, do quilograma de um certo produto sazonal pode ser descrito pela função:

$$P(x) = 8 + 5\cos\frac{(\pi x - \pi)}{6}$$

onde x representa o mês do ano, sendo $x = 1$ associado ao mês de janeiro, $x = 2$ ao mês de fevereiro, e assim sucessivamente, até $x = 12$ associado ao mês de dezembro.

Disponível em: <https://www.ibge.gov.br>.
Acesso em: 2 ago. 2012 (adaptado).

Na safra, o mês de produção máxima desse produto é:

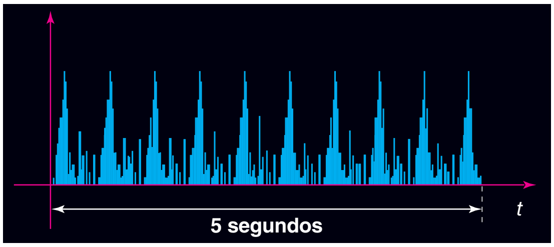
a. janeiro.
b. abril.
c. junho.
d. julho.
e. outubro.

2. alternativa **d**

3. Qual das funções dadas pelas leis a seguir pode representar aproximadamente o gráfico relativo à atividade anterior, supondo que os picos dele têm ordenada 1? **3.** alternativa **d**

a. $f(t) = \text{sen}\ t$
b. $f(t) = \cos t$
c. $f(t) = \text{sen}\ (2\pi t)$
d. $f(t) = |\text{sen}\ (2\pi t)|$
e. $f(t) = |\cos (2\pi t)|$

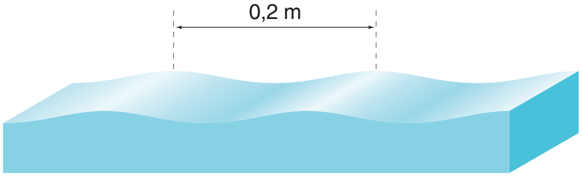
4. Na abertura deste capítulo, foi apresentado que a velocidade de uma música pode ser medida em bpm (batidas por minuto). Considere a figura a seguir, em que os picos do gráfico são as batidas de uma música.



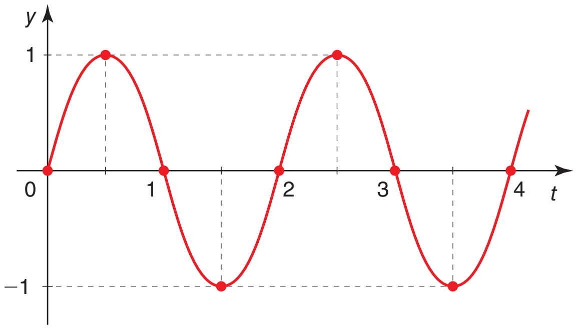
ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

a. Qual é a velocidade dessa música, em bpm?
4. a. 120 bpm
b. Qual é o período desse gráfico? **4. b.** $\frac{1}{2}$

5. A senoide a seguir descreve o movimento vertical de uma rolha em um tanque de água no qual são produzidas ondas com cristas sucessivas distantes 0,2 m uma da outra. Os valores absolutos das ordenadas y, em centímetro, representam a distância entre a rolha e a superfície da água em seu nível de repouso, e a abscissa t representa o tempo, em segundo.



Tanque de ondas



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

a. Qual é a velocidade de propagação das ondas, em metro por segundo? **5. a.** 0,1 m/s

b. No intervalo de 0 a 4 s, em que instantes a velocidade da rolha é nula? **5. b.** 0,5 s; 1,5 s; 2,5 s; 3,5 s

c. Obtenha uma equação que expresse y em função de t. **5. c.** $y = \text{sen}\ (\pi t)$

6. Um mapa, por ser a representação plana da superfície esférica da Terra, ou de parte dela, inevitavelmente, apresenta alterações nas formas e/ou dimensões e/ou ângulos reais observados sobre a superfície terrestre. No entanto, essas distorções podem ser corrigidas pela Geometria e

No item **a** do **exercício proposto 6**, comente que Amyr percorreu um pouco mais do que essa distância, porque às vezes ele se desviava do caminho mais curto, principalmente quando dormia, tendo que corrigir o rumo depois. Já no item **b** da atividade **6**, destaque a diferença entre a comprimento do arco $\overset{\frown}{NB}$, que é a medida real sobre a superfície terrestre, e a medida do segmento $\overline{NB}$, que é a medida ilusória que teria o segmento se a Terra fosse planificada como em um mapa.

Trigonometria, quando forem necessários cálculos mais exatos. Observe o problema a seguir, em que esses aspectos são mesclados.

AGLIBERTO LIMA/ESTADÃO CONTEÚDO

Amyr Klink chegando a Salvador (BA), em 19 de setembro de 1984.

Em 1984, o jovem navegador brasileiro Amyr Klink, de apenas 28 anos, realizou a travessia do Oceano Atlântico Sul, em um barco a remo, demorando 100 dias para ir da Namíbia, no continente africano (ponto *N* do mapa), até Salvador, na Bahia (ponto *B* do mapa).

Elaborado com base em: EXPEDIÇÕES. **Amyr Klink**, c2014. Disponível em: https://www.amyrklink.com.br/pt/expedicoes/. Acesso em: 17 jul. 2024.

Representação do trajeto da viagem de Amyr Klink

ANDERSON DE ANDRADE PIMENTEL/ARQUIVO DA EDITORA

Elaborado com base em: KLINK, A. **Cem dias entre céu e mar**. São Paulo: Companhia das Letras, 1995.

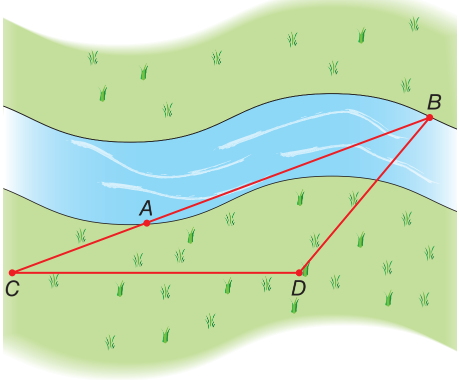
Amyr navegou o mais próximo possível do caminho mais curto entre *N* e *B*, que é o arco contido em uma circunferência máxima da superfície terrestre.

a. Dado que o caminho mais curto $\overset{\frown}{NB}$ é um arco de 1,09 rad e que o raio da Terra mede 6.378 km, em valores aproximados, qual teria sido a distância percorrida por Amyr Klink se ele tivesse navegado exatamente por esse caminho? **6. a.** 6.952,02 km

b. Considerando o caminho mais curto $\overset{\frown}{NB}$, citado no item a, qual é o comprimento do segmento de reta $\overline{NB}$? **6. b.** aproximadamente 6.613 km

c. Faça uma pesquisa sobre projeções cartográficas e suas deformações, e redija um breve texto sobre o que você leu. **6. c.** Resposta pessoal.

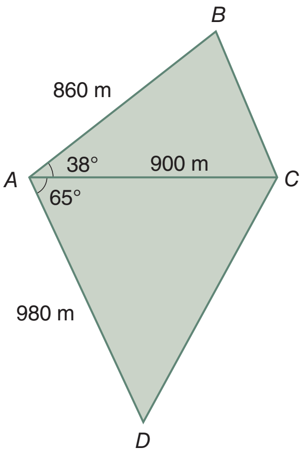
7. (Vunesp) Para calcular a distância entre duas árvores situadas nas margens opostas de um rio, nos pontos *A* e *B*, um observador que se encontra junto de *A* afasta-se 20 m da margem, na direção da reta $\overleftrightarrow{AB}$, até o ponto *C*, e depois caminha em linha reta até o ponto *D*, a 40 m de *C*, do qual ainda pode ver as árvores.



(Modelo didático sem escalas e com cores fantasia.)

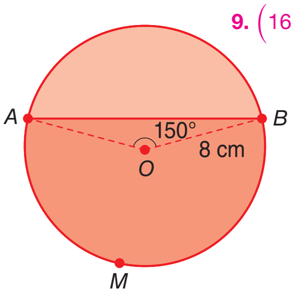
Tendo verificado que os ângulos $D\hat{C}B$ e $B\hat{D}C$ medem, respectivamente, cerca de 20° e 130°, que valor ele encontrou para a distância entre as árvores, se usou a aproximação sen 130° = 0,76? **7.** 40,8 m

8. Para medir a área de um terreno plano com a forma de um quadrilátero convexo *ABCD*, um topógrafo posicionou seu teodolito no vértice *A* e mediu os ângulos $B\hat{A}C$ e $C\hat{A}D$ e os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ e $\overline{AD}$, obtendo, respectivamente, 38°, 65°, 860 m, 900 m e 980 m. Qual é a área desse terreno? **8.** aproximadamente 637.943,13 m²



ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

9. Calcule a área do segmento circular *AMB* contido no círculo a seguir, de centro *O* e raio de medida igual a 8 cm. **9.** $\left(16+\frac{112\pi}{3}\right)$ cm²



ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

VERIFIQUE O QUE APRENDEU NO CAPÍTULO 5

Além do processo de avaliação promovido pelo professor, é importante que você, estudante, realize uma autoavaliação. O objetivo desse instrumento é mensurar seu nível de aprendizagem em relação ao assunto desenvolvido no capítulo. Para ajudá-lo nessa tarefa, apresentamos as seguintes questões.

Oriente os estudantes a utilizarem as atividades propostas nessa seção a fim de realizarem uma autoavaliação. Eles podem responder às perguntas e conferir a resposta no final do livro. Caso errem, podem utilizar ferramentas digitais para verificar o erro ou conversar com os colegas que acertaram para comparar a estratégia de resolução utilizada.

1. Dada a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 4 + 5\cos x$, responda aos itens seguintes.

- **a.** O número 2 pertence ao conjunto imagem de f? **1. a.** sim
- **b.** O número 10 pertence ao conjunto imagem de f? **1. b.** não
- **c.** Qual é o conjunto imagem de f? **1. c.** $Im(f) = [-1; 9]$

2. Uma partícula se move sobre uma circunferência de centro O e raio de 5 centímetros, no sentido anti-horário e com velocidade escalar constante, completando uma volta a cada 3 segundos. Um sistema cartesiano ortogonal de origem O é fixado no plano da trajetória dessa partícula, e a unidade adotada nos eixos é o centímetro. Considerando que no instante inicial ($t = 0$) a partícula passa pelo ponto (5, 0), responda:

- **a.** A função f dada por $f(x) = 5\cos\frac{2\pi t}{3}$ expressa a abscissa da posição da partícula em cada instante t? **2. a.** sim
- **b.** A função f dada por $f(x) = -5\,\text{sen}\,\frac{2\pi t}{3}$ expressa a ordenada da posição da partícula em cada instante t? **2. b.** não

3. De um observatório astronômico A da Terra, um astrônomo estuda duas estrelas, B e C, constatando que o ângulo obtuso $B\hat{A}C$ mede α, com $\cos\alpha = -\frac{5}{13}$, que $AB = 11$ anos-luz e $AC = 13$ anos-luz. Com esses dados, o cientista calculou a distância entre as estrelas B e C. Calcule essa distância em ano-luz. **3.** 20 anos-luz

Ferramenta de estudo

Ao término da resolução dos exercícios, copie no caderno o quadro indicado a seguir e preencha-o assinalando a resposta mais adequada ao seu aprendizado. Se julgar necessário, retome os tópicos de conteúdos relacionados a cada questão ou converse com os colegas e com o professor a fim de tirar dúvidas a respeito delas.

Questão	Sim	Parcialmente	Não
Sei o que é uma função trigonométrica e como aplicá-la na resolução de problemas contextualizados?			
Sei esboçar o gráfico da função $f(x) = \text{sen}\,x$ e da função $g(x) = \cos x$?			
Consigo utilizar o conceito de período das funções seno e cosseno na resolução de exercícios?			
Compreendo o que são movimentos periódicos e como eles se associam às funções trigonométricas?			
Aplico os conceitos de trigonometria na resolução de triângulos?			

ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

Uma sugestão para o estudo do infográfico é pedir aos estudantes que discutam, em grupos, as questões propostas na seção **Além da teoria**. Depois de lerem as informações, analisarem as senhas mais usadas e responderem às questões, peça aos estudantes que elaborem perguntas como:

CAPÍTULO

6

Os princípios da Análise combinatória

- Quantas senhas distintas de 3 caracteres podemos formar com os caracteres $, # e &, sem repetição? (6)
- Quantas senhas distintas de 3 caracteres podemos formar com os caracteres $, # e &, sendo permitida a repetição de caracteres? (27)

VITHUN KHAMSONG/MOMENT RF/GETTY IMAGES

Na abertura, converse acerca da importância de certos cuidados em definir senhas eletrônicas, apresentando as mais comuns, as mais fáceis de ser descobertas e os métodos para criar uma senha forte.

Como criar uma senha forte

Use muitas letras

Usando todas as letras do teclado, uma senha com quinze caracteres é 5.429.503.678.976 vezes mais difícil de quebrar que uma senha com seis caracteres.

Seis caracteres:
308.915.776 possibilidades

Quinze caracteres:
1.677.259.342.285.725.925.376 possibilidades

Utilize maiúsculas, minúsculas, números e símbolos

Quanto maior for a variedade de caracteres da senha, mais difícil será quebrá-la.

Há **10.000.000.000** de senhas diferentes formadas por dez caracteres numéricos.

Com apenas letras minúsculas, existem **141.167.095.653.376** possibilidades de senhas com dez caracteres.

Com todo o teclado, incluindo maiúsculas, minúsculas e caracteres especiais, podem-se criar **53.861.511.409.489.970.176** senhas diferentes com dez caracteres.

Use frases secretas

Escolha uma frase ou um trecho de música ou de um poema do qual você possa se lembrar.

Mais vale um pássaro na mão que dois voando

↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓

\+ Vl 1 p$$r n M q 2 Vnd

Crie sua senha com um critério que você não esqueça, como dispensar as vogais, trocar determinadas palavras e letras por números e caracteres especiais etc. Com quinze caracteres de todas as variedades, essa seria uma excelente senha, se ainda fosse secreta.

+Vl1p$$rnMq2Vnd

ILUSTRAÇÕES: MILTON RODRIGUES ALVES/ARQUIVO DA EDITORA

Além da teoria

1. Você considera suas senhas seguras?
2. Algumas senhas não seguras, como **123456** ou **qwerty**, são utilizadas pelos usuários no mundo todo. Faça uma pesquisa sobre os tipos de senhas não seguras mais utilizadas pelas pessoas no Brasil e compartilhe o resultado dessa pesquisa com os colegas.
3. Quantas senhas de três caracteres podemos formar com os caracteres 1, b e @, sem repetição? **3.** 6

Além da teoria:
1. Resposta pessoal.
2. Pesquisa pessoal.

1. O que é Análise combinatória

A contagem faz parte do cotidiano das pessoas, seja qual for seu ramo de atuação. Por isso, dedicamos este capítulo ao estudo da contagem. Para entender a necessidade de estudarmos esse tema, tente responder às perguntas a seguir.

Pergunta 1: Quantas placas diferentes de automóveis, formadas por sequências de três letras, um algarismo, uma letra e dois algarismos, podem ser confeccionadas?

JUNIOR ROZZO/ ROZZO IMAGENS

Pergunta 2: Entre as 8 melhores batedoras de pênalti de um time de futebol, serão escolhidas 5, aleatoriamente, para a decisão de uma partida por pênaltis. De quantas maneiras diferentes a escolha pode ser feita?

Proponha aos estudantes que respondam à pergunta 3 e, depois, que compartilhem as estratégias utilizadas. Como são 3 frutas, 2 bebidas quentes e 4 massas, é possível compor 24 combinações ($3 \cdot 2 \cdot 4 = 24$).

CHRISTOPHER LEE/UEFA/GETTY IMAGES

Decisão por pênaltis em partida entre Brasil e Inglaterra na Taça Finalíssima Feminina 2023, em Londres. Foto de 2023.

Pergunta 3: O *Guia alimentar para a população brasileira* apresenta, como exemplo, a composição do café da manhã de 8 brasileiros selecionados entre os que têm uma alimentação com base em alimentos *in natura* ou minimamente processados. Frutas e café (com ou sem leite) são constantes nessa refeição e, em alguns exemplos, a fruta é substituída por suco de laranja. Quantas combinações contendo 1 fruta, 1 bebida quente (café com ou sem leite) e 1 massa é possível fazer para compor o café da manhã a partir de 3 opções de frutas (mamão, laranja ou manga) e 4 opções de massas (pão, bolo ou cuscuz)?

Como podemos perceber, contar não é sempre um processo simples. Em muitas situações, contar unidades uma a uma, que é o processo elementar, mostra-se inviável, sendo necessário estabelecer métodos de contagem que permitam chegar aos resultados mais rapidamente. Obter esses métodos é o objetivo principal da **Análise combinatória**.

2. O princípio fundamental da contagem

A Análise combinatória é alicerçada no **princípio fundamental da contagem**, também conhecido como **princípio multiplicativo da contagem**. Intuitivamente, você já conhece esse princípio e já o aplica no cotidiano. Acompanhe a situação a seguir.

Para identificar e organizar os participantes de um congresso sobre recursos hídricos e uso sustentável da água, serão confeccionados dois tipos de crachás: tipo 1, destinado aos palestrantes; e tipo 2, destinado à plateia. Cada crachá do tipo 1 terá impresso um dos algarismos 1, 2, 3, 4 ou 5 seguido de uma das letras A, B ou C, formando, por exemplo, a sequência $\boxed{1B}$; e cada crachá do tipo 2 terá um dos algarismos de 1, 2, 3, 4 ou 5, seguido de uma das letras latinas A, B ou C, seguida ainda de uma das letras gregas α, β ou λ, formando, por exemplo, a sequência $\boxed{2C\alpha}$. Qual é o número máximo de crachás diferentes que podem ser confeccionados para os palestrantes? E para a plateia?

OBJETO DIGITAL **Vídeo: Placa de automóvel**

Em uma exposição dialogada, comente com os estudantes que contar nem sempre é um processo simples. Em muitas situações, contar unidades uma a uma mostra-se inviável, como no exemplo da pergunta 2: Quantas placas de automóveis formadas por sequências de três letras, um algarismo, uma letra e dois algarismos podem ser confeccionadas? (Esta é uma pergunta retórica para mostrar a dificuldade da contagem. Não é preciso dar a resposta, mas, se quiser, a resposta é: $26^4 \cdot 10^3 = 456.976.000$)
Por isso é necessário estabelecer métodos de contagem que permitam chegar mais rapidamente aos resultados. Obter esses métodos é o principal objetivo da Análise combinatória.

Oriente os estudantes a consultar as páginas 6 e 7 para saber mais sobre este e os demais Objetivos de Desenvolvimento Sustentável.

ODS 3

Reflexão

O *Guia alimentar para a população brasileira* apresenta como "regra de ouro" preferir sempre alimentos *in natura* ou minimamente processados e preparações culinárias a alimentos ultraprocessados. Pesquise o que é comida "feita na hora" e comida industrializada ou ultraprocessada e converse com os colegas acerca dos benefícios em preferir uma à outra.

Reflexão: Resposta pessoal. De acordo com o *Guia alimentar para a população brasileira*, alimentos ultraprocessados têm composição nutricional desbalanceada, favorecem o consumo excessivo de calorias e tendem a afetar negativamente a cultura, a vida social e o ambiente.

Para calcular o número máximo de crachás diferentes que podem ser confeccionados para os palestrantes (tipo 1), construímos a **matriz das possibilidades** cujos elementos são os pares ordenados em que o primeiro elemento é um dos algarismos possíveis (1, 2, 3, 4 ou 5) e o segundo é uma das letras latinas possíveis (A, B ou C), conforme a configuração adotada a seguir.

Observação

Matriz é uma tabela retangular cujos elementos são dispostos em linhas e colunas.

Comente que, no dia a dia, aplicamos o princípio fundamental da contagem em diferentes situações, por exemplo: "Um condomínio é formado por 4 prédios residenciais com 60 apartamentos em cada um. Quantos apartamentos compõem o condomínio? (4 × 60)"; "Um condomínio é formado por 4 prédios residenciais, com 60 apartamentos em cada um e com 2 vagas de garagem para cada apartamento. Quantas vagas de garagem existem no condomínio? (4 × 60 × 2)"

Quadro de possibilidades

	A	B	C
1	(1, A)	(1, B)	(1, C)
2	(2, A)	(2, B)	(2, C)
3	(3, A)	(3, B)	(3, C)
4	(4, A)	(4, B)	(4, C)
5	(5, A)	(5, B)	(5, C)

Matriz das possibilidades

$$\begin{bmatrix} (1, A) & (1, B) & (1, C) \\ (2, A) & (2, B) & (2, C) \\ (3, A) & (3, B) & (3, C) \\ (4, A) & (4, B) & (4, C) \\ (5, A) & (5, B) & (5, C) \end{bmatrix}$$

Como essa matriz tem 5 linhas por 3 colunas, concluímos que o seu número de elementos é dado pelo produto:

$$\underbrace{5}_{\substack{\text{Total de}\\ \text{escolhas}\\ \text{possíveis dos}\\ \text{algarismos}}} \cdot \underbrace{3}_{\substack{\text{Total de}\\ \text{escolhas}\\ \text{possíveis das}\\ \text{letras latinas}}} = 15$$

Portanto, o número máximo de crachás diferentes que podem ser confeccionados para os palestrantes é 15.

Essa primeira parte da resolução ajuda a entender o **princípio fundamental da contagem**, enunciado a seguir.

> Se um experimento *E* pode apresentar *n* resultados distintos e um experimento *F* pode apresentar *k* resultados distintos, então o número de resultados distintos que pode apresentar o experimento composto de *E* e *F*, nessa ordem, é dado pelo produto $n \cdot k$.

Para calcular o número máximo de crachás diferentes que podem ser feitos para a plateia (tipo 2), vamos construir a **matriz das possibilidades**, formada por todos os ternos ordenados em que o primeiro elemento é um dos algarismos possíveis (1, 2, 3, 4 ou 5), o segundo é uma das letras latinas possíveis (A, B ou C) e o terceiro é uma das letras gregas possíveis (α, β ou λ) conforme a configuração adotada a seguir.

Quadro de possibilidades

	α	β	λ
1, A	(1, A, α)	(1, A, β)	(1, A, λ)
1, B	(1, B, α)	(1, B, β)	(1, B, λ)
1, C	(1, C, α)	(1, C, β)	(1, C, λ)
2, A	(2, A, α)	(2, A, β)	(2, A, λ)
2, B	(2, B, α)	(2, B, β)	(2, B, λ)
2, C	(2, C, α)	(2, C, β)	(2, C, λ)
3, A	(3, A, α)	(3, A, β)	(3, A, λ)
3, B	(3, B, α)	(3, B, β)	(3, B, λ)
3, C	(3, C, α)	(3, C, β)	(3, C, λ)
4, A	(4, A, α)	(4, A, β)	(4, A, λ)
4, B	(4, B, α)	(4, B, β)	(4, B, λ)
4, C	(4, C, α)	(4, C, β)	(4, C, λ)
5, A	(5, A, α)	(5, A, β)	(5, A, λ)
5, B	(5, B, α)	(5, B, β)	(5, B, λ)
5, C	(5, C, α)	(5, C, β)	(5, C, λ)

Matriz das possibilidades

$$\begin{bmatrix} (1, A, \alpha) & (1, A, \beta) & (1, A, \lambda) \\ (1, B, \alpha) & (1, B, \beta) & (1, B, \lambda) \\ (1, C, \alpha) & (1, C, \beta) & (1, C, \lambda) \\ (2, A, \alpha) & (2, A, \beta) & (2, A, \lambda) \\ (2, B, \alpha) & (2, B, \beta) & (2, B, \lambda) \\ (2, C, \alpha) & (2, C, \beta) & (2, C, \lambda) \\ (3, A, \alpha) & (3, A, \beta) & (3, A, \lambda) \\ (3, B, \alpha) & (3, B, \beta) & (3, B, \lambda) \\ (3, C, \alpha) & (3, C, \beta) & (3, C, \lambda) \\ (4, A, \alpha) & (4, A, \beta) & (4, A, \lambda) \\ (4, B, \alpha) & (4, B, \beta) & (4, B, \lambda) \\ (4, C, \alpha) & (4, C, \beta) & (4, C, \lambda) \\ (5, A, \alpha) & (5, A, \beta) & (5, A, \lambda) \\ (5, B, \alpha) & (5, B, \beta) & (5, B, \lambda) \\ (5, C, \alpha) & (5, C, \beta) & (5, C, \lambda) \end{bmatrix}$$

Como essa matriz tem 15 linhas por 3 colunas, concluímos que seu número de elementos é dado pelo produto:

$$\underbrace{15}_{\substack{\text{Total de escolhas}\\ \text{possíveis dos}\\ \text{algarismos das}\\ \text{letras latinas}}} \cdot \underbrace{3}_{\substack{\text{Total de escolhas}\\ \text{possíveis das}\\ \text{letras gregas}}} = 45$$

Ou ainda:

$$\underbrace{5}_{\substack{\text{Total de escolhas}\\ \text{possíveis dos}\\ \text{algarismos}}} \cdot \underbrace{3}_{\substack{\text{Total de escolhas}\\ \text{possíveis das letras}\\ \text{latinas}}} \cdot \underbrace{3}_{\substack{\text{Total de escolhas}\\ \text{possíveis das}\\ \text{letras gregas}}} = 45$$

Concluímos que podem ser feitos, no máximo, 45 crachás diferentes para a plateia.

Essa segunda parte da resolução ajuda a entender que o princípio fundamental da contagem pode ser utilizado para cálculos que envolvam mais de dois experimentos. A seguir, enunciamos a generalização desse princípio.

Sugerimos o vídeo **De malas prontas** que apresenta uma relação entre vestuário e o princípio fundamental da contagem. Após assistir ao vídeo, converse com os colegas sobre como o princípio fundamental da contagem ajudou a resolver o problema de Raquel. Disponível em: https://m3.ime.unicamp.br/recursos/1083. Acesso em: 4 out. 2024.

Se os experimentos E_1, E_2, E_3, ..., E_k podem apresentar n_1, n_2, n_3, ..., n_k resultados distintos, respectivamente, então o número de resultados distintos que pode apresentar o experimento composto de E_1, E_2, E_3, ... e E_k, nessa ordem, é dado pelo produto $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot ... \cdot n_k$

Aplicando a linguagem dos conjuntos, esse princípio também pode ser enunciado da seguinte maneira:

Sendo A_1, A_2, A_3, ..., A_k conjuntos não vazios, o número de escolhas diferentes de um elemento de A_1, um de A_2, um de A_3, ... e um de A_k, nessa ordem, é dado pelo produto:

$$n(A_1) \cdot n(A_2) \cdot n(A_3) \cdot ... \cdot n(A_k)$$

Observação

Se x_1, x_2, x_3, ..., x_n são possíveis resultados dos experimentos E_1, E_2, E_3, ..., E_n, respectivamente, então a sequência $(x_1, x_2, x_3, ..., x_n)$ é um possível resultado do experimento composto de E_1, E_2, E_3, ..., E_n, nessa ordem.

Nota:

O símbolo n(*A*) representa o número de elementos do conjunto *A*.

Reflexão: Ao aplicar o princípio fundamental da contagem, calculamos o número de sequências que podem ser formadas com os elementos disponíveis; portanto, consideramos a ordem desses elementos.

Reflexão

Por que no enunciado do princípio fundamental da contagem é destacada a ordem dos experimentos?

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Em uma concessionária, um modelo de automóvel é vendido em três versões: básica, intermediária e completa. Para cada versão, o veículo pode ter uma das cores, cinza, azul, branco ou preto; motor 1.0, 1.6 ou 2.0; e câmbio automático ou mecânico. Quantas opções diferentes de escolha tem um cliente que pretenda comprar esse modelo de automóvel?

Resolução

Vamos resolver o problema por etapas.

1. Compreender o problema

Da situação, podemos perceber que se trata de um problema de contagem, associado ao princípio fundamental da contagem.

2. Elaborar um plano de resolução

Ao ler a situação, sabemos que existem 3 versões do modelo de automóvel e que cada versão pode ter 1 cor entre as 4 cores possíveis, 1 tipo de motor entre os 3 tipos de motor possíveis e 1 tipo de câmbio entre os 2 tipos de câmbio possíveis. Podemos aplicar o princípio fundamental da contagem considerando essas informações.

3. Executar o plano elaborado

Sabemos que a situação envolve 4 etapas: uma com 3 possibilidades, outra 4, outra 3 e a última, 2.

Podemos organizar um esquema, como a seguir, que apresenta o número de possibilidades de escolha para cada um dos itens representados nas casas (quadrinhos):

Versão	Cor	Motor	Câmbio
3	4	3	2

número de possibilidades

Pelo princípio fundamental da contagem, o número de opções diferentes de escolha do veículo é dado pelo produto $3 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2$, ou seja, o cliente tem 72 opções diferentes de escolha.

4. Verificação

A verificação pode ser feita ao rever todas as etapas e os cálculos realizados.

2. Quantos números naturais de três algarismos podem ser representados com os algarismos 2, 3, 4, 7, 8 e 9?

Resolução

No esquema a seguir, representamos a posição que cada algarismo poderá ocupar no número de três algarismos.

primeira posição	segunda posição	terceira posição

Como o enunciado não faz referência à repetição de algarismos nos números, podemos considerar números como 477 e 999, ou seja, com repetição de algarismos.

Assim, para preencher cada uma das posições existem seis possibilidades de escolha, pois podemos preenchê-las com qualquer um dos algarismos 2, 3, 4, 7, 8 e 9.

primeira posição	segunda posição	terceira posição
6	6	6

Logo, pelo princípio fundamental da contagem, o total de números que podem ser representados é dado pelo produto $6 \cdot 6 \cdot 6$. Ou seja, nas condições enunciadas, é possível representar 216 números.

3. Quantos números naturais de três algarismos distintos podem ser representados com os algarismos 2, 3, 4, 7, 8 e 9?

Resolução

No esquema a seguir, cada posição pode ser preenchida com um dos algarismos 2, 3, 4, 7, 8 ou 9, **sem repeti-los.**

primeira posição	segunda posição	terceira posição

- O número de possibilidades de preenchimento da primeira posição é 6.
- O número de possibilidades de preenchimento da segunda posição é 5, pois um algarismo já foi usado na primeira e não pode ser repetido.
- O número de possibilidades de preenchimento da terceira posição é 4, pois os dois algarismos usados nas posições anteriores não podem ser repetidos.

primeira posição	segunda posição	terceira posição
6	6	6

Logo, pelo princípio fundamental da contagem, o total de números que podem ser representados é dado pelo produto $6 \cdot 5 \cdot 4$. Ou seja, nas condições enunciadas, é possível representar 120 números.

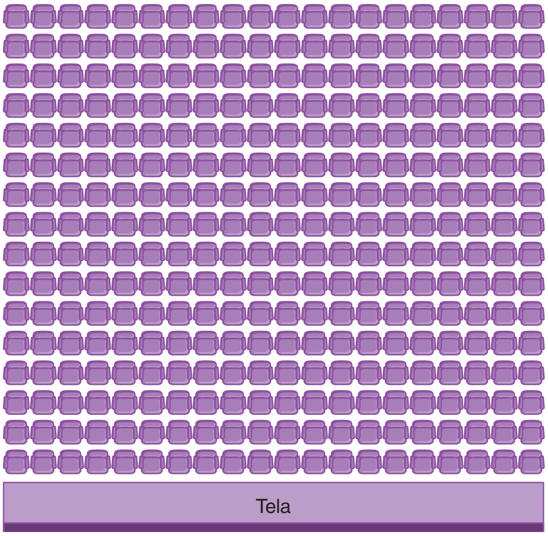
Reflexão **Reflexão:** sim

No Ensino Fundamental, foi estudado o cálculo do número de divisores naturais de um número natural não nulo. Esse cálculo pode ser feito pelo princípio fundamental da contagem?

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Faça os exercícios no caderno.

1. A figura a seguir representa uma parcela das poltronas de um cinema, distribuídas em fileiras com o mesmo número de poltronas em cada uma.



FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

Aplicando o princípio fundamental da contagem, responda aos itens a seguir.

a. Quantas poltronas foram representadas nesta sala de cinema? **1. a.** 320 poltronas

b. Em determinada sessão desta sala de cinema, em que todos os ingressos das poltronas representadas foram vendidos, houve uma promoção: cada ingresso comprado dava direito a dois baldes de pipoca. Qual é o total de baldes de pipoca distribuídos aos espectadores que compraram esses ingressos? **1. b.** 640 baldes de pipoca

2. Em um ginásio de esportes, os lugares destinados aos espectadores são separados em quatro setores, com a mesma quantidade de cadeiras em cada um: azul, laranja, amarelo e verde. Em cada setor, cada cadeira é identificada por uma das 26 letras do alfabeto, seguida de um dos números naturais de 1 a 45. O bilhete de ingresso ao ginásio apresenta uma sequência com uma cor, uma letra e um número. Assim, por exemplo, a informação azul, G 38 indica: setor azul, fila G, cadeira 38. Quantas cadeiras são destinadas aos espectadores se o total de cadeiras é igual ao total de possibilidades de identificação?

2. 4.680 cadeiras

3. Com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5 e 6, determine:

a. quantos números naturais de quatro algarismos podem ser representados; **3. a.** 1.296

b. quantos números naturais de quatro algarismos distintos podem ser representados. **3. b.** 360

4. Com o auxílio do esquema a seguir, responda:

milhares	centenas	dezenas	unidades

a. Quantos números naturais de quatro algarismos podem ser representados com os algarismos 0, 4, 5, 7 e 9?

(*Sugestão*: Lembre-se de que, para o número ter quatro algarismos, o algarismo dos milhares não pode ser zero.) **4. a.** 500

b. Quantos números naturais de quatro algarismos distintos podem ser representados com os algarismos 0, 4, 5, 7 e 9? **4. b.** 96

5. Com os algarismos 1, 3, 4, 5, 7 e 9:

a. quantos números naturais pares de quatro algarismos podem ser representados? **5. a.** 216

b. quantos números naturais pares de quatro algarismos distintos podem ser representados? **5. b.** 60

6. Quando oito pessoas entraram em um ônibus, havia quatro bancos desocupados, cada qual com dois lugares. Como duas dessas pessoas eram idosas, elas escolheram primeiro um banco para se sentarem juntas. Depois, as demais pessoas se sentariam também, aleatoriamente. De quantas maneiras diferentes essas oito pessoas podem se distribuir pelos lugares vagos, considerando que, em cada banco, o lugar junto à janela é diferente do lugar junto ao corredor?

6. 5.760 maneiras diferentes

7. (Enem) Uma empresa construirá sua página na internet e espera atrair um público de aproximadamente um milhão de clientes. Para acessar essa página, será necessária uma senha com formato a ser definido pela empresa. Existem cinco opções de formato oferecidas pelo programador, descritas no quadro, em que "L" e "D" representam, respectivamente, letra maiúscula e dígito.

Opção	Formato
I	LDDDDD
II	DDDDDD
III	LLDDDD
IV	DDDDD
V	LLLDD

As letras do alfabeto, entre as 26 possíveis, bem como os dígitos, entre os 10 possíveis, podem se repetir em qualquer das opções.

A empresa quer escolher uma opção de formato cujo número de senhas distintas possíveis seja superior ao número esperado de clientes, mas que esse número não seja superior ao dobro do número esperado de clientes.

A opção que mais se adequa às condições da empresa é:

a. I **b.** II **c.** III **d.** IV **e.** V

7. alternativa **e**

8. Qualquer símbolo utilizado na escrita de uma linguagem é chamado de caractere; por exemplo: letras, algarismos, sinais de pontuação, sinais de acentuação, sinais especiais etc. Em computação, cada caractere é representado por uma sequência de 8 *bits*, e cada *bit* pode assumir dois estados, representados por 0 ou 1; por exemplo, a sequência 01000111 representa a letra G. Assim, o número máximo de caracteres que podem ser representados por todas as sequências de 8 *bits* é:

a. 16 **b.** 32 **c.** 64 **d.** 128 **e.** 256

8. alternativa **e**

9. Em um estudo clínico, um novo medicamento deve passar por três testes diferentes para ser comercializado. O primeiro teste avalia o medicamento enquadrando-o em três classificações: alto risco para o paciente, médio risco para o paciente e baixo risco para o paciente. O segundo teste também abrange três classificações: medicamento de referência, medicamento genérico, medicamento similar. Por fim, o último teste enquadra o medicamento em duas classificações: ação profilática e ação curativa. Em quantas maneiras diferentes uma amostra do medicamento pode ser classificada?

9. 18 maneiras diferentes

10. Um *hacker* sabe que a senha de acesso a um arquivo secreto é um número natural de cinco algarismos distintos e não nulos. Com o objetivo de acessar esse arquivo, o *hacker* programou o computador para testar, como senha, todos os números naturais nessas condições. O computador vai testar esses números um a um, demorando 0,5 segundo em cada tentativa. O tempo máximo para que o arquivo seja aberto será:

a. 1 h 30 min

b. 1 h 30 min 12 s

c. 2 h 6 min

d. 2 h 26 min

e. 3 h 12 min

10. alternativa **c**

11. A placa Mercosul foi adotada em todo o território brasileiro em 2020, em substituição ao modelo de placas anterior. As placas brasileiras devem ser formadas por 4 letras e 3 algarismos, obedecendo à seguinte norma: da esquerda para a direita, os três primeiros e o quinto caracteres devem ser letras do alfabeto português, e os demais caracteres devem ser algarismos. Podem ser usadas quaisquer letras, dentre as 26 possíveis, e quaisquer algarismos, dentre os 10 possíveis, sendo permitida a repetição de letra ou algarismo. Por exemplo:

JUNIOR ROZZO/ ROZZO IMAGENS

12. Resposta pessoal. O diagrama de árvore é uma ferramenta visual útil no estudo do princípio fundamental da contagem, pois ajuda a organizar e visualizar todas as possíveis combinações de eventos ou escolhas, facilitando a contagem de resultados possíveis.

De acordo com essas informações, responda às questões a seguir:

a. Quantas placas diferentes podem ser confeccionadas? **11. a.** 456.976.000 placas

b. Quantas placas diferentes podem ser confeccionadas, sem repetição de letra nem de algarismo? **11. b.** 258.336.000 placas

c. Quantas placas diferentes podem ser confeccionadas, com pelo menos um caractere (letra ou algarismo) repetido? **11. c.** 198.640.000 placas

d. Quantas placas diferentes podem ser confeccionadas, com os algarismos diferentes entre si? **11. d.** 329.022.720 placas

e. Quantas placas diferentes podem ser confeccionadas, sem a repetição de letra? **11. e.** 358.800.000 placas

12. Estudamos o princípio fundamental da contagem a partir da matriz das possibilidades; porém, há outras maneiras interessantes de estudá-lo. Uma delas utiliza um dispositivo chamado de **diagrama de árvore**. Pesquise na internet a aplicação do diagrama de árvore no estudo do princípio fundamental da contagem e escreva um breve texto sobre o que você encontrar, acompanhado de exemplos. Compartilhe o texto elaborado com os colegas.

13. Pesquise situações que possam ser associadas ao princípio multiplicativo da contagem. Converse com um colega acerca delas. Depois, elaborem um problema envolvendo uma das situações. Por fim, analisem e discutam as resoluções. **13.** Resposta pessoal.

Para retomar os conteúdos estudados, resolva os exercícios complementares 1 a 8.

O contexto da seção **Matemática sem fronteiras** favorece um trabalho interdisciplinar com a área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias abordando o **TCT Educação alimentar e nutricional**. Pode-se desenvolver em conjunto com professores dessa área uma pesquisa acerca de alimentos típicos da região a fim de listar seus principais nutrientes e benefícios para a saúde. Os estudantes podem pesquisar frutas, legumes e outros produtos cultivados no município, fazer pesquisa de preço de produtos não processados e comparar com o preço de produtos ultraprocessados.
Com base nos dados, podem conversar sobre as dificuldades de manter uma alimentação saudável e os benefícios de consumir produtos *in natura* ou pouco processados. Dessa maneira, eles também desenvolvem aspectos da **competência geral 8**. Se possível, sugira aos estudantes organizarem os dados em planilhas eletrônicas para facilitar a análise por meio dos recursos desse *software*.

MATEMÁTICA SEM FRONTEIRAS

Alimentação saudável

O padrão alimentar que aumenta o risco de Doenças Crônicas não Transmissíveis (DCNT) é caracterizado pelo consumo elevado de alimentos ultraprocessados, como refrigerantes e salgadinhos, e pela ingestão insuficiente de alimentos *in natura* ou minimamente processados, como frutas, verduras e feijão. Os alimentos ultraprocessados impactam negativamente a saúde não apenas por seu perfil nutricional desfavorável (alto teor de sódio, açúcar livre e gorduras totais; baixo teor de fibras, vitaminas e minerais), mas também por mecanismos que incentivam o consumo excessivo. As evidências mostram que esses alimentos estão se tornando cada vez mais predominantes no sistema alimentar global, tendência que também tem sido observada no Brasil nas últimas décadas.

A segunda edição do *Guia alimentar para a população brasileira*, publicada em 2014, aponta diversas barreiras para a adoção de uma alimentação saudável, destacando especialmente o custo dos alimentos. Diferentemente do que ocorre em países de alta renda, no Brasil, uma dieta composta por alimentos *in natura* ou minimamente processados, como arroz e feijão, ainda é mais econômica do que uma baseada em alimentos ultraprocessados.

No entanto, devido às variações nos preços dos diferentes grupos de alimentos ao longo do tempo, não é certo que essa situação se mantenha no longo prazo. As evidências indicam que, em países de renda média e baixa, alimentos e bebidas não saudáveis estão se tornando financeiramente mais acessíveis do que as opções saudáveis.

> *As DCNTs (doenças crônicas não transmissíveis) são um dos maiores problemas de saúde pública no planeta. Essa gama de enfermidades, caracterizada por não apresentarem um agente infeccioso como causador, inclui hipertensão (pressão alta), diabetes, doenças cardiovasculares (doenças do coração), câncer, dentre outras doenças. Estimativas da OMS (Organização Mundial da Saúde) indicam que as DCNTs foram responsáveis por 41 milhões de mortes no mundo em 2016, o que representa 71% das mortes no período.*
>
> *No Brasil, essas doenças representam a maior causa de mortes. Em 2016, representaram 74% do total, com destaque para doenças cardiovasculares (28%), os diversos tipos de câncer (18%), as doenças respiratórias (6%) e o diabetes (5%).*
>
> *[...]*
>
> *As DCNTs são caracterizadas por terem desenvolvimento de longo prazo e por terem múltiplas causas. Entre os fatores de risco para seu aparecimento estão tabagismo, sedentarismo, alimentação não saudável e excesso de peso.*

INSTITUTO DE DEFESA DO CONSUMIDOR. Doenças crônicas não transmissíveis. **Alimentação em pauta**, São Paulo, [2021?]. Disponível em: https://idec.org.br/alimentacaoempauta/doencas-cronicas-nao-transmissiveis. Acesso em: 28 mar. 2024.

ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

Alimentos *in natura*

Alimentos saudáveis, ideais para consumir diariamente. Exemplos: frutas, verduras, legumes, ovos, carne e peixes.

Alimentos minimamente processados

Alimentos submetidos a algum processo, como limpeza, moagem e pasteurização. Exemplos: arroz, feijão, lentilha, grão-de-bico, farinhas de mandioca, de milho, de tapioca ou de trigo etc. O arroz e o feijão são a base da alimentação de milhões de brasileiros.

Alimentos processados

Alimentos fabricados pela indústria com a adição de sal, açúcar ou outro produto que os conserve por mais tempo. Exemplos: picles, palmito em conserva, compotas de frutas, carnes salgadas e defumadas, comida em lata (sardinha, atum, milho, ervilha, entre outras), queijos, pães etc.

Alimentos ultraprocessados

Formulações industriais, em geral, com pouco ou nenhum alimento inteiro e também com adição de muitos aditivos químicos para aumentar o sabor e a medida do tempo de conservação. Esses alimentos têm baixo valor nutritivo. Exemplos: salsichas, biscoitos, sorvetes, chocolates, molhos, barras energéticas, produtos instantâneos (sopas, macarrão e temperos), salgadinhos de pacote, refrigerantes, produtos congelados e prontos para aquecimento.

Fonte: BRASIL. Ministério da Saúde. **Guia alimentar para a população brasileira**. Brasília: MS, 2014. Disponível em: https://www.gov.br/saude/pt-br/assuntos/saude-brasil/publicacoes-para-promocao-a-saude/guia_alimentar_populacao_brasileira_2ed.pdf/view. Acesso em: 10 out. 2024.

Atividades

Faça as atividades no caderno.

ODS 3

1. Como é possível relacionar a alimentação não saudável e a incidência de doenças crônicas não transmissíveis? **1.** A alimentação não saudável está entre os fatores de risco para o aparecimento de doenças crônicas não transmissíveis.

2. Pesquisem na internet e analisem exemplos de cardápios que possam ser associados a uma refeição saudável. **2.** Resposta pessoal.

3. Com base nos exemplos pesquisados, elaborem um cardápio para café da manhã, um para almoço e outro para jantar considerando as recomendações para uma alimentação saudável. **3.** Resposta pessoal.

4. Pesquisem outras receitas de alimentação saudável e compartilhem com os colegas da turma. **4.** Resposta pessoal.

Inicie o assunto com uma situação prática, por exemplo: Em uma sala de aula, o professor de Literatura pediu que levantasse a mão quem já havia lido algum livro de Machado de Assis; 15 estudantes levantaram a mão. Em seguida, o professor pediu que levantasse a mão quem já havia lido algum livro de Mário de Andrade; 17 estudantes levantaram a mão.

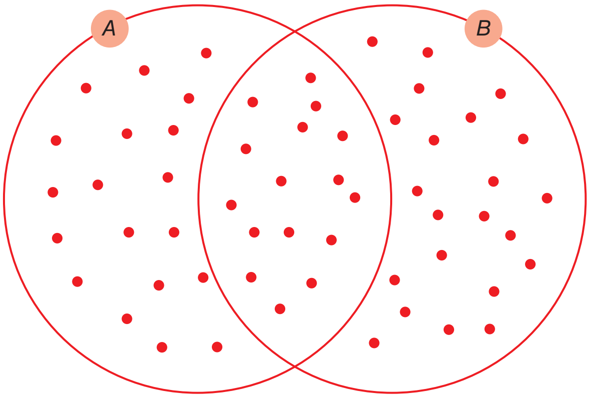
a) Se cada estudante da sala levantou a mão pelo menos uma vez, pode-se concluir que havia (15 + 17) estudantes na sala? Por quê? (Não, porque pelo menos um deles pode ter lido Machado de Assis e Mário de Andrade.)

b) Se cada estudante da sala levantou a mão pelo menos uma vez, sendo que 4 estudantes levantaram a mão duas vezes, quantos estudantes há na sala? (15 + 17 – 4 = 28)

3. O princípio aditivo da contagem

Alguns resultados da teoria dos conjuntos têm importantes aplicações na Análise combinatória. Um deles é o cálculo do número de elementos da união de dois conjuntos finitos. Acompanhe.

O diagrama a seguir representa dois conjuntos, *A* e *B*, cujos elementos são pontos de um plano.



ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

Observação

A notação n(*A*) representa o número de elementos do conjunto indicado entre parênteses, no caso, do conjunto *A*.

Mesmo sem contar os pontos, podemos afirmar que o número de elementos da união de *A* e *B* **não** é a soma do número de elementos de *A* com o número de elementos de *B*, ou seja, $n(A \cup B) \neq n(A) + n(B)$, pois na soma $n(A) + n(B)$ os elementos de $A \cap B$ são contados duas vezes: uma vez ao contar os elementos de *A*, e outra vez ao contar os elementos de *B*. Assim, se subtrairmos dessa soma o número $n(A \cap B)$, que foi adicionado duas vezes, teremos a relação verdadeira:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

Essa conclusão pode ser generalizada pelo seguinte teorema:

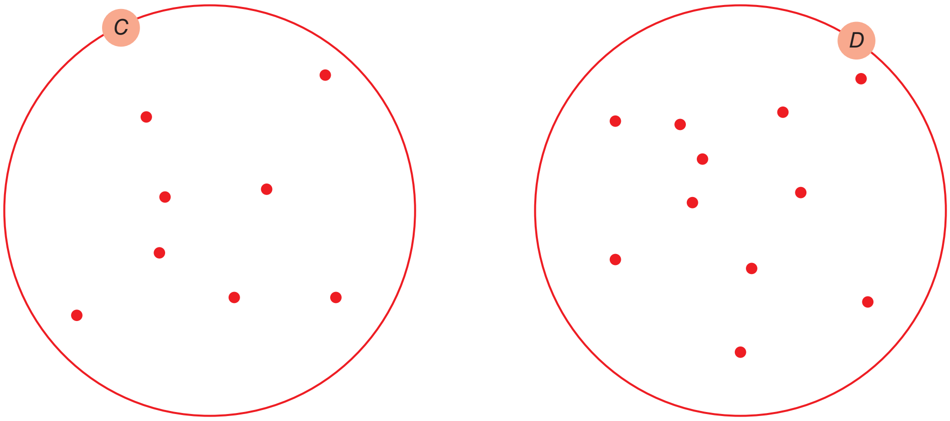
Sendo *A* e *B* conjuntos finitos quaisquer, o número de elementos da união de *A* e *B* é dado por:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

Observamos que se dois conjuntos *C* e *D* forem disjuntos, isto é, se $C \cap D = \varnothing$, teremos:

$$n(C \cup D) = n(C) + n(D), \text{ pois } n(C \cap D) = 0.$$

Observe:



ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

$$n(C \cup D) = n(C) + n(D) - \underbrace{n(C \cap D)}_{0} \Rightarrow n(C \cup D) = n(C) + n(D)$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

4. Mensalmente, uma instituição de ensino oferece aos estudantes duas palestras para orientação profissional. No mês passado, a primeira foi sobre Bioinformática, e a segunda, sobre Epidemiologia. Todos os estudantes de uma turma assistiram a pelo menos uma das palestras e, entre eles, 18 assistiram à primeira, 23 assistiram à segunda e 8 assistiram às duas palestras. Quantos estudantes há nessa turma?

Resolução

Sendo:

- A o conjunto dos estudantes que assistiram à primeira palestra, então $n(A) = 18$;
- B o conjunto dos estudantes que assistiram à segunda palestra, então $n(B) = 23$;
- $A \cap B$ o conjunto dos estudantes que assistiram às duas palestras, então $n(A \cap B) = 8$.

O conjunto $A \cup B$ é definido por:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \textbf{ ou } x \in B\}$$

Assim, $A \cup B$ é o conjunto dos estudantes que assistiram à primeira **ou** à segunda palestra, isto é, todos os estudantes da turma.

Pelo teorema anterior, esse total é dado por:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$
$$\therefore n(A \cup B) = 18 + 23 - 8 = 33$$

Logo, nessa turma há 33 estudantes.

5. Quantos números naturais de três ou quatro algarismos distintos podem ser formados com os algarismos 4, 5, 6, 7, 8 e 9?

Resolução

Sendo A o conjunto dos números naturais de três algarismos distintos formados pelos algarismos 4, 5, 6, 7, 8 e 9, calculamos $n(A)$:

$$n(A) = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$$

Sendo B o conjunto dos números naturais de quatro algarismos distintos formados pelos algarismos 4, 5, 6, 7, 8 e 9, calculamos $n(B)$:

$$n(B) = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$$

Para concluir, devemos calcular o número de elementos que pertencem a A ou a B, ou seja, $n(A \cup B)$. Como A e B são disjuntos, isto é, $A \cap B = \varnothing$, temos:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) = 120 + 360 = 480$$

Logo, podem ser formados 480 números nas condições enunciadas.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Faça os exercícios no caderno.

14. Faça o que se pede.

a. Dois conjuntos, A e B, são tais que $n(A) = 18$, $n(B) = 15$ e $n(A \cap B) = 6$. Determine o número de elementos de $A \cup B$. **14. a.** 27

b. Dois conjuntos, C e D, são tais que $n(C \cup D) = 28$, $n(C) = 17$ e $n(D) = 20$. Determine o número de elementos de $C \cap D$. **14. b.** 9

15. Uma empresa fabricante de aparelhos respiratórios identifica cada um de seus aparelhos de determinado lote com uma sequência de letras e algarismos escolhidos entre 1, 2, 3, 4, 5, 6, A, B, C e D. Cada sequência foi constituída por 4 algarismos distintos seguidos de duas letras distintas, por exemplo, 1462AB; ou 5 algarismos distintos seguidos de duas letras distintas, por exemplo 42613BC. Qual é o número máximo de aparelhos que pode ter esse lote? **15.** 12.960 aparelhos

16. Um instituto de medicina do sono realizou um estudo com uma amostra de 80 moradores de grandes centros urbanos. A pesquisa revelou que 56 deles dormiam menos de quatro horas por noite e 28 dormiam mais de duas horas por noite. Quantas pessoas da amostra dormiam mais de duas e menos de quatro horas por noite? **16.** 4 pessoas

EKATERINA TOROPOVA/ISTOCK/GETTY IMAGES

Pessoa submetendo-se a exame de polissonografia, que pode revelar disfunções como apneia do sono, ronco, insônia, hipersonia etc.

17. Calcule a quantidade de números naturais compreendidos entre 300 e 3.000 que podemos representar utilizando somente os algarismos 1, 2, 3, 5, 7 e 8, de modo que não figurem algarismos repetidos em um mesmo número. **17.** 200

(*Sugestão*: Separe a resolução em dois casos.)

18. Quantos números naturais maiores que 4.500 e de quatro algarismos distintos podemos representar com os algarismos 2, 3, 4, 5, 6 e 7? **18.** 216

19. Quantos números naturais pares, de quatro algarismos distintos, podem ser formados com os algarismos 0, 1, 2, 4, 5, 7 e 9? **19.** 320

20. Na sala do grêmio estudantil de uma escola de Ensino Médio, reuniram-se 4 garotas e 3 garotos do 1º ano, 2 garotas e 4 garotos do 2º ano, e 3 garotas e 4 garotos do 3º ano, eleitos para representar os interesses dos estudantes. Dentre esses eleitos será escolhida a diretoria do grêmio, composta de três estudantes, um de cada ano. De quantas maneiras diferentes a escolha pode ser feita, de modo que a diretoria seja formada por:

a. 1 garoto e 2 garotas? **20. a.** 98

b. pelo menos 1 garoto? **20. b.** 270

c. no máximo 2 garotos? **20. c.** 246

21. Elabore um problema cuja resolução envolva o princípio aditivo da contagem em um contexto que envolva a escolha de 5 elementos ordenados, de um conjunto de 20 elementos, mas cujo primeiro e último elementos escolhidos tenham alguma restrição. Em seguida, troque o problema elaborado com um colega para que um resolva o problema elaborado pelo outro. Por fim, analisem e discutam as resoluções.

21. Resposta pessoal.

Para retomar os conteúdos estudados, resolva os exercícios complementares 9 a 11.

TRABALHO E JUVENTUDES

Epidemiologista

Aproveite o contexto e, ao conversar sobre as pessoas epidemiologistas, incentive os estudantes a comentarem a importância da vacinação como uma política de saúde pública e de outras ações pessoais em prol do coletivo. A vacinação em massa contribuiu para a erradicação de diversas doenças, como a varíola e a poliomielite.
No entanto, a baixa na adesão à vacinação pode fazer com que doenças erradicadas voltem a aparecer. Esse tema pode ser desenvolvido em conjunto com a área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas ou de Ciências da Natureza e suas Tecnologias abordando os **TCTs Saúde** e **Vida familiar e social** e a **competência geral 7**.

A análise combinatória é uma ferramenta matemática poderosa utilizada em diversas profissões e áreas do conhecimento. Uma dessas áreas é a de epidemiologia.

A epidemiologia é uma área importante da saúde pública que estuda a distribuição e os determinantes das doenças em populações humanas.

O epidemiologista busca entender como as doenças se espalham, identificar fatores de risco e desenvolver estratégias para prevenir e controlar surtos. Ele utiliza métodos estatísticos e científicos para analisar dados de saúde, investigar surtos e avaliar a eficácia de intervenções de saúde pública.


PEOPLEVIDEOS/ISTOCK/GETTY IMAGES

Profissionais da saúde utilizando microscópio óptico na análise de agentes infecciosos.

Esse profissional é crucial para o controle de doenças infecciosas, como a covid-19, e para doenças crônicas, como diabetes e câncer. Além disso, o epidemiologista é o responsável por fornecer informações essenciais para a formulação de políticas de saúde pública e para a implementação de programas de prevenção e tratamento. O epidemiologista desempenha importante papel na proteção da saúde das populações e na melhoria da qualidade de vida.

Você está pensando em seguir carreira nessa área? Quer saber mais sobre essa profissão? Faça uma pesquisa na internet e compartilhe com os colegas um resumo das informações que você obter. **Trabalho e juventudes:** Pesquisa pessoal.

Análise da resolução: Em um número natural de cinco algarismos, aquele que ocupa a ordem das dezenas de milhar deve ser diferente de zero. Assim, o estudante errou ao considerar, por exemplo, que 02.489 representa um número natural de cinco algarismos.
Resolução correta:

ANÁLISE DA RESOLUÇÃO

Reúna-se com um colega. Apontem o erro cometido na resolução a seguir e, depois, refaçam a resolução no caderno, corrigindo-a.

Exercício

Considere a sequência crescente cujos termos são todos os números naturais de cinco algarismos distintos formados por: 0, 2, 4, 8 e 9. Qual é a ordem (posição) do número 42.098 nessa sequência?

Resolução

Dentre os números que podem ser formados, são menores que 42.098:

- todos os números que começam por 0;

0				

Número de possibilidades → 1 · 4 · 3 · 2 · 1 = 24

Dentre os números que podem ser formados, são menores que 42.098:
- todos os números que começam por 2

2				

Total de possibilidades → 1 · 4 · 3 · 2 · 1 = 24

- todos os números que começam por 2

2				

Número de possibilidades → 1 · 4 · 3 · 2 · 1 = 24

- todos os números que começam por 40

4	0			

Total de possibilidades → 1 · 1 · 3 · 2 · 1 = 6

- todos os números que começam por 40

4	0			

Número de possibilidades → 1 · 1 · 3 · 2 · 1 = 6

- todos os números que começam por 41

4	1			

Total de possibilidades → 1 · 1 · 3 · 2 · 1 = 6

- todos os números que começam por 41

4	1			

Número de possibilidades → 1 · 1 · 3 · 2 · 1 = 6

- o número 42.089

Assim, deduzimos que 37 números (24 + 6 + 6 + 1) são menores que 42.098. Concluímos, então, que o número 42.098 ocupa a 38ª posição na sequência.

- o número 42.089

Assim, deduzimos que 61 números (24 + 24 + 6 + 6 + 1) são menores que 42.098.
Concluímos, então, que o número 42.098 ocupa a 62ª posição na sequência.

ILUSTRAÇÕES: ANDERSON DE ANDRADE PIMENTEL/ARQUIVO DA EDITORA

ILUSTRAÇÕES: ANDERSON DE ANDRADE PIMENTEL/ARQUIVO DA EDITORA

4. Fatorial

Comente que a multiplicação de números naturais consecutivos é muito frequente na Análise combinatória, e algumas dessas multiplicações envolvem muitos fatores.

Como estudamos nos exercícios anteriores, a multiplicação de números naturais consecutivos é frequente na Análise combinatória, e algumas dessas multiplicações envolvem muitos fatores. Por exemplo, a quantidade de números naturais de sete algarismos distintos que podem ser formados com os sete algarismos 1, 3, 4, 5, 6, 8 e 9 é dada por:

$$7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Observação

O símbolo $n!$ é lido como "n fatorial" ou "fatorial de n".

Para simplificar as operações com expressões desse tipo, adotaremos o símbolo $\boldsymbol{n!}$, que indica o produto dos números naturais consecutivos n, $n - 1$, $n - 2$, ..., 1, com $n \geqslant 2$. No nosso exemplo, temos:

$$7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Essa notação ajuda em problemas que envolvem cálculos trabalhosos, porque permite simplificar expressões e apresentar resoluções extensas de maneira abreviada. Definimos:

Seja n um número natural, com $n \geqslant 2$. Define-se o **fatorial de n**, representado por $\boldsymbol{n}$!, como o produto dos números naturais consecutivos n, $n - 1$, $n - 2$, ..., 1. Isto é:

$$n! = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \ldots \cdot 1$$

Exemplos

- **a.** $2! = 2 \cdot 1 = 2$
- **b.** $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$
- **c.** $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$
- **d.** $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

Propriedade fundamental dos fatoriais

Na igualdade $6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$, observamos que o produto $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ pode ser substituído por 5! e, portanto:

$$6! = 6 \cdot \underbrace{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}_{5!} \Rightarrow 6! = 6 \cdot 5!$$

Podemos generalizar esse resultado para qualquer número natural n, com $n \geqslant 3$, da seguinte maneira:

$$n! = n \cdot (n - 1)!$$

Essa propriedade é conhecida como **propriedade fundamental dos fatoriais**.

Exemplos

- **a.** $9! = 9 \cdot 8!$
- **b.** $10! = 10 \cdot 9!$
- **c.** $10! = 10 \cdot 9 \cdot 8!$
- **d.** $10! = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7!$

Extensão da definição de fatorial

É necessário definir fatorial de zero (0!) e fatorial de um (1!), pois zero e um também fazem parte dos processos de contagem e registros dos resultados obtidos. Para garantir a coerência entre as definições desses "novos" fatoriais e a definição de fatorial de um número natural maior que 1, vamos admitir que possa ser ampliada a validade da propriedade fundamental dos fatoriais, que, por enquanto, foi restrita para n natural, com $n \geqslant 3$:

$$n! = n \cdot (n - 1)!$$

- Para definir 1! de modo que essa propriedade continue válida, devemos admitir, para $n = 2$:

$$2! = 2 \cdot (2 - 1)! \Rightarrow 2! = 2 \cdot 1!$$

Como $2! = 2 \cdot 1$, concluímos que:

$$2 \cdot 1 = 2 \cdot 1! \Rightarrow 1 = 1!$$

Assim, a propriedade fundamental dos fatoriais poderá ser aplicada para $n = 2$ se definirmos:

$$\boxed{1! = 1}$$

- Analogamente, para definir 0! de modo que a propriedade fundamental continue válida, devemos admitir, para $n = 1$:

  $$1! = 1 \cdot (1 - 1)! \Rightarrow 1! = 1 \cdot 0!$$

  Como já definimos $1! = 1$, temos que a igualdade anterior é equivalente a:

  $$1 = 1 \cdot 0!$$

  com o que concluímos que $1 = 0!$
  Assim, a propriedade fundamental dos fatoriais pode ser aplicada para $n = 1$, se definirmos:

$$\boxed{0! = 1}$$

Com essas duas "novas" definições, $1! = 1$ e $0! = 1$, admitimos que a propriedade fundamental dos fatoriais pode ser aplicada para qualquer número natural não nulo n.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

6. Simplifique as frações a seguir.

a. $\dfrac{10!}{9!}$ **c.** $\dfrac{10! \cdot 4!}{8! \cdot 6!}$ **e.** $\dfrac{(n-3)!}{(n-1)!}$

b. $\dfrac{8!}{10!}$ **d.** $\dfrac{n!}{(n-2)!}$

Resolução

a. $\dfrac{10!}{9!} = \dfrac{10 \cdot \cancel{9!}}{\cancel{9!}} = 10$

b. $\dfrac{8!}{10!} = \dfrac{\cancel{8!}}{10 \cdot 9 \cdot \cancel{8!}} = \dfrac{1}{10 \cdot 9} = \dfrac{1}{90}$

c. $\dfrac{10! \cdot 4!}{8! \cdot 6!} = \dfrac{10 \cdot 9 \cdot \cancel{8!} \cdot \cancel{4!}}{\cancel{8!} \cdot 6 \cdot 5 \cdot \cancel{4!}} = \dfrac{90}{30} = 3$

d. Vamos decompor em fatores decrescentes o maior entre os fatoriais apresentados na fração. Como $n! > (n-2)!$, para qualquer número natural n, com $n \geqslant 2$, decompomos $n!$:

$$\frac{n!}{(n-2)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \cancel{(n-2)!}}{\cancel{(n-2)!}} = n^2 - n$$

e. Vamos decompor em fatores decrescentes o maior entre os fatoriais $(n-1)!$ e $(n-3)!$.

Observando que $(n-1)! > (n-3)!$, para qualquer número natural n, com $n \geqslant 3$, decompomos $(n-1)!$:

$$\frac{(n-3)!}{(n-1)!} = \frac{\cancel{(n-3)!}}{(n-1) \cdot (n-2) \cdot \cancel{(n-3)!}} = \frac{1}{n^2 - 3n + 2}$$

7. Resolva a equação $\dfrac{(n+1)!}{(n-1)!} = 20$.

Resolução

Para simplificar a fração, vamos decompor em fatores decrescentes o maior entre os fatoriais:

$$\frac{(n+1)!}{(n-1)!} = 20 \Rightarrow \frac{(n+1) \cdot n \cdot \cancel{(n-1)!}}{\cancel{(n-1)!}} = 20$$

$$\therefore\ n^2 + n - 20 = 0$$

Resolvendo essa equação, obtemos $n = 4$ ou $n = -5$.

Verificação

Lembramos que só se define fatorial para número natural. Assim, devemos verificar se, para esses valores de n, existem os fatoriais apresentados na equação.

Para $n = 4$, temos:

$$\frac{(4+1)!}{(4-1)!} = 20 \Rightarrow \frac{5!}{3!} = 20$$

Como ambos os fatoriais existem (5! e 3!), concluímos que 4 é raiz da equação.

Para $n = -5$, temos:

$$\frac{(-5+1)!}{(-5-1)!} = 20 \Rightarrow \frac{(-4)!}{(-6)!} = 20 \text{ (absurdo!)}$$

Como não existem os fatoriais $(-4)!$ e $(-6)!$, concluímos que -5 não é raiz da equação.

Logo: $S = \{4\}$

22. a. $7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5.040$
22. b. $3! \cdot 2! = 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 = 12$

22. c. $4! - 2! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 - 2 \cdot 1 = 22$

22. d. $\frac{0!}{3!} = \frac{1}{(3 \cdot 2 \cdot 1)} = \frac{1}{6}$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Faça os exercícios no caderno.

22. Calcule:

a. $7!$ **b.** $3! \cdot 2!$ **c.** $4! - 2!$ **d.** $\frac{0!}{3!}$

23. Classifique em verdadeira ou falsa cada uma das afirmações a seguir.

a. $3! + 2! = 5!$ **23. a.** Falsa, pois: $3! + 2! = 8$ e $8 \neq 5!$

b. $3! \cdot 2! = 6!$ **23. b.** Falsa, pois: $3! \cdot 2! = 12$ e $12 \neq 6!$

23. c. Verdadeira, pois: $4! + 4! = 48$ e $48 = 2 \cdot 4!$

c. $4! + 4! = 2 \cdot 4!$ **23. d.** Verdadeira, pois é a propriedade fundamental dos fatoriais.

d. $n! = n(n-1)(n-2)!$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e $n \geqslant 2$

e. $n! = n(n-1)(n-2)!$, para todo $n \in \mathbb{N}^*$

23. e. Falsa, pois: para $n = 1$, não existe $(n - 2)!$

24. Simplifique as frações.

a. $\frac{6!}{3!}$ **24. a.** 120

b. $\frac{5! \cdot 8!}{4! \cdot 7!}$ **24. b.** 40

c. $\frac{5! + 7!}{6! - 5!}$ **24. c.** $\frac{43}{5}$

d. $\frac{n!}{(n-1)!}$ **24. d.** n

e. $\frac{n!}{(n+2)!}$ **24. e.** $\frac{1}{n^2 + 3n + 2}$

25. Resolva as equações.

a. $\frac{(n+2)!}{n!} = 12$ **25. a.** $S = \{2\}$

b. $\frac{(n-2)!}{(n-1)!} = \frac{1}{5}$ **25. b.** $S = \{6\}$

c. $\frac{(n+1)! + n!}{(n+2)!} = \frac{1}{28}$ **25. c.** $S = \{27\}$

26. $n = 10$

26. Determine o número n tal que $n! = 2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7$.

27. Cada um dos 30 passageiros de um voo despachou uma única mala no embarque. Entre esses passageiros viajavam dois amigos: João e Pedro. No desembarque, todos foram retirar suas malas em uma esteira rolante destinada unicamente àquele voo. Ao descarregar as malas sobre a esteira rolante, um funcionário da empresa aérea colocou uma mala atrás da outra. Todas as malas foram retiradas pelos respectivos donos na primeira volta da esteira.


PRASIT RODPHAN/ALAMY/FOTOARENA

Malas despachadas.

Reúna-se com um colega e, considerando a ordem de colocação das malas sobre a esteira, respondam aos itens a seguir, usando a notação de "fatorial de um número natural".

a. Em quantas sequências diferentes as malas poderiam ser dispostas sobre a esteira? **27. a.** 30!

b. Em quantas sequências diferentes as malas poderiam ser dispostas na esteira de modo que a última mala fosse a de João? **27. b.** 29!

c. Em quantas sequências diferentes as malas poderiam ser dispostas na esteira de modo que a mala de Pedro fosse a primeira e a de João, a segunda? **27. c.** 28!

d. Em quantas sequências diferentes as malas poderiam ser dispostas na esteira de modo que as dos dois amigos citados fossem as primeiras? **27. d.** $2 \cdot 28!$

Para retomar os conteúdos estudados, resolva os exercícios complementares 12 a 14.

Mentes brilhantes: O conhecimento do processo de desenvolvimento da teoria matemática para o avanço da tecnologia ligada às centrais telefônicas é uma boa oportunidade de trabalho integrado com Ciências Humanas e Sociais Aplicadas, uma vez que propicia a reflexão sobre as demandas da sociedade e os avanços necessários para supri-las.

Mentes brilhantes

O problema básico da telefonia

Nos primeiros anos do século XX, quando trabalhava na central telefônica de Copenhague, o matemático dinamarquês Agner Krarup Erlang (1878-1929) resolveu um importante problema relacionado ao desempenho de centrais telefônicas. Ele estimou o provável percentual de ligações que não se completariam em função do congestionamento da central. A conclusão de Erlang foi a de que esse percentual era dado, aproximadamente, por:

Essa reflexão permite aos estudantes se posicionarem criticamente e analisar as estratégias de solução propostas, considerando a tecnologia disponível e os instrumentos que possam servir de base para a elaboração de estratégias.

$$c = \frac{\frac{d^L}{L!}}{1 + \frac{d}{1!} + \frac{d^2}{2!} + \frac{d^3}{3!} + \ldots + \frac{d^L}{L!}}$$

É possível, ainda, ampliar o estudo em parceria com o professor de Geografia, propondo pesquisa e debate acerca da evolução de soluções tecnológicas posteriores ao evento citado e os impactos causados por elas.

em que:

- L era o número de canais disponibilizados pela central aos usuários;
- d era a demanda da central, expressa em horas de ligações solicitadas a cada hora. Por exemplo, se a central tivesse 50 canais e cada canal recebesse, em média, 4 ligações por hora, e cada ligação demorasse, em média, 3 minutos, em cada hora seriam demandados $50 \cdot 4 \cdot 3$ minutos de ligações, ou seja, 600 minutos ou, ainda, 10 horas; assim, a demanda d seria 10 horas de ligações a cada hora;
- c era o provável percentual de chamadas que não seriam completadas por causa do congestionamento da central.

Os resultados dos estudos de Erlang ainda hoje são utilizados em projetos de centrais telefônicas.

Elaborado com base em: SILVEIRA, J. F. P. A matemática da telefonia. **Instituto de Matemática e Estatística**, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2001. Disponível em: http://www.mat.ufrgs.br/~portosil/erlang.html. Acesso em: 3 set. 2024.

Matemática sem fronteiras: Nessa seção, exploramos textos sobre aplicações práticas do assunto desenvolvido no capítulo. O conteúdo apresentado tem dois objetivos: contextualizar a teoria matemática por meio de situações reais e despertar a curiosidade dos estudantes para aplicações mais elaboradas. Nesse caso, exploramos o texto “O ácido desoxirribonucleico (DNA)”.

MATEMÁTICA SEM FRONTEIRAS

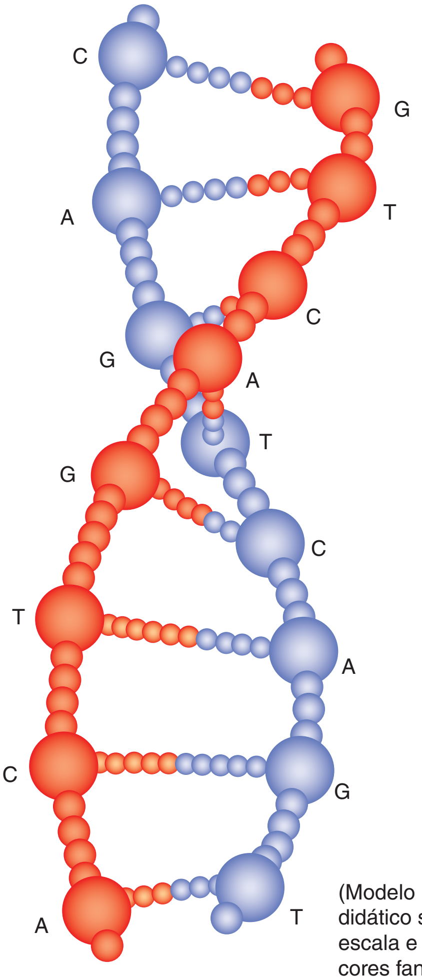
O ácido desoxirribonucleico (DNA)

No século XIX, o cientista suíço Johann Friedrich Miescher isolou de um núcleo celular uma substância que denominou ácido nucleico. Mais tarde, no século XX, os cientistas Oswald Theodore Avery, Colin M. MacLeod e Maclyn MacCarty descobriram que um dos ácidos nucleicos, o DNA (ácido desoxirribonucleico), é o responsável pela transmissão da herança biológica entre os seres vivos, à exceção de muitos vírus, em que esse papel é desempenhado por outro ácido.

O DNA é uma molécula em forma de dupla-hélice que lembra uma escada torcida. Os “degraus” ligam bases nitrogenadas representadas por A (adenina), T (timina), C (citosina) e G (guanina). Esses “degraus”, chamados de pontes de hidrogênio, ligam as bases apenas do seguinte modo: A-T, T-A, C-G e G-C, como no fragmento de DNA representado no esquema.

Essas ligações formam sequências de pares ordenados de bases, sem limite teórico de extensão. Cada uma dessas sequências determina a individualidade e as diferenças entre os seres vivos. A sequência do DNA é uma herança genética, ou seja, é transmitida de um organismo para seus descendentes.

Testes de paternidade, por exemplo, podem ser realizados por meio do DNA. Processos químicos permitem comparar a sequência do DNA de um suposto pai com a de um suposto filho. Como metade do DNA de uma pessoa é herdada do pai e a outra metade é herdada da mãe, se a sequência do suposto filho tem metade de seu DNA igual à do suposto pai, está provada a paternidade.



(Modelo didático sem escala e com cores fantasia.)

FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

Elaborado com base em: ARIAS, G. Em 1953 foi descoberta a estrutura do DNA: Etapas de um grande avanço científico. *In*: EMPRESA BRASILEIRA DE PESQUISA AGROPECUÁRIA. **Documentos online**. Embrapa, dez. 2004.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Atividades

Faça as atividades no caderno.

Reúna-se com um colega para resolverem as atividades a seguir.

1. O fragmento de DNA representado no esquema anterior pode ser descrito pela sequência de pares ordenados A-T, C-G, T-A, G-C, A-T, C-G, T-A, G-C. Sabendo que dois fragmentos de DNA são iguais se, e somente se, as sequências que o descrevem são iguais, determinem uma sequência que descreva um fragmento de DNA diferente do representado. **1.** Resposta pessoal.

2. Um cientista deseja sintetizar um fragmento de DNA com 8 pares ordenados de bases, de modo que dois pares consecutivos não sejam iguais, como o fragmento do esquema anterior. Quantos fragmentos diferentes podem ser obtidos? **2.** 8.748 fragmentos

3. Vocês conhecem o teste genético de ancestralidade? Sabiam que esse teste consiste em uma análise do DNA, com a finalidade de revelar as origens geográficas e, por consequência, as características genéticas de uma pessoa? Pesquisem na internet mais informações sobre esse assunto e compartilhem a pesquisa com os demais colegas. **3.** Respostas e pesquisa pessoal.

Esta pode ser uma oportunidade de avaliar aplicações do conhecimento científico e tecnológico, em integração com a área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias. Se possível, promova a participação do professor de Biologia para desenvolver o assunto com os estudantes.

Utilize os **Exercícios complementares** no decorrer do trabalho com os conteúdos deste capítulo ou como uma lista de atividades final. Os estudantes podem trabalhar em grupos a fim de resolver os exercícios e, depois, comparar as respostas e as estratégias de resolução utilizadas pelos colegas.

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

Faça os exercícios no caderno.

1. Para selecionar um candidato a uma vaga de emprego em uma empresa, o analista do departamento de Recursos Humanos, responsável pelas entrevistas, deve preencher o quadro a seguir assinalando com um S (para "sim") ou N (para "não") para cada um dos atributos de cada um dos três candidatos à vaga.

Atributos do candidato

Candidato	Tem mais de 16 anos?	Tem Ensino Médio completo?	Já trabalhou com registro em carteira?
1			
2			
3			

MODELO

a. Determine de quantas maneiras diferentes é possível preencher esse quadro. **1. a.** 512 maneiras diferentes

b. Você já participou ou sabe como funciona uma entrevista de emprego? Faça uma pesquisa sobre os tipos de perguntas que costumam ser feitas em uma entrevista e, depois, organize as perguntas em um quadro como o do exemplo. Se você organizar 10 perguntas e as propuser a 10 candidatos, de quantas maneiras diferentes será possível preencher o quadro? Indique a resposta na forma de potência. **1. b.** 2^{100}


FIZKES/SHUTTERSTOCK

Jovem em uma entrevista de emprego.

2. Suponha que o número da linha dos telefones celulares de um estado fosse composto de oito dígitos e que o primeiro da esquerda só pudesse ser um dos dígitos 5, 6, 7, 8 ou 9, não havendo nenhuma restrição para os demais dígitos. Para aumentar o número de linhas, decidiu-se que o número de cada linha passaria a ter nove dígitos e que o primeiro da esquerda seria o dígito 9, não havendo nenhuma restrição para os demais dígitos.

a. Qual seria o número máximo possível de linhas antes do acréscimo do nono dígito? **2. a.** 50.000.000 de linhas

b. Qual seria o número máximo de linhas após o acréscimo do nono dígito? **2. b.** 100.000.000 de linhas

3. Uma urna contém seis bolas de cores diferentes entre si, sendo uma delas vermelha. Retiram-se quatro bolas dessa urna, uma de cada vez e sem reposição. Considerando a ordem de retirada, quantas sequências de cores são possíveis de modo que a primeira bola retirada não seja vermelha? **3.** 300

4. (Enem) Um procedimento padrão para aumentar a capacidade do número de senhas de banco é acrescentar mais caracteres a essa senha. Essa prática, além de aumentar as possibilidades de senha, gera um aumento na segurança. Deseja-se colocar dois novos caracteres na senha de um banco, um no início e outro no final. Decidiu-se que esses novos caracteres devem ser vogais, e o sistema conseguirá diferenciar maiúsculas de minúsculas.

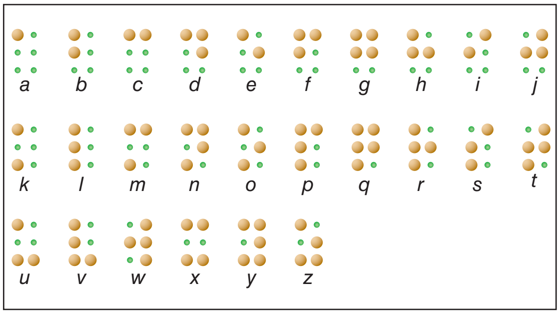
Com essa prática, o número de senhas possíveis ficará multiplicado por:

a. 100 **b.** 90 **c.** 80 **d.** 25 **e.** 20

Nota: Neste problema são consideradas vogais apenas as letras: a (A), e (E), i (I), o (O), u (U). Esse comentário se faz necessário, pois não há unanimidade quanto à classificação da letra "y". Alguns estudiosos da língua portuguesa a classificam como vogal, e outros como consoante. **4.** alternativa **a**

5. Na escrita braile, cada caractere (letra, algarismo, sinal de pontuação etc.) é representado em uma célula retangular na qual há de 1 a 6 pontos em alto-relevo, distribuídos em três linhas e duas colunas, conforme mostra a figura a seguir, que representa as 26 letras do alfabeto.

Alfabeto braile



FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA


TERRY VINE/THE IMAGE BANK/GETTY IMAGES

Página impressa na linguagem braile.

OBJETO DIGITAL *Podcast*: **Um olhar especial para o mundo**

Qual é o número total de caracteres que podem ser representados no sistema braile? **5.** 63 caracteres

(*Dica*: Lembre-se de que nesse sistema os seis pontos em baixo-relevo não representam um caractere.)

6. No dia a dia, utilizamos senhas em várias situações, como em contas de *e-mail*, em cartões de crédito, em *sites* de compras etc. Uma senha é uma sequência de caracteres numéricos, literais ou especiais como %, &, :, # etc., ou uma mescla deles.

Na abertura deste capítulo, estudamos que algumas senhas são "mais fortes" do que outras, isto é, são mais difíceis de ser desvendadas por pessoas que não as conhecem. A "força" da senha depende do número de caracteres e do tipo de caractere utilizado.

Suponha que o teclado de um computador apresente 68 caracteres, representados por letras, algarismos e outros caracteres especiais, conforme mostra a figura.

CIRO MACCORD/ARQUIVO DA EDITORA

Para comprar um *smartphone* pela internet, cada uma das amigas, Jéssica e Fernanda, deve formar uma senha com 6 caracteres. Jéssica pretende escolher, aleatoriamente, 6 caracteres distintos no teclado apresentado. Já Fernanda pretende escolher, aleatoriamente, 6 caracteres entre as letras e os algarismos desse teclado, não necessariamente distintos. Elas usarão apenas letras minúsculas.

6. a. 78.806.407.680 senhas

a. Quantas senhas diferentes Jéssica pode formar?

6. b. 2.176.782.336 senhas

b. Quantas senhas diferentes Fernanda pode formar?

6. c. 77.403.997.440 senhas

c. Suponha que senhas que têm pelo menos um caractere especial sejam "mais fortes" do que qualquer senha formada apenas por letras e algarismos. Das senhas que podem ser formadas por Jéssica, quantas são "mais fortes" que as de Fernanda?

7. Considerando que $126.000 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \cdot 7$, responda às questões a seguir.

a. Para que valores naturais atribuídos a k, x, y e z, o número $2^k \cdot 3^x \cdot 5^y \cdot 7^z$ é divisor de 126.000?

7. a. $0 \leqslant k \leqslant 4$, $0 \leqslant x \leqslant 2$, $0 \leqslant y \leqslant 3$, $0 \leqslant z \leqslant 1$

b. Quantos divisores naturais tem o número 126.000?

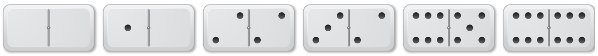
7. b. 120 divisores naturais

8. (Uespi) Num debate entre candidatos a governador de certo estado compareceram 7 candidatos, sendo 4 homens e 3 mulheres. A organização do evento resolveu que os candidatos ficariam lado a lado, numa disposição não circular e que os homens não ficariam juntos um do outro e sim em posição alternada com as mulheres.

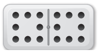
Para isso, em cada um dos sete locais a serem ocupados pelos candidatos, foi colocado o nome do seu respectivo ocupante. Nessas condições é correto afirmar que o número de maneiras diferentes de esses candidatos serem arrumados em seus respectivos locais no debate é de: **8.** alternativa **d**

a. 121 **b.** 124 **c.** 136 **d.** 144 **e.** 169

9. O tradicional jogo de dominó é composto de 28 peças. Cada metade de cada peça apresenta um número inteiro de pontos que varia de 0 a 6, assim, o duplo 6 é a peça que apresenta o maior número de pontos. Observe alguns exemplos:



Quantas peças tem um jogo de dominó cuja peça com o maior número de pontos é o duplo 8? **9.** 45 peças



ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

10. (UFBA) Para abrir um cofre eletrônico deve-se digitar uma sequência formada por quatro algarismos distintos, sendo o valor do primeiro o triplo do valor do segundo. Uma pessoa que desconhece essa sequência pretende abrir o cofre. O maior número possível de sequências que ela deve digitar é: **10.** alternativa **e**

a. 170 **b.** 240 **c.** 180 **d.** 280 **e.** 168

11. Resolva a equação: $\dfrac{x! + (x - 1)! + (x - 2)!}{(x + 1)!} = \dfrac{3}{8}$

11. $S = \{3\}$

12. (UFPB) Resolva a equação $(n + 1)! = n! + 6n$.

12. $S = \{0, 3\}$

13. O hodômetro de um automóvel apresenta uma sequência de oito quadrinhos. Nos cinco primeiros é representado o número de quilômetros rodados; nos últimos é representado o número de metros rodados. Por exemplo, o registro:

0	1	2	7	5	0	3	4

indica 1.275,034 km.

SERGIO ANTONIO ENRIQUEZ NISTAL/ARQUIVO DA EDITORA

Desde o momento em que esse veículo sai da fábrica com o hodômetro "zerado"

0	0	0	0	0	0	0	0

até o momento em que é registrada a marca

9	9	9	9	9	9	9	9

todos os quadrinhos apresentam os algarismos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ou 9. O total de números com pelo menos dois algarismos iguais que podem ser lidos nesse hodômetro é: **13.** alternativa **a**

a. $10^8 - \dfrac{10!}{2}$ **c.** $9 \cdot 10^7$ **e.** 10^8

b. 10! **d.** $9 \cdot (10^7 - 9!)$

VERIFIQUE O QUE APRENDEU NO CAPÍTULO 6

Além do processo de avaliação promovido pelo professor, é de fundamental importância que você, estudante, realize uma autoavaliação. O objetivo desse instrumento é mensurar seu nível de aprendizagem em relação ao assunto desenvolvido no capítulo. Para ajudá-lo nessa tarefa, apresentamos as seguintes questões.

1. Doze equipes de voleibol disputam um campeonato. De quantas maneiras diferentes pode ocorrer a classificação das três primeiras colocadas, se não pode haver empate em nenhuma das colocações?

a. 36 **c.** 423 **e.** 5.184

b. 144 **d.** 1.320

1. alternativa **d**

Utilize o texto a seguir para responder às questões **2** e **3**.

Considere todas as sequências de oito algarismos que podem ser formadas com os algarismos 0 e 1, inclusive as que apresentam todos os termos iguais.

2. Determine a quantidade de sequências que podem ser formadas. **2.** alternativa **c**

a. 64 **c.** 256 **e.** 1.024

b. 128 **d.** 512

3. Determine a quantidade de sequências que apresentam exatamente quatro posições consecutivas com o algarismo zero. **3.** alternativa **c**

a. 7 **c.** 28 **e.** 112

b. 14 **d.** 56

4. Resolva a equação $\frac{(n+1)!+n!}{(n+2)!}=\frac{1}{2n}$, com n natural não nulo.

a. $S=\{0\}$ **c.** $S=\left\{\frac{1}{4}\right\}$ **e.** $S=\{2\}$

b. $S=\left\{\frac{1}{2}\right\}$ **d.** $S=\{1\}$

4. alternativa **d**

Ferramenta de estudo

Incentive os estudantes a utilizarem a **Ferramenta de estudo** sugerida, ou outras, a fim de realizarem uma autoavaliação. Depois de preenchida a ficha, eles podem conversar com os colegas e produzir um pequeno resumo dos conteúdos estudados neste capítulo.

Ao término da resolução dos exercícios, copie no caderno a ficha a seguir, que lhe fornecerá panorama do seu desempenho neste capítulo. Assinale com um X a cada célula se a resposta for “sim”.

Ficha de Autoavaliação

Sobre o exercício...	1	2	3	4
Li, compreendi o texto, identifiquei os dados principais do problema e consegui resolvê-lo.				
Li, compreendi o texto, identifiquei os dados principais do problema, mas não consegui resolvê-lo sozinho. Pedi ajuda.				
Li, compreendi o texto, identifiquei os dados principais do problema, mas não consegui resolvê-lo sozinho. Não pedi ajuda. Até agora não sei resolvê-lo.				
Tive dificuldade para compreender o texto do problema e não soube relacionar os dados. Pedi ajuda.				
Tive dificuldade para compreender o texto do problema e não soube relacionar os dados. Não pedi ajuda. Até agora não sei resolvê-lo.				
Não consegui resolvê-lo.				

ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

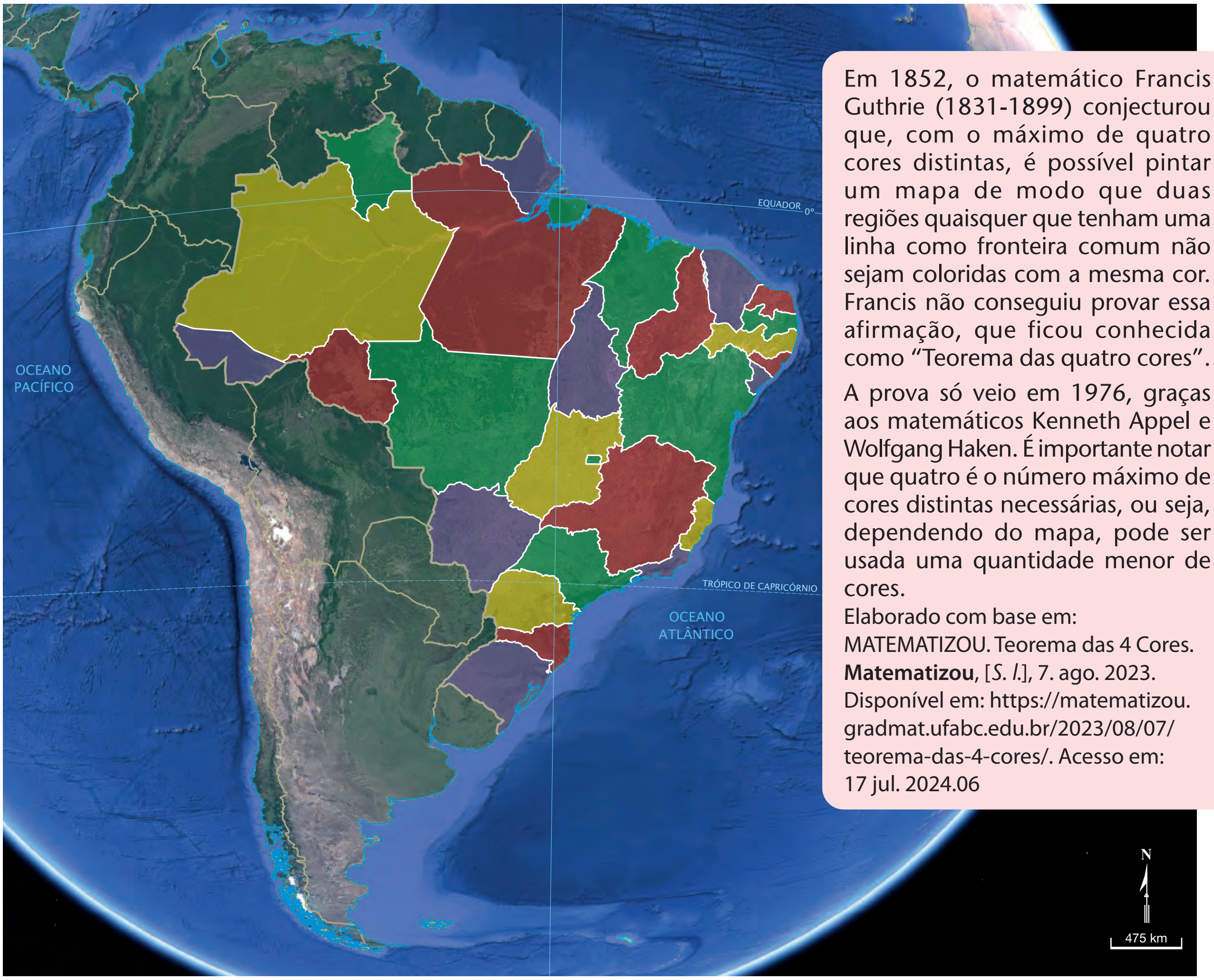
A ficha de autoavaliação é apresentada neste momento, mas você pode copiá-la e preenchê-la sempre que considerar necessário verificar sua aprendizagem, adequando o número de colunas ao número de exercícios.

Se teve dificuldades ou não resolveu algum exercício, retome os conteúdos abordados no capítulo. Após algumas tentativas, anote as dúvidas e converse com um colega que possa ajudá-lo. Se mesmo assim a dúvida persistir, pergunte ao professor na aula seguinte. Gerencie bem seu tempo de estudo em casa e estabeleça metas diárias alcançáveis, planejando seus estudos, passo a passo.

CAPÍTULO 7

Agrupamentos e métodos de contagem

MAPA: SONIA VAZ/ARQUIVO DA EDITORA FOTO: US Dept of State Geographer Data SIO, NOAA, US Navy, NGA, GEBCO © 2018 GOOGLE EARTH IMAGEM LANDSAT/COPERNICUS



Em 1852, o matemático Francis Guthrie (1831-1899) conjecturou que, com o máximo de quatro cores distintas, é possível pintar um mapa de modo que duas regiões quaisquer que tenham uma linha como fronteira comum não sejam coloridas com a mesma cor. Francis não conseguiu provar essa afirmação, que ficou conhecida como “Teorema das quatro cores”.

A prova só veio em 1976, graças aos matemáticos Kenneth Appel e Wolfgang Haken. É importante notar que quatro é o número máximo de cores distintas necessárias, ou seja, dependendo do mapa, pode ser usada uma quantidade menor de cores.

Elaborado com base em: MATEMATIZOU. Teorema das 4 Cores. **Matematizou**, [*S. l.*], 7. ago. 2023. Disponível em: https://matematizou.gradmat.ufabc.edu.br/2023/08/07/teorema-das-4-cores/. Acesso em: 17 jul. 2024.06

Mapa do Brasil sobreposto a uma imagem do planeta Terra. Modelo esquemático para fins didáticos, cores fantasia.

Além da teoria

As figuras 1 e 2 representam mapas formados pelas regiões retangulares A, B, C, D, E, F e G.

Dispondo de apenas quatro cores distintas para pintar esses mapas, de modo que regiões que têm uma linha como fronteira não possam ser coloridas com a mesma cor, responda às questões seguintes. **Além da teoria: a.** 24

a. De quantas maneiras diferentes é possível colorir a figura 1?

b. De quantas maneiras diferentes é possível colorir a figura 2? **b.** 84

Figura 1

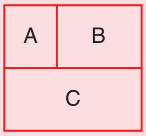
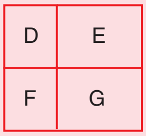


Figura 2



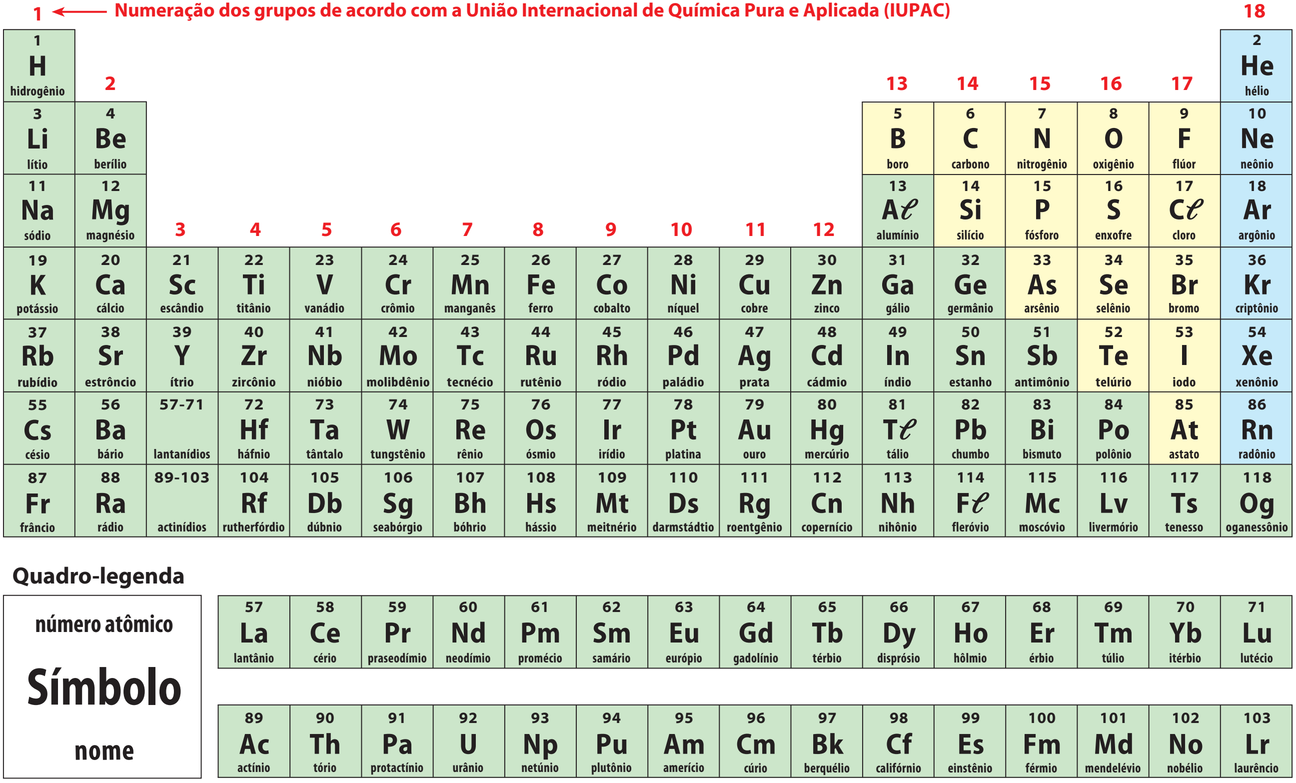
ERICSON GUILHERME LUCIANO/ ARQUIVO DA EDITORA

Pergunte: “Qual é a diferença ente o conjunto {*a*, *e*, *i*, *o*, *u*} e a sequência (*a*, *e*, *i*, *o*, *u*)? (Em um conjunto, a ordem dos elementos não é considerada, por exemplo {*a*, *e*, *i*, *o*, *u*} = {*e*, *i*, *u*, *o*, *a*}; e em uma sequência, a ordem é considerada, por exemplo (*a*, *e*, *i*, *o*, *u*) ≠ (*e*, *i*, *u*, *o*, *a*).)”; “Peça exemplos de agrupamentos do cotidiano em que a ordem dos elementos é considerada. (A lista de chamada dos estudantes de sua classe, as palavras em um dicionário, números de quatro algarismos distintos escolhidos entre os algarismos 1, 4, 6, 7 e 8 etc.)”; “Peça exemplos de agrupamentos do cotidiano em que a ordem dos elementos **não** é considerada. (Uma aposta com 6 números escolhidos entre os 60 números disponíveis em um sorteio de loteria; a mistura de mesmas quantidades de duas cores primárias para formar uma cor secundária; calcular o produto de 4 números naturais do conjunto {2, 3, 5, 6, 8, 9} etc.)”.

1. Classificação dos agrupamentos

Qualquer associação de elementos formando um todo é um **agrupamento**. Em nosso cotidiano, identificamos agrupamentos em várias situações: as representações escritas de palavras e números são agrupamentos de letras e algarismos, respectivamente; os estudantes de uma sala de aula formam um agrupamento de pessoas; a tabela periódica dos elementos químicos destaca, por cores, os agrupamentos que representam elementos com determinadas propriedades comuns, entre outros tantos exemplos.

Tabela periódica dos elementos (IUPAC)



1 ← Numeração dos grupos de acordo com a União Internacional de Química Pura e Aplicada (IUPAC)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
1 H hidrogênio																	2 He hélio
3 Li lítio	4 Be berílio											5 B boro	6 C carbono	7 N nitrogênio	8 O oxigênio	9 F flúor	10 Ne neônio
11 Na sódio	12 Mg magnésio											13 Aℓ alumínio	14 Si silício	15 P fósforo	16 S enxofre	17 Cℓ cloro	18 Ar argônio
19 K potássio	20 Ca cálcio	21 Sc escândio	22 Ti titânio	23 V vanádio	24 Cr crômio	25 Mn manganês	26 Fe ferro	27 Co cobalto	28 Ni níquel	29 Cu cobre	30 Zn zinco	31 Ga gálio	32 Ge germânio	33 As arsênio	34 Se selênio	35 Br bromo	36 Kr criptônio
37 Rb rubídio	38 Sr estrôncio	39 Y ítrio	40 Zr zircônio	41 Nb nióbio	42 Mo molibdênio	43 Tc tecnécio	44 Ru rutênio	45 Rh ródio	46 Pd paládio	47 Ag prata	48 Cd cádmio	49 In índio	50 Sn estanho	51 Sb antimônio	52 Te telúrio	53 I iodo	54 Xe xenônio
55 Cs césio	56 Ba bário	57-71 lantanídios	72 Hf háfnio	73 Ta tântalo	74 W tungstênio	75 Re rênio	76 Os ósmio	77 Ir irídio	78 Pt platina	79 Au ouro	80 Hg mercúrio	81 Tℓ tálio	82 Pb chumbo	83 Bi bismuto	84 Po polônio	85 At astato	86 Rn radônio
87 Fr frâncio	88 Ra rádio	89-103 actinídios	104 Rf rutherfórdio	105 Db dúbnio	106 Sg seabórgio	107 Bh bóhrio	108 Hs hássio	109 Mt meitnério	110 Ds darmstádtio	111 Rg roentgênio	112 Cn copernício	113 Nh nihônio	114 Fℓ fleróvio	115 Mc moscóvio	116 Lv livermório	117 Ts tenesso	118 Og oganessônio

Quadro-legenda

número atômico

Símbolo

nome

57 La lantânio	58 Ce cério	59 Pr praseodímio	60 Nd neodímio	61 Pm promécio	62 Sm samário	63 Eu európio	64 Gd gadolínio	65 Tb térbio	66 Dy disprósio	67 Ho hôlmio	68 Er érbio	69 Tm túlio	70 Yb itérbio	71 Lu lutécio
89 Ac actínio	90 Th tório	91 Pa protactínio	92 U urânio	93 Np netúnio	94 Pu plutônio	95 Am amerício	96 Cm cúrio	97 Bk berquélio	98 Cf califórnio	99 Es einstênio	100 Fm férmio	101 Md mendelévio	102 No nobélio	103 Lr laurêncio

ILUSTRAÇÃO DOS AUTORES/ARQUIVO DA EDITORA

Tabela periódica da IUPAC (União Internacional de Química Pura e Aplicada), mostrando os nomes, símbolos e números atômicos dos elementos químicos. Para valores de massas atômicas, consulte a tabela periódica apresentada no final deste livro. Disponível em: https://iupac.org/what-we-do/periodic-table-of-elements/. Acesso em 10 out. 2024.

A tabela periódica da IUPAC não destaca os elementos em diferentes cores. Nesta página, para efeito didático, utilizaram-se as cores da tabela periódica da Sociedade Brasileira de Química (SBQ), que não usa a classificação semimetal:

🟩 hidrogênio (não metal), metais e transurânicos (*Z* > 92, artificiais);

🟨 não metais;

🟦 gases nobres de ocorrência natural.

A Análise combinatória reconhece dois tipos de agrupamento: os arranjos e as combinações, apresentados a seguir.

- **Arranjos** são agrupamentos em que **se considera a ordem dos elementos**; qualquer mudança na ordem de elementos distintos altera o agrupamento. Por exemplo, ao representar números naturais de três algarismos distintos escolhidos entre os algarismos 2, 4, 6, 7 e 8, estaremos arranjando esses cinco algarismos três a três. Esses números são chamados de **arranjos** de algarismos porque, mudando a ordem dos algarismos em um desses números, obtemos outro número. Observe os números formados pelos algarismos 2, 7 e 8.

$$\underbrace{278}_{} \neq \underbrace{728}_{}$$

Números diferentes

Após a discussão, detalhe os conceitos de arranjo e combinação. Por fim, apresente alguns agrupamentos e pergunte aos estudantes se são arranjos ou combinações: “Agrupamentos de três pontos escolhidos entre cinco pontos de uma circunferência para serem vértices de um triângulo. (Combinação.)”; “Uma fila indiana formada por 5 pessoas. (Arranjo.)”; “Comissão de dois estudantes representantes da classe, na qual ambos terão funções idênticas. (Combinação.)”; “Comissão de dois estudantes representantes da classe, na qual um deles será coordenador e o outro será secretário. (Arranjo.)”

- **Combinações** são agrupamentos em que **não se considera a ordem dos elementos**; qualquer mudança na ordem dos elementos não altera o agrupamento. Por exemplo, o professor de Literatura propôs que cada estudante da sala escolhesse dois dos quatro livros a seguir para leitura durante o ano: *Helena*, de Machado de Assis; *O Ateneu*, de Raul Pompeia; *Os Sertões*, de Euclides da Cunha; e *Macunaíma*, de Mário de Andrade. Se Carlos escolheu *Helena* e *Macunaíma*, e Luíza optou por *Macunaíma* e *Helena*, ambos fizeram a mesma escolha, pois a ordem dos elementos não altera a seleção de livros escolhidos.

$$\underbrace{\{\textit{Helena}, \textit{Macunaíma}\}} = \underbrace{\{\textit{Macunaíma}, \textit{Helena}\}}$$

Escolhas iguais

Assim, a escolha de Carlos e Luíza é uma **combinação** de dois entre os quatro livros sugeridos pelo professor. Todas as possíveis escolhas de dois entre os quatro livros são as possíveis **combinações** dos quatro livros tomados dois a dois.

Qualquer um desses dois tipos de agrupamento, arranjo ou combinação, é chamado de agrupamento simples, quando não são permitidas repetições de elementos, ou de agrupamento completo, quando são permitidas repetições de elementos. Os exemplos apresentados anteriormente são agrupamentos simples.

EXERCÍCIO PROPOSTO

Faça o exercício no caderno.

1. Classifique cada um dos agrupamentos indicados a seguir em arranjo ou combinação.

a. Escolher aleatoriamente seis nadadores de nado livre, entre dez igualmente qualificados, para representarem o Brasil em uma Olimpíada. **1. a.** combinação

b. Indicar possíveis classificações dos quatro primeiros colocados no Campeonato Brasileiro de Futebol. **1. b.** arranjo

1. c. combinação

c. Eleger uma comissão de dois estudantes para representantes de sala, em que ambos terão o mesmo cargo.

d. Formar um número de telefone com oito algarismos distintos. **1. d.** arranjo

1. e. arranjo

e. Eleger uma comissão de dois estudantes na qual um será o porta-voz da classe, e o outro será o secretário.

f. Escolher três vértices de um cubo para formar triângulos. **1. f.** combinação

2. Arranjos

Arranjos simples

Com os elementos do conjunto $I = \{a, b, c, d\}$, vamos formar todas as sequências possíveis de três elementos distintos:

(a, b, c)	(a, b, d)	(a, c, d)	(b, c, d)
(a, c, b)	(a, d, b)	(a, d, c)	(b, d, c)
(b, a, c)	(b, a, d)	(c, a, d)	(c, b, d)
(b, c, a)	(b, d, a)	(c, d, a)	(c, d, b)
(c, a, b)	(d, a, b)	(d, a, c)	(d, c, b)
(c, b, a)	(d, b, a)	(d, c, a)	(d, b, c)

Essas sequências são chamadas de **arranjos simples** dos quatro elementos do conjunto I tomados três a três. Isto é, um arranjo simples de três elementos de I é qualquer **sequência** formada por três elementos **distintos** de I. Observe que dois arranjos simples quaisquer se diferenciam pela **ordem** ou pela **natureza** dos elementos que os compõem:

- $(a, b, c) \neq (b, c, a)$, pois diferem pela ordem dos elementos;
- $(a, b, c) \neq (a, b, d)$, pois diferem pela natureza dos elementos (elementos diferentes).

Contando as sequências indicadas anteriormente, constatamos que o número de arranjos simples dos quatro elementos de I tomados três a três é 24. Indicamos esse fato por $A_{4,\,3} = 24$. Esse número pode ser calculado pelo princípio fundamental da contagem:

	1º elemento	2º elemento	3º elemento
número de possibilidades →	4	3	2

Logo: $A_{4,\,3} = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$

Observação

$A_{4,\,3}$ é lido como "número de arranjos simples de quatro elementos tomados três a três".

Dados os n elementos distintos do conjunto $I = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}$, chama-se **arranjo simples** de p elementos de I toda sequência formada por p elementos **distintos** de I com $p \in \mathbb{N}^*$ e $p \leqslant n$.

Cálculo do número de arranjos simples

Sendo $I = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}$ um conjunto formado por n elementos e p um número natural não nulo tal que $p \leqslant n$, o número de arranjos simples dos n elementos de I tomados p a p, que indicaremos por $A_{n,\,p}$, pode ser calculado pelo princípio fundamental da contagem:

	1º elemento	2º elemento	3º elemento	4º elemento	...	pº elemento
número de possibilidades →	n	$n - 1$	$n - 2$	$n - 3$		$n - (p - 1)$

Assim:

$$A_{n,\,p} = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot (n - 3) \cdot \ldots \cdot [n - (p - 1)]$$

ou, ainda:

$$A_{n,\,p} = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot (n - 3) \cdot \ldots \cdot (n - p + 1)$$

Aplicando o conceito de fatorial, podemos apresentar essa fórmula de maneira mais simples. Para entender a transformação que será feita, acompanhamos antes um caso particular.

Na igualdade $A_{7,\,3} = 7 \cdot 6 \cdot 5$, multiplicando e, ao mesmo tempo, dividindo o 2º membro por 4!, obtemos:

$$A_{7,\,3} = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot \frac{4!}{4!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{4!} = \frac{7!}{4!}$$

Note, portanto, que o número $A_{7,\,3}$ pode ser expresso com fatoriais por $\frac{7!}{(7-3)!}$.

Agora, vamos generalizar esse procedimento para a fórmula obtida anteriormente:

$$A_{n,\,p} = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot (n - 3) \cdot \ldots \cdot (n - p + 1)$$

Multiplicando e, ao mesmo tempo, dividindo o 2º membro dessa igualdade por $(n - p)!$, temos:

$$A_{n,\,p} = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot (n - 3) \cdot \ldots \cdot (n - p + 1) \cdot \frac{(n-p)!}{(n-p)!} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_{n,\,p} = \frac{n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot (n - 3) \cdot \ldots \cdot (n - p + 1) \cdot (n - p) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{(n-p)!}$$

Portanto, podemos escrever:

$$\boxed{A_{n,\,p} = \frac{n!}{(n-p)!}}$$

Observação

Daqui em diante, podemos aplicar essa fórmula para o cálculo de $A_{n,\,p}$. Na maioria das situações, porém, é preferível aplicar o princípio fundamental da contagem em vez da fórmula.

Particularidades

Estende-se a fórmula $A_{n,\,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$ para $n = 0$ ou $p = 0$, desde que n e p sejam naturais, com $n \geqslant p$.

Exemplos

a. $A_{7,\,0} = \frac{7!}{(7-0)!} = \frac{7!}{7!} = 1$

b. $A_{0,\,0} = \frac{0!}{(0-0)!} = \frac{0!}{0!} = 1$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Aplicando o princípio fundamental da contagem, calcule $A_{6,4}$.

Resolução

A expressão $A_{6,4}$ indica o número de sequências diferentes, de quatro elementos distintos, que podem ser formadas com seis elementos distintos. Calculando o número possível de distribuições dos seis elementos distintos em quatro casas, sem repetição, temos:

1º elemento	2º elemento	3º elemento	4º elemento
6	5	4	3

Logo, pelo princípio fundamental da contagem, concluímos que:

$$A_{6,4} = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$$

2. Aplicando a fórmula $A_{n,p} = \dfrac{n!}{(n-p)!}$, calcule:

a. $A_{6,4}$ **b.** $A_{9,3}$ **c.** $A_{5,5}$

Resolução

a. $A_{6,4} = \dfrac{6!}{(6-4)!} = \dfrac{6!}{2!} = \dfrac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \cancel{2!}}{\cancel{2!}} = 360$

b. $A_{9,3} = \dfrac{9!}{(9-3)!} = \dfrac{9!}{6!} = \dfrac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot \cancel{6!}}{\cancel{6!}} = 504$

c. $A_{5,5} = \dfrac{5!}{(5-5)!} = \dfrac{5!}{0!} = \dfrac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1} = 120$

3. Cinco jogadores de futebol, A, B, C, D e E, concorrem a um dos títulos de 1º, 2º ou 3º melhor jogador do Campeonato Brasileiro. De quantas maneiras diferentes esses títulos podem ser distribuídos?

Resolução

Observando que as possibilidades de escolha dos três melhores jogadores são os arranjos simples dos elementos A, B, C, D e E tomados três a três, basta calcular $A_{5,3}$.

Assim:

1º lugar	2º lugar	3º lugar
5	4	3

$A_{5,3} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$

Logo, os títulos podem ser distribuídos de sessenta maneiras diferentes.

Observação

Note que também poderíamos aplicar a fórmula $A_{n,p} = \dfrac{n!}{(n-p)!}$:

$$A_{5,3} = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \cancel{2!}}{\cancel{2!}} = 60$$

4. Dois prêmios diferentes serão sorteados entre n pessoas, com $n \geqslant 2$. Sabendo que há exatamente $3n + 5$ maneiras diferentes de serem distribuídos os prêmios, determine o número de pessoas que participam do sorteio.

Resolução

Nesse caso, cada agrupamento de duas pessoas representa um arranjo, pois os prêmios distribuídos são diferentes. Assim, o valor de n é determinado pela equação:

$$A_{n,2} = 3n + 5, \text{ com } n \in \mathbb{N} \text{ e } n \geqslant 2$$

Logo:

$$A_{n,2} = 3n + 5 \Rightarrow \frac{n!}{(n-2)!} = 3n + 5$$

$$\therefore \frac{n(n-1)\cancel{(n-2)!}}{\cancel{(n-2)!}} = 3n + 5 \Rightarrow n^2 - n = 3n + 5$$

$$\therefore n^2 - 4n - 5 = 0$$

Resolvendo essa equação polinomial do 2º grau, obtemos $n = -1$ ou $n = 5$.

Apenas $n = 5$ satisfaz a condição de existência; logo, cinco pessoas participam do sorteio.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Faça os exercícios no caderno.

2. Aplicando o princípio fundamental da contagem, calcule:

a. $A_{6,3}$ **2. a.** 120

b. $A_{10,2}$ **2. b.** 90

c. $A_{7,7}$ **2. c.** 5.040

3. Aplicando a fórmula $A_{n,p} = \dfrac{n!}{(n-p)!}$, calcule o valor da expressão: **3.** 579

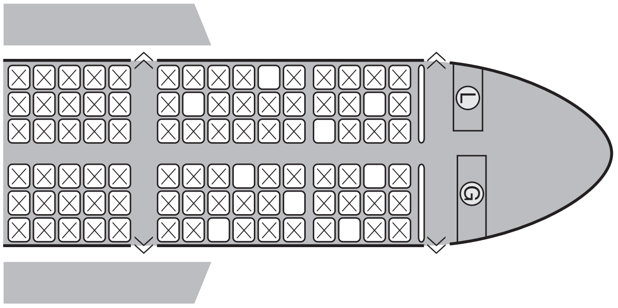
$$\boxed{E = A_{7,3} + A_{6,4} + A_{9,1}}$$

4. Matheus é voluntário em projeto que colabora com a empregabilidade de grupos minoritários, como mulheres, negros e público LGBTQIA+. Esse projeto conta com 20 empresas, que nesse mês, receberão 10 pessoas direcionadas por Matheus, para participar de diversos cursos. O número de maneiras diferentes em que Matheus poderá direcionar, de modo que cada pessoa participe em uma empresa diferente é:

a. $A_{10,10}$ **b.** $A_{20,20}$ **c.** $A_{20,2}$ **d.** $A_{20,10}$ **e.** $A_{10,2}$

4. alternativa **d**

5. (Enem) Uma família composta por sete pessoas adultas, após decidir o itinerário de sua viagem, consultou o *site* de uma empresa aérea e constatou que o voo para a data escolhida estava quase lotado. Na figura, disponibilizada pelo *site*, as poltronas ocupadas estão marcadas com X e as únicas poltronas disponíveis são as mostradas em branco.



FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

O número de formas distintas de se acomodar a família nesse voo é calculado por **5.** alternativa **a**

a. $\frac{9!}{2!}$

b. $\frac{9!}{7! \cdot 2!}$

c. $7!$

d. $\frac{5!}{2!} \cdot 4!$

e. $\frac{5!}{4!} \cdot \frac{4!}{3!}$

6. Resolva as equações a seguir.

a. $A_{n,\,2} = 20$ **6. a.** $S = \{5\}$

b. $A_{n,\,2} = A_{n-2,\,2} + 14$ **6. b.** $S = \{5\}$

c. $A_{n,\,3} = 3(n-1)$ **6. c.** $S = \{3\}$

7. Exatamente 3 equipes brasileiras vão participar de um campeonato sul-americano de voleibol, do qual participarão n equipes, com $n \geqslant 6$. As equipes que terminarem o campeonato em 1º, 2º e 3º lugares serão premiadas com medalhas de ouro, prata e bronze, respectivamente. As demais equipes não serão premiadas. De quantas maneiras distintas pode ocorrer a classificação dos três primeiros lugares de modo que pelo menos uma equipe brasileira conquiste medalha? **7.** alternativa **b**

a. $A_{n,\,3}$

b. $A_{n,\,3} - A_{n-3,\,3}$

c. $2A_{n-3,\,3}$

d. $A_{n,\,2} \cdot A_{n-1,\,1}$

e. $3A_{n,\,1} \cdot A_{n-1,\,2}$

8. Elabore um problema envolvendo uma situação contextualizada (utilize como modelo os exercícios 4, 5 e 7) sobre arranjo simples. Em seguida, troque o problema com um colega para que um resolva o do outro. Por fim, analisem e discutam as resoluções.

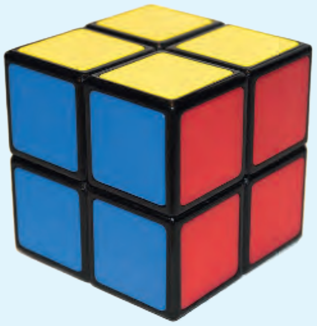
8. Resposta pessoal.

Para retomar os conteúdos estudados, resolva os exercícios complementares 1 e 2.

Mentes brilhantes

O cubo mágico

Em 2024, o cubo mágico completou 50 anos e até hoje continua desafiando várias pessoas. Ele foi criado em 1974 pelo professor de arquitetura húngaro Ernő Rubik com a finalidade de ensinar a seus estudantes espaços tridimensionais. No entanto, o cubo mágico acabou se tornando o quebra-cabeça mais conhecido do mundo.



Cubo mágico 2 × 2 × 2.

DR.WE/SHUTTERSTOCK

Assim como é possível fazer 43.252.003.274.489.856.000 arranjos diferentes com as peças do cubo 3 × 3 × 3, de forma mais simplificada podemos calcular as possibilidades para um cubo 2 × 2 × 2. Nesse, qualquer combinação dos oito cantos é possível (8! posições), e sete deles podem ser girados independentemente (3^7 posições). Não há nada que identifique a orientação do cubo no espaço, reduzindo as posições por um fator de 24. Isso ocorre porque todas as 24 possíveis posições e orientações do primeiro canto são equivalentes por não ter centros fixos como no cubo 3 × 3 × 3. Os arranjos possíveis do cubo 2 × 2 × 2 é, então:

$$\frac{8! \cdot 3^7}{24} = 7! \cdot 3^6 = 3.674.160$$

A resolução do quebra-cabeça tem sido cada vez mais rápida, pois, no período da invenção, Rubik demorou cerca de 1 mês para resolvê-lo, enquanto, atualmente, algumas pessoas resolvem em segundos. Um exemplo é Max Park que estabeleceu o novo recorde mundial em 2023 com a marca de 3,13 segundos no cubo 3 × 3 × 3.

Elaborado com base em: The official RUBIKS. 50 anos do cubo mágico. **Rubiks**, [*S. l.*], [2024]. Disponível em: https://www.rubiks.com/history. Acesso em: 19 jul. 2024.

3. Permutações

Exatamente oito veleiros participam de uma regata, competição náutica de velocidade entre os barcos. Os quadros 1 e 2, a seguir, mostram a classificação dos veleiros em um instante t_1 da prova e em um instante posterior t_2, respectivamente.

Quadro 1
Classificação no instante t_1

Classificação	Veleiro
1º	A
2º	B
3º	C
4º	D
5º	E
6º	F
7º	G
8º	H

Quadro 2
Classificação no instante t_2

Classificação	Veleiro
1º	B
2º	C
3º	A
4º	E
5º	H
6º	F
7º	D
8º	G

KAREN I HIRSCH/ZUMA PRESS WIRE/SHUTTERSTOCK

Corrida de veleiros, em Michigan nos Estados Unidos. Foto de 2024.

Observe que, do instante t_1 para o instante t_2, houve uma alteração na ordem das colocações dos veleiros; por isso, dizemos que houve uma **permutação** na sequência das colocações.

A palavra **permutar** significa "trocar entre si". Esse é exatamente o significado que define o próximo tipo de agrupamento que estudaremos: a permutação, um tipo particular de arranjo.

Permutações simples

Ao formar os números naturais de três algarismos distintos com os algarismos 2, 7 e 9, estamos formando os arranjos simples desses três algarismos tomados três a três. Observe:

279 729 927
297 792 972

Dois quaisquer desses arranjos se diferenciam **apenas** pela ordem dos elementos componentes, não pela natureza dos elementos, já que todos esses arranjos têm os mesmos elementos: 2, 7 e 9. Por isso, dizemos que cada um desses arranjos é uma **permutação simples** dos algarismos 2, 7 e 9.

Dados os n elementos distintos do conjunto $I = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}$, chama-se **permutação simples** dos n elementos de I todo **arranjo simples** desses n elementos tomados n a n.

Exemplos

a. Três candidatos, A, B e C, disputaram uma eleição, e não houve empate em nenhuma das posições. Considerando a sequência 1º, 2º e 3º colocados, os possíveis resultados desse pleito são todas as permutações das letras A, B e C:

ABC BAC CAB
ACB BCA CBA

Indicando por P_3 esse número de permutações, temos $P_3 = 6$.

b. Em um torneio quadrangular de futebol, com os times T_1, T_2, T_3 e T_4, não houve empate no número de pontos da classificação final. As possíveis classificações dos times ao final do torneio são todas as permutações de T_1, T_2, T_3 e T_4. Para calcular o número total dessas permutações, podemos aplicar o princípio fundamental da contagem:

	1º colocado	2º colocado	3º colocado	4º colocado
número de possibilidades →	4	3	2	1

Indicando por P_4 o número de todas as permutações possíveis, temos:

$$P_4 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4! = 24$$

Esse número de permutações é o número de arranjos simples dos quatro elementos tomados quatro a quatro. Observe:

$$P_4 = A_{4,\,4} = \frac{4!}{(4-4)!} = \frac{4!}{0!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1} = 24$$

Cálculo do número de permutações simples

Enfatize que na Análise combinatória as permutações simples de *n* elementos distintos nada mais são do que um tipo particular de arranjo, em que todos os n elementos comparecem em cada arranjo.

Seja $I = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}$ um conjunto formado por *n* elementos distintos. O número de permutações simples dos *n* elementos de *I*, que indicaremos por P_n, é igual ao número de arranjos simples desses *n* elementos tomados *n* a *n*, isto é:

$$P_n = A_{n,\,n} = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = \frac{n!}{1}$$

Portanto:

$$\boxed{P_n = n!}$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

5. Um debate sobre saúde pública será realizado em um auditório. No palco, as 10 cadeiras destinadas aos 10 conferencistas convidados serão colocadas em um mesmo lado de uma mesa retangular, conforme a imagem. Entre os convidados, 6 são médicos, e 4 são biólogos. Por uma questão de organização, foi decidido dispor os 10 conferencistas nas 10 cadeiras em uma sequência na qual os médicos fiquem juntos e os biólogos também fiquem juntos. De quantas maneiras diferentes essa sequência pode ser formada?

CIMMERIAN/ISTOCK/GETTY IMAGES

Resolução

Como os conferencistas de mesma área de atuação devem ficar juntos, temos duas opções, sob o ponto de vista da plateia:

(1) Os médicos à esquerda dos biólogos:

	médicos						biólogos			
número de possibilidades →	6	5	4	3	2	1	4	3	2	1

Pelo princípio multiplicativo, temos:

$$6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = P_6 \cdot P_4 = 6! \cdot 4!$$

(2) Ou os médicos à direita dos biólogos:

	biólogos				médicos					
número de possibilidades →	4	3	2	1	6	5	4	3	2	1

Pelo princípio multiplicativo, temos:

$$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = P_4 \cdot P_6 = 4! \cdot 6!$$

ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

Assim, calculamos o total de possibilidades:

$$6! \cdot 4! + 4! \cdot 6! = 17.280 + 17.280 = 34.560$$

Portanto, a sequência de conferencistas nas cadeiras pode ser formada de 34.560 maneiras diferentes.

6. Considerando a palavra CADERNO:

a. quantos anagramas podemos formar?

b. quantos anagramas começam por C?

c. quantos anagramas começam por C e terminam por O?

d. quantos anagramas começam por vogal?

e. quantos anagramas terminam por consoante?

f. quantos anagramas começam por vogal e terminam por consoante?

g. quantos anagramas apresentam as letras C, A e D juntas e nessa ordem?

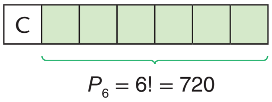
h. quantos anagramas apresentam as letras C, A e D juntas e em qualquer ordem?

Resolução

a. Um anagrama da palavra CADERNO é a própria palavra ou qualquer outro agrupamento que se obtém trocando a ordem de suas letras; por exemplo, ONERCAD. Assim, o número de anagramas da palavra CADERNO é igual ao número de permutações simples de sete letras distintas, isto é:

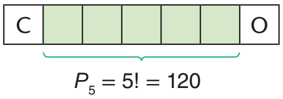
$$P_7 = 7! = 5.040$$

b. Fixando a letra C na primeira posição, sobram seis letras para serem distribuídas nas seis posições posteriores.



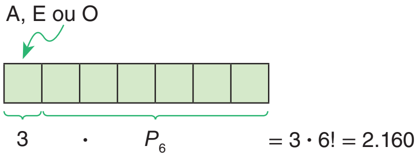
Logo, há 720 anagramas que começam por C.

c. Fixando as letras C e O na primeira e na última posição, respectivamente, sobram cinco letras para serem distribuídas nas cinco posições intermediárias:



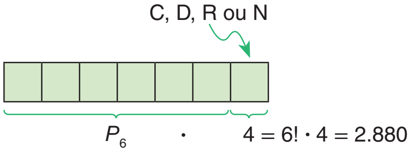
Portanto, há 120 anagramas que começam por C e terminam por O.

d. Há três possibilidades para o preenchimento da primeira posição: A, E ou O. Para cada vogal fixada na primeira posição, sobram seis letras para serem distribuídas nas posições posteriores:



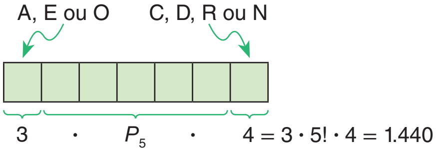
Assim, há 2.160 anagramas que começam por vogal.

e. Há quatro possibilidades para o preenchimento da última (sétima) posição: C, D, R ou N. Para cada consoante fixada na última posição, sobram seis letras para serem distribuídas nas seis posições anteriores:



Assim, há 2.880 anagramas que terminam por consoante.

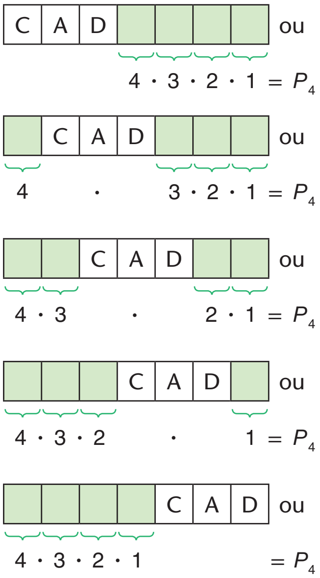
f. Há três possibilidades para o preenchimento da primeira posição e quatro possibilidades para o preenchimento da última. Fixadas uma vogal e uma consoante na primeira e na última posição, respectivamente, sobram cinco letras para serem distribuídas nas posições intermediárias:



Há, portanto, 1.440 anagramas que começam por vogal e terminam por consoante.

g. As letras C, A e D podem ocupar, respectivamente, as seguintes posições: primeira, segunda e terceira; segunda, terceira e quarta; terceira, quarta e quinta; quarta, quinta e sexta; quinta, sexta e última.

Analisemos cada caso:



Assim, temos:

$$P_4 + P_4 + P_4 + P_4 + P_4 = 5 \cdot P_4 = 5 \cdot 4! = 5! = 120$$

Ou seja, 120 anagramas apresentam as letras C, A e D juntas e nessa ordem.

ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

Outra maneira de resolver esse exercício é apresentada a seguir.

Observando o primeiro modo, percebemos que o bloco CAD atuou como um único elemento nas permutações. Assim, podemos resolver esse problema calculando o número de permutações dos cinco elementos CAD, E, R, N e O, isto é, considerando o bloco CAD um único elemento.

Temos, assim: $P_5 = 5! = 120$.

h. Nesse caso, um bloco composto das letras C, A e D pode ter $P_3 = 3! = 6$ formas diferentes:

CAD, CDA, DCA, DAC, ADC e ACD

Para cada um desses seis blocos, podemos formar $P_5 = 5! = 120$ anagramas, conforme observamos no item **g**. Logo, com os seis blocos podemos formar 720 anagramas, pois $6 \cdot 120 = 720$. Ou seja, o número de anagramas que apresentam as letras C, A e D juntas é: $P_3 \cdot P_5 = 6 \cdot 120 = 720$.

ANÁLISE DA RESOLUÇÃO

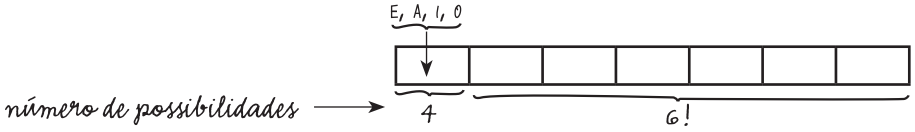
Reúna-se com um colega. Apontem o erro cometido na resolução e conversem sobre o que pode tê-lo causado. Refaçam a resolução no caderno e depois conversem com o professor e outros colegas para expor a estratégia de raciocínio usada por vocês.

Exercício

Quantos anagramas da palavra DESAFIO começam por vogal ou terminam por consoante?

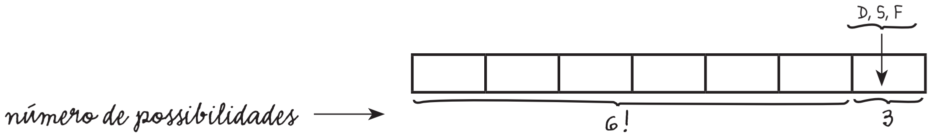
Resolução

1º) Anagramas que começam por vogal:



$4 \cdot 6! = 4 \cdot 720 = 2.880$

2º) Anagramas que terminam por consoante:



$6! \cdot 3 = 720 \cdot 3 = 2.160$

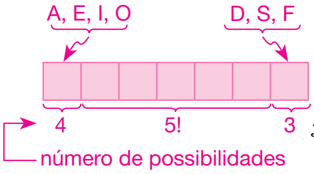
Logo, o número de anagramas da palavra DESAFIO que começam por vogal ou terminam por consoante é dado por:

$2.880 + 2.160 = 5.040$

Análise da resolução: O conjunto *A* dos anagramas da palavra DESAFIO que começam por vogal e o conjunto *B* dos anagramas dessa palavra que terminam por consoante não são disjuntos, isto é, a intersecção deles não é vazia; por exemplo, o anagrama EDAFIOS pertence aos dois conjuntos. Por isso, ao adicionar o número de anagramas que começam por vogal ao número de anagramas que terminam por consoante, o estudante contou duas vezes cada elemento da intersecção de *A* e *B*. O correto teria sido fazer:

$n(A \cup B) =$
$= n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

Calculando $n(A \cap B)$, isto é, o número de anagramas que começam por vogal e terminam por consoante, temos:



$n(A \cap B) = 4 \cdot 5! \cdot 3 = 1.440$

Assim, podemos calcular $n(A \cup B)$, isto é, o número de anagramas que começam por vogal ou terminam por consoante, dado por:

$n(A \cup B) =$
$= n(A) + n(B) - n(A \cap B) =$
$= 2.880 + 2.160 - 1.440 \Rightarrow$
$\Rightarrow n(A \cup B) = 3.600$

FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Faça os exercícios no caderno.

9. Para armazenar questões de Geometria no computador, uma estudante criou 5 arquivos com os nomes Ângulos, Semelhança, Congruência, Áreas, Perímetros. Em determinado dia, ela selecionou 5 questões escolhidas em *sites* da internet, constatando que cada uma das questões poderia ser armazenada em qualquer um dos arquivos, pois envolvia todos os assuntos que os nomeavam. Então, a jovem resolveu distribuir igualmente e aleatoriamente as 5 questões nos 5 arquivos, isto é, em cada um seria armazenada apenas uma qualquer das questões. De quantas maneiras diferentes essa distribuição poderia ser feita?

9. 120

10. Em determinado momento, *n* aviões sobrevoam um aeroporto aguardando autorização para pousar, um de cada vez. Um deles tem prioridade e, por isso, será o primeiro a pousar. Outro está adiantado em relação ao horário, então será o último a pousar. Os demais podem pousar em qualquer ordem, entre o primeiro e o último. Sabendo que os *n* aviões podem pousar em 720 sequências diferentes, quantos aviões sobrevoam o aeroporto no momento citado? **10.** 8 aviões

11. Com a palavra FUTEBOL:

a. quantos anagramas podemos formar? **11. a.** 5.040

b. quantos anagramas começam por E? **11. b.** 720

c. quantos anagramas começam por E e terminam em T? **11. c.** 120

d. quantos anagramas começam por vogal? **11. d.** 2.160

e. quantos anagramas terminam em consoante? **11. e.** 2.880

f. quantos anagramas começam por vogal e terminam em consoante? **11. f.** 1.440

g. quantos anagramas apresentam as 3 vogais juntas e em ordem alfabética? **11. g.** 120

h. quantos anagramas apresentam as 3 vogais juntas em qualquer ordem? **11. h.** 720

i. quantos anagramas não apresentam as 3 vogais juntas? **11. i.** 4.320

12. Ao criar um *software*, o programador resolveu atribuir-lhe, como chave de instalação, uma sequência de doze caracteres distintos.

Sabendo que os caracteres utilizados serão 1, 2, 3, 4, 5, 6, A, C, D, F, G e H, de modo que não apareçam juntos dois algarismos nem duas letras, o número possível de chaves de instalação é: **12.** alternativa **e**

a. $12!$

b. $(12!)^2$

c. $2 \cdot 12!$

d. $(6!)^2$

e. $2 \cdot (6!)^2$

13. O grêmio estudantil de um colégio planeja promover uma Semana do Cinema. Para isso, foram escolhidos 7 filmes diferentes, e será exibido um por dia. Exatamente três desses filmes são brasileiros e serão exibidos nos três primeiros dias. Sob essa condição, o número de maneiras diferentes de estabelecer a sequência de filmes nessa semana é: **13.** alternativa **d**

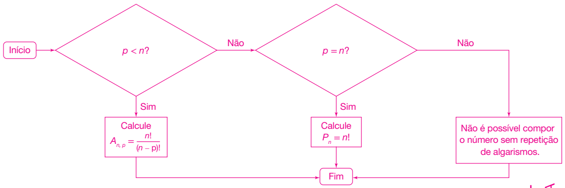
a. $7!$

b. $5!$

c. $3! + 4!$

d. $3! \cdot 4!$

e. $3! \cdot 5!$



14. Elabore um problema envolvendo uma situação contextualizada sobre permutação simples. Em seguida, troque o problema com um colega para que um resolva o do outro. Por fim, analisem e discutam as resoluções. **14.** Resposta pessoal.

ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

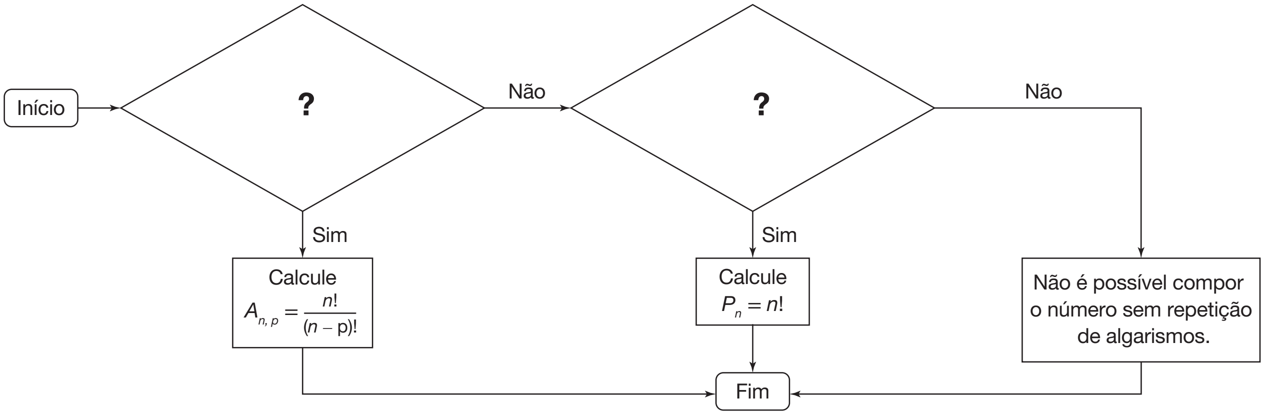
Para retomar os conteúdos estudados, resolva os exercícios complementares de 3 a 6.

Conectado

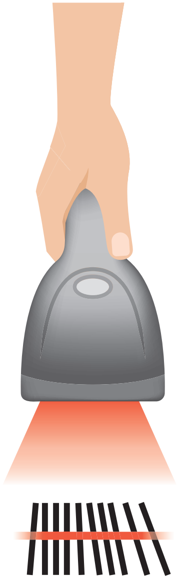
Conectado: Construção de fluxograma.

Usando um fluxograma, é possível ilustrar as etapas, sequências e decisões na escolha de um tipo de agrupamento, verificação de premissas e mostrar uma resolução. Identifique qual etapa está faltando no fluxograma, no lugar dos pontos de interrogação, e elabore um novo fluxograma com as partes faltantes

Fluxograma para determinar quantos números de *p* algarismos distintos é possível formar com *n* algarismos distintos.



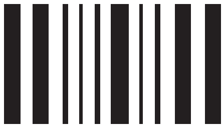
ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA



ILUSTRAÇÕES: ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

Permutações com elementos repetidos

Uma indústria adota um sistema simplificado de códigos de barras para identificar seus equipamentos. Cada equipamento é identificado por uma sequência de dez barras verticais de larguras diferentes: cinco medindo 1,5 mm de largura, três medindo 0,5 mm de largura e duas medindo 0,25 mm de largura, tal que em cada posição da sequência pode haver uma barra de qualquer uma das larguras.



As sequências são decodificadas por um leitor óptico que não considera os espaços entre as barras. Qual é o número máximo de equipamentos que podem ser identificados com esse sistema de códigos?

Para responder a essa pergunta, vamos indicar por A, B e C as barras de 1,5 mm, 0,5 mm e 0,25 mm de largura, respectivamente. Assim, o número máximo de sequências de barras que podem ser formadas é o número de permutações distintas das dez letras: A, A, A, A, A, B, B, B, C, C; por exemplo, uma permutação possível é:

(A, B, A, C, A, A, B, B, C, A) que representa

Para obter uma permutação diferente dessa, deve-se alterar a ordem de letras distintas. Assim, outra permutação possível é:

(B, A, A, C, A, A, B, B, C, A) que representa

Observe, portanto, que, ao permutarmos as letras A, A, A, A, A, B, B, B, C, C, formaremos **permutações com elementos repetidos**. O número de permutações distintas dessas letras é o número máximo de equipamentos que podem ser identificados por esse sistema de códigos.

Cálculo do número de permutações com elementos repetidos

Em vários cálculos combinatórios, temos de calcular o número de permutações de *n* elementos, nem todos distintos. Para entender esse tipo de cálculo, convém analisar as questões dos exemplos a seguir.

Exemplos

a. Quantos anagramas podemos formar com a palavra BALA?

Se as quatro letras que compõem essa palavra fossem distintas entre si, teríamos 4! anagramas. Mas a palavra não se altera quando permutamos as letras iguais; por isso, concluímos que o número de anagramas dessa palavra é menor que 4!.

Um raciocínio possível para o cálculo desse número de anagramas é considerar as letras iguais como elementos diferentes. Para nos orientar, colorimos as letras iguais com cores diferentes, obtendo:

BALA

VORTEXDIGITAL/SHUTTERSTOCK

Assim, podemos formar 24 permutações (4! = 24) com esses elementos “distintos”. São elas:

BALA BAAL LABA AABL AALB ALBA
BALA BAAL LABA AABL AALB ALBA
BLAA LBAA LAAB ABAL ABLA ALAB
BLAA LBAA LAAB ABAL ABLA ALAB

Contudo, se as cores nessas 24 permutações forem eliminadas, poderemos formar doze grupos com dois anagramas iguais em cada um. Observe:

BALA BALA	BAAL BAAL	LABA LABA	AABL AABL	AALB AALB	ALBA ALBA
BLAA BLAA	LBAA LBAA	LAAB LAAB	ABAL ABAL	ABLA ABLA	ALAB ALAB

Como cada grupo representa um único anagrama, o número de grupos formados é o número de anagramas da palavra BALA. Concluindo, o número de anagramas da palavra BALA é obtido dividindo-se o número de permutações das letras, consideradas elementos distintos, pelo fatorial do número de letras iguais. Ou seja:

$$\frac{4!}{2!} = \frac{24}{2} = 12$$

b. Quantos anagramas podemos formar com a palavra BAIANA?

Raciocinando como no exemplo anterior, o número de anagramas da palavra BAIANA é obtido dividindo-se o número de permutações das letras, consideradas elementos distintos, pelo fatorial do número de letras iguais, isto é:

$$\frac{6!}{3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot \cancel{3!}}{\cancel{3!}} = 120$$

c. Quantos anagramas podemos formar com a palavra BATATA?

Nesse caso, temos duas letras diferentes que se repetem: A e T. Assim como no primeiro exemplo, vamos trabalhar com as letras iguais como se fossem elementos distintos, usando cores diferentes:

BATATA

Podemos formar, então, 720 permutações (6! = 720) com esses elementos distintos. Ao escrever as 720 permutações, podemos agrupá-las de modo que, ao eliminar as cores, todas as permutações em cada agrupamento representem o mesmo anagrama.

Por exemplo, um dos agrupamentos com todas as permutações que representam o anagrama BATATA é:

$$\left.\begin{array}{l}\text{BATATA}\\\text{BATATA}\\\text{BATATA}\\\text{BATATA}\\\text{BATATA}\\\text{BATATA}\\\text{BATATA}\\\text{BATATA}\\\text{BATATA}\\\text{BATATA}\\\text{BATATA}\\\text{BATATA}\end{array}\right\}\text{BATATA}$$

Essas permutações foram obtidas permutando-se, entre si, as letras iguais da palavra BATATA. Como na palavra há três letras “A” e duas letras “T”, podemos permutar as letras iguais entre si de (3! • 2!) maneiras, isto é, de 12 maneiras.

De modo análogo, concluímos que cada agrupamento contém doze permutações que representam um mesmo anagrama.

Assim, as 720 permutações podem ser separadas em grupos de doze anagramas iguais. Então, o número de grupos formados é o número de anagramas da palavra BATATA:

$$\frac{720}{12} = 60$$

Concluindo, o número de anagramas da palavra BATATA é obtido dividindo-se o número de permutações das letras, consideradas elementos distintos, pelo produto dos fatoriais dos números de letras iguais, isto é:

$$\frac{6!}{3! \cdot 2!} = \frac{720}{12} = 60$$

Generalização

O raciocínio aplicado nos exemplos anteriores pode ser generalizado, conforme acompanharemos a seguir.

Consideremos n elementos, entre os quais o elemento a_1 ocorre n_1 vezes, o elemento a_2 ocorre n_2 vezes, ..., o elemento a_k ocorre n_k vezes:

$$\overbrace{\underbrace{a_1, a_1, \ldots, a_1}_{\substack{n_1 \text{ elementos} \\ \text{iguais a } a_1}}, \underbrace{a_2, a_2, \ldots, a_2}_{\substack{n_2 \text{ elementos} \\ \text{iguais a } a_2}}, \ldots, \underbrace{a_k, a_k, \ldots, a_k}_{\substack{n_k \text{ elementos} \\ \text{iguais a } a_k}}}^{n \text{ elementos}}$$

sendo a_1, a_2, ... e a_k distintos entre si e $n_1 + n_2 + n_3 + \ldots + n_k = n$.

O número de permutações desses n elementos, que indicaremos por $P_n^{(n_1, n_2, n_3, \ldots, n_k)}$, é dado por:

$$P_n^{(n_1, n_2, n_3, \ldots, n_k)} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot n_3! \cdot \ldots \cdot n_k!}$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

7. Considerando a palavra PANTANAL:

a. quantos anagramas é possível formar?

b. quantos anagramas começam pela letra A?

Resolução

a. A palavra apresenta um total de 8 letras, com 3 letras "A", 2 letras "N", 1 letra "P", 1 letra "T" e 1 letra "L". Assim, o número de anagramas é:

$$P_8^{(3, 2, 1, 1, 1)} = \frac{8!}{3! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1!}$$

Para simplificar a notação, indicamos esse número por:

$$P_8^{(3, 2)} = \frac{8!}{3! \cdot 2!}$$

Isto é, não indicamos nos parênteses as letras que aparecem uma única vez na palavra.

Então, o número de anagramas da palavra PANTANAL é:

$$P_8^{(3, 2)} = \frac{8!}{3! \cdot 2!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot \cancel{3!}}{\cancel{3!} \cdot 2 \cdot 1} = 3.360$$

b. Fixando uma letra A na primeira posição, sobram as letras P, N, T, A, N, A e L, que devem ser distribuídas nas sete posições posteriores:

$$\boxed{A}\underbrace{\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}}_{P_7^{(2, 2)}}$$

$$P_7^{(2, 2)} = \frac{7!}{2! \cdot 2!} = 1.260$$

Logo, há 1.260 anagramas que começam por "A".

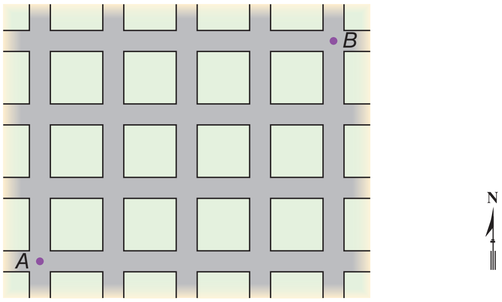
Reflexão

No item **b**, não deveríamos multiplicar por 3 o resultado 1.260, visto que a letra A aparece três vezes na palavra PANTANAL?

Reflexão: Não, pois, se substituirmos o "A" da primeira posição por outro "A" da palavra, obteremos os mesmos anagramas.

ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

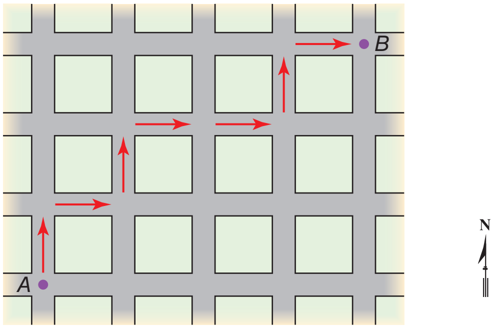
8. A figura a seguir representa um conjunto de quarteirões de uma cidade, sendo a parte cinza a representação das ruas.



Um motorista localizado no ponto *A* pretende chegar ao ponto *B* deslocando-se sempre para o norte ou para o leste. Quantos caminhos diferentes ele pode percorrer de *A* até *B* se o tráfego é permitido para qualquer caminho escolhido?

Resolução

Para que o motorista se desloque de *A* até *B* nas condições enunciadas, ele deve percorrer três quadras para o norte e quatro para o leste. Um caminho possível é:



Indicando por N o deslocamento de cada quadra para o norte e por L o deslocamento de cada quadra para o leste, o número de caminhos diferentes que podem ser percorridos é igual ao número de permutações das sete letras: N, N, N, L, L, L, L, isto é:

$$P_7^{(3,\,4)} = \frac{7!}{4!\cdot 3!} = 35$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Faça os exercícios no caderno.

15. Calcule o número de anagramas de cada uma das palavras:

a. DEZENA **15. a.** 360

b. SUCESSO **15. b.** 840

c. GARRAFA **15. c.** 420

d. CARRANCA **15. d.** 1.680

16. Com a palavra OUTONO:

a. quantos anagramas podemos formar? **16. a.** 120

b. quantos anagramas começam por O? **16. b.** 60

c. quantos anagramas começam por vogal? **16. c.** 80

d. quantos anagramas começam por consoante? **16. d.** 40

e. quantos anagramas começam por vogal e terminam em consoante? **16. e.** 32

f. quantos anagramas apresentam as consoantes juntas e em ordem alfabética? **16. f.** 20

g. quantos anagramas apresentam as consoantes juntas em qualquer ordem? **16. g.** 40

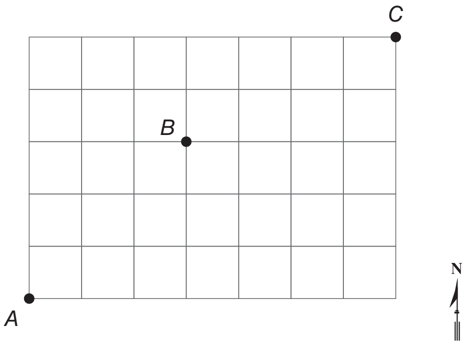
17. Um experimento consiste em lançar cinco vezes uma moeda e considerar como resultado a sequência formada pelas faces voltadas para cima no 1º, 2º, 3º, 4º e 5º lançamentos.

a. Indicando por C e K as faces cara e coroa, respectivamente, uma sequência com três caras e duas coroas que pode ser obtida é: CCKCK. Quantas sequências diferentes com três caras e duas coroas podem ser obtidas? **17. a.** 10

b. Quantas sequências diferentes com pelo menos três caras podem ser obtidas? **17. b.** 16

c. Quantas sequências diferentes com pelo menos uma cara podem ser obtidas? **17. c.** 31

18. Na figura, cada quadrícula representa um quarteirão quadrado de uma região de um bairro, e os lados de todas as quadrículas representam ruas de duas mãos. Um caminhão de entregas deve partir de uma loja de eletrodomésticos localizada no ponto *A*; entregar um televisor em uma residência localizada no ponto *B*; e, depois, entregar um refrigerador em uma residência localizada no ponto *C*. Por quantos caminhos diferentes o motorista do caminhão pode fazer esse trajeto de modo que ele percorra a menor distância possível? **18.** 300 caminhos



ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

Para retomar os conteúdos estudados, resolva os exercícios complementares de 7 a 10.

No ***Podcast*: Código de Trânsito Brasileiro** são apresentadas informações sobre o Código de Trânsito Brasileiro, proponha aos estudantes que ouçam esse *podcast* e que depois conversem sobre as questões apresentadas, como a obrigatoriedade do cinto de segurança.

MATEMÁTICA SEM FRONTEIRAS

Mobilidade Urbana

OBJETO DIGITAL ***Podcast*: Código de Trânsito Brasileiro**

MAURO PIMENTEL/AFP/GETTY IMAGES

Tráfego intenso na ponte Rio--Niterói no Rio de Janeiro (RJ). Foto de 2022.

ODS 11

Oriente os estudantes a consultar as páginas 6 e 7 para saber mais sobre este e os demais Objetivos de Desenvolvimento Sustentável.

Matemática sem fronteiras: Respostas pessoais. Este momento é importante para os estudantes pesquisarem e refletirem sobre os desafios na mobilidade do município em que moram. Incentive-os a refletirem sobre os diferentes aspectos, como mobilidade dos veículos motorizados, das bicicletas, dos pedestres e dos aspectos relacionados à acessibilidade.

A mobilidade urbana é um dos complexos desafios enfrentados pelas cidades modernas, no qual a demanda por transporte eficiente e sustentável é crescente. A otimização de rotas, alocação de recursos e planejamento de redes de transporte são desafios atuais para um ambiente urbano sustentável e agradável.

Desse modo é necessário fazer uso de ferramentas que ajudem a enfrentar os desafios complexos e que colaborem com a solução de alguns desses desafios. O Código de Trânsito Brasileiro (CTB) regula o trânsito e a mobilidade urbana, focando na segurança viária e eficiência do tráfego, ele estabelece normas para a circulação de veículos e pedestres, penalidades para infrações, e promove a inclusão de pessoas com deficiência. O CTB é essencial para o planejamento urbano, incentivando o uso de transporte coletivo e soluções sustentáveis. Em conjunto com o CTB, modelos matemáticos baseados em análise combinatória, são importantes ferramentas, desempenham um papel essencial na criação de soluções que melhoram a fluidez do trânsito e a eficiência dos sistemas de transporte, contribuindo para cidades mais seguras e organizadas.

A análise combinatória é usada para resolver problemas que buscam identificar as rotas mais eficientes para diferentes tipos de veículos e serviços, incorporar dados em tempo real, como condições de tráfego e eventos imprevistos, simular diferentes cenários de tráfego e transporte, e otimizar a integração entre diferentes modos de transporte, como ônibus, trens e bicicletas. Isso pode reduzir o tempo de viagem, economizar combustível e diminuir a emissão de poluentes, colaborar com uma adaptação rápida às mudanças nas condições de trânsito, ajustar rotas de forma dinâmica, ajudar na análise de como alterações na infraestrutura ou novas políticas podem impactar a mobilidade urbana e a criar redes de transporte mais coesas e eficientes.

A aplicação de modelos matemáticos e análise combinatória na mobilidade urbana oferece uma abordagem poderosa para enfrentar desafios complexos e criar soluções eficientes. Por meio da otimização de rotas e do planejamento dinâmico, é possível não apenas melhorar a eficiência do transporte, mas também contribuir para um ambiente urbano mais sustentável e agradável para todos.

Atividades

Faça as atividades no caderno.

Reúnam-se com um colega para discutir e responder às questões a seguir.

1. Escolham uma atitude no dia a dia que colaboraria com a mobilidade urbana da cidade em que você mora. Justifiquem a resposta.
2. Descrevam ações que promoveriam a atitude escolhida.
3. Pesquisem sobre iniciativas públicas e privadas que melhoram a eficiência do transporte público e compartilhem o resultado da pesquisa com o professor e os colegas.

4. Combinação simples


TIKO ARAMYAN/SHUTTERSTOCK

Em um torneio quadrangular de xadrez, cada um dos jogadores participantes, A, B, C e D, enfrentará cada um dos outros uma única vez. Para determinar o número de jogos desse torneio, devemos observar que, ao representar qualquer um deles, não consideramos a ordem dos jogadores; por exemplo, o jogo em que o enxadrista A enfrenta o adversário B é o mesmo em que B enfrenta A.

$$\underbrace{\underbrace{\text{A } \textit{versus} \text{ B}} \qquad \underbrace{\text{B } \textit{versus} \text{ A}}}_{\text{mesmo jogo}}$$

Refaça o exemplo introdutório desse tópico, enfatizando que duas combinações simples se diferenciam apenas pela natureza dos elementos.

Podemos, então, representar cada jogo por meio de um conjunto cujos elementos são os dois jogadores em confronto, pois, em um conjunto, a ordem dos elementos não é considerada.

Assim, o número de jogos desse torneio é o número de subconjuntos de 2 elementos do conjunto $I = \{A, B, C, D\}$, que são:

$$\{A, B\} \quad \{A, C\} \quad \{A, D\}$$
$$\{B, C\} \quad \{B, D\} \quad \{C, D\}$$

Esses subconjuntos são chamados de **combinações simples dos 4 elementos de *I* tomados 2 a 2**. Ou seja, uma combinação simples de 2 elementos de ***I*** é qualquer subconjunto de ***I*** formado por 2 elementos.

Observe que duas combinações simples quaisquer se diferenciam apenas pela natureza dos elementos, e não pela ordem desses elementos. Por exemplo:

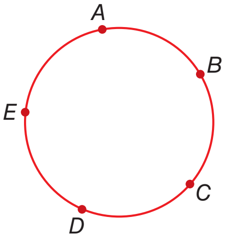
- $\{A, B\} \neq \{A, C\}$, pois diferem pela natureza dos elementos;
- $\{A, B\} = \{B, A\}$, pois a ordem dos elementos não altera a combinação.

Essas considerações ajudam a entender a definição a seguir.

> Dados os n elementos distintos do conjunto $I = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$, chama-se **combinação simples** de p elementos de I todo subconjunto de I formado por p elementos distintos com $\{n, p\} \subset \mathbb{N}$ e $p \leqslant n$.

Exemplo

Considere a circunferência que contém os cinco pontos distintos A, B, C, D e E. Vamos escolher três pontos quaisquer para serem vértices de um triângulo. As possibilidades de escolha são:



FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

$$ABC \quad ABD \quad ABE \quad ACD \quad ACE$$
$$ADE \quad BCD \quad BCE \quad BDE \quad CDE$$

Note que a ordem dos pontos não altera a representação do triângulo; por exemplo, $ABC = BCA$. Assim, essas representações são combinações dos cinco pontos tomados três a três. Essas combinações são simples, pois não há repetição de elemento em uma mesma combinação.

Cálculo do número de combinações simples de *n* elementos distintos tomados *p* a *p*

Indicaremos por $C_{n,\,p}$ o número de combinações simples de n elementos distintos tomados p a p. Para efetuar esse cálculo, vamos relacionar o número de combinações simples com o número de arranjos simples de n elementos distintos tomados p a p. Para isso, consideremos as duas situações a seguir.

Situação 1

Entre quatro candidatos, a, b, c e d, devem ser escolhidos três para ocupar três vagas distintas: programador, analista de sistemas e supervisor do departamento de informática de uma empresa. Como os candidatos são igualmente capazes, a escolha será feita por sorteio. Quantas escolhas diferentes podem ser feitas?

Considerando que o primeiro sorteio seja para a vaga de programador, o segundo, para analista de sistemas, e o terceiro, para supervisor, temos as possibilidades:

Sorteios

1º	2º	3º
a	b	c
a	c	b
b	a	c
b	c	a
c	a	b
c	b	a

Sorteios

1º	2º	3º
a	b	d
a	d	b
b	a	d
b	d	a
d	a	b
d	b	a

Sorteios

1º	2º	3º
a	c	d
a	d	c
c	a	d
c	d	a
d	a	c
d	c	a

Sorteios

1º	2º	3º
b	c	d
b	d	c
c	b	d
c	d	b
d	b	c
d	c	b

Portanto, temos 24 possibilidades de escolha. Essas 24 possibilidades são todos os arranjos simples dos quatro elementos de $I = \{a, b, c, d\}$ tomados três a três, que representamos por: $A_{4,\,3}$.

Situação 2

Entre quatro candidatos, a, b, c e d, devem ser escolhidos três para ocupar três vagas de programador no departamento de informática de uma empresa. Como os candidatos são igualmente capazes, a escolha será feita por sorteio. Quantas escolhas diferentes podem ser feitas?

Como os cargos dos profissionais escolhidos são idênticos, não devemos considerar a ordem dos candidatos sorteados. Assim, as únicas escolhas possíveis são:

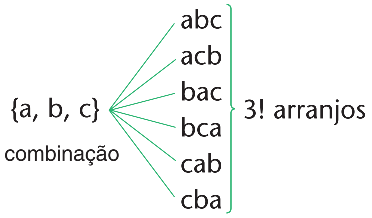
$\{a, b, c\}$ $\quad$ $\{a, b, d\}$ $\quad$ $\{a, c, d\}$ $\quad$ $\{b, c, d\}$

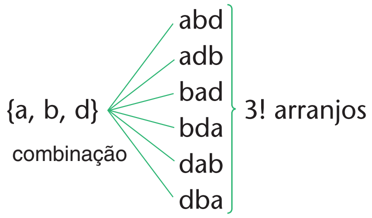
Portanto, temos quatro possibilidades de escolha. Essas quatro possibilidades são todas as combinações simples dos quatro elementos de $I = \{a, b, c, d\}$ tomados três a três, que representamos por $C_{4,\,3}$.

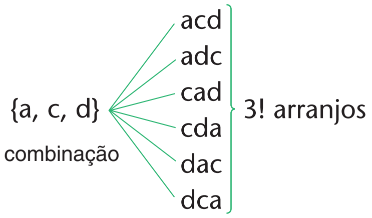
Comparando as situações

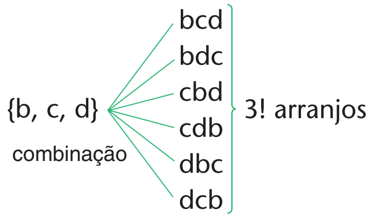
Note que os elementos que compõem cada escolha possível da situação 2 formam seis escolhas possíveis na situação 1. Por exemplo, com {a, b, c}, obtido na situação 2, podemos formar as seis escolhas possíveis do primeiro quadro da situação 1.

Assim, podemos relacionar o número de combinações simples dos quatro elementos de $I = \{a, b, c, d\}$ tomados três a três com o número de arranjos simples dos quatro elementos tomados três a três:









Concluímos que cada uma das quatro combinações de três elementos de I gera 3! arranjos desses elementos. Logo, multiplicando 3! por $C_{4,\,3}$, obtemos $A_{4,\,3}$, isto é:

$$3! \cdot C_{4,\,3} = A_{4,\,3}$$

Generalizando o raciocínio para os números naturais n e p, com $n \geqslant p$, obtemos a fórmula para o cálculo de $C_{n,\,p}$, conforme segue:

$$p! \cdot C_{n,\,p} = A_{n,\,p} \Rightarrow C_{n,\,p} = \frac{A_{n,\,p}}{p!} = \frac{\dfrac{n!}{(n-p)!}}{p!}$$

Portanto:

$$C_{n,\,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

9. Calcule:

a. $C_{7,\,5}$ **b.** $C_{4,\,4}$ **c.** $C_{4,\,0}$ **d.** $C_{0,\,0}$

Resolução

Aplicando a fórmula $C_{n,\,p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$, temos:

a. $C_{7,\,5} = \dfrac{7!}{5!(7-5)!} = \dfrac{7!}{5! \cdot 2!} = \dfrac{7 \cdot 6 \cdot \cancel{5!}}{\cancel{5!} \cdot 2 \cdot 1} = 21$

b. $C_{4,\,4} = \dfrac{4!}{4!(4-4)!} = \dfrac{4!}{4! \cdot 0!} = \dfrac{\cancel{4!}}{\cancel{4!} \cdot 1} = 1$

c. $C_{4,\,0} = \dfrac{4!}{0!(4-0)!} = \dfrac{4!}{0! \cdot 4!} = \dfrac{\cancel{4!}}{1 \cdot \cancel{4!}} = 1$

d. $C_{0,\,0} = \dfrac{0!}{0!(0-0)!} = \dfrac{0!}{0! \cdot 0!} = \dfrac{1!}{1 \cdot 1!} = 1$

Critério diferenciador entre arranjo e combinação

Ao deparar com um problema que envolva agrupamentos de qualquer tipo de elemento, devemos antes de tudo verificar se os agrupamentos em questão são arranjos ou combinações. Para isso, formamos um dos agrupamentos sugeridos pelo problema, com pelo menos dois elementos distintos, e mudamos a ordem dos elementos distintos do agrupamento formado.

- Se, com essa mudança, obtemos um agrupamento **diferente** do original, então esses agrupamentos são **arranjos**.
- Se, com essa mudança, obtemos um agrupamento **igual** ao original, então esses agrupamentos são **combinações**.

Reflexão: Você encontrará informações nas **Orientações Específicas** deste capítulo.

Reflexão

Existem combinações com repetição?

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

10. Entre oito policiais, serão escolhidos cinco para garantir a segurança pessoal de um político durante um evento. Quantos grupos de segurança diferentes podem ser formados se os escolhidos terão funções idênticas?

Resolução

Como as funções são idênticas, a ordem dos elementos componentes **não** altera o grupo de segurança; logo, cada um dos grupos possíveis é uma **combinação** de pessoas. Assim, o número possível de grupos que podem ser formados é $C_{8,\,5}$, isto é:

$$C_{8,\,5} = \frac{8!}{5!(8-5)!} = \frac{8!}{5! \cdot 3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot \cancel{5!}}{\cancel{5!} \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 56$$

11. Dispondo de cinco modelos homens e seis mulheres, pretende-se escolher um grupo de três homens e quatro mulheres para um desfile de moda. De quantos modos diferentes o grupo pode ser formado?

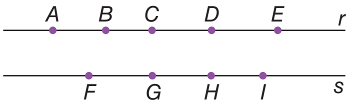
Resolução

Devem ser escolhidos três homens entre cinco e quatro mulheres entre seis. Pelo princípio fundamental da contagem, o número de grupos diferentes que podem ser formados é dado pelo produto $C_{5,\,3} \cdot C_{6,\,4}$, isto é:

$$C_{5,\,3} \cdot C_{6,\,4} = \frac{5!}{3!(5-3)!} \cdot \frac{6!}{4!(6-4)!} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} \cdot \frac{6!}{4! \cdot 2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{3! \cdot 2 \cdot 1} \cdot \frac{6 \cdot 5 \cdot 4!}{4! \cdot 2 \cdot 1} = 10 \cdot 15 = 150$$

Sugerimos que você assista ao vídeo **A cartomante**, que apresenta uma situação contextualizada sobre os tipos de agrupamento estudados até aqui. Disponível em: https://m3.ime.unicamp.br/recursos/1065. Acesso em: 20 jul. 2024.

12. Cinco pontos distintos, *A*, *B*, *C*, *D* e *E*, pertencem a uma reta *r*, e quatro pontos distintos, *F*, *G*, *H* e *I*, pertencem a uma reta *s*, sendo *r* e *s* paralelas distintas, conforme mostra a figura:



FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

a. Quantas retas distintas ficam determinadas por esses nove pontos?

b. Quantos triângulos distintos ficam determinados por esses nove pontos?

Resolução

a. Uma reta fica determinada por dois pontos distintos; logo, qualquer combinação desses nove pontos tomados dois a dois determina uma reta. Mas entre essas combinações há retas coincidentes, por exemplo $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{AC}$. Assim, o cálculo do número de retas distintas pode ser feito subtraindo de todas as combinações dos nove pontos dois a dois as combinações dos pontos colineares dois a dois e adicionando 2, que são as próprias retas *r* e *s*, isto é:

$$C_{9,\,2} - \underbrace{C_{5,\,2}}_{\substack{\text{combinações}\\ \text{de pontos de } r}} - \underbrace{C_{4,\,2}}_{\substack{\text{combinações}\\ \text{de pontos de } s}} + \underbrace{2}_{\substack{\text{retas}\\ r\text{ e }s}} = 36 - 10 - 6 + 2 = 22$$

Outra maneira de resolver esse exercício é apresentada a seguir.

Além das retas *r* e *s*, uma reta fica determinada por um dos cinco pontos destacados em *r* e um dos quatro pontos destacados em *s*. Assim, o número de retas, nas condições enunciadas, é dado por:

$$\underbrace{2}_{\substack{\text{retas}\\ r\text{ e }s}} + \underbrace{C_{5,\,1}}_{\substack{\text{escolhas}\\ \text{de um}\\ \text{ponto em } r}} \cdot \underbrace{C_{4,\,1}}_{\substack{\text{escolhas}\\ \text{de um}\\ \text{ponto em } s}} = 2 + 5 \cdot 4 = 22$$

b. Um triângulo fica determinado por três pontos não colineares. Assim, algumas das combinações dos nove pontos tomados três a três determinam triângulos, e outras não. Por exemplo, a combinação *ABF* determina um triângulo, enquanto a combinação *ABC* não determina um triângulo. Podemos resolver este item de dois modos.

O número de triângulos é a diferença entre o número de combinações dos nove pontos três a três e o total de combinações dos pontos colineares três a três (pontos que não determinam triângulos). Isto é:

$$C_{9,\,3} - \underbrace{C_{5,\,3}}_{\substack{\text{combinações}\\ \text{de pontos de } r}} - \underbrace{C_{4,\,3}}_{\substack{\text{combinações}\\ \text{de pontos de } s}} = 84 - 10 - 4 = 70$$

Outra maneira de resolver esse exercício é apresentada a seguir.

Um triângulo fica determinado se escolhemos dois pontos em uma das retas e um ponto na outra. Assim, temos duas opções de escolha:

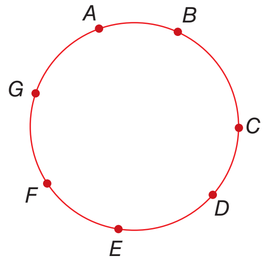
- 2 pontos em *r* e 1 ponto em *s*:
  $C_{5,\,2} \cdot C_{4,\,1} = 10 \cdot 4 = 40$
- 1 ponto em *r* e 2 pontos em *s*:
  $C_{5,\,1} \cdot C_{4,\,2} = 5 \cdot 6 = 30$

Logo, o número de triângulos é 70 (40 + 30 = 70).

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Faça os exercícios no caderno.

19. Considere sete pontos distintos, *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F* e *G*, de uma circunferência, conforme indicado na figura.



FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

19. a. 21

a. Quantas retas ficam determinadas por esses pontos?

b. Quantos triângulos ficam determinados por esses pontos? **19. b.** 35

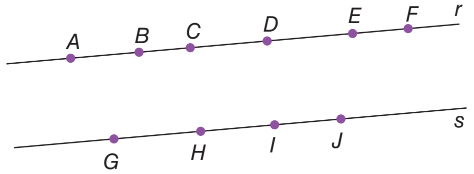
c. Quantos quadriláteros convexos ficam determinados por esses pontos? **19. c.** 35

d. Quantos pentágonos convexos ficam determinados por esses pontos? **19. d.** 21

e. De todos os pentágonos convexos determinados por esses pontos, quantos têm como vértice o ponto *A*? **19. e.** 15

f. De todos os pentágonos convexos determinados por esses pontos, quantos têm como lado o segmento $\overline{AB}$? **19. f.** 10

20. As retas *r* e *s* representadas a seguir são paralelas.



FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

a. Quantas retas ficam determinadas pelos dez pontos distintos *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, *G*, *H*, *I* e *J*? **20. a.** 26

b. Quantos triângulos ficam determinados por esses dez pontos distintos? **20. b.** 96

c. De todos os triângulos determinados por esses dez pontos distintos, quantos têm como vértice o ponto *H*? **20. c.** 33

d. De todos os triângulos determinados por esses dez pontos distintos, quantos têm um lado contido na reta *r*? **20. d.** 60

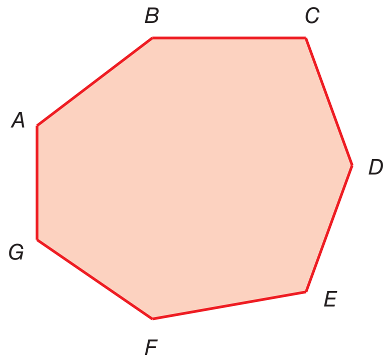
e. Quantos quadriláteros convexos ficam determinados por esses dez pontos distintos? **20. e.** 90

21. Respondam às questões seguintes.

a. Cada uma das doze equipes que disputam a primeira fase de um campeonato de futebol enfrenta cada uma das demais uma única vez. Quantos jogos compõem essa fase do campeonato? **21. a.** 66 jogos

b. Na primeira fase de um torneio de xadrez, cada jogador enfrentará cada um dos demais uma única vez. Se estão previstas 45 partidas nessa fase do torneio, quantos jogadores participarão dessa fase? **21. b.** 10 jogadores

22. Considere o polígono convexo *ABCDEFG* representado a seguir.



ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

a. Quantos segmentos de reta têm extremos em 2 vértices distintos do polígono? **22. a.** 21

b. Quantos dos segmentos de reta obtidos no item anterior são diagonais do polígono *ABCDEFG*? **22. b.** 14

23. Aplicando a mesma ideia empregada no exercício anterior, calcule o número de diagonais de um polígono convexo de 10 vértices. **23.** 35

24. Uma equipe formada por dois arquitetos e por três engenheiros será escolhida entre cinco arquitetos e seis engenheiros. De quantas maneiras diferentes essa equipe pode ser formada? **24.** 200

25. Em uma empresa, há 5 vagas de emprego no setor técnico, 2 no setor administrativo e 3 no setor financeiro. Após as entrevistas com todos os candidatos às vagas, foram selecionados 8 para o setor técnico, 5 para o setor administrativo e 4 para o setor financeiro, dentre os quais serão escolhidos os titulares das vagas. Como todos os candidatos selecionados para cada setor são igualmente capazes, a escolha será feita por sorteio. De quantas maneiras distintas as vagas podem ser preenchidas? **25.** 2.240

26. José e Anita fazem parte de um grupo de dez pessoas, sete das quais serão escolhidas para formar um júri cujos jurados terão funções idênticas. Do total de júris que podem ser formados:

a. quantos contêm José e Anita? **26. a.** 56

b. quantos não contêm José nem Anita? **26. b.** 8

c. quantos contêm Anita e não contêm José? **26. c.** 28

27. Uma equipe de natação é formada por 8 homens, dos quais 3 são campeões olímpicos, e 10 mulheres, das quais 4 são campeãs olímpicas. Três atletas dessa equipe serão escolhidos para participar de uma reunião do comitê organizador de um campeonato mundial. De quantas maneiras diferentes esses três atletas podem ser escolhidos de modo que:

a. nenhum dos três seja campeão olímpico? **27. a.** 165

b. pelo menos um dos três seja campeão olímpico? **27. b.** 651

28. Um químico dispõe de 10 substâncias diferentes para trabalhar. Ele sabe que a mistura resultante da junção de duas ou mais dessas substâncias independe da ordem em que elas forem misturadas e que agrupamentos diferentes de substâncias resultam em misturas diferentes. Quantas misturas diferentes de exatamente 6 dessas substâncias o cientista pode obter se, entre as dez substâncias disponíveis, há duas que não podem ser juntadas porque produzem uma mistura explosiva? **28.** 140

29. Elabore um problema sobre combinação simples. Em seguida, troque o problema com um colega para que um resolva o do outro. Por fim, analisem e discutam as resoluções.

29. Resposta pessoal.

Para retomar os conteúdos estudados, resolva os exercícios complementares de 11 a 15.

MATEMÁTICA SEM FRONTEIRAS

OBJETO DIGITAL **Carrossel de imagens: Criptografia**

A criptografia

Em sua obra *A vida dos doze Césares*, o historiador romano Suetônio relata como Júlio César (100-44 a.C.) se comunicava com seus generais:

"Se tivesse qualquer coisa confidencial a dizer, ele escrevia cifrado, isto é, mudando a ordem das letras do alfabeto, para que nenhuma palavra pudesse ser compreendida. Se alguém desejasse decifrar a mensagem e entender seu significado, deveria substituir a quarta letra do alfabeto, a saber 'D', por 'A', e assim por diante com as outras".

No alfabeto atual, a correspondência entre as letras, segundo o algoritmo de César, é:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C

Embora não tenha sido o primeiro a utilizar mensagens cifradas, pois há registros dessa prática em hieróglifos egípcios datados de 1900 a.C., o nome de Júlio César ficou associado a esse modo de comunicação. Hoje, quando citamos o "Código de César", estamos nos referindo a uma forma de codificação de textos em que cada letra é substituída por outra que, na ordem alfabética, é deslocada um número fixo de vezes.

Desde os primeiros registros até os dias atuais, as mensagens cifradas foram se tornando cada vez mais necessárias, ultrapassando os limites da esfera militar e passando a fazer parte do cotidiano das pessoas, por meio das senhas bancárias, senhas de segurança para *e-mails* ou arquivos confidenciais, códigos de barras etc. — os quais, por sua vez, têm origem na linguagem digital, que cifra caracteres, transformando-os em sequências de *bits* (dígitos 0 ou 1).

A forma codificada de comunicação escrita atingiu tal importância, que motivou o nascimento da Criptografia, que estuda os princípios e as técnicas de codificação e decodificação de mensagens.

BANCO CENTRAL DO BRASIL

A marca-d'água nas cédulas de dinheiro é um recurso da Esteganografia, ramo da Criptografia dedicado ao estudo dos meios e métodos de ocultação de mensagens. Detalhe com ampliação de 96%.

Atividades

Faça as atividades no caderno.

Reúna-se com um colega para fazer as atividades propostas nesta seção. **1.** Avancem contra os gauleses.

1. Considerando o alfabeto atual, decodifiquem a mensagem a seguir de acordo com o código descrito no texto anterior pelo historiador Suetônio.

DYDQFHP FRQWUD RV JDXOHVHV

2. Um ***bit*** é cada um dos impulsos elétricos identificados pelo computador: um deles é representado pelo dígito 1, e o outro, pelo dígito 0 (zero). Um ***byte*** é um conjunto de 8 *bits* quaisquer; por exemplo, no sistema de códigos ASCII, o *byte* 01000110 representa a letra F. Quantos *bytes* podem ser representados com três dígitos iguais a 1 e os demais iguais a zero? **2.** 56

TRABALHO E JUVENTUDES

Criptógrafo

Com os atuais avanços da tecnologia, novas profissões estão sendo vistas como necessárias e uma delas é a pessoa criptógrafa. Um profissional dessa área é um especialista em criptografia, ou seja, na prática de proteger informações por meio de algoritmos codificados. A criptografia funciona transformando os dados em um código secreto, que só pode ser desbloqueado com uma chave digital exclusiva. Na era digital, as informações correm diversos perigos, desde vazamento de dados pessoais, clonagem de cartões, roubo de identidade entre outros.

> A história da criptografia começa há milhares de anos, com os Hebreus a 600 a.C., por meio de cifras de substituição monoalfabéticas (onde um símbolo do alfabeto é substituído por outro símbolo no alfabeto cifrado), como por exemplo, a cifra Atbash, que consiste na substituição da primeira letra do alfabeto pela última, da segunda pela penúltima, e assim por diante.
>
> [...]
>
> Durante a chamada "Guerra Fria", entre Estados Unidos e União Soviética, foram criados e utilizados diversos métodos para esconder mensagens com estratégias e operações. Desses esforços, surgiram outros tipos de criptografia, tais como: por chave simétrica, onde existe uma chave com um segredo e essa chave é compartilhada pelos interlocutores; por chave assimétrica, onde existem 2 chaves, uma pública e uma privada, a chave privada é usada para cifrar a mensagem, com isso garante-se que apenas o dono da chave poderia tê-la editado; por hash e até a chamada criptografia quântica, que se encontra, hoje, em desenvolvimento.

ANDRADE, E. A História da Criptografia. **Pet News**. Disponível em: http://www.dsc.ufcg.edu.br/~pet/jornal/abril2014/materias/historia_da_computacao.html#:~:text=A%20hist%C3%B3ria%20da%20criptografia%20come%C3%A7a,letra%20do%20alfabeto%20pela%20%C3%BAltima. Acesso em: 11 out. 2024.

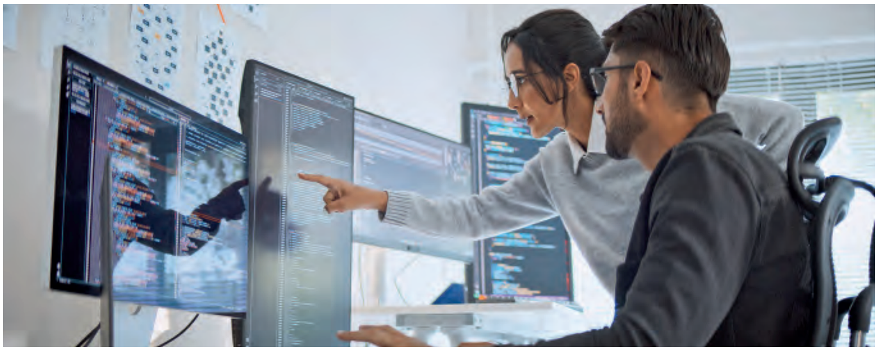
A criptografia, da sua origem até os dias atuais, evoluiu muito e hoje faz parte do cotidiano de muitas pessoas estando envolvida em projetar e analisar métodos para proteger as informações contra acesso, modificação ou adulteração não autorizado.

As opções de trabalho para a pessoa criptógrafa são diversas, podendo trabalhar em diversos setores como governo, militar, de inteligência, bancário, comércio eletrônico, etc. Ela pode desenvolver e testar novos algoritmos e protocolos de segurança, pode avaliar e melhorar a segurança e o desempenho dos sistemas e padrões criptográficos já existentes e pode realizar criptoanálise para encontrar fraquezas ou vulnerabilidades em sistemas criptográficos usando métodos matemáticos ou computacionais.

As habilidades em Matemática, como o uso de da Análise Combinatória, está presente no cotidiano do criptógrafo, além das habilidades de programação e resolução de problemas.

Quer saber mais sobre a profissão da pessoa criptógrafa? Faça uma pesquisa na internet e compartilhe com os colegas um resumo das informações que você obteve.

Trabalho e juventudes: Pesquisa pessoal.



KINDAMORPHIC/E+/GETTY IMAGES

Profissionais utilizando ferramentas relacionadas a linguagem de programação.

O conteúdo do boxe **Trabalho e juventudes** aborda a atuação de um criptógrafo apresentando funções dessas profissões. Solicite aos estudantes que relatem o que sabem sobre a profissão de criptógrafo. Incentive todos a participar e a argumentar para justificar suas opiniões. Pode-se aprofundar o assunto, propondo aos estudantes que citem algumas habilidades que precisam ser desenvolvidas para alguém se tornar criptógrafo. Após a leitura e a discussão inicial, peça aos estudantes que pesquisem mais informações sobre essa profissão, façam um resumo da pesquisa e compartilhem-na com os demais colegas. Ao explorar esse tema, contribuímos para o desenvolvimento do **TCT Trabalho** e da **competência geral 6**, pois os estudantes podem se apropriar de procedimentos adotados no mundo do trabalho. Sugerimos o filme **O Jogo da Imitação**, dirigido por Morten Tyldum. Esse filme conta a história de Alan Turing, que, durante a Segunda Guerra Mundial, lidera uma equipe de analistas de criptografia para decifrar o famoso código alemão Enigma.

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

Faça os exercícios no caderno.

1. Na convenção de um partido político, 2 pessoas serão escolhidas entre 15 pessoas para concorrerem aos cargos de presidente da república e vice-presidente. Qualquer um dos 15 candidatos pode ser votado para concorrer à presidência ou à vice-presidência. Cada eleitor filiado ao partido deve votar uma única vez, indicando os nomes de sua preferência para presidente e para vice-presidente. O número de maneiras diferentes que um eleitor pode votar é dado por:

a. $15 \cdot 13$
b. $15 + 13$
c. $A_{15,\,2}$
d. $A_{2,\,15}$
e. $A_{15,\,15}$

1. alternativa **c**

2. Com todas as vogais, a, e, i, o, u, e as consoantes b, c, d, f, g, h, serão formadas sequências de sete letras distintas de modo que três sejam vogais e estejam juntas e que as demais sejam consoantes e também estejam juntas. O número de sequências é dado por: **2.** alternativa **a**

a. $2 \cdot A_{5,\,3} \cdot A_{6,\,4}$
b. $A_{5,\,3} \cdot A_{6,\,4}$
c. $A_{11,\,7}$
d. $A_{5,\,3} + A_{6,\,4}$
e. $A_{5,\,3} + 2 \cdot A_{6,\,4}$

3. (UFPA-PA) Em um programa de rádio serão apresentadas sete músicas diferentes: quatro brasileiras e três estrangeiras. Em quantas sequências diferentes essas músicas podem ser apresentadas de modo que a primeira e a última música do programa sejam brasileiras? **3.** alternativa **e**

a. 360
b. 480
c. 920
d. 860
e. 1.440

4. Ao concluir suas lições do dia, um estudante deve guardar na estante 8 livros: Matemática, Física, Química, História, Geografia, Biologia, Português e Inglês, um ao lado do outro.

a. Em quantas sequências diferentes esses livros podem ser dispostos na prateleira da estante? **4. a.** 40.320

b. Em quantas sequências diferentes esses livros podem ser dispostos na prateleira da estante de modo que nos extremos fiquem os livros de História e Geografia? **4. b.** 1.440

c. Em quantas sequências diferentes esses livros podem ser dispostos na prateleira da estante de modo que os livros de Matemática, Física e Química fiquem juntos e nessa ordem? **4. c.** 720

d. Em quantas sequências diferentes esses livros podem ser dispostos na prateleira da estante de modo que os livros de Matemática, Física e Química fiquem juntos em qualquer ordem? **4. d.** 4.320

e. Em quantas sequências diferentes esses livros podem ser dispostos na prateleira da estante de modo que não fiquem juntos os 3 livros de exatas (Matemática, Física e Química)? **4. e.** 36.000

5. Quando foram vendidos todos os 30 apartamentos de um prédio residencial, os proprietários se reuniram para o sorteio das 30 vagas de garagem, uma para cada apartamento. Ficou decidido que as 10 vagas mais próximas dos elevadores seriam sorteadas entre os 10 apartamentos cujos proprietários eram mais idosos e que as outras vagas seriam sorteadas entre os demais. Nessas condições, o número possível de maneiras de distribuir as 30 vagas entre os 30 apartamentos é: **5.** alternativa **a**

a. $10! \cdot 20!$
b. $10! + 20!$
c. $\frac{30!}{10!}$
d. $\frac{20!}{10!}$
e. $30! - 10!$

6. (Enem) O setor de recursos humanos de uma empresa vai realizar uma entrevista com 120 candidatos a uma vaga de contador. Por sorteio, eles pretendem atribuir a cada candidato um número, colocar a lista de números em ordem numérica crescente e usá-la para convocar os interessados. Acontece que, por um defeito do computador, foram gerados números com 5 algarismos distintos e, em nenhum deles, apareceram dígitos pares. Em razão disso, a ordem de chamada do candidato que tiver recebido o número 75.913 é: **6.** alternativa **e**

a. 24
b. 31
c. 32
d. 88
e. 89

7. Considerando a palavra GARGANTA:

a. quantos anagramas podemos formar? **7. a.** 3.360

b. quantos anagramas começam por G? **7. b.** 840

c. quantos anagramas começam e terminam por G? **7. c.** 120

d. quantos anagramas começam por consoante? **7. d.** 2.100

e. quantos anagramas terminam por vogal? **7. e.** 1.260

f. quantos anagramas começam por consoante e terminam por vogal? **7. f.** 900

8. (UCDB-MS) O número de permutações das letras da palavra AMIGA nas quais não aparece o grupo AA é:

a. 36
b. 24
c. 60
d. 120
e. 54

8. alternativa **a**

9. Determinada fábrica que produz diversos tipos de equipamentos de proteção individual (EPIs) pretende identificar um de seus equipamentos com uma sequência de dez barras verticais de larguras diferentes.

Cinco das barras medindo 1,5 mm de largura, três medindo 0,5 mm de largura e duas medindo 0,25 mm de largura, tal que em cada posição da sequência pode haver uma barra de qualquer uma das larguras.

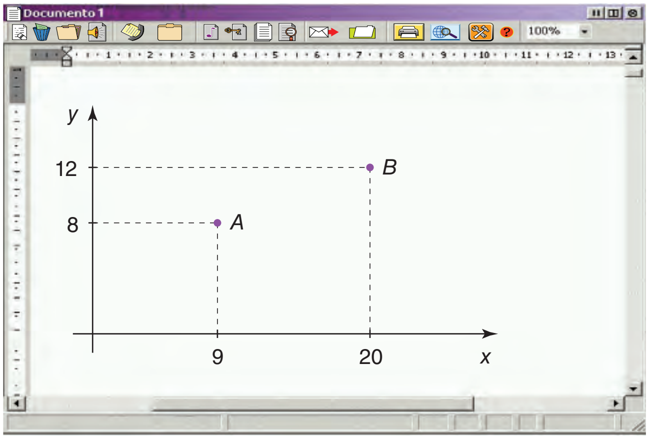

GROUND PICTURE/SHUTTERSTOCK

Funcionário utilizando um leitor óptico para ler o código de barras de um produto.

As sequências são decodificadas por um leitor óptico que não considera os espaços entre as barras. Qual é o número máximo de EPIs que podem ser identificados com esse sistema de códigos? **9.** 2.520 equipamentos

10. Cada vez que uma das teclas ↑ ou → é acionada no teclado de um computador, o cursor se desloca uma unidade *u* na tela, para cima ou para a direita, respectivamente. Associa-se um sistema cartesiano de eixos à tela, conforme mostra a figura a seguir, com a unidade *u* em cada eixo. Se, em relação a esse sistema cartesiano, o cursor está no ponto *A*(9, 8), quantas sequências diferentes de digitação das teclas → ou ↑ levam o cursor para o ponto *B*(20, 12)? **10.** 1.365

ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA



11. (Enem) O tênis é um esporte em que a estratégia de jogo a ser adotada depende, entre outros fatores, de o adversário ser canhoto ou destro.

Um clube tem um grupo de 10 tenistas, sendo que 4 são canhotos e 6 são destros. O técnico do clube deseja realizar uma partida de exibição entre dois desses jogadores, porém, não poderão ser ambos canhotos.

Qual o número de possibilidades de escolha dos tenistas para a partida de exibição? **11.** alternativa **a**

a. $\frac{10!}{2!\cdot 8!} - \frac{4!}{2!\cdot 2!}$

b. $\frac{10!}{8!} - \frac{4!}{2!}$

c. $\frac{10!}{2!\cdot 8!} - 2$

d. $\frac{6!}{4!} + 4 \cdot 4$

e. $\frac{6!}{4!} + 6 \cdot 4$

12. (UEL-PR) Na formação de uma Comissão Parlamentar de Inquérito (CPI), cada partido indica um certo número de membros, de acordo com o tamanho de sua representação no Congresso Nacional. Faltam apenas dois partidos para indicar seus membros. O partido A tem 40 deputados e deve indicar 3 membros, enquanto o partido B tem 15 deputados e deve indicar 1 membro. Indique a alternativa que apresenta o número de possibilidades diferentes para a composição dos membros desses dois partidos nessa CPI. **12.** alternativa **c**

a. 55

b. $(40 - 3) \cdot (15 - 1)$

c. $\frac{40!}{37!\cdot 3!} \cdot 15$

d. $40 \cdot 39 \cdot 38 \cdot 15$

e. $40! \cdot 37! \cdot 15!$

13. (Uerj) Todas as *n* capitais de um país estão interligadas por estradas pavimentadas, de acordo com o seguinte critério: uma única estrada liga cada duas capitais.

Com a criação de duas novas capitais, foi necessária a construção de mais 21 estradas pavimentadas para que todas as capitais continuassem ligadas de acordo com o mesmo critério.

Determine o número *n* de capitais, que existiam inicialmente nesse país. **13.** 10 capitais

14. Em um porta-moedas, há exatamente uma moeda de R$ 0,05, uma de R$ 0,10, uma de R$ 0,25, uma de R$ 0,50 e uma moeda de R$ 1,00.


BANCO CENTRAL DO BRASIL

a. Quantos valores monetários diferentes podem ser formados com apenas duas dessas moedas? **14. a.** 10

b. Quantos valores monetários diferentes podem ser formados com duas ou mais dessas moedas? **14. b.** 26

15. Um grupo de 12 garotas joga futebol semanalmente, revezando-se na formação de dois times de 5 jogadoras, que jogam entre si. Quatro das garotas só jogam no gol, e as demais só jogam na linha, em qualquer posição. Quantas equipes diferentes podem ser formadas nessas condições? **15.** 280 equipes

EDUCAÇÃO MIDIÁTICA

Conteúdos virais

OBJETO DIGITAL *Podcast:* Ciência da computação, algoritmo e comportamento

Quem usa as redes sociais na internet, seja para estudo, para trabalho ou para entretenimento, já deve ter se deparado com conteúdos "virais", tipo de informação que é amplamente compartilhado e, muitas vezes, acessado por milhões de pessoas.

Pode ser um *meme*, uma notícia impactante ou mesmo um conteúdo com informações falsas repassadas como verdadeiras (as chamadas *fake news*). Em questão do formato, pode ser uma imagem, um áudio, um vídeo, um *post*...


RAWPIXEL/SHUTTERSTOCK

Cada reação, comentário ou compartilhamento de um conteúdo nas redes sociais pode favorecer que ele chegue a mais pessoas e, assim, viralize.

Com o intuito de obter engajamento nas redes sociais, mesmo sem autorização, alguns conteúdos utilizam a imagem de pessoas em situações engraçadas, perigosas ou que expõem a privacidade delas. Mesmo que a intenção seja frear o compartilhamento, com um comentário criticando-o, por exemplo, cada pessoa que interage com ele tem sua responsabilidade, pois reagir, comentar ou compartilhar esses conteúdos faz com que eles cheguem a mais pessoas.

> A verdade é que não existe uma regra muito racional estabelecida para uma mensagem viralizar. [...] Alguns apontam que aspectos como emoção e curiosidade são ingredientes que ajudam um conteúdo a ser exponencialmente espalhado, muitas vezes compartilhado de modo quase inconsciente pelos usuários.
>
> O problema é que nem tudo que se torna viral é, digamos, inocente ou engraçadinho. Mentiras, boatos e materiais íntimos propagados em alta escala podem ser muito prejudiciais, individual e coletivamente, e justamente por gerarem curiosidade, acabam por se alastrar absurdamente. [...]

MANDELLI, M. Viralizou. E Agora? **Educamídia**, 29 nov. 2019. Disponível em: https://educamidia.org.br/viralizou-e-agora. Acesso em: 19 mar. 2024.

Desse modo, é importante que tenhamos cuidados com as nossas interações na internet, evitando apoiar ou ampliar uma informação falsa ou discurso de ódio. A melhor ferramenta nesses casos é não interagir ou denunciar, conforme sua gravidade.

O que é um conteúdo viral?

Vídeos, áudios, *posts*, *gifs* ou qualquer conteúdo que seja compartilhado milhares de vezes, recebendo dezenas de comentários e curtidas, já pode ser considerado um conteúdo viral. Os conteúdos que mais viralizam são aqueles de humor, como *memes* e vídeos engraçados. De acordo com padrões da indústria, um vídeo deve atingir um milhão de visualizações para ser considerado medianamente viral.

Muitas empresas utilizam como estratégia de *marketing* a disseminação de conteúdos virais, que visam aumentar o conhecimento da marca ou de um produto por meio das redes sociais. Como o objetivo é criar conteúdos e ações que se espalhem de forma exponencial, essas ações são pensadas para ativar emoções ou humor no público, levando as pessoas a se identificar com o tema ou situação retratada. Ao optar por ações como essa é necessário estudos e planejamentos para evitar riscos à reputação da marca.

Atividades

Faça as atividades no caderno.

1. Você já teve acesso a algum conteúdo viral? Se sim, de que tipo ele era? **1.** Resposta pessoal.
2. Você já compartilhou algum conteúdo viral? Por quê? **2.** Resposta pessoal.
3. Você já viu algum *meme* relacionado com a Matemática? Faça uma pesquisa e apresente aos colegas e professor. **3.** Resposta pessoal.
4. Você acredita que conteúdos como *memes* possam ser utilizados para transmitir informações importantes a determinado público?
5. Você já identificou alguma informação falsa ou discurso de ódio que viralizou na internet? Como você interagiu com esse *post*?
6. Conteúdos positivos, relacionados a saúde, meio ambiente, educação, entre outras temáticas também podem viralizar. Que tal criar um conteúdo para divulgar na internet, em formato de *meme*, com uma informação útil, a fim de conscientizar as pessoas a respeito de determinado tema? Após criarem o *meme*, vocês podem divulgá-lo nas redes sociais que julgarem mais apropriadas.

4. Resposta pessoal.

VERIFIQUE O QUE APRENDEU NO CAPÍTULO 7

Para aperfeiçoar os estudos, você pode retomar os exercícios propostos no decorrer deste capítulo, rever suas resoluções ou utilizar os **Exercícios complementares** para estudar com os colegas. Você também pode utilizar as questões propostas a seguir para verificar sua aprendizagem.

Nessa seção, propomos uma avaliação e a elaboração de um mapa conceitual como ferramenta de estudo. Oriente os estudantes a fazerem essas atividades com atenção e, caso encontrem dificuldades, incentive-os a revisitar os conteúdos estudados para reforçar a compreensão.

1. Um conjunto A é formado por n números naturais não nulos, com $n \geqslant 11$. Cinco elementos de A são números ímpares, e os demais elementos são números pares. O total de sequências, com seis termos distintos cada uma, que podem ser formadas com os elementos de A de modo que pelo menos um termo de cada sequência seja um número ímpar é dado por:

a. $(n-5) \cdot A_{n,5}$
b. $A_{n,6} - A_{n-6,6}$
c. $A_{n,6} - A_{11-5,6}$
d. $A_{n,6} - n$
e. $A_{n,6} - A_{n-5,6}$

1. alternativa **e**

2. alternativa **b**

2. No instante da abertura de uma repartição pública, as n pessoas que esperavam foram orientadas a formar uma fila indiana no balcão de atendimento. Sabendo que, em relação à sequência de pessoas, podem ser formadas 720 filas diferentes, o valor de n é:

a. 5
b. 6
c. 7
d. 8
e. 9

3. Um jovem foi a um parque de diversões e comprou exatamente n ingressos para as atrações, sendo 3 para a montanha-russa e os demais para o carrinho de bate-bate. Sabendo que ele pode estabelecer $2n$ sequências diferentes de escolha das atrações em que vai brincar, assinale a alternativa que contém o valor de n. **3.** alternativa **d**

a. 2
b. 3
c. 4
d. 5
e. 6

4. Para montar uma prova de 5 questões distintas, um professor dispõe de apenas uma questão de cada um dos 8 assuntos: semelhança de triângulos, sistemas lineares, função afim, função quadrática, logaritmo, permutações simples, combinações simples e funções trigonométricas. De quantas maneiras distintas ele pode escolher as questões se, obrigatoriamente, as questões sobre logaritmo e função quadrática devem fazer parte da prova?

a. 20
b. 21
c. 22
d. 23
e. 24

4. alternativa **a**

Ferramenta de estudo

O mapa conceitual é uma ferramenta que representa de forma gráfica as relações entre conceitos ou entre palavras que usamos para representar conceitos.

A seguir, apresentamos uma sugestão de elaboração de um mapa conceitual.

1. Retome os tópicos deste capítulo e faça um levantamento de informações relevantes para a elaboração do mapa. Por exemplo: conceitos, palavras-chave, situações-problema etc.
2. Escolha uma estrutura para o mapa e defina quais serão os recursos visuais que serão utilizados. Por exemplo: caixas, linhas, setas, cores, imagens, entre outros.
3. Organize a sequência das informações compondo ramificações que relacionem os conteúdos.

Agora, construa um mapa conceitual utilizando o que você aprendeu neste capítulo.

Se teve dificuldades em construir o mapa conceitual ou não resolveu algum exercício, retome os conteúdos abordados no capítulo. Após algumas tentativas, anote as dúvidas e converse com um colega que possa ajudá-lo. Se mesmo assim a dúvida persistir, pergunte ao professor na aula seguinte. Gerencie bem seu tempo de estudo em casa e estabeleça metas diárias alcançáveis, planejando seus estudos passo a passo.

CAPÍTULO 8

Geometria de posição e poliedros

A Arte Contemporânea se afasta dos modelos tradicionais e passa a utilizar técnicas e equipamentos inovadores e tecnológicos para a criação de obras. Alguns artistas aproveitam de materiais como plásticos, metais, madeiras etc. que seriam descartados para transformá-los em esculturas.

Na obra do artista Diet Wigman, foi usada a técnica de projeção da sombra da escultura em um plano, representado por uma parede. Em um primeiro momento, a escultura pode parecer um amontoado de moedas e outras peças de metal, mas ao acrescentar uma combinação de iluminação com o ângulo certo, a obra fica completa e aqueles objetos se tornam algo incrível, revelando uma imagem de sombra deslumbrante.

A **abertura** deste capítulo explora a Arte Contemporânea, destacando sua principal característica de experimentação e ruptura com as formas tradicionais de arte. Esse movimento oferece oportunidades únicas para estimular a criatividade e a inovação, utilizando materiais inusitados, como sucatas e objetos descartados, na criação de obras. Esse tema pode ser abordado incentivando os estudantes a refletirem sobre o potencial artístico de transformar materiais comuns em peças de arte significativas, promovendo uma compreensão mais ampla do que pode ser considerado arte. Após essa discussão inicial, peça aos estudantes que façam o que se pede nas atividades do boxe **Além da teoria**.

DIET WIEGMAN – ACERVO DO ARTISTA

Escultura **Atlas Off Balance** de Diet Wiegman, 2011. Este artista é considerado um dos pioneiros desse tipo de técnica.

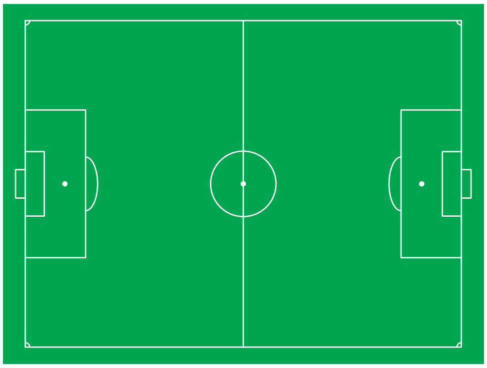
Além da teoria

1. Você já visitou algum museu ou alguma exposição de obras de arte? Como foi sua experiência? **Além da teoria: 1.** Resposta pessoal.
2. Você já conhecia a técnica de fazer arte com sucatas? E com o uso de sombras? **2.** Resposta pessoal.
3. Inspirando-se na obra apresentada, faça uma produção usando a fotografia de um objeto e sua sombra. Depois, com o professor e os colegas, promovam uma exposição, que pode ser virtual ou nos murais da escola. **3.** Resposta pessoal.

Comente a introdução desse tópico, enfatizando que a ferramenta básica para o estudo de todas as formas geométricas é a Geometria plana, pois, através de secções (cortes) ou transformações de figuras não planas, podemos obter figuras planas. Comente os exemplos apresentados da laranja e do rolo de papel de presente.

1. As formas que nos rodeiam

O formato dos objetos que nos rodeiam pode ser descrito pela linguagem da geometria: um campo de futebol é retangular; uma laranja é, aproximadamente, esférica; um rolo de papel de presente é cilíndrico etc.



ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

MAKS NARODENKO/ SHUTTERSTOCK

JUNIOR ROZZO/ ROZZO IMAGENS

As imagens desta página não respeitam as proporções reais entre os objetos.

Podemos classificar as figuras geométricas em duas categorias: plana e não plana. A superfície do campo de futebol lembra uma figura plana, enquanto a laranja e o rolo de papel podem ser associados a figuras não planas. A ferramenta básica para o estudo de todas as formas é a Geometria Plana, pois, por meio de secções (cortes) ou transformações de figuras não planas, podemos obter figuras planas. Por exemplo, ao cortar uma laranja com uma faca, obtemos duas secções circulares; desenrolando o rolo de papel, obtemos uma folha retangular.

Observação

Uma figura é plana quando todos os seus pontos pertencem a um mesmo plano.
Uma figura é não plana quando seus pontos não pertencem todos a um mesmo plano.

TROTZOLGA/ SHUTTERSTOCK

JUNIOR ROZZO/ ROZZO IMAGENS

Assim, as propriedades das figuras planas podem ser aplicadas no estudo das figuras não planas, conforme será apresentado neste capítulo.

2. O universo da Geometria

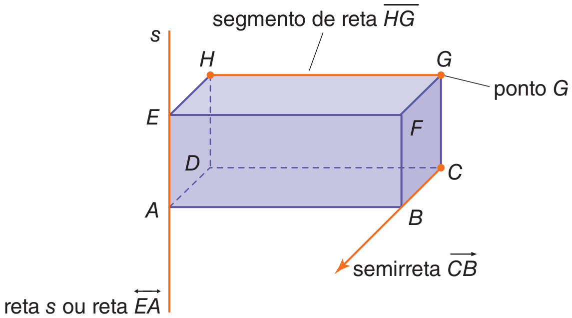
A Geometria de posição estuda as figuras geométricas quanto à sua forma e sua posição, e a Geometria métrica estuda as figuras em relação às suas medidas.

Destacaremos os conceitos fundamentais da Geometria de posição, necessários ao desenvolvimento da Geometria métrica, que é nosso objetivo maior. Vamos rever algumas noções e notações.

Comente que o paralelepípedo reto-retângulo será o nosso modelo na representação de retas e planos no espaço tridimensional. Se algum estudante tiver dificuldade em representar o paralelepípedo por meio de um desenho, ensine como fazê-lo. Usando o paralelepípedo como modelo, revise os conceitos de ponto, reta e plano, com suas respectivas representações. Ressalte que a reta é infinita em seus dois sentidos e que o plano é infinito em todas as suas direções.

A reta e suas partes

A figura representa um bloco com todas as faces retangulares; seu nome é **paralelepípedo reto-retângulo**. Observe na ilustração as representações e as notações de **ponto**, **reta**, **semirreta** e **segmento de reta**:



FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

Um importante postulado da Geometria afirma que: “Dois pontos distintos determinam uma reta”; por isso, a reta *s* da figura da página anterior pode ser indicada também por $\overleftrightarrow{EA}$ ou $\overleftrightarrow{AE}$.

Todo ponto *C* pertencente a uma reta *r* divide-a em duas partes. A reunião de {*C*} com qualquer uma dessas partes é chamada de semirreta de origem *C*. A semirreta de origem *C* que passa por *B* é simbolizada por $\overrightarrow{CB}$.

Observação

Quando um ponto pertence a uma reta, dizemos que a reta passa pelo ponto.

Notas:

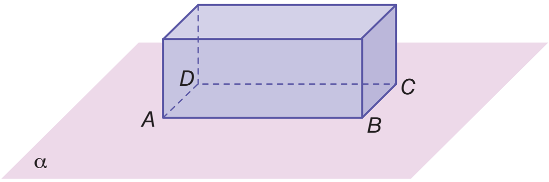
1. Denomina-se postulado toda proposição que é adotada como verdadeira, mas não pode ser demonstrada. Não é possível demonstrar um postulado porque ele é uma das verdades iniciais da teoria e, portanto, não há recursos suficientes para demonstrá-lo.
2. Ao usar o termo “determina” em Matemática, estamos garantindo a existência e a unicidade do objeto determinado. Assim, o postulado indicado anteriormente poderia ser enunciado da seguinte maneira: “Existe uma única reta que passa, simultaneamente, por dois pontos distintos”.

O plano e suas partes

Considere novamente um paralelepípedo reto-retângulo. Cada uma de suas faces é parte de um **plano** que continua infinitamente além dos limites dessa face. Usamos letras gregas para nomear os planos, como α (alfa), β (beta) e γ (gama).

Observação

Quando um ponto pertence a um plano, dizemos que o plano passa pelo ponto.

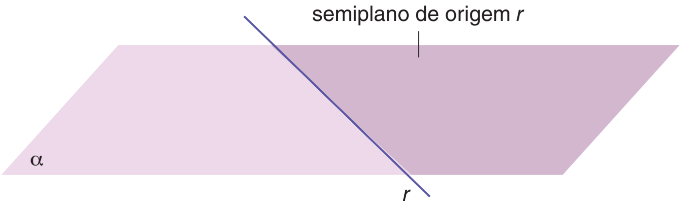


O plano α da base *ABCD* do bloco deve ser imaginado além dos limites do retângulo *ABCD*.

Toda reta *r* contida em um plano α divide-o em duas regiões. A reunião da reta *r* com qualquer uma dessas regiões é chamada de **semiplano** de origem *r*.

Observação

Quando uma reta está contida em um plano, dizemos que o plano passa pela reta.



O espaço e suas partes

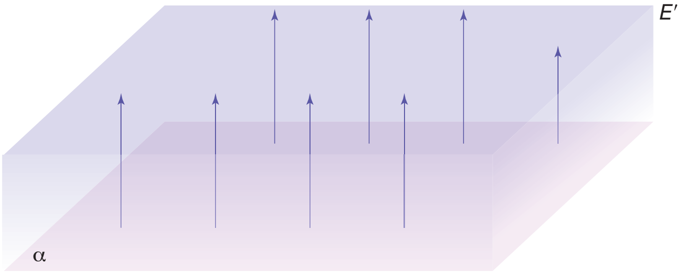
Usamos frequentemente a palavra **espaço** em afirmações que fazemos em nosso cotidiano: “Abram um espaço para eu me sentar”; “Há muito espaço nesta sala” etc.

Embora haja relação entre os significados dessa palavra empregados no cotidiano e seu significado geométrico, o conceito de espaço em Geometria é mais abrangente. Poderíamos adotar como modelo do espaço geométrico o conjunto de todos os lugares: um lugar aqui na Terra, na Lua, onde for, faz parte do espaço. A definição geométrica é a seguinte:

Espaço é o conjunto de todos os pontos.

ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

Todo plano α divide o espaço em duas regiões. A reunião do plano α com qualquer uma dessas regiões é chamada de **semiespaço** de origem α.



O conjunto E' formado pelos pontos do plano α e pelos pontos “acima” de α é um semiespaço de origem α.

Recorrendo ao paralelepípedo reto-retângulo como modelo, defina retas paralelas, retas concorrentes e retas reversas. Mostre concretamente essas representações na sala de aula, por exemplo, a que contém uma aresta do teto é paralela a qualquer reta que contenha uma aresta do piso da sala.

3. Posições relativas entre duas retas

Para representar as figuras como pontos, retas e planos no espaço, usaremos com frequência o paralelepípedo reto-retângulo (bloco retangular). Podemos desenhar antes esta figura e nela destacar os pontos, as retas e os planos que precisamos representar, como indicado na figura 1.

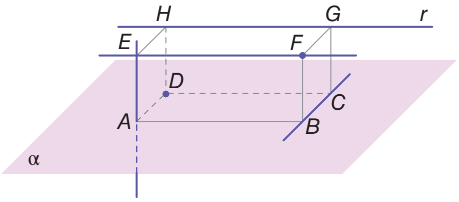


Figura 1

ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

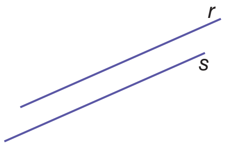
Duas retas coplanares podem ter duas posições relativas possíveis: **paralelas** (distintas ou coincidentes) ou **concorrentes**. No espaço, duas retas podem ter uma terceira posição relativa: elas podem ser **reversas**. Acompanhe a seguir as definições.

Observação

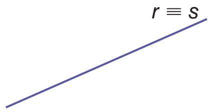
Duas figuras geométricas são **coplanares** quando todos os seus pontos pertencem a um mesmo plano.

Retas paralelas

Duas retas são **paralelas** se, e somente se, são coincidentes ou são complanares e não têm ponto comum.



r e *s* são retas paralelas distintas ($r \parallel s$ e $r \not\equiv s$).



r e *s* são retas paralelas coincidentes ($r \parallel s$ e $r \equiv s$).

Observação

Usamos o símbolo $\parallel$ para indicar o paralelismo.
Os símbolos $\equiv$ e $\not\equiv$ são lidos como “coincide” e “não coincide”, respectivamente.

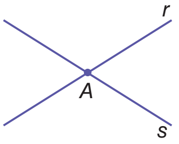
Exemplos

No paralelepípedo representado na figura 1:

a. As retas $\overleftrightarrow{HG}$ e $\overleftrightarrow{EF}$ são paralelas distintas ($\overleftrightarrow{HG} \parallel \overleftrightarrow{EF}$ e $\overleftrightarrow{HG} \not\equiv \overleftrightarrow{EF}$).

b. As retas *r* e $\overleftrightarrow{HG}$ são paralelas coincidentes ($r \parallel \overleftrightarrow{HG}$ e $r \equiv \overleftrightarrow{HG}$).

Retas concorrentes



r e *s* são concorrentes.

Duas retas são **concorrentes** se, e somente se, têm um único ponto em comum.

Exemplo

No paralelepípedo representado pela figura 1, as retas $\overleftrightarrow{AE}$ e $\overleftrightarrow{EF}$ são concorrentes (concorrem no ponto *E*).

Retas reversas

Duas retas são **reversas** se, e somente se, não são coplanares.

Em outras palavras, duas retas são reversas se, e somente se, não existe um plano que contenha as duas simultaneamente.

Exemplos

Observe os paralelepípedos reto-retângulos a seguir.

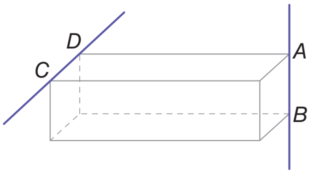


Figura 2

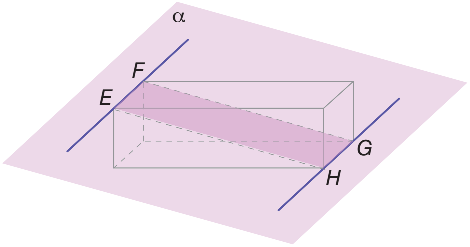


Figura 3

Na figura 2, as retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{CD}$ são reversas, pois não existe um plano que contenha ambas ao mesmo tempo. Na figura 3, as retas $\overleftrightarrow{EF}$ e $\overleftrightarrow{GH}$ **não** são reversas, pois existe um plano α que as contém: é o plano do retângulo *EFGH*.

ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Faça os exercícios no caderno.

1. Como as figuras geométricas são conjuntos de pontos, adotamos na Geometria a linguagem dos conjuntos. Dizemos, por exemplo, que um ponto pertence a uma reta, que um segmento de reta está contido em uma reta, que a intersecção de dois planos não paralelos é uma reta etc.

Nesta atividade, vamos exercitar essa linguagem.

Na reta *r*, representada a seguir, são dados quatro pontos distintos *A*, *B*, *C* e *D*.

Analise a figura e classifique em verdadeira ou falsa cada uma das afirmações.

- **a.** $\overline{AC} \cup \overline{CD} = \overline{AD}$ **1. a.** verdadeira
- **b.** $\overline{AC} \cap \overline{BD} = \overline{AD}$ **1. b.** falsa
- **c.** $A \in \overline{AB}$ **1. c.** verdadeira
- **d.** $B \notin \overline{AC}$ **1. d.** falsa
- **e.** $\overrightarrow{BA} \cup \overrightarrow{BD} = r$ **1. e.** verdadeira
- **f.** $\overrightarrow{BD} \cap \overrightarrow{CA} = \overline{BC}$ **1. f.** verdadeira
- **g.** $D \notin \overrightarrow{AB}$ **1. g.** falsa

2. Classifique em verdadeira ou falsa cada uma das afirmações:

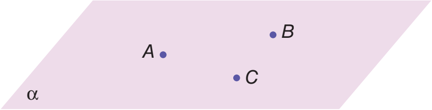
- **a.** Duas retas que têm um único ponto em comum são concorrentes. **2. a.** verdadeira
- **b.** Duas retas não paralelas são concorrentes. **2. b.** falsa
- **c.** Se *r*, *s* e *t* são retas coplanares tais que *r* e *s* são paralelas e *t* concorre com *r*, então *t* concorre com *s*. **2. c.** verdadeira
- **d.** Se *r*, *s* e *t* são retas tais que *r* é paralela a *s* e *s* é paralela a *t*, então *r* é paralela a *t*. **2. d.** verdadeira
- **e.** Se *r*, *s* e *t* são retas distintas tais que *r* e *s* são reversas, e *s* e *t* são reversas, então *r* e *t* são reversas. **2. e.** falsa
- **f.** Duas retas que não têm ponto em comum são paralelas. **2. f.** falsa
- **g.** Duas retas não coplanares são reversas. **2. g.** verdadeira

4. Determinação de um plano

Um plano pode ser determinado por meio de um dos quatro casos fundamentais a seguir.

Três pontos não colineares determinam um plano.

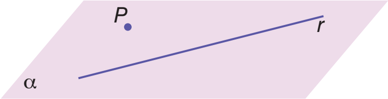
O plano determinado por três pontos não colineares *A*, *B* e *C* é indicado por pl(*ABC*).



$\alpha \equiv \text{pl}(ABC)$

Uma reta e um ponto que não pertence a ela determinam um plano.

O plano determinado por uma reta *r* e um ponto *P* que não pertence a *r* é indicado por pl(*r*, *P*).

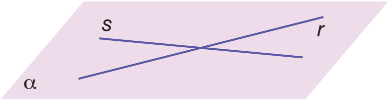


$\alpha \equiv \text{pl}(r, P)$

ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

Duas retas concorrentes determinam um plano.

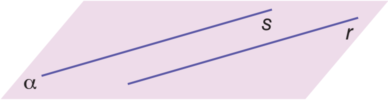
O plano determinado por duas retas concorrentes *r* e *s* é indicado por pl(*r*, *s*).



$\alpha \equiv \text{pl}(r, s)$

Duas retas paralelas distintas determinam um plano.

O plano determinado por duas retas paralelas distintas *r* e *s* é indicado por pl(*r*, *s*).



$\alpha \equiv \text{pl}(r, s)$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

1. É comum utilizar um tripé para dar estabilidade a um objeto. Por exemplo, o cavalete de um pintor não pode balançar quando o pincel toca a tela. Explique por que o tripé não balança mesmo que esteja apoiado em um piso sempre irregular.

Resolução

Três pontos não colineares determinam um plano. Assim, os pontos de apoio do tripé no piso sempre estão em um mesmo plano, por isso dão estabilidade ao tripé.

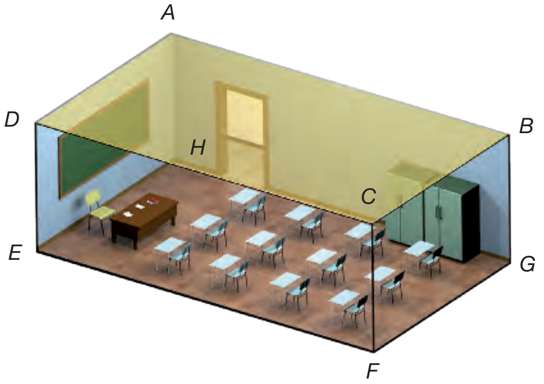
KOSTSOV/ISTOCK/GETTY IMAGES

Cavalete com três pontos de apoio.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Faça os exercícios no caderno.

3. A figura a seguir representa uma sala de aula cujo formato se parece com um paralelepípedo reto-retângulo *ABCDEFGH*.



ROGÉRIO LOURENÇO/ARQUIVO DA EDITORA

Classifique cada uma das afirmações em verdadeira ou falsa.

a. $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{DC}$ **3. a.** verdadeira

b. $\overleftrightarrow{CD} \parallel \overleftrightarrow{HG}$ **3. b.** verdadeira

c. $\overleftrightarrow{EF} \parallel \overleftrightarrow{FG}$ **3. c.** falsa

d. $\overleftrightarrow{EF}$ e $\overleftrightarrow{FG}$ são concorrentes. **3. d.** verdadeira

e. $\overleftrightarrow{CB}$ e $\overleftrightarrow{HE}$ são reversas. **3. e.** falsa

f. Existe um plano que contém $\overleftrightarrow{CB}$ e $\overleftrightarrow{HE}$. **3. f.** verdadeira

g. $\overleftrightarrow{CF}$ e $\overleftrightarrow{HE}$ são reversas. **3. g.** verdadeira

h. $\overleftrightarrow{DB}$ e $\overleftrightarrow{AC}$ são concorrentes. **3. h.** verdadeira

i. $\overleftrightarrow{DB}$ e $\overleftrightarrow{HF}$ são coplanares. **3. i.** falsa

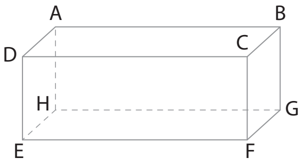
j. $D \in \text{pl}(ABC)$ **3. j.** verdadeira

k. $F \notin \text{pl}(HEG)$ **3. k.** falsa

l. $\overleftrightarrow{EG}$ e $\overleftrightarrow{AC}$ são reversas. **3. l.** verdadeira

4. Para cada um dos itens a seguir, represente em seu caderno um paralelepípedo reto-retângulo como o da figura.

4. Respostas no final do livro.



FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

Em seguida, desenhe no paralelepípedo um triângulo contido no plano determinado:

a. pelos pontos *A*, *B* e *C*;

b. pelas retas $\overleftrightarrow{DB}$ e $\overleftrightarrow{EG}$;

c. pelas retas $\overleftrightarrow{BF}$ e $\overleftrightarrow{CG}$;

d. pela reta $\overleftrightarrow{AB}$ e pelo ponto *F*.

5. Classifique cada uma das afirmações a seguir em verdadeira ou falsa.

a. Três pontos distintos determinam um plano. **5. a.** falsa

b. Os vértices de um triângulo determinam um plano. **5. b.** verdadeira

c. Dados uma reta *r* e um ponto *P*, existe um único plano que contém *r* e passa por *P*. **5. c.** falsa

d. Dados uma reta *r* e um ponto *P*, com $P \notin r$, existe um único plano que contém *r* e passa por *P*. **5. d.** verdadeira

e. Duas retas quaisquer determinam um plano. **5. e.** falsa

f. Se *r* e *s* são retas concorrentes, então existe um único plano que contém ambas. **5. f.** verdadeira

g. Se *r* e *s* são retas paralelas, então existe um único plano que contém *r* e *s*. **5. g.** falsa

h. Se *r* e *s* são retas paralelas distintas, então existe um único plano que contém ambas. **5. h.** verdadeira

i. Se *r* e *s* são retas coplanares, então essas retas são concorrentes ou paralelas. **5. i.** verdadeira

j. Se duas retas são concorrentes ou paralelas, então elas são coplanares. **5. j.** verdadeira

k. Três retas paralelas entre si são coplanares. **5. k.** falsa

l. Três retas paralelas entre si podem ser coplanares. **5. l.** verdadeira

m. Se *r*, *s* e *t* são retas distintas que concorrem em um mesmo ponto, então essas retas são coplanares. **5. m.** falsa

n. Duas retas concorrentes e um ponto que não pertence a nenhuma delas são coplanares. **5. n.** falsa

6. Para a construção de um contrapiso horizontal, um pedreiro fixou três taliscas (pedaços de cerâmica ou madeira) em posições não colineares do piso ainda desnivelado. Em seguida, sobrepôs uma régua de alumínio perfeitamente reta a cada par de taliscas, ajustando-as com a ajuda de um nível de bolha, de modo que cada par de taliscas ficasse em uma reta horizontal. Depois de seca a massa que fixava as taliscas, o pedreiro preencheu a região com argamassa e retirou o excesso de argamassa com o auxílio da régua de alumínio, passando-a por duas taliscas de cada vez, deixando a superfície lisa. Dessa maneira, o pedreiro concluiu que o contrapiso era plano e horizontal.

Utilizando uma ou mais proposições estudadas na Geometria espacial, expliquem por que a conclusão do pedreiro é verdadeira.

SERRALHEIRO/ARQUIVO DA EDITORA

7. Elaborem e resolvam um problema sobre a determinação de um plano que envolva uma situação do cotidiano (utilizem como modelo o exercício anterior). **7.** Resposta pessoal.

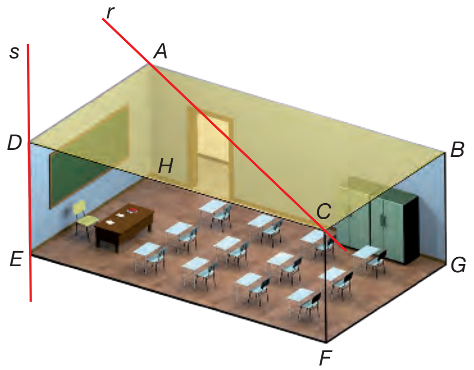
6. Três pontos não colineares determinam um plano. Além disso, como as direções da régua sobre duas taliscas quaisquer eram horizontais, o plano do contrapiso é horizontal.

5. Posições relativas entre reta e plano

Recorrendo ao paralelepípedo reto-retângulo como modelo, defina as posições relativas entre reta e plano. Mostre concretamente essas representações na sala de aula; por exemplo, a reta que contém uma diagonal do teto é paralela ao plano do piso.

Insistimos na importância do paralelepípedo reto-retângulo para as representações de figuras espaciais. Mais uma vez recorremos a ele para descrever as posições relativas entre uma reta e um plano.

Observe as retas *r* e *s* representadas na figura, em que está indicado um paralelepípedo reto-retângulo *ABCDEFGH*.



ROGÉRIO LOURENÇO/ARQUIVO DA EDITORA

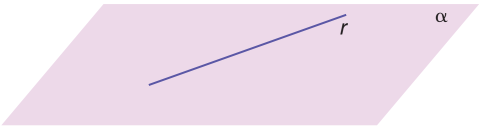
- Todos os pontos da reta *r* pertencem ao plano do teto da sala. Por isso, dizemos que *r* está contida no plano do teto. (Lembre-se de que a reta e o plano continuam infinitamente além dos limites do paralelepípedo.)
- A reta *r* não tem ponto em comum com o plano do piso. Por isso, dizemos que a reta *r* é paralela ao plano do piso.
- A reta *s* tem um único ponto em comum, *D*, com o plano do teto. Por isso, dizemos que a reta *s* é secante ao plano do teto em *D*. (Note que *s* também é secante ao plano do piso, no ponto *E*.)

Essas representações nos ajudam a entender as três posições relativas possíveis entre uma reta e um plano no espaço, que definimos a seguir.

Reta contida em um plano

Uma reta *r* está **contida** em um plano α se, e somente se, todos os pontos de *r* pertencem ao plano α.

$$r \subset \alpha \Leftrightarrow r \cap \alpha = r$$



Observação

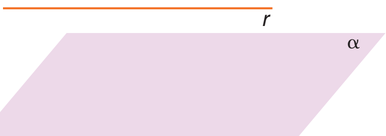
Se uma reta *r* está contida em um plano α, então dizemos que o plano α passa pela reta *r*.

Admite-se como postulado: “Se dois pontos distintos de uma reta *r* pertencem a um plano α, então todos os pontos da reta *r* pertencem ao plano α, isto é, $r \subset \alpha$”.

Reta paralela a um plano

Uma reta *r* é **paralela** a um plano α se, e somente se, *r* e α não têm nenhum ponto em comum. Ou seja:

$$r \,/\!/\, \alpha \Leftrightarrow r \cap \alpha = \varnothing$$



Observação

Dizemos que um segmento $\overline{AB}$ é paralelo a um plano α se, e somente se, a reta $\overleftrightarrow{AB}$ é paralela a α.

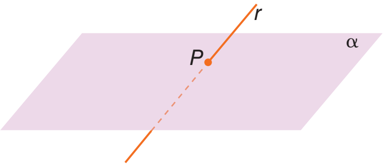
ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

É importante variar a visualização, para não passar a falsa ideia de que uma reta secante a um plano seja perpendicular ao plano (a reta que contém uma aresta vertical e o plano do teto ou do piso). Por exemplo, a reta representada pelo corrimão reto de uma escada é secante ao plano do piso.

Reta secante (ou concorrente) a um plano

Uma reta *r* é **secante** (ou **concorrente**) a um plano α se, e somente se, *r* e α têm um único ponto em comum.

Reflexão: Por definição, duas figuras geométricas *A* e *B* coincidem se, e somente se, todo ponto de *A* pertence a *B* e todo ponto de *B* pertence a *A*. Assim, considerando uma reta *r* contida em um plano α, temos que todo ponto de *r* pertence a α, mas nem todo ponto de α pertence a *r*. Logo, *r* não coincide com α.



FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

Observação

Se *r* é secante a α, podemos dizer, também, que *r* e α são secantes.

Reflexão

Quando uma reta *r* está contida em um plano α, podemos dizer que *r* coincide com α?

EXERCÍCIO RESOLVIDO

2. Após o término da construção do contrapiso de uma sala, um trabalhador da construção civil conferiu a qualidade do trabalho colocando uma régua perfeitamente reta em duas direções diferentes. Assim, constatou que, em ambas as direções, a régua ficava totalmente encostada no contrapiso. Repetindo esse procedimento em várias regiões da sala, ele concluiu que o contrapiso era plano.

Utilizando uma ou mais proposições estudadas na Geometria espacial, explique por que a conclusão do trabalhador da construção civil é verdadeira.

Trabalhador da construção civil utiliza uma régua para conferir alinhamento do contrapiso.

FERNANDO FAVORETTO/ARQUIVO DA EDITORA

Resolução

Observando que, em cada posição, todos os pontos da régua tocam o piso, conclui-se que esses pontos tocados pela régua são colineares e, portanto, também coplanares. Além disso, a régua foi colocada em direções distintas, isto é, segundo retas concorrentes. Como retas concorrentes determinam um plano, foi possível concluir que o contrapiso é plano.

EXERCÍCIO PROPOSTO

Faça o exercício no caderno.

8. É correto afirmar que:

a. Duas retas distintas e paralelas a um mesmo plano são paralelas entre si.

b. Se as retas *r* e *s* são reversas e *r* está contida em um plano α, então *s* é secante a α.

c. Se uma reta *r* não é paralela a um plano α, então *r* é secante a α.

d. Se uma reta *r* é paralela a um plano α, então *r* é paralela a todas as retas do plano α.

e. Se dois pontos distintos de uma reta *r* pertencem a um plano α, então infinitos pontos de *r* pertencem a α.

8. alternativa **e**

a. Falso, pois podem ser paralelas, concorrentes ou reversas.

b. Falso, pois *s* pode ser paralela a α.

c. Falso, pois *r* pode estar contida em α.

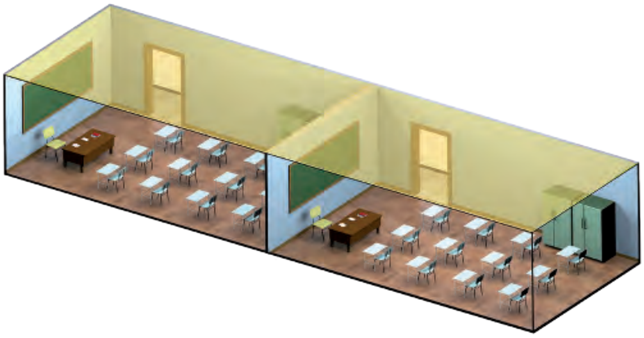
d. Falso, pois existem em α infinitas retas reversas a *r*.

e. Verdadeiro, pois, se a reta *r* possui dois pontos distintos em um plano α, então *r* esta contida em α.

6. Posições relativas entre dois planos

Cada uma das salas de aula representadas na figura pode ser associada a um paralelepípedo reto-retângulo.

Recorrendo ao paralelepípedo reto-retângulo como modelo, defina as posições relativas entre dois planos. Mostre concretamente essas representações na sala de aula; por exemplo, o plano do teto é paralelo ao plano do piso.



ROGÉRIO LOURENÇO/ARQUIVO DA EDITORA

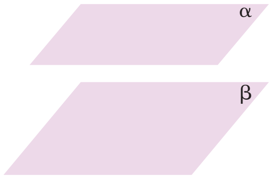
Note que:

- o plano do teto não tem ponto comum com o plano do piso; por isso, dizemos que esses planos são paralelos distintos;
- o plano do teto de uma sala e o plano do teto da outra é o mesmo; por isso, dizemos que esses planos são coincidentes (ou paralelos coincidentes);
- o plano do teto e o plano de uma parede têm em comum uma única reta; por isso, dizemos que esses planos são secantes.

Essas observações ilustram as possíveis posições relativas entre dois planos, definidas a seguir.

Planos paralelos

Dois planos são **paralelos** se, e somente se, não têm ponto em comum ou têm todos os seus pontos em comum.



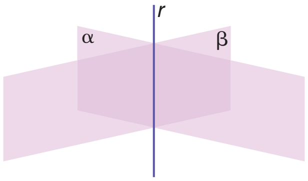
α e β são planos paralelos distintos.
$(\alpha \parallel \beta \text{ e } \alpha \not\equiv \beta \Leftrightarrow \alpha \cap \beta = \varnothing)$

α e β são planos paralelos coincidentes.
$(\alpha \equiv \beta \Leftrightarrow \alpha \cap \beta = \alpha = \beta)$

ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

Planos secantes

Dois planos são **secantes** se, e somente se, têm uma única reta em comum.



α e β são planos secantes.

No caso de **planos secantes**, os planos que contêm duas faces adjacentes do paralelepípedo podem dar a falsa ideia de que planos secantes devam ser perpendiculares, por isso é importante visualizar planos secantes em outras situações, por exemplo, o plano de uma rampa que une dois pisos em desnível é secante ao plano de cada um desses pisos.

Nota:
É importante verificar planos secantes em outras situações, além do paralelepípedo, pois nele há uma particularidade (o ângulo reto) que não é necessária em planos secantes. Por exemplo, as capas de um livro semiaberto podem ser associadas a planos secantes.

ILYA AKINSHIN/SHUTTERSTOCK

As páginas de um livro aberto, como nesta foto, nos dão a ideia de planos secantes.

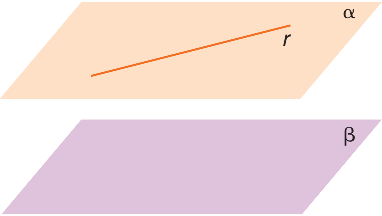
Ao resolver o **exercício proposto 11**, diga aos estudantes que o procedimento indicado não basta para garantir que as lajes sejam paralelas, porque uma reta não determina um plano. Isto é, o fato de a reta $\overleftrightarrow{AB}$ ser horizontal não garante que o plano no qual ela está contida seja horizontal. Um procedimento correto seria, em cada laje, posicionar o nível de bolha em duas direções concorrentes constatando que as duas direções são horizontais. Como duas retas concorrentes determinam um plano, os planos das duas lajes seriam horizontais; portanto, as lajes seriam paralelas.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

3. Demonstre o teorema:

> Se dois planos distintos, α e β, são paralelos, então toda reta *r* contida em α é paralela a β.

Resolução



FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

Como $\alpha \cap \beta = \varnothing$ e *r* está contida em α, concluímos que $r \cap \beta = \varnothing$, ou seja, *r* é paralela a β.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Faça os exercícios no caderno.

9. Classifique em verdadeira ou falsa cada uma das afirmações a seguir.

a. Dois planos que possuem uma única reta em comum são secantes. **9. a.** verdadeira

b. Dois planos que possuem uma reta em comum são secantes. **9. b.** falsa

c. A intersecção de dois planos pode ser um segmento de reta. **9. c.** falsa

d. Três planos podem ter um único ponto em comum. **9. d.** verdadeira

e. Se duas retas, *r* e *s*, têm um único ponto em comum e *r* está contida em um plano α, então *s* e α têm um único ponto em comum. **9. e.** falsa

f. Existem infinitos planos que passam por um mesmo ponto. **9. f.** verdadeira

g. Se α e β são planos paralelos distintos e *r* e *s* são retas tais que $r \subset \alpha$ e $s \subset \beta$, então *r* é paralela a *s* ou *r* é reversa a *s*. **9. g.** verdadeira

h. Se α, β e γ são planos tais que $\alpha \mathbin{/\!/} \beta$ e $\beta \mathbin{/\!/} \gamma$, então $\alpha \mathbin{/\!/} \gamma$. **9. h .** verdadeira

10. Analisem as afirmações:

(1) Se dois planos são paralelos distintos, então toda reta contida em um deles é paralela ao outro.

(2) Se dois planos são paralelos distintos e uma reta é paralela a um deles, então essa reta é paralela ao outro plano.

(3) Se α e β são planos paralelos e um plano γ é secante a α, então as intersecções $\gamma \cap \alpha$ e $\gamma \cap \beta$ são retas paralelas.

(4) Se um plano γ é secante a dois planos distintos α e β tal que as intersecções $\gamma \cap \alpha$ e $\gamma \cap \beta$ são retas paralelas, então o plano α é paralelo a β.

Essa análise permite concluir que as afirmações verdadeiras são: **10.** alternativa **c**

a. Todas.

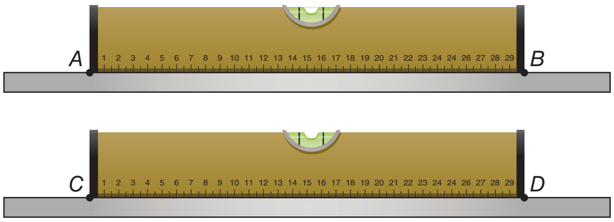
b. Apenas 1 e 2.

c. Apenas 1 e 3.

d. Apenas 3 e 4.

e. Apenas 1, 2 e 3.

11. Para verificar se duas lajes planas de um edifício são paralelas, um engenheiro colocou um nível de bolha em uma posição $\overline{AB}$ sobre uma laje e em uma posição $\overline{CD}$ sobre a outra, afirmando que as retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{CD}$ são horizontais. Isso é suficiente para garantir que as lajes são paralelas? Por quê? **11.** Não é possível. O engenheiro precisaria verificar o nível em duas posições distintas e não paralelas de cada laje, pois uma reta não determina um plano.



ORACICART/ ARQUIVO DA EDITORA

DAN KOSMAYER/SHUTTERSTOCK

Edifício em construção.

12. Dois planos distintos podem ter somente um ponto em comum? Justifique sua resposta.

12. Não, pois se dois planos distintos têm ponto em comum, então terão infinitos pontos, o que significa que possuem uma reta em comum, o que os torna planos secantes.

Conectado

Conectado: Respostas no final do livro.

Acesse um *software* gratuito de Geometria Dinâmica e recorra sempre a esse programa quando estiver estudando Geometria. Isso o ajudará muito.

Para começar, faça as construções a seguir utilizando os recursos do programa.

a. Represente um ponto P e uma reta r, com $P \notin r$. Em seguida, desenhe a reta s que passa por P e é paralela a r.

b. Represente um paralelepípedo reto-retângulo *ABCDEFGH* e desenhe três retas paralelas distintas que contenham, respectivamente, três arestas do paralelepípedo. Essas retas são coplanares? Justifique sua resposta.

c. Represente um paralelepípedo reto-retângulo *ABCDEFGH*, em que $\overline{AC}$ e $\overline{EG}$ sejam diagonais não coplanares de duas faces paralelas do paralelepípedo. Em seguida, desenhe as retas $\overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{EG}$. Qual é a posição relativa dessas retas?

d. Represente um ponto P e um plano α, com $P \notin \alpha$. Em seguida, desenhe uma reta r que passa por P e é paralela a α.

e. Represente dois planos secantes, desenhando a reta t comum a eles.

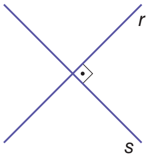
f. Represente dois planos paralelos distintos.

7. Perpendicularidade

A palavra latina *perpendicularis*, que significa "o que está a prumo", deu origem à palavra portuguesa **perpendicular**, que significa "o que se intercepta em ângulo reto". A perpendicularidade pode ocorrer entre duas retas, entre uma reta e um plano ou entre dois planos, conforme apresentado a seguir.

Retas perpendiculares

Duas retas, r e s, são **perpendiculares** se, e somente se, são concorrentes e determinam um ângulo reto entre si.



Observação

Note que, se duas retas formam um ângulo reto entre si, então elas formam quatro ângulos retos.

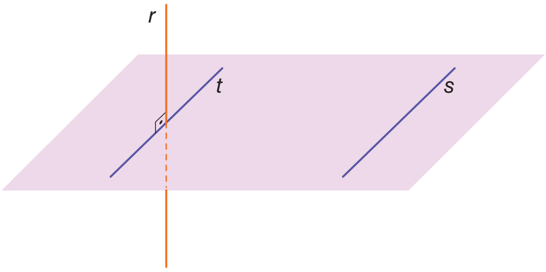
Se r e s são perpendiculares, indicamos: $r \perp s$ ou $s \perp r$

Ainda definimos:

- Duas linhas retas quaisquer (segmentos de reta ou semirretas) são perpendiculares se, e somente se, são concorrentes e estão contidas em retas perpendiculares.
- Duas retas concorrentes não perpendiculares entre si são chamadas de **retas oblíquas** entre si.

Retas ortogonais

As retas r e s representadas na figura a seguir são reversas, e a reta t é perpendicular a r e paralela a s. Sob essas condições, dizemos que as retas r e s são **ortogonais**.



ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

Genericamente, definimos:

Duas retas, *r* e *s*, são **ortogonais** quando são reversas e existe uma reta perpendicular a uma delas e paralela à outra.

Observe o modelo a seguir, que ilustra essa definição.

Na sala, cujo formato pode ser associado a um paralelepípedo reto-retângulo, representada na figura, as retas *r* e *s* são ortogonais, pois elas são reversas, e a reta *r′* é paralela a *r* e é perpendicular a *s*.

PAULO MANZI/ARQUIVO DA EDITORA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Notas:

1. Dizemos que duas retas formam ângulo reto entre si quando elas são perpendiculares ou ortogonais.
2. Há autores que definem duas retas ortogonais como “retas que formam ângulos retos entre si”. Segundo essa definição, retas perpendiculares também são ortogonais. Preferimos adotar a definição que exige, além da formação do ângulo reto, que as retas ortogonais sejam reversas. Desse modo, retas perpendiculares são necessariamente coplanares e retas ortogonais são necessariamente reversas.

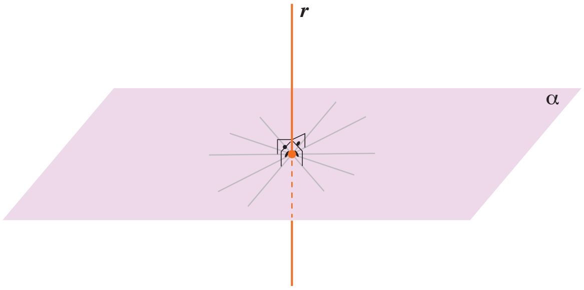
Reta perpendicular a um plano

Uma reta *r* é **perpendicular** a um plano α se, e somente se, *r* é secante a α e todas as retas do plano α que concorrem com *r* são perpendiculares a *r*.

Indicamos que *r* é perpendicular a α por: $r \perp \alpha$ ou $\alpha \perp r$.

SAITAM66/ISTOCK/GETTY IMAGES

Lustre suspenso perpendicularmente a um teto plano e horizontal.

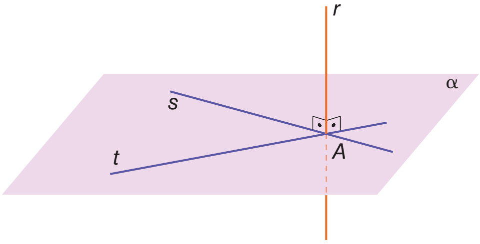


FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

Você pode imaginar uma reta perpendicular a um plano observando, por exemplo, um lustre preso por uma haste ao teto plano e horizontal de uma sala. Essa haste associa-se a uma reta perpendicular ao plano do teto.

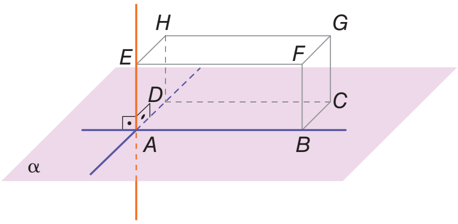
Teorema

Se uma reta é perpendicular a duas retas concorrentes de um plano, então ela é perpendicular ao plano.



Exemplo

No paralelepípedo reto-retângulo representado a seguir, a reta $\overleftrightarrow{AE}$ é perpendicular ao plano α, pois $\overleftrightarrow{AE}$ é perpendicular às retas concorrentes $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{AD}$, contidas em α.



Reflexão

Se as retas *r* e *s* são perpendiculares a um mesmo plano α, então *r* // *s*?

Reflexão: Espera-se que os estudantes respondam que sim, pois, se as retas *r* e *s* são perpendiculares a um mesmo plano, então elas são paralelas distintas ou paralelas coincidentes.

ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

EXERCÍCIO RESOLVIDO

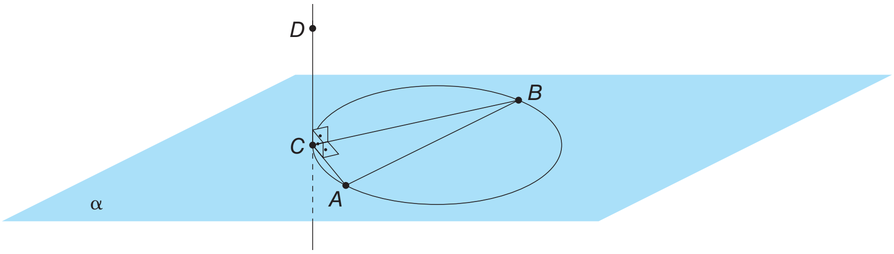
4. Três pontos distintos, *A*, *B* e *C*, pertencem a uma circunferência de diâmetro $\overline{AB}$ contida em um plano α. Um ponto *D*, não pertencente a α, é tal que a reta $\overleftrightarrow{CD}$ é perpendicular a α. Nessas condições, conclui-se que:

a. $\overleftrightarrow{CB} \perp \text{pl}(ABD)$
b. $\overleftrightarrow{DA} \perp \alpha$
c. $\overleftrightarrow{DB} \perp \alpha$
d. $\overleftrightarrow{CB} \perp \text{pl}(ACD)$
e. $\overleftrightarrow{CD} \perp \text{pl}(ABD)$

Resolução

Como $\overleftrightarrow{CD}$ é perpendicular a α, temos, por definição de reta perpendicular a um plano, que $\overleftrightarrow{CD}$ é perpendicular a qualquer reta contida em α que passe por *C*; portanto, $\overleftrightarrow{CD} \perp \overleftrightarrow{CA}$ e $\overleftrightarrow{CD} \perp \overleftrightarrow{CB}$. Além disso, o ângulo $A\hat{C}B$ é reto, pois o triângulo *ACB* está inscrito em uma semicircunferência de diâmetro $\overline{AB}$.

Uma possível representação dessa situação é mostrada no esquema:

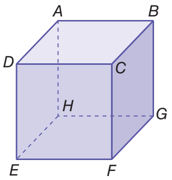


Assim, temos que a reta $\overleftrightarrow{CB}$ é perpendicular às retas concorrentes $\overleftrightarrow{CD}$ e $\overleftrightarrow{CA}$, com o que concluímos, de acordo com o teorema anterior, que $\overleftrightarrow{CB}$ é perpendicular ao plano pl(*ACD*).

Portanto, a alternativa **d** é a correta.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

13. Lembrando que todas as faces de um cubo são quadrados, classifique em verdadeira ou falsa cada uma das afirmações a seguir, referentes ao cubo representado pela figura.



FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

a. A reta $\overleftrightarrow{CB}$ é perpendicular à reta $\overleftrightarrow{CD}$. **13. a.** verdadeira

b. A reta $\overleftrightarrow{CB}$ é perpendicular à reta $\overleftrightarrow{BF}$. **13. b.** falsa

c. A reta $\overleftrightarrow{CB}$ é ortogonal à reta $\overleftrightarrow{DH}$. **13. c.** falsa

d. A reta $\overleftrightarrow{BF}$ é ortogonal à reta $\overleftrightarrow{DH}$. **13. d.** verdadeira

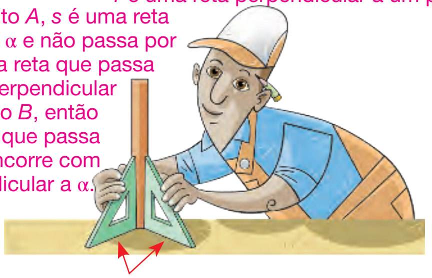
e. A reta $\overleftrightarrow{BF}$ forma ângulo reto com a reta $\overleftrightarrow{DH}$. **13. e.** verdadeira

f. A reta $\overleftrightarrow{CB}$ é perpendicular ao plano pl(*CDE*). **13. f.** verdadeira

g. A reta $\overleftrightarrow{CG}$ é perpendicular ao plano pl(*FGH*). **13. g.** falsa

14. Para fixar uma haste perpendicular à superfície plana de uma peça de madeira, um marceneiro usou dois esquadros em posições diferentes, encostados na haste e na superfície plana da peça de madeira, como mostra a figura.

14. Teorema das três perpendiculares: se *r* é uma reta perpendicular a um plano α em um ponto *A*, *s* é uma reta contida em α e não passa por *A*, e *t* é uma reta que passa por *A* e é perpendicular a *s* no ponto *B*, então toda reta *u* que passa por *B* e concorre com *r* é perpendicular a α.



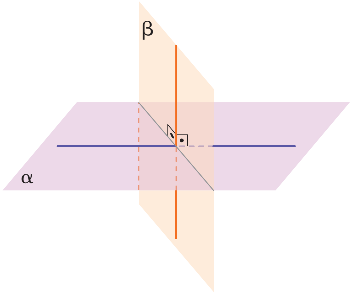
SERRALHEIRO/ARQUIVO DA EDITORA

A perpendicularidade da haste em relação ao plano fica garantida por qual teorema da Geometria?

Planos perpendiculares

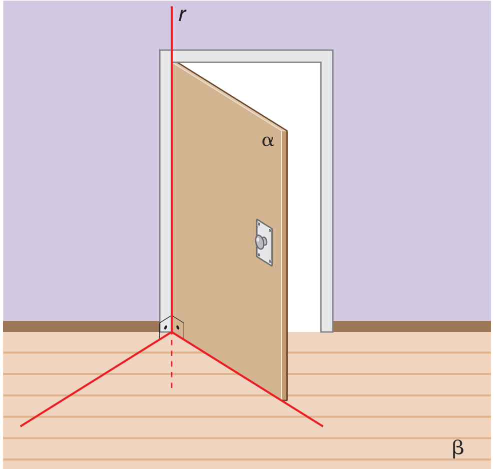
Dois planos são **perpendiculares** se, e somente se, um deles contém uma reta perpendicular ao outro.

Indicamos que um plano α é perpendicular a um plano β por: α ⊥ β



FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

Para visualizar concretamente a perpendicularidade entre planos, podemos recorrer ao paralelepípedo reto-retângulo, porém é importante visualizá-la em outras situações. Por exemplo, observe uma porta presa ao eixo de rotação *r*. Em qualquer abertura, a porta pode ser associada a um plano α que é perpendicular ao plano β do piso, pois contém a reta *r*, que é perpendicular a β.



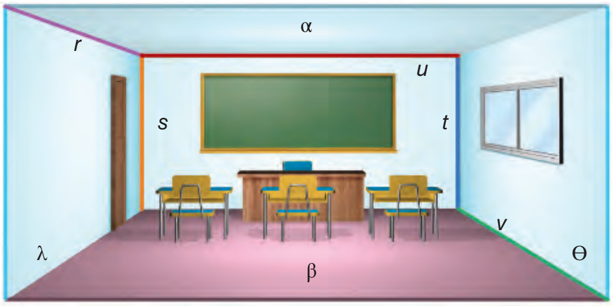
BRUNO MOTTA/ARQUIVO DA EDITORA

17. O fio do prumo representa a reta r; a parede representa o plano α, paralelo a r; e um plano horizontal qualquer representa o plano β, que poderá ser o plano do piso, se este for horizontal.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Faça os exercícios no caderno.

15. A sala de aula representada na figura tem formato que pode ser associado a um paralelepípedo reto-retângulo. Os planos α, β, θ e λ são os planos do teto, do piso, da parede que contém a janela e da parede que contém a porta, respectivamente. E as retas r, s, t, u e v são retas que contêm intersecções entre teto e parede, ou entre piso e parede, ou entre paredes.



PAULO MANZI/ARQUIVO DA EDITORA

Classifique cada uma das afirmações a seguir em verdadeira ou falsa.

a. θ é perpendicular a α. **15. a.** verdadeira

b. θ é perpendicular a β. **15. b.** verdadeira

c. α é perpendicular a β. **15. c.** falsa, pois α é paralelo a β.

d. u é paralela a β. **15. d.** verdadeira

e. u é paralela a α. **15. e.** falsa, pois u esta contida em α.

f. α é paralelo a β. **15. f.** verdadeira

g. α é perpendicular a pl(s, t). **15. g.** verdadeira

h. r e t são reversas. **15. h.** verdadeira

i. r é ortogonal a t. **15. i.** verdadeira

j. r e u são reversas. **15. j.** falsa, pois r e u são perpendiculares.

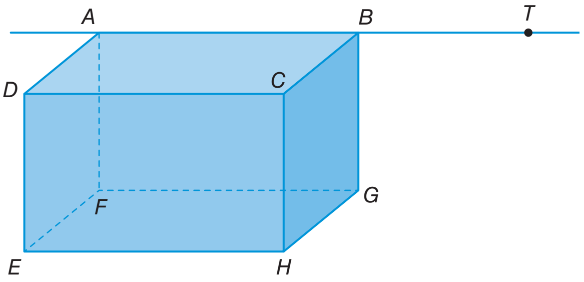
k. t é perpendicular a β. **15. k.** verdadeira

l. r e v são paralelas. **15. l.** verdadeira

m. pl(r, v) é perpendicular a pl(s, t). **15. m.** verdadeira

n. pl(u, s) $\not\equiv$ pl(s, t). **15. n.** falsa, pois s, t e u estão contidas no mesmo plano (parede da lousa).

16. A figura a seguir representa um paralelepípedo reto-retângulo $ABCDEFGH$, em que o ponto T pertence à reta $\overleftrightarrow{AB}$.



ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

Em relação a esse paralelepípedo, classifique em verdadeira ou falsa cada uma das afirmações:

a. pl(TCH) $\perp$ pl(EHG) **16. a.** verdadeira

b. pl(TDE) $\perp$ pl(ABC) **16. b.** verdadeira

c. pl(TCB) $\perp$ pl(EHG) **16. c.** falsa

d. pl(TCB) $\perp$ pl(ABG) **16. d.** verdadeira

e. pl(TBG) $\perp$ pl(TCH) **16. e.** falsa

17. Para verificar se uma parede está sendo construída corretamente na vertical, um pedreiro aproxima um fio de prumo a uma pequena distância da parede e observa se essa distância se mantém ao longo do fio. Intuitivamente, o pedreiro está aplicando a seguinte proposição: "Se uma reta r é perpendicular a um plano β, então todo plano α paralelo à reta r é perpendicular ao plano β". Explique, entre os objetos envolvidos nos procedimentos do pedreiro, quais representam os planos α e β e a reta r.

FERNANDO FAVORETTO/CRIAR IMAGEM

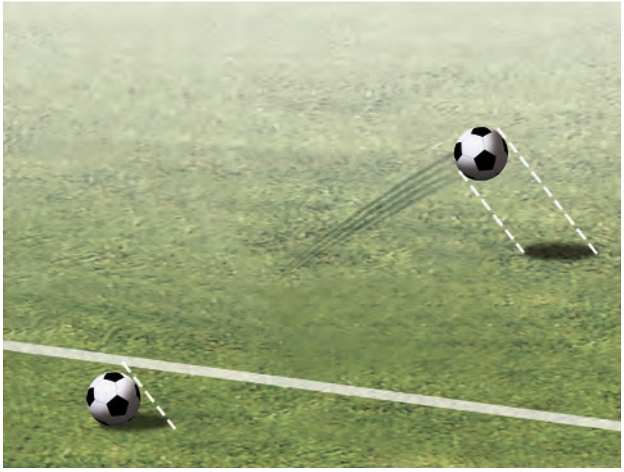
Prumo.

Para retomar os conteúdos estudados, resolva os exercícios complementares 1 a 3.

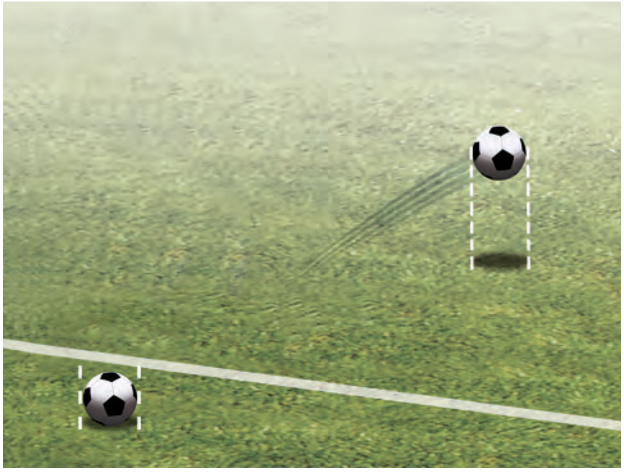
8. Projeção ortogonal sobre um plano

Na abertura apresentamos o uso da sombra como projeção de uma imagem feita por luz artificial (lâmpada). Outro exemplo é a projeção de um objeto feita por luz natural. Ao ser iluminada pelo Sol, uma bola de futebol projeta uma sombra sobre o campo. Se os raios solares são oblíquos ao plano do campo, a sombra é chamada de projeção oblíqua da bola sobre o campo; se os raios solares são perpendiculares ao plano do campo, a sombra é chamada de **projeção ortogonal** da bola sobre o campo.

ILUSTRAÇÕES: PAULO MANZI/ARQUIVO DA EDITORA



Os raios solares são oblíquos ao plano do campo; por isso, as sombras são chamadas de projeções oblíquas sobre esse plano. Modelo didático sem escala e com cores fantasia.

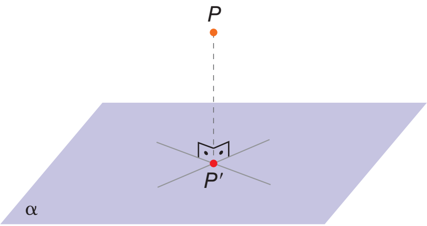


Os raios solares são perpendiculares ao plano do campo: por isso, as sombras são chamadas de projeções ortogonais sobre esse plano. Modelo didático sem escala e com cores fantasia.

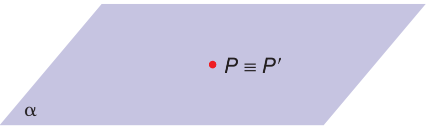
Usando uma lanterna, projete, em várias posições diferentes, a sombra de um objeto sobre o plano da lousa. Comente que a sombra é a **projeção** do objeto sobre o plano da lousa. Quando os raios de luz da lanterna forem perpendiculares ao plano da lousa, a sombra é chamada de **projeção ortogonal** do objeto sobre esse plano.

Nesse exemplo, escolhemos o Sol como fonte de luz porque os raios solares podem ser considerados paralelos, o que modela adequadamente as definições a seguir.

A **projeção ortogonal** de um ponto P sobre um plano α é o ponto P' tal que P' pertence a α e $\overline{PP'} \perp \alpha$.



$P \notin \alpha$



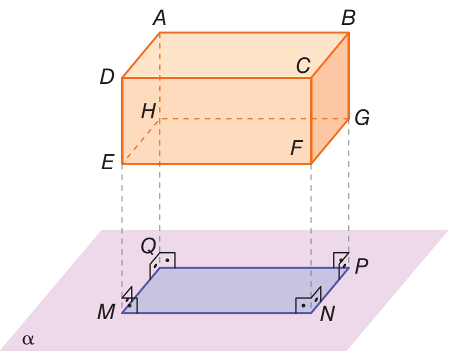
$P \in \alpha$ (Nesse caso, o ponto P coincide com a projeção ortogonal P'.)

ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

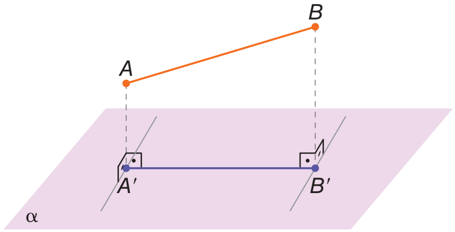
A **projeção ortogonal** de uma figura geométrica sobre um plano é o conjunto das projeções ortogonais de todos os pontos da figura sobre esse plano.

Exemplos

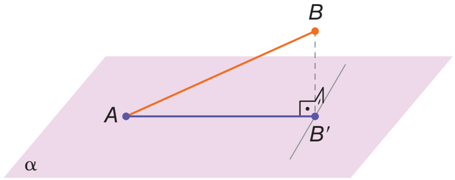
a. Na figura, o quadrilátero $MNPQ$ representa as projeções ortogonais de todos os pontos do paralelepípedo $ABCDEFGH$ sobre o plano α. Assim, esse quadrilátero é a projeção ortogonal do paralelepípedo sobre o plano α.



b. Na figura, $A \notin \alpha$ e $B \notin \alpha$. A projeção ortogonal do segmento $\overline{AB}$ sobre o plano α é o segmento $\overline{A'B'}$.



c. Na figura, $A \in \alpha$ e $B \notin \alpha$. A projeção ortogonal do segmento $\overline{AB}$ sobre o plano α é o segmento $\overline{AB'}$.



ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

Reflexão

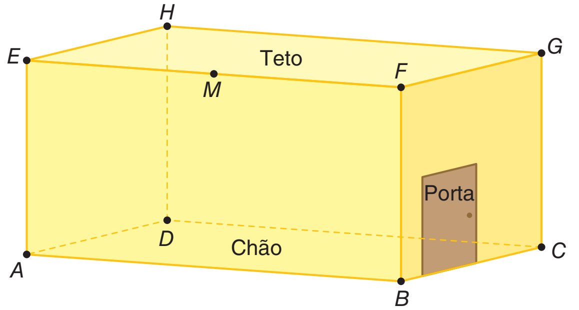
Reflexão: A projeção ortogonal do segmento de reta sobre o plano α é um ponto.

Com base nos exemplos, se um segmento de reta é perpendicular a um plano α, que figura geométrica é a projeção ortogonal desse segmento sobre α?

EXERCÍCIO PROPOSTO

Faça o exercício no caderno.

18. (Enem) Uma lagartixa está no interior de um quarto e começa a se deslocar. Esse quarto, apresentando o formato de um paralelepípedo retangular, é representado pela figura.

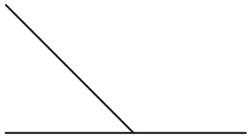


A lagartixa parte do ponto *B* e vai até o ponto *A*. A seguir, de *A* ela se desloca, pela parede, até o ponto *M*, que é o ponto médio do segmento *EF*. Finalmente, pelo teto, ela vai do ponto *M* até o ponto *H*. Considere que todos esses deslocamentos foram feitos pelo caminho de menor distância entre os respectivos pontos envolvidos.

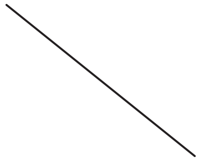
A projeção ortogonal desses deslocamentos no plano que contém o chão do quarto é dado por:

a.

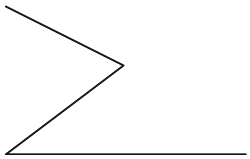
b.



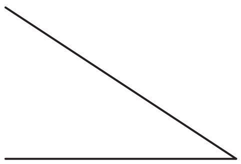
c.



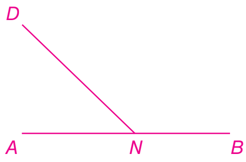
d.



e.



18. alternativa **b**
As projeções ortogonais, sobre o plano do chão: do segmento $\overline{BA}$ é o próprio segmento $\overline{BA}$; do segmento $\overline{AM}$ é o segmento $\overline{AN}$, em que *N* é o ponto médio de $\overline{BA}$; e do segmento $\overline{MH}$ é o segmento $\overline{ND}$. Concluímos, então, que a projeção ortogonal dos deslocamentos no plano que contém o chão do quarto é dada por:



FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

ILUSTRAÇÕES: ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

Para retomar os conteúdos estudados, resolva o exercício complementar 4.

Matemática sem fronteiras: Resposta no final do livro. Aproveite o contexto para explorar o uso de Geometria em diferentes profissões. Isso pode ser ampliado com a análise do **Carrossel de imagens: Desenhos técnicos**.

MATEMÁTICA SEM FRONTEIRAS

OBJETO DIGITAL **Carrossel de imagens:** Desenhos técnicos

A Geometria na Arquitetura, *Design* e Engenharia

Os profissionais que executam um projeto arquitetônico, industrial, mecânico etc. baseiam-se em desenhos técnicos elaborados por outros profissionais que idealizaram o projeto. Por isso, esses desenhos devem representar com exatidão todos os formatos e medidas do objeto representado.

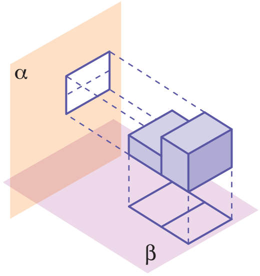
A necessidade da padronização de linguagem no desenho técnico motivou o matemático francês Gaspard Monge (1746-1818) a desenvolver um método que permitisse a representação gráfica de um objeto tridimensional, o sistema mongeano de projeção.

GOODLUZ/SHUTTERSTOCK

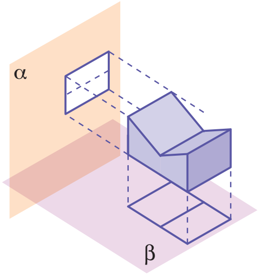
Profissionais da construção civil analisando a planta de uma construção.

Esse sistema consiste em projetar ortogonalmente os objetos do espaço em dois planos perpendiculares α e β. Essas projeções são chamadas de "vistas". Observe os exemplos a seguir.

Exemplo 1



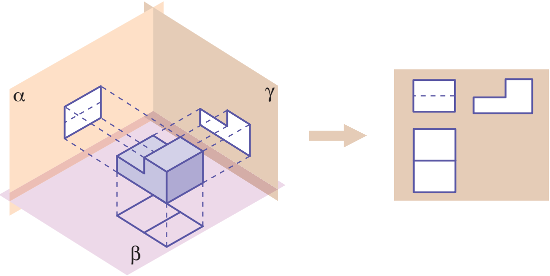
Exemplo 2



Conforme mostram os exemplos anteriores, esse sistema não determina o formato preciso do objeto representado, pois objetos de formatos diferentes podem ter as mesmas projeções nos dois planos α e β. Isso levou o matemático italiano Gino Loria (1862-1954) a acrescentar um terceiro plano γ de projeção ao sistema de Monge.

Assim, o sistema Monge/Loria de projeção consiste em três planos, α, β e γ, perpendiculares entre si. Dessa maneira, um objeto qualquer que desejamos representar é projetado ortogonalmente nos três planos. Para finalizar o desenho, as projeções são rebatidas sobre um só plano.

Observe o objeto do exemplo 1 projetado nos três planos desse sistema:



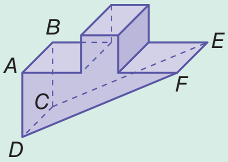
Note que, com a representação no sistema Monge/Loria de projeção, conhecemos o formato e as dimensões do objeto representado. Mesmo que o objeto tenha formato mais complexo, esse tipo de representação pode descrevê-lo precisamente.

Embora tenhamos, hoje, inúmeros recursos informatizados de representação, como *softwares* artísticos de modelagem tridimensional, o método de Monge/Loria continua atual e amplamente utilizado.

Atividade

Faça a atividade no caderno.

A figura representa uma peça com formato que se parece com um poliedro não convexo cujos ângulos internos das faces são retos, agudos ou medem 270°. Posicionando essa peça com os retângulos *ABCD* e *ABEF*, respectivamente, paralelos aos planos α e β do sistema Monge/Loria, represente essa peça em um plano, de modo análogo ao que foi feito no último exemplo do texto.



ILUSTRAÇÕES: ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

9. Ângulos no espaço

Em um relógio de Sol, uma haste reta (gnomon) projeta uma sombra sobre um mostrador de superfície plana, indicando a hora, conforme a figura 1.

ILUSTRAÇÕES: ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

Figura 1

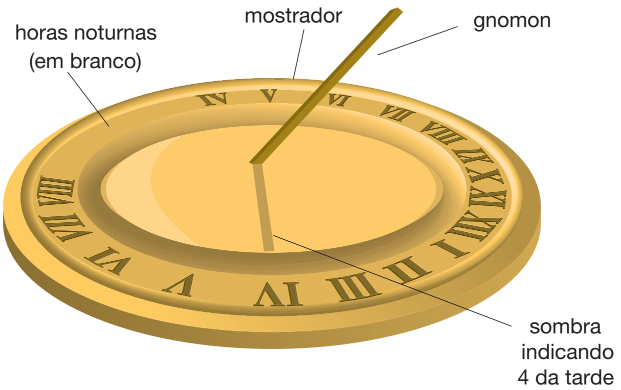
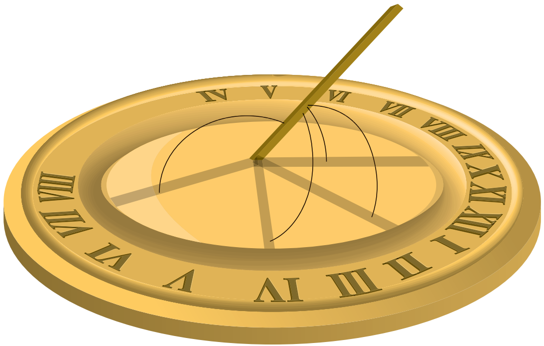


Figura 2



Para a construção de um relógio como esse, um grupo de estudantes consultou um *site* da internet. Uma das instruções dizia que se o plano do mostrador fosse horizontal, a medida do ângulo entre a haste e esse plano deveria ser a latitude do local. Como a latitude do local era 23°, a haste deveria formar um ângulo de 23° com o mostrador. Surgiu então a dúvida: como medir o ângulo entre a haste e o mostrador se, como se observa na figura 2, a medida do ângulo entre a haste e sua sombra varia de acordo com a posição da sombra?

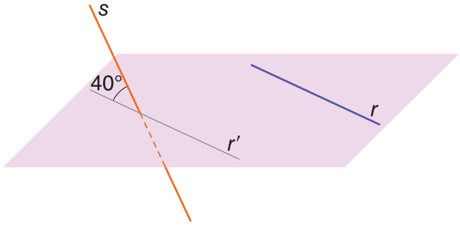
Essa dúvida será esclarecida pela definição de ângulo entre reta e plano, que estudaremos em seguida como também as definições de ângulo entre retas reversas e entre planos.

Proponha aos estudantes que imaginem as retas que contêm uma diagonal do teto e a diagonal reversa do piso e pergunte: “Como definir o ângulo agudo formado por essas retas reversas?”. Apoiando uma vareta reta obliquamente ao plano de uma parede, pergunte: “Como definir o ângulo agudo formado pela vareta e o plano da parede?”. Abrindo um pouco a porta da sala, pergunte: “Como definir o ângulo agudo formado pelo plano da porta e o da parede?”. Após essa discussão, comente que o objetivo desse tópico é definir ângulos no espaço. Enfatize que as definições de ângulos no espaço se baseiam na definição de ângulos entre retas.

Ângulos entre duas retas reversas

As retas *r* e *s* representadas na figura a seguir são reversas, e a reta *r*′ concorre com *s* e é paralela a *r*.

FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA



Nessas condições, dizemos que:

- a medida 40° de um ângulo agudo formado por *r*′ e *s* é também a medida de um ângulo agudo formado por *r* e *s*;
- a medida 140° de um ângulo obtuso formado por *r*′ e *s* é também a medida de um ângulo obtuso formado por *r* e *s*.

Genericamente, definimos:

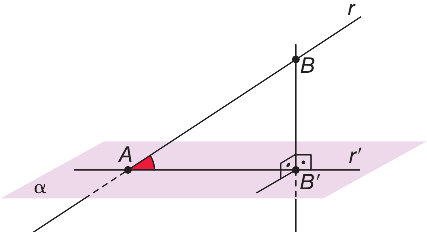
Os ângulos formados por duas retas reversas *r* e *s* são definidos como os ângulos formados pelas retas *r*′ e *s*, em que *r*′ é qualquer reta paralela a *r* e concorrente com *s*.

Observação

Quando os ângulos entre duas retas reversas são retos, as retas são ortogonais.

Ângulos entre reta e plano

Sejam *r* uma reta secante a um plano α, com *r* não perpendicular a α, e *r′* a projeção ortogonal de *r* sobre α. Os ângulos formados por *r* e α são aqueles formados por *r* e *r′*.



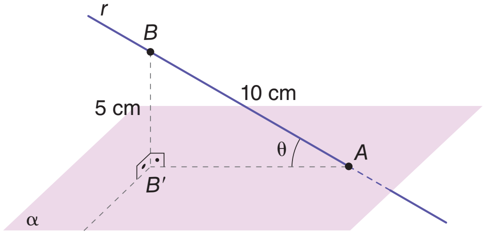
As retas *r* e *r′* formam entre si dois ângulos agudos opostos pelo vértice e dois ângulos obtusos opostos pelo vértice. Esses também são os ângulos formados por *r* e α. Nessa figura, está destacado o ângulo agudo $B\hat{A}B'$, formado por *r* e α.

Observação

Se uma reta *s* é paralela a um plano β ou está contida em β, então o ângulo formado por ambos é nulo, isto é, mede 0°.

Exemplo

Uma reta *r* é secante a um plano α em um ponto *A*. Sendo *B* um ponto de *r* e *B′* a projeção ortogonal de *B* sobre α tal que *BA* = 10 cm e *BB′* = 5 cm, vamos calcular a medida θ de um ângulo agudo que a reta *r* forma com o plano α. Observando que a reta $\overleftrightarrow{AB'}$ é a projeção ortogonal de *r* sobre α, temos:



$$\begin{cases} \text{sen}\ \theta = \dfrac{5}{10} = \dfrac{1}{2} \\ 0° < \theta < 90° \end{cases} \Rightarrow \theta = 30°$$

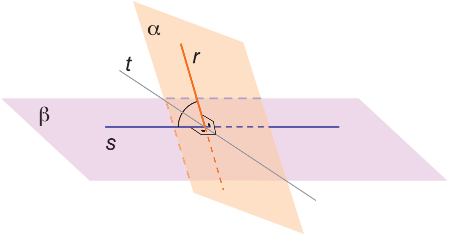
Concluímos, então, que um ângulo agudo formado por *r* e α mede 30°.

Ângulos entre dois planos

Seja *t* a reta comum a dois planos secantes, α e β, e sejam as retas *r* e *s*, contidas em α e β, respectivamente, com $r \perp t$ e $s \perp t$. Os ângulos formados por α e β são aqueles formados por *r* e *s*.

Notas:

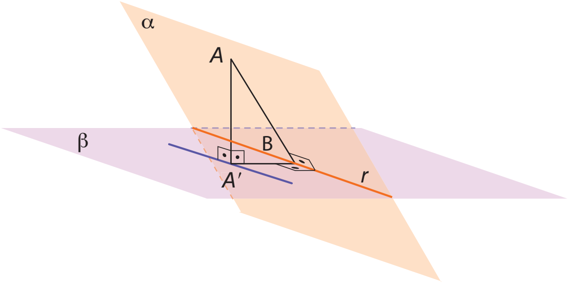
1. As retas *r* e *s* não precisam ser, necessariamente, concorrentes; podem ser reversas.
2. O ângulo formado por dois planos paralelos é o ângulo nulo.



Exemplo

Sejam dois planos secantes (α e β), a reta *r* (comum aos planos), um ponto *A* de α, o ponto *A′* (que é a projeção ortogonal de *A* sobre β) e um ponto *B* da reta *r*. Consideremos, ainda, $\overleftrightarrow{BA} \perp r$, $\overleftrightarrow{BA'} \perp r$, *BA* = 8 cm e *BA′* = 4 cm. Nessas condições, vamos calcular a medida de um ângulo agudo formado pelos planos α e β.

Sendo θ a medida do ângulo $A\hat{B}A'$, temos, do triângulo *ABA′*:



$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{BA'}{BA} = \dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2} \\ 0° < \theta < 90° \end{cases} \Rightarrow \theta = 60°$$

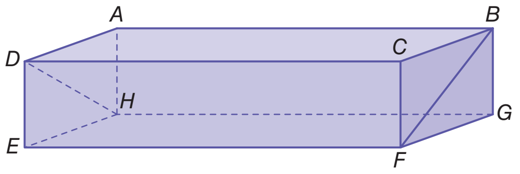
Concluímos, então, que um ângulo agudo formado pelos planos α e β mede 60°.

ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Faça os exercícios no caderno.

19. No paralelepípedo reto-retângulo a seguir, temos m($D\hat{H}E$) = 40°.



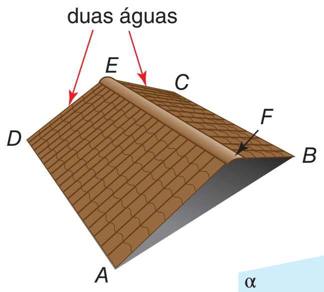
a. Calcule a medida de um ângulo agudo formado pelas retas reversas $\overleftrightarrow{DH}$ e $\overleftrightarrow{BF}$. **19. a.** 80°

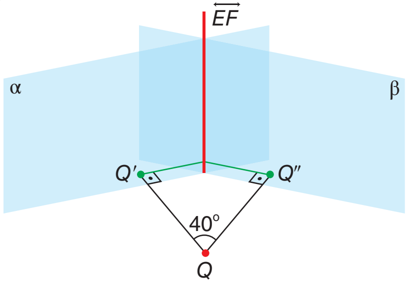
b. Entre as retas que contêm as arestas desse paralelepípedo, quais são ortogonais a $\overleftrightarrow{BG}$?
19. b. $\overleftrightarrow{AD}$, $\overleftrightarrow{DC}$, $\overleftrightarrow{HE}$ e $\overleftrightarrow{EF}$

20. Uma reta *r* é secante a um plano α em um ponto *A*. Um segmento de reta $\overline{AB}$, contido em *r*, mede 8 cm e a projeção ortogonal desse segmento sobre α mede $4\sqrt{3}$ cm. Calcule a medida de um ângulo agudo formado pela reta *r* e o plano α. **20.** 30°

21. Segundo os padrões estabelecidos pela Associação Brasileira de Normas Técnicas (ABNT), a medida máxima do ângulo entre o plano de um telhado e o plano horizontal é 19,8°, quando as telhas são de cerâmica. A figura a seguir representa um telhado de cerâmica com duas águas retangulares *ADEF* e *BCEF*, em que *A*, *B*, *C* e *D* pertencem a um mesmo plano horizontal. Abaixo do telhado é fixado um ponto *Q*. Sendo α = pl(*ADE*) e β = pl(*BCE*), têm-se que as projeções ortogonais do ponto *Q* sobre α e β são *Q′* e *Q″*, respectivamente, com o ângulo $Q'\hat{Q}Q''$ medindo 40°.

Nota: um telhado de duas águas é aquele em que as telhas são dispostas sobre apenas dois planos secantes, conforme mostra a figura.



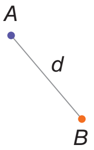


a. Calcule a medida de um ângulo obtuso formado pelos planos α e β. **21. a.** 140°

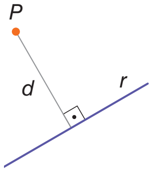
b. Esse telhado obedece aos padrões estabelecidos pela ABNT? Justifique sua resposta. **21. b.** não

22. Considere a seguinte definição: A distância entre duas figuras geométricas é a medida do menor segmento de reta que liga uma figura à outra. Por exemplo:

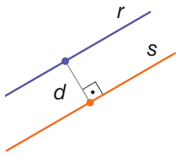
- A medida *d* é a distância entre os pontos *A* e *B*.



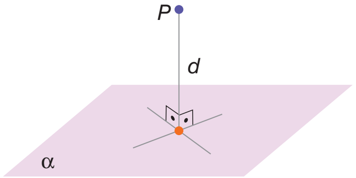
- A medida *d* é a distância entre o ponto *P* e a reta *r*.



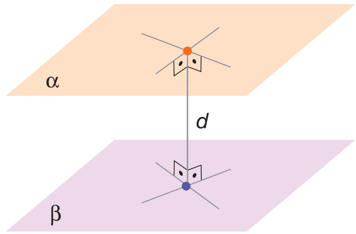
- A medida *d* é a distância entre as retas paralelas *r* e *s*.



- A medida *d* é a distância entre o ponto *P* e o plano α.

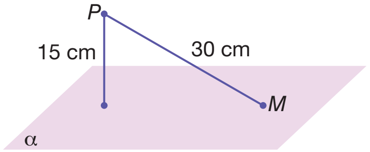


- A medida *d* é a distância entre os planos paralelos α e β.



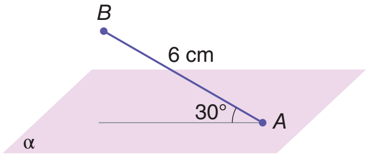
De acordo com essa definição, resolva o problema a seguir.

Dados um plano α e os pontos *M* e *P*, com $M \in \alpha$ e $P \notin \alpha$, tal que a distância entre *P* e α é 15 cm e a distância entre *P* e *M* é 30 cm, calcule a medida de um ângulo agudo formado entre a reta $\overleftrightarrow{PM}$ e o plano α. **22.** 30°



ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

23. Um ponto A, pertencente a um plano α, e um ponto B, com $B \notin \alpha$, são tais que $\overline{AB}$ mede 6 cm e a reta $\overleftrightarrow{AB}$ forma com α um ângulo de 30°.



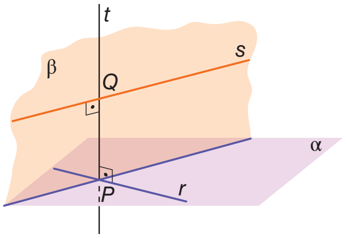
FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

Calcule:

a. a medida da projeção ortogonal de $\overline{AB}$ sobre α; **23. a.** $3\sqrt{3}$ cm

b. a distância do ponto B ao plano α. **23. b.** 3 cm

24. Demonstra-se que: "Dadas duas retas reversas quaisquer, r e s, existe uma única reta t perpendicular a r e s simultaneamente."



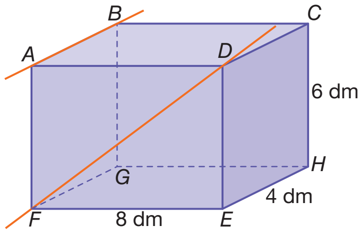
Essa propriedade nos permite definir:

"Se uma reta t é a perpendicular comum a duas retas reversas r e s, interceptando-as nos pontos P e Q, respectivamente, então a medida PQ é a distância entre as retas reversas r e s."

De acordo com essas informações, resolvam a questão seguinte.

No paralelepípedo reto-retângulo $ABCDEFGH$, representado a seguir, o comprimento EF, a largura EH e a altura HC medem 8 dm, 4 dm e 6 dm, respectivamente. Calculem a distância entre as retas reversas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{FD}$.

24. 4,8 dm



ILUSTRAÇÕES: ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

Para retomar os conteúdos estudados, resolva os exercícios complementares 5 a 7.

Mentes brilhantes

Geometrias não euclidianas

Qual é o caminho mais curto entre dois pontos? Qual é a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo?

Se estivermos tratando da Geometria euclidiana, estudada até aqui, o caminho mais curto entre dois pontos é o segmento de reta com extremos nesses pontos, e a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180°. Porém, se estivermos tratando de uma geometria cujas figuras estão contidas em uma superfície esférica, por exemplo, o caminho mais curto entre dois pontos é um arco com extremos nesses pontos e contido em uma circunferência máxima da superfície esférica (figura 1), e a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo (esférico) é maior que 180° (figura 2).

Figura 1

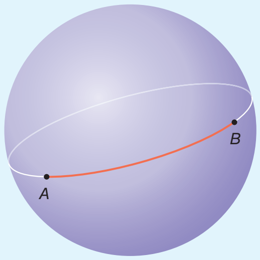
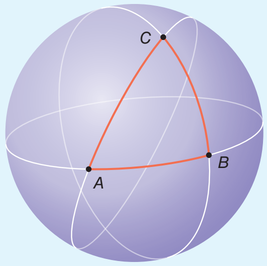


Figura 2



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Esse exemplo mostra a possibilidade da existência de outra geometria além da euclidiana.

Durante muito tempo, discutiu-se se o postulado das paralelas da Geometria euclidiana "Dada uma reta r e um ponto A, existe uma única reta que passa por A e é paralela a r" era mesmo um postulado ou era um teorema, isto é, se poderia ser demonstrado a partir dos postulados anteriores. Concluiu-se que Euclides estava certo: era mesmo um postulado.

Essa discussão, entretanto, não foi improdutiva, pois no final do século XVIII e início do século XIX alguns matemáticos, como o alemão Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855), perceberam que esse postulado era independente dos demais, isto é, ele poderia ser substituído por outro sem interferência nos demais. Essa ideia fez nascer outras geometrias não euclidianas, como as dos matemáticos: Nikolai Ivanovich Lobachevsky (1792-1856), russo; János Bolyai (1802-1860), húngaro; e Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866), alemão. Os modelos que representam as várias geometrias são diferentes entre si; por exemplo, o modelo para uma das geometrias não euclidianas pode ser o conjunto das figuras construídas sobre uma superfície esférica.

Elaborado com base em: EVES, H. **Introdução à história da matemática**. 5. ed., Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2011.

Ao abordar o **Trabalho e juventudes**, aproveite para propor aos estudantes que conversem sobre a inserção da mulher no mercado de trabalho e as resistências sociais que elas podem encontrar devido ao preconceito ou ao racismo, por exemplo. Incentive-os a argumentar tomando como base princípios éticos e fontes confiáveis.

TRABALHO E JUVENTUDES

Pessoas pilotas de avião

ODS 5

ODS 8

De acordo com dados do Banco Mundial, aproximadamente 311 milhões de pessoas viajaram de avião em 1970 e, em 2010, a marca de 2,6 bilhões de passageiros foi ultrapassada. A estimativa é que até 2036 o número chegue a 7,8 bilhões.

Com essa crescente demanda, a Organização da Aviação Civil Internacional estima que serão necessários cerca de 620 mil novos profissionais para pilotar aviões comerciais nos próximos 15 a 20 anos.

Atualmente, já há uma escassez desses profissionais; em 2016, por exemplo, quase a metade dos pilotos tinham mais de 50 anos e, em todo o mundo, eles se aposentam entre 60 e 65 anos.

Com isso, vários países oferecem contratos de trabalho atraentes para estrangeiros, a fim de atenuar a baixa demanda de profissionais. Os países de origem deles, contudo, enfrentam dificuldades para substituí-los.

Apesar de uma carreira atrativa, os principais dificultadores para suprir a mão de obra é a falta de qualificação dos pilotos e os custos de treinamento.

Dados da Organização da Aviação Civil Internacional indicam que as mulheres ocupam apenas 5% dos postos de trabalho da aviação internacional, já no Brasil, de acordo com Agência Nacional da Aviação Civil (Anac) apenas 3,2% dos pilotos são mulheres.

> "Acredito que nós mulheres temos dificuldades diferentes dos homens para ingressar na aviação. Existe um preconceito pela nossa cultura e uma estranheza por ainda terem poucas mulheres voando como pilotos", afirma [uma pilota].

FG TRADE/E+/GETTY IMAGES

Pilota de avião em um hangar.

Reconhecendo essas dificuldades, a Anac lançou o programa social *Asas para todos*, que tem como objetivos inspirar meninas e mulheres a fazerem parte da aviação civil, combater práticas discriminatórias e racistas, promover um ambiente mais respeitoso e inclusivo na aviação civil, e abrir as portas do mercado de trabalho àqueles para quem a aviação ainda é um sonho distante.

Elaborado com base em: AGÊNCIA NACIONAL DA AVIAÇÃO CIVIL. Asas para todos. **Anac**, 2024. Disponível em: https://hotsites.anac.gov.br/asasparatodos/sobre.html; CARVALHO, R. De machismo a alto custo: a saga de mulheres para pilotar um avião. **Universa UOL**, 19 fev. 2024. Disponível em: https://www.uol.com.br/universa/noticias/redacao/2024/02/19/pilotas-mulheres.htm; DUARTE, F. Piloto de avião, a profissão para a qual não há crise. **BBC World Service**, 16 out. 2018. Disponível em: https://www.bbc.com/portuguese/geral-45820917. Acesso em: 5 set. 2024.

Reflexão

Para você, qual é a importância da inserção de mulheres em profissões como a aviação civil? Em sua opinião, quais são os principais motivos de haver resistência da participação feminina em profissões como pilota de aviões e qual é a importância de programas sociais como o *Asas para todos*?

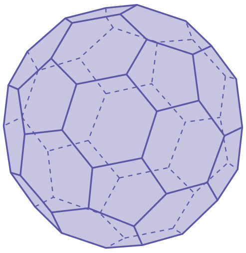
Reflexão: Respostas pessoais.

10. Poliedros

Você já observou como é formada a superfície de uma bola de futebol como a da figura 1?

Figura 1

Figura 2



BOHBEH/SHUTTERSTOCK

São várias peças poligonais costuradas lado a lado. O formato arredondado dessas peças deve-se à pressão interna do ar. Sem essa pressão interna, a superfície se assemelharia ao formato da figura 2.

A reunião dessa superfície com seu interior é um exemplo de **poliedro**.

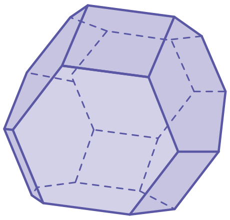
Para definir poliedro, consideremos um conjunto G obtido pela reunião de n polígonos, com $n \geqslant 4$, tais que:

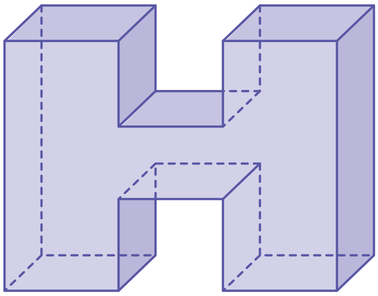
1. quaisquer dois desses polígonos que tenham um lado em comum não são coplanares;
2. cada lado de qualquer um desses polígonos é lado de dois e apenas dois deles.

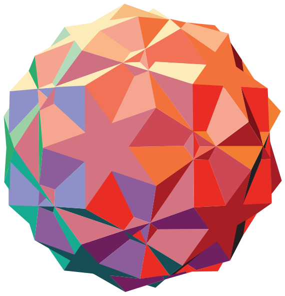
O conjunto G é chamado de superfície poliédrica fechada. Essa superfície separa o espaço em duas regiões, sendo uma delas limitada.

A reunião da superfície G com essa região limitada do espaço é chamada de **poliedro**.

Observe a representação de alguns de poliedros:







ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Os poliedros que têm maior importância na Geometria são os convexos, definidos a seguir.

Poliedro convexo

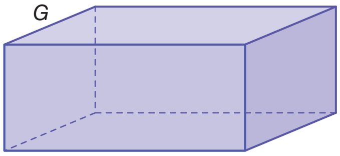
Ao explorar o tópico **Poliedro convexo**, se achar necessário, relembre com os estudantes a definição de polígono convexo antes de trabalhar o conceito de poliedro convexo.

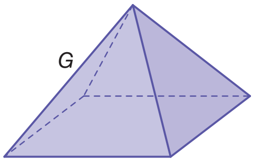
Consideremos um conjunto G obtido pela reunião de n polígonos convexos, com $n \geqslant 4$, tais que:

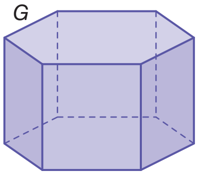
1. não há dois desses polígonos contidos em um mesmo plano;
2. cada lado de qualquer um desses polígonos é lado de dois e somente dois deles;
3. o plano α que contém qualquer um desses polígonos deixa os demais contidos em um mesmo semiespaço de origem α.

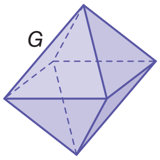
Poliedro convexo é a reunião do conjunto G com a porção do espaço limitada por ele.

Exemplos







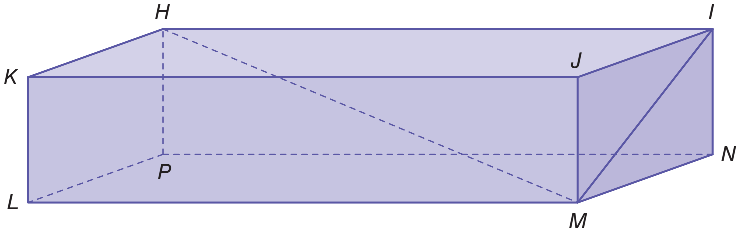


Elementos de um poliedro convexo

- O conjunto *G* é chamado de **superfície** do poliedro convexo.
- Os polígonos não coplanares que formam a superfície *G* são chamados de **faces** do poliedro convexo.
- Cada lado de uma face qualquer é chamado de **aresta** do poliedro convexo.
- Cada vértice de uma face qualquer é chamado de **vértice** do poliedro convexo.
- **Diagonal de uma face** é qualquer diagonal do polígono que constitui essa face.
- **Diagonal do poliedro** é qualquer segmento de reta cujos extremos são dois vértices que não pertencem a uma mesma face.
- A porção do espaço cuja superfície é a reunião dos ângulos das faces que têm um mesmo vértice em comum é chamada de **ângulo poliédrico**.

ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

Exemplo



O polígono *HIJK* é uma das seis faces do poliedro.

O segmento $\overline{JM}$ é uma das doze arestas do poliedro.

O ponto *J* é um dos oito vértices do poliedro.

O segmento $\overline{IM}$ é uma diagonal da face *INMJ*.

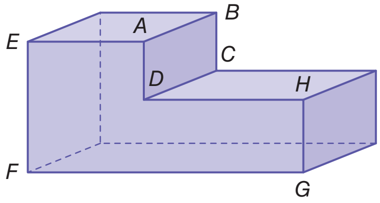
O segmento $\overline{HM}$ é uma diagonal do poliedro.

A reunião das seis faces é a superfície do poliedro.

A porção do espaço limitada pelos ângulos $I\hat{J}M$, $K\hat{J}I$ e $K\hat{J}M$ é um ângulo poliédrico.

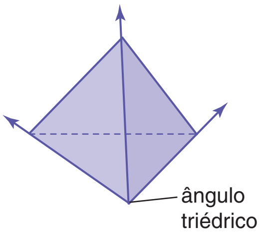
Notas:

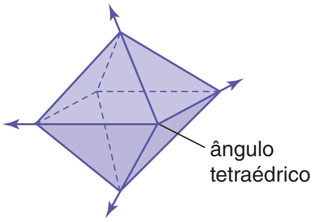
1. Existem poliedros não convexos, como o poliedro representado a seguir. Ele não é convexo porque o plano α que contém a face *ABCD* não deixa as demais faces em um mesmo semiespaço de origem α, ou porque a face *ADHGFE* não é um polígono convexo.

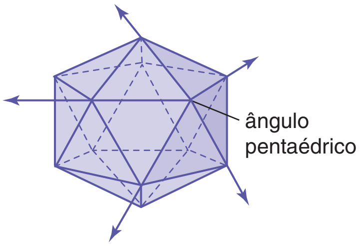


2. Toda superfície fechada *S* separa o espaço em duas regiões, sendo uma delas limitada. A reunião da superfície *S* com essa região limitada é chamada de **sólido geométrico**. Assim, um poliedro é um sólido geométrico.

3. Ângulos poliédricos com 3, 4, 5, ... arestas são chamados, respectivamente, de **ângulos triédricos, tetraédricos, pentaédricos**, ...







4. Um ângulo poliédrico é convexo quando o plano α que contém qualquer uma de suas faces deixa as demais contidas em um mesmo semiespaço de origem α.

5. Um ângulo poliédrico convexo é regular quando todas as suas faces são congruentes entre si.

Nomenclatura

Observe, no quadro a seguir, os nomes dos poliedros que têm de 4 a 20 faces.

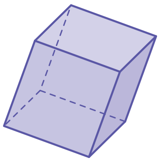
Nome do poliedro com base no número de faces

Número de faces	Nome do poliedro
4	tetraedro
5	pentaedro
6	hexaedro
7	heptaedro
8	octaedro
9	eneaedro
10	decaedro
11	undecaedro
12	dodecaedro
13	tridecaedro
14	tetradecaedro
15	pentadecaedro
16	hexadecaedro
17	heptadecaedro
18	octadecaedro
19	eneadecaedro
20	icosaedro

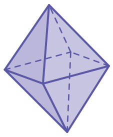
Observação

Para poliedros com mais de 20 faces, não adotaremos nomenclatura especial. Vamos nos referir a eles explicitando o número de faces.
A título de curiosidade, porém, é interessante saber que para eles também existe uma nomenclatura; por exemplo, um heptacosaedro é um poliedro de 27 faces, e um octacontaedro é um poliedro de 80 faces.

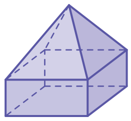
Exemplos



hexaedro



octaedro

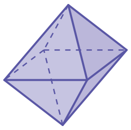


eneaedro

ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS



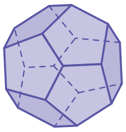
5. Um octaedro convexo possui todas as faces triangulares. Quantas arestas tem esse poliedro?

Resolução

O octaedro convexo possui 8 faces, e cada face possui 3 arestas. Multiplicando o número de faces pelo número de arestas de cada uma, obtemos 24, que é o dobro do número de arestas do poliedro; isso ocorre porque cada aresta é lado de exatamente duas faces; portanto, nesse cálculo, cada aresta foi contada duas vezes.

Assim, o número A de arestas desse poliedro é dado por:

$$A = \frac{8 \cdot 3}{2} = 12$$



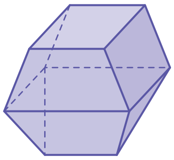
6. Um poliedro convexo é constituído por 20 ângulos triédricos. Quantas arestas tem esse poliedro?

Resolução

O poliedro possui 20 vértices, e de cada vértice partem 3 arestas. Multiplicando o número de vértices pelo número de arestas que partem de cada um deles, obtemos 60, que é o dobro do número de arestas do poliedro; isso ocorre porque cada aresta une exatamente dois vértices do poliedro e, portanto, nesse cálculo, cada aresta foi contada duas vezes.

Assim, o número A de arestas do poliedro é dado por:

$$A = \frac{20 \cdot 3}{2} = 30$$



7. Um poliedro convexo é constituído por 6 ângulos triédricos e 4 ângulos tetraédricos. Quantas arestas possui esse poliedro?

Resolução

Sejam:

- o produto do número de ângulos triédricos pelo número de arestas de cada um: $6 \cdot 3$
- o produto do número de ângulos tetraédricos pelo número de arestas de cada um: $4 \cdot 4$

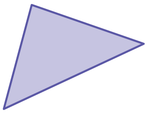
Adicionando esses resultados, obtemos 34, que é o dobro do número de arestas do poliedro, pois cada aresta une exatamente dois vértices do poliedro. Portanto, nesse cálculo, cada aresta foi contada duas vezes.

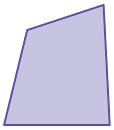
Assim, o número A de aresta do poliedro é dado por:

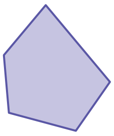
$$A = \frac{6 \cdot 3 + 4 \cdot 4}{2} = 17$$

Relação de Euler

Observe os polígonos convexos representados a seguir.







O triângulo possui três lados e três vértices, o quadrilátero possui quatro lados e quatro vértices, e o pentágono possui cinco lados e cinco vértices. A relação que se observa entre o número de lados e o número de vértices desses polígonos pode ser generalizada para qualquer polígono convexo: o número de lados é igual ao número de vértices.

Uma questão natural que poderia surgir neste momento é se haverá uma relação constante entre o número de vértices, o número de arestas e o número de faces de um poliedro convexo. De acordo com o matemático e historiador Howard Eves, a resposta a essa questão é uma das descobertas topológicas mais antigas, tendo sido prenunciada em 1640 pelo filósofo e matemático francês René Descartes (1596-1650) e provada pela primeira vez apenas em 1752 pelo matemático suíço Leonhard Euler (1707-1783). Por esse motivo, atualmente esse resultado é conhecido como relação de Euler e é anunciado a seguir.

Em todo poliedro convexo vale a relação:

$$V - A + F = 2$$

em que V, A e F representam o total de vértices, de arestas e de faces do poliedro, respectivamente.

Reflexão

Quanto tempo se passou do enunciado proposto por Descartes para a relação de Euler até sua demonstração? Com base nesse fato, você acredita que a cooperação é importante nas descobertas matemáticas?

Reflexão: 112 anos, pois 1.752 – 1.640 = 112
Resposta pessoal.

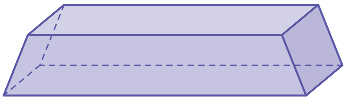
Reflexão

Existe algum poliedro para o qual não vale a relação de Euler?

Reflexão: A relação de Euler vale apenas para os poliedros convexos.

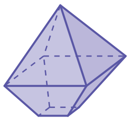
Exemplos

a. No poliedro convexo representado a seguir, $V = 8$, $A = 12$ e $F = 6$. Assim:



$$V - A + F = 8 - 12 + 6 = 2$$

b. No poliedro convexo representado a seguir, $V = 9$, $A = 16$ e $F = 9$. Assim:



$$V - A + F = 9 - 16 + 9 = 2$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

8. Um poliedro convexo é constituído por 25 arestas e 15 faces. Quantos vértices possui esse poliedro?

Resolução

A relação de Euler, $V - A + F = 2$, vale para qualquer poliedro convexo. Como $A = 25$ e $F = 15$, temos:

$$V - A + F = 2 \Rightarrow V - 25 + 15 = 2$$

$$\therefore V = 12$$

Logo, o poliedro possui 12 vértices.

9. Um poliedro convexo é constituído por 20 arestas, e seu número de vértices é igual ao número de faces. Quantas faces formam esse poliedro?

Resolução

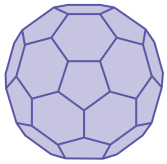
O poliedro é convexo; logo, vale a relação de Euler, $V - A + F = 2$. Como $A = 20$ e $V = F$, temos:

$$V - A + F = 2 \Rightarrow F - 20 + F = 2$$

$$\therefore F = 11$$

Logo, o poliedro possui 11 faces.

10. O *buckminsterfullereno* é uma estrutura formada por átomos de carbono distribuídos nos vértices de um poliedro convexo de 12 faces pentagonais e 20 hexagonais, havendo em cada vértice um único átomo. Quantos átomos compõem essa estrutura?



Resolução

Os números F e A de faces e arestas, respectivamente, desse poliedro são dados por:

$$F = 12 + 20 = 32 \text{ e } A = \frac{12 \cdot 5 + 20 \cdot 6}{2} = 90$$

Pela relação de Euler, $V - A + F = 2$, calculamos o número V de vértices desse poliedro:

$$V - 90 + 32 = 2 \Rightarrow V = 60$$

Como em cada vértice do poliedro há um único átomo, concluímos que o *buckminsterfullereno* é composto de 60 átomos.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Faça os exercícios no caderno.

25. Um dodecaedro convexo possui todas as faces pentagonais. Quantas arestas esse poliedro tem? **25.** 30

26. Um poliedro convexo é constituído por três faces triangulares, cinco quadrangulares e sete pentagonais. Quantas arestas possui esse poliedro? **26.** 32

27. Sabendo que um poliedro convexo é constituído por doze ângulos triédricos (ângulos de três arestas), determine quantas arestas esse poliedro tem. **27.** 18

28. Um poliedro convexo é constituído por 14 ângulos poliédricos, dos quais quatro são triédricos, seis são tetraédricos e os demais são pentaédricos. Qual é o número de arestas desse poliedro? **28.** 28

29. Um poliedro convexo tem 4 faces hexagonais e algumas faces triangulares. Qual o número de faces desse poliedro, sabendo-se que o número de arestas é dada por $4x + 2$, sendo x o número de faces triangulares?

a. 4
b. 3
c. 5
d. 6
e. 8

29. alternativa **e**

30. Qual é o número de faces de um poliedro convexo constituído por 16 vértices e 24 arestas? **30.** 10

31. (UFPA) Um poliedro convexo tem 6 faces e 8 vértices. O número de arestas desse poliedro é:

a. 6
b. 8
c. 10
d. 12
e. 14

31. alternativa **d**

32. Responda aos itens seguintes, justificando sua resposta.

- **a.** Existe poliedro convexo constituído por 8 vértices, 12 arestas e 5 faces? **32. a.** Não existe.
- **b.** Existe poliedro convexo em que o número de vértices, o número de arestas e o número de faces são todos ímpares? **32. b.** Não existe.

33. A foto a seguir mostra um globo espelhado usado em festas, que gira refletindo a luz. Sua superfície é, formada por 840 faces quadrangulares espelhadas e se parece com a superfície de um poliedro convexo.


RYGER/SHUTTERSOTCK

Globo espelhado.

- **a.** Qual o número *A* de arestas dessa superfície poliédrica? **33. a.** 1.680
- **b.** Qual o número *V* de vértices dessa superfície poliédrica? **33. b.** 840

34. Com 30 varetas retas de ferro, um artista construiu uma estrutura poliédrica convexa em que cada vareta representa uma aresta. Em alguns vértices há exatamente 3 extremidades de varetas soldadas entre si, e em cada um dos demais vértices há exatamente 4 extremidades soldadas entre si, não ficando nenhuma extremidade solta. Sabendo que o número de vértices com 4 arestas cada é o maior possível, respondam:


BRUNO MOTTA/ARQUIVO DA EDITORA

- **a.** Quantos vértices de cada tipo compõem a estrutura? **34. a.** 4 ângulos triédricos e 12 ângulos tetraédricos
- **b.** Quantas faces compõem o poliedro que se pode associar a essa estrutura? **34. b.** 16 faces

35. (Mackenzie-SP) Um poliedro convexo tem 15 faces. De dois de seus vértices partem cinco arestas, de quatro outros partem quatro arestas e dos restantes partem três arestas. O número de arestas do poliedro é:

a. 75 **b.** 53 **c.** 45 **d.** 31 **e.** 25

35. alternativa **d**

Para retomar os conteúdos estudados, resolva os exercícios complementares 8 a 10.

ANÁLISE DA RESOLUÇÃO

Um estudante resolveu o exercício conforme a reprodução a seguir. Um erro foi cometido. Apontem o erro e refaçam a resolução no caderno, corrigindo-a.

Exercício

Todas as 14 faces de um poliedro convexo são quadrangulares. Calcule o número de diagonais desse poliedro.

Resolução

Sendo: A, V e F os números de arestas, vértices e faces do poliedro, respectivamente, temos:

$$\begin{cases} F = 14 \\ A = \dfrac{14 \cdot 4}{2} = 28 \\ V - A + F = 2 \end{cases}$$

$$\therefore V - 28 + 14 = 2 \Rightarrow V = 16$$

Assim, o número de segmentos de reta com extremos em dois vértices quaisquer desse poliedro é dado por $C_{16,\,2}$. Subtraindo-se desse número o total A de arestas, obtém-se o número d de diagonais do poliedro, isto é,

$d = C_{16,2} - 28 = 120 - 28 \Rightarrow d = 92$

Concluímos, então, que o poliedro possui 92 diagonais.

FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

Na **Análise da resolução**, do número $C_{16,\,2}$, o estudante deveria ter subtraído o número de arestas do poliedro e o número de diagonais das faces.

Resolução correta:

Sendo: *A*, *V* e *F* os números de arestas, de vértices e de faces do poliedro, respectivamente, temos:

$$\begin{cases} F = 14 \\ A = \dfrac{14 \cdot 4}{2} = 28 \\ V - A + F = 2 \end{cases}$$

$$\therefore V - 28 + 14 = 2 \Rightarrow V = 16$$

Assim, o número *d* de diagonais desse poliedro é calculado por:

$$d = C_{16,\,2} - \underbrace{28}_{\text{Número de arestas}} - \underbrace{14 \cdot 2}_{\text{Número de diagonais das faces}} = 120 - 28 - 28 \Rightarrow d = 64$$

11. Poliedros regulares

Um poliedro convexo é **regular** se, e somente se, são satisfeitas as seguintes condições:

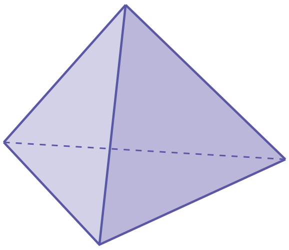
1. todas as suas faces são polígonos regulares e congruentes entre si;
2. todos os ângulos poliédricos são regulares e congruentes entre si.

Intuitivamente, dois ângulos poliédricos são congruentes se é possível "encaixar" um no outro, de modo que o vértice e as arestas de um deles coincidam, respectivamente, com o vértice e as arestas do outro.

Exemplos

a. Em um tetraedro regular:

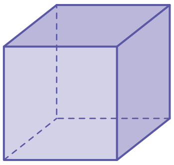
- todas as faces são triângulos regulares (triângulos equiláteros) congruentes entre si;
- todos os ângulos triédricos são regulares e congruentes entre si.



Modelo de tetraedro regular.

b. Em um hexaedro regular (ou cubo):

- todas as faces são quadradas e congruentes entre si;
- todos os ângulos triédricos são regulares e congruentes entre si.



Modelo de hexaedro regular.

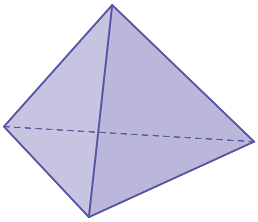
ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

Reflexão

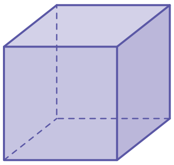
Por que a condição **1** (todas as suas faces são polígonos regulares e congruentes entre si) não é suficiente para que o poliedro convexo seja regular?

Reflexão: As faces de um poliedro convexo podem ser polígonos regulares congruentes entre si, sem que o poliedro seja regular. Por exemplo, todas as faces do decaedro convexo são triângulos equiláteros congruentes entre si; no entanto, seus ângulos poliédricos não são congruentes entre si, pois dois deles são pentaédricos e os outros são tetraédricos.

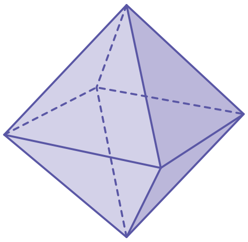
Existem exatamente cinco classes de poliedros regulares. As cinco figuras a seguir mostram um exemplo de cada uma dessas classes.



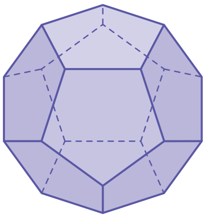
tetraedro regular



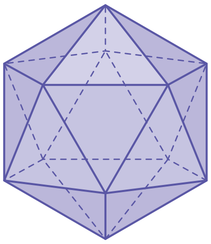
hexaedro regular



octaedro regular



dodecaedro regular



icosaedro regular

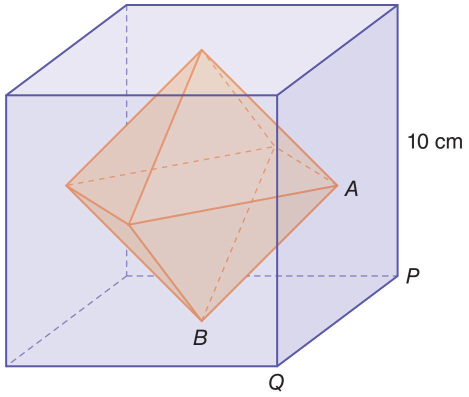
EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Faça os exercícios no caderno.

36. Os centros das faces de um poliedro regular qualquer são vértices de outro poliedro regular. Qual é o poliedro regular cujos vértices são o s centros das faces de um octaedro regular? **36.** hexaedro regular

37. Os centros das faces de um hexaedro regular (cubo) de aresta 10 cm são vértices de um octaedro regular. Calcule a medida de uma aresta desse octaedro.

37. $5\sqrt{2}$ cm

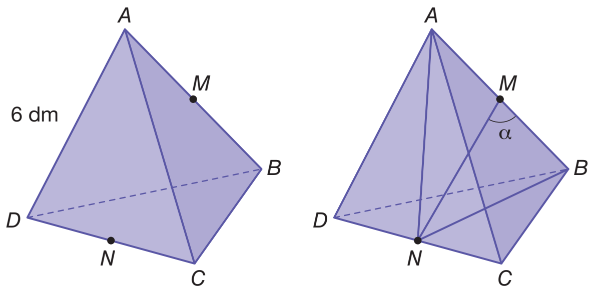


FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

38. Cada aresta de um icosaedro regular mede 6 cm. Calcule a área da superfície desse icosaedro.

(**Nota**: A área da superfície de um poliedro é a soma das áreas de todas as faces.) **38.** $180\sqrt{3}$ cm^2

39. As duas figuras representam o mesmo tetraedro regular *ABCD* com 6 dm de aresta, em que *M* e *N* são os pontos médios das arestas $\overline{AB}$ e $\overline{DC}$, respectivamente.



ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

39. a. 90°

a. Calculem a medida α, em grau, do ângulo $N\widehat{M}B$.

b. Calculem a distância entre as retas reversas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{DC}$. **39. b.** $3\sqrt{2}$ dm

40. Um poliedro não regular que possui todas as faces regulares e todos os ângulos poliédricos congruentes é chamado de poliedro de Arquimedes. Um deles é o octaedro truncado. Usando um *software* de Geometria Dinâmica, construa esse poliedro e descreva-o quanto ao número de faces e ao tipo de faces.

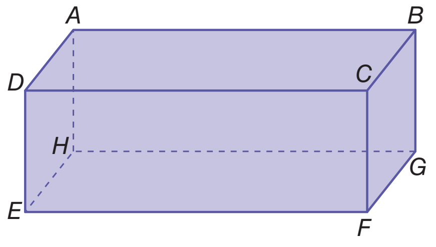
40. 14 faces, sendo 6 quadradas e 8 hexagonais

Para retomar os conteúdos estudados, resolva os exercícios complementares 11 e 12.

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

Faça os exercícios no caderno.

1. Considere o paralelepípedo reto-retângulo a seguir.



FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

Classifique em verdadeira ou falsa cada uma das afirmações a seguir.

a. $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{DC}$ **1. a.** verdadeira

b. $\overleftrightarrow{DC} \parallel \overleftrightarrow{HG}$ **1. b.** verdadeira

c. $\overleftrightarrow{CB}$ e $\overleftrightarrow{HE}$ são reversas. **1. c.** falsa

d. $\overleftrightarrow{CF}$ e $\overleftrightarrow{HE}$ são reversas. **1. d.** verdadeira

e. $\overleftrightarrow{DB}$ e $\overleftrightarrow{AC}$ são concorrentes. **1. e.** verdadeira

f. $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{EF}$ são coplanares. **1. f.** verdadeira

g. $\overleftrightarrow{AB} \parallel pl(FGH)$ **1. g.** verdadeira

h. $\overleftrightarrow{EF} \subset pl(FGB)$ **1. h.** falsa

i. $\overleftrightarrow{AD}$ é secante ao plano pl(*HGF*). **1. i.** falsa

j. O plano pl(*ABC*) é secante ao plano pl(*HGB*). **1. j.** verdadeira

k. $pl(ABC) \parallel pl(HEF)$ **1. k.** verdadeira

l. A reta comum aos planos pl(*BGF*) e pl(*ABC*) é $\overleftrightarrow{CF}$. **1. l.** falsa

m. $\overleftrightarrow{BC}$ é perpendicular a $\overleftrightarrow{BG}$. **1. m.** verdadeira

n. $\overleftrightarrow{BC}$ forma ângulo reto com $\overleftrightarrow{BG}$. **1. n.** verdadeira

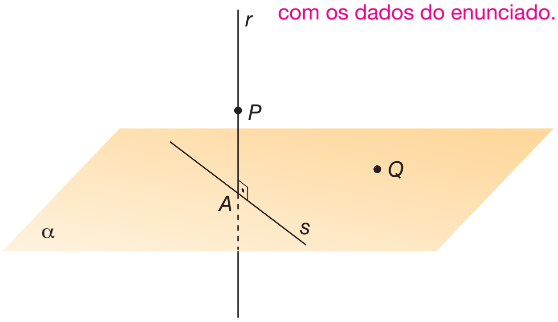
o. $\overleftrightarrow{EC}$ é perpendicular a $\overleftrightarrow{CF}$. **1. o.** falsa

p. $\overleftrightarrow{DC}$ é perpendicular ao plano pl(*BGF*). **1. p.** verdadeira

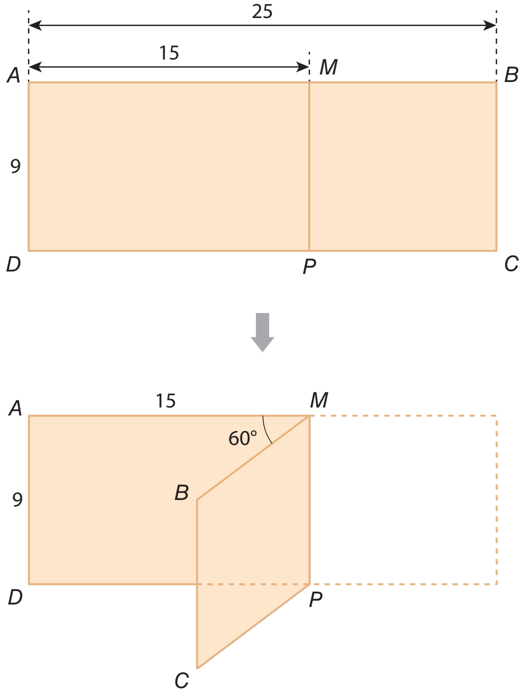
q. $pl(CBG) \perp pl(ABC)$ **1. q.** verdadeira

2. Na figura, a reta s está contida no plano α e é perpendicular à reta r no ponto A. O ponto P pertence a r, com $PA = 5$ cm, e o ponto Q pertence a α, com $QA = 12$ cm. Calcule a distância PQ.

2. A distância entre P e Q não pode ser determinada apenas com os dados do enunciado.



3. Uma folha retangular $ABCD$, com $AB = 25$ cm e $AD = 9$ cm, é dobrada em torno de um vinco $\overline{MP}$ paralelo a $\overline{AD}$, com M e P pertencentes aos lados $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, respectivamente, tal que $AM = 15$ cm e o ângulo $A\hat{M}B$, depois da dobra, tenha medida 60°, conforme mostram as figuras.



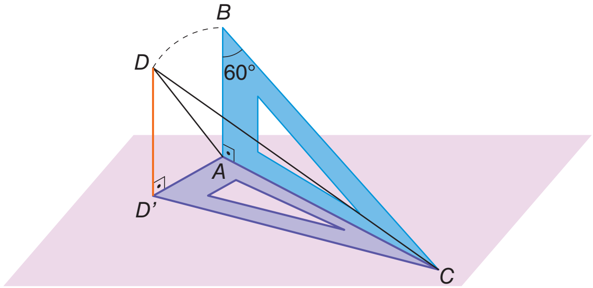
Considerando a folha dobrada, calcule:

a. a distância entre os pontos A e B; **3. a.** $5\sqrt{7}$ cm

b. a medida do ângulo $B\hat{A}D$; **3. b.** 90°

c. a distância entre os pontos B e D. **3. c.** 16 cm

4. Um esquadro triangular ABC, cujos ângulos internos medem 90°, 60° e 30°, tem seu maior cateto $\overline{AC}$ apoiado sobre o tampo plano e horizontal de uma mesa e o menor cateto $\overline{AB}$ perpendicular a esse tampo. Ao girar o esquadro em torno do lado $\overline{AC}$, observa-se sua sombra projetada sobre o tampo por raios de luz perpendiculares ao tampo, conforme mostra a figura, em que o ponto D é a posição do vértice B após o giro e D' é a sombra do ponto D. Observando que $B\hat{A}D$ é um ângulo agudo, classifique em verdadeira ou falsa cada uma das afirmações seguintes.



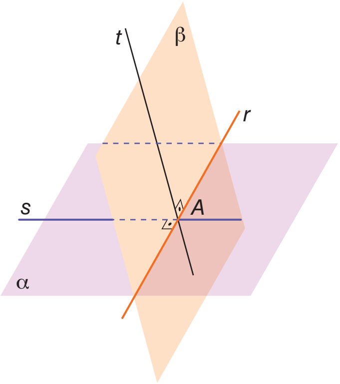
a. O ângulo $C\hat{A}D'$ é reto. **4. a.** verdadeira

b. A medida do ângulo $A\hat{C}D'$ é menor que 30°. **4. b.** verdadeira

c. A medida do ângulo $A\widehat{D'}C$ é menor que 60°. **4. c.** falsa

d. O ângulo $A\widehat{D'}C$ é reto. **4. d.** falsa

5. Dois planos α e β têm em comum uma única reta r. Uma reta s, contida em α, e uma reta t, contida em β, são perpendiculares a r em um ponto A, conforme ilustra a figura a seguir.



Sobre s toma-se um ponto B, com $AB = 8$ cm, e sobre t toma-se um ponto C, com $AC = 3$ cm, observando-se que $BC = 7$ cm.

a. Calcule a medida de um ângulo agudo formado pelos planos α e β. **5. a.** 60°

b. Calcule o cosseno de um ângulo agudo formado pela reta $\overleftrightarrow{BC}$ e o plano α. **5. b.** $\frac{13}{14}$

c. Com o auxílio de uma calculadora eletrônica, obtenha uma aproximação, com uma casa decimal, da medida de um ângulo obtuso formado pela reta $\overleftrightarrow{BC}$ e o plano α. **5. c.** aproximadamente 158,2°

6. Em um ponto de ônibus há uma cobertura retangular com 6 m de comprimento por 4 m de largura, com os lados maiores paralelos ao piso plano e horizontal, e lados menores com inclinação de 30° em relação ao piso. Quando os raios solares são perpendiculares ao piso, qual é a área da sombra projetada sobre ele?

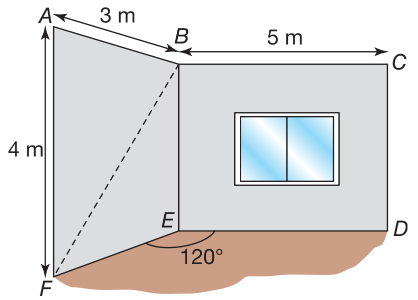
6. $12\sqrt{3}$ m^2

ILUSTRAÇÕES: ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

ILUSTRAÇÕES: ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

7. A figura a seguir representa o interior de uma sala. As duas paredes retangulares $ABEF$ e $BCDE$ são perpendiculares ao plano horizontal do piso e formam entre si um ângulo de 120°. Dado que $AF = 4$ m, $AB = 3$ m e $BC = 5$ m, calcule a medida do ângulo $F\hat{B}C$.

7. aproximadamente 107,46°



FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

8. (Enem) Para o modelo de um troféu foi escolhido um poliedro P, obtido a partir de cortes nos vértices de um cubo. Com um corte plano em cada um dos cantos do cubo, retira-se o canto, que é um tetraedro de arestas menores do que metade da aresta do cubo. Cada face do poliedro P, então, é pintada usando uma cor distinta das demais faces. Com base nas informações, qual é a quantidade de cores que serão utilizadas na pintura das faces do troféu? **8.** alternativa **c**

a. 6 **b.** 8 **c.** 14 **d.** 24 **e.** 30

9. Um lapidador planeja dar a forma de um poliedro convexo a uma pedra preciosa, de modo que o poliedro tenha 20 arestas e todas as faces tenham o mesmo número de arestas. Para otimizar a reflexão interna da luz e sua posterior saída pela face plana superior, o profissional concluiu que a pedra, depois de lapidada na forma planejada, deve ter o máximo possível de faces. Quantos vértices terá a pedra lapidada? **9.** 12

10. Uma bola de futebol é formada por 20 faces hexagonais e 12 pentagonais, todas com lados congruentes entre si. Para costurar essas faces lado a lado, formando a superfície de um poliedro convexo, gastam-se 15 cm de linha em cada aresta do poliedro. Quantos metros de linha são necessários para costurar inteiramente cada bola? **10.** 13,5 m

FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

11. Usando a técnica de origami, Marília construiu um modelo com o formato de um poliedro regular de 8 faces e 6 vértices.

a. Qual é este poliedro? **11. a.** octaedro

b. Quantas arestas tem esse poliedro? **11. b.** 12 arestas

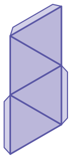
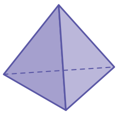
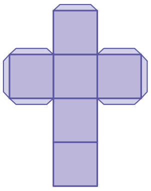
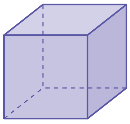
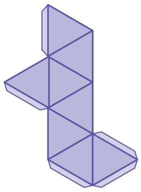
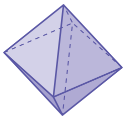
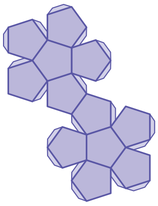
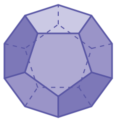
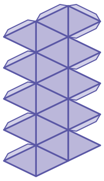
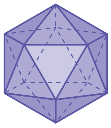
12. Planificar a superfície de um poliedro significa representar todas as suas faces em um mesmo plano. Na planificação, é usual representar cada face com um lado em comum com alguma outra face.

Junte-se a um colega e façam o que é pedido.

a. Desenhem em folhas de cartolina figuras semelhantes às planificações dos poliedros regulares apresentadas a seguir, aumentando-as na razão 6 : 1. Recortando, dobrando e colando a cartolina, montem cada um dos poliedros. (Tenham em mente que cada uma dessas figuras montadas representa a superfície do poliedro, pois o poliedro é uma figura maciça, ou seja, é a reunião da superfície com seu interior.)

12. a. Construção pessoal.

Representação da planificação da superfície de alguns poliedros

Planificação	Poliedro regular
	 Tetraedro
	 Hexaedro
	 Octaedro
	 Dodecaedro
	 Icosaedro

ILUSTRAÇÕES: ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

b. Construam um quadro retangular em cujas linhas estejam os nomes dos poliedros do item **a** e seus respectivos: número de faces, número de vértices, número de arestas, número de arestas de cada face e, finalmente, número de arestas de cada ângulo poliédrico. **12. b.** Resposta no final do livro.

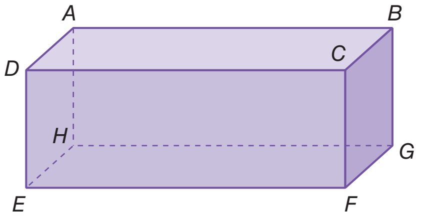
VERIFIQUE O QUE APRENDEU NO CAPÍTULO 8

Além do processo de avaliação promovido pelo professor, é importante que você, estudante, realize uma autoavaliação. O objetivo desse instrumento é mensurar seu nível de aprendizagem em relação ao assunto desenvolvido no capítulo. Para ajudá-lo nessa tarefa, apresentamos as seguintes questões.

1. Faça o que se pede.

a. Um paralelepípedo reto-retângulo é uma figura espacial limitada por seis planos distintos entre si. Descreva esses seis planos, em relação ao paralelepípedo *ABCDEFGH*, a seguir, usando a notação pl(*XYZ*) para representar o plano determinado por pontos *X*, *Y* e *Z*.

1. a. pl(*ABC*), pl(*CBG*), pl(*DCF*), pl(*EFG*), pl(*ADH*) e pl(*ABG*).



ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

b. Represente por um desenho em seu caderno uma figura espacial limitada por quatro planos distintos entre si. Descreva esses quatro planos usando a notação pl($\overleftrightarrow{XY}$, *Z*)para representar o plano determinado pela reta $\overleftrightarrow{XY}$ e pelo ponto *Z*. **1. b.** Resposta no final do livro.

c. Represente por um desenho em seu caderno uma figura espacial limitada por cinco planos distintos entre si. Descreva esses cinco planos usando a notação pl($\overleftrightarrow{XY}$, $\overleftrightarrow{ZW}$)para representar o plano determinado pelas retas $\overleftrightarrow{XY}$ e $\overleftrightarrow{ZW}$. **1. c.** Resposta no final do livro.

2. Responda às questões seguintes.

a. Dados um ponto *P* e um plano α, com $P \notin \alpha$, quantas retas passam por *P* e são paralelas a α? **2. a.** Infinitas.

b. Dados um ponto *P* e um plano α, com $P \in \alpha$, quantas retas passam por *P* e são paralelas a α? **2. b.** Nenhuma.

c. Dados um ponto *P* e um plano α, quantas retas passam por *P* e são secantes a α? **2. c.** Infinitas.

d. Dados um plano α e duas retas *r* e *s*, com *r* paralela a *s* e $s \subset \alpha$, qual é a posição relativa entre *r* e α? **2. d.** A reta *r* pode ser paralela a α ou pode estar contida em α.

e. Uma reta *r* é secante a um plano α e outra reta *s* está contida em α. Qual é a posição relativa entre *r* e *s*? **2. e.** As retas *r* e *s* podem ser concorrentes ou reversas.

f. Duas retas *r* e *s* são reversas e *r* está contida em um plano α. Qual é a posição relativa entre *s* e α? **2. f.** A reta *s* é secante ou paralela a α.

g. Uma reta *r* é paralela a um plano α e outra reta *s* está contida em α. Qual é a posição relativa entre *r* e *s*? **2. g.** As retas *r* e *s* podem ser paralelas distintas ou reversas.

3. Sejam: $\overline{AB}$ um diâmetro de uma circunferência contida em um plano α; um ponto *C* dessa circunferência, distinto de *A* e *B*; uma reta *r* secante a α em *C* e perpendicular à reta $\overleftrightarrow{BC}$.

a. Faça uma figura ilustrando essa situação. **3. a.** Resposta no final do livro.

b. Nessas condições, podemos afirmar que a reta $\overleftrightarrow{BC}$ é perpendicular ao plano β determinado pela reta *r* e pelo ponto *A*. Justifique essa afirmação. **3. b.** sim

4. Um tetradecaedro convexo é formado por 8 faces triangulares e as demais faces octogonais.

a. Determine o número de vértices deste poliedro. **4. a.** 24

b. Determine o número de diagonais desse poliedro. **4. b.** 120

5. A taipa de mão, também conhecida como pau a pique, é uma técnica construtiva antiga que consiste no entrelaçamento de madeiras verticais fixadas no solo, com vigas horizontais, geralmente de bambu amarradas entre si por cipós, dando origem a um painel perfurado que, após preenchido com barro, transforma-se em uma parede.

Foi muito utilizada no período colonial e das técnicas em arquitetura de terra é a mais utilizada, principalmente por dispensar materiais importados. Por conta disso, seu uso é maior nas zonas rurais.

Para garantir que as vigas fixadas sejam perpendiculares ao chão, o construtor usou um esquadro de madeira de formato triangular com lados medindo 30 cm, 40 cm e 50 cm, apoiando totalmente o lado de 40 cm ao chão. Considerando que o chão esteja totalmente plano, explique como esse processo garante que a viga seja perpendicular ao chão.

CADU DE CASTRO/PULSAR IMAGENS

Moradia em taipa de mão do Quilombo Itamatatiua, Alcântara (MA). Foto de 2024.

5. O esquadro de madeira tem formato que pode ser associado a um triângulo retângulo, pois as medidas indicadas satisfazem o teorema de Pitágoras: $50^2 = 40^2 + 30^2$

Aproveite o contexto do **exercício 5** e proponha aos estudantes uma conversa a respeito da cultura quilombola. Pergunte se eles conhecem outros aspectos dessa cultura e incentive-os a pesquisar a importância da origem dos quilombos como resistência à escravidão e, atualmente, como preservação cultural e histórica, além da conservação da biodiversidade. Essa pesquisa pode se dar por meio de uma atividade interdisciplinar com a área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas, abordando aspectos da etnomatemática, o **TCT Educação para valorização do multiculturalismo nas matrizes históricas e culturais brasileiras** e as **competências gerais 1**, **3** e **6**.

Ferramenta de estudo

Ao término da resolução dos exercícios, copie no caderno o quadro indicado a seguir e preencha-o assinalando a resposta mais adequada ao seu aprendizado. Se julgar necessário, retome os tópicos de conteúdos relacionados a cada questão ou converse com os colegas e com o professor a fim de tirar dúvidas a respeito delas.

ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

Questão	Sim	Parcialmente	Não
Sei comparar a posição relativa entre duas retas?			
Compreendi as posições relativas entre reta e plano?			
Sei quando dois planos são paralelos ou quando eles são secantes?			
Compreendi o que é perpendicularidade e o que é ortogonalidade?			
Entendi o que é projeção ortogonal sobre um plano?			
Sei como determinar a medida de ângulos entre duas retas reversas, entre uma reta e um plano e entre dois planos?			
Posso explicar o que são poliedros convexos e quais são seus elementos?			
Compreendi o que são poliedros regulares?			

CAPÍTULO 9

Prismas e pirâmides

O contexto da abertura favorece o trabalho com o **ODS 10**. Incentive os estudantes a pesquisarem e conversarem sobre as desigualdades sociais. Eles podem comparar alguns indicadores sociais de diferentes países e expor maneiras de reduzir a desigualdade social.


LEANDRO FERREIRA/FOTOARENA

Escada da Catedral Metropolitana de Campinas (SP), em foto de 14 de dezembro de 2021. Após promulgação da Lei, a Catedral informou que retiraria os espetos.

ODS 10

De acordo com o Censo 2022, o número de pessoas com 65 anos ou mais aumentou 57,4% em 12 anos no Brasil. O envelhecimento da população é um fator importante para que os países se preparem para o futuro, com políticas de valorização e acolhimento das pessoas idosas.

Alguns países, como Japão, Canadá, Dinamarca e Estados Unidos, tiveram maior preparação para o envelhecimento da população. Em Portugal, um exemplo que contribui para a qualidade de vida das pessoas idosas é um complexo social localizado em Alcabideche que teve uma arquitetura pensada para que o componente humano fosse valorizado: ruas, praças e jardins como extensões da residência, telhados translúcidos que acendem quando a tarde cai para assegurar a locomoção à noite, esquema de iluminação de emergência que acende uma luz vermelha ao acionar o alarme, sinalizando necessidade de ajuda.

Em contrapartida a essa arquitetura que visa o bem-estar das pessoas, podemos listar práticas associadas a uma chamada “arquitetura hostil”, que consistem em empregar estruturas, materiais e equipamentos com intuito de afastar as pessoas de praças, viadutos, calçadas, jardins etc.

No Brasil, em 2022 foi promulgada a Lei 14.489, também conhecida como Lei Padre Júlio Lancellotti, que proíbe a “arquitetura hostil”. O nome da lei faz referência a esse religioso que, em um episódio de denúncia desse tipo de arquitetura, usou uma marreta para remover pedras pontiagudas instaladas pela prefeitura municipal debaixo de um viaduto.

Elaborado com base em: SANTOS, T. M. A. **Complexo habitacional e de convivência para idosos em Monte Carmelo**. 2021. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Arquitetura e Urbanismo) – Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2021. Disponível em: https://repositorio.ufu.br/handle/123456789/32641; AGÊNCIA SENADO. Lei Padre Júlio Lancellotti, que proíbe ‘arquitetura hostil’, é promulgada. **Senado Notícias**, 22 dez. 2022. Disponível em: https://www12.senado.leg.br/noticias/materias/2022/12/22/lei-padre-julio-lancellotti-que-proibe-arquitetura-hostil-e-promulgada. Acesso em: 5 set. 2024.

Além da teoria

Além da teoria: Respostas pessoais.

1. Como podemos associar objetos matemáticos como prismas e pirâmides à arquitetura?
2. Você já conhecia o termo “arquitetura hostil”? Pesquise sobre o assunto e converse com os colegas a esse respeito.
3. Na sua opinião, qual é a importância de os países se prepararem para o envelhecimento populacional? Pesquise informações sobre esse tema no contexto brasileiro.

1. Prisma

É possível que hoje mesmo você já tenha observado alguns objetos que possam ser associados a algum prisma. Uma geladeira, uma caixa de leite, edifícios construídos que possam ser observados ao longo do caminho da escola ou blocos de concreto em ruas ou calçadas pavimentadas.

O prisma é um poliedro com duas de suas faces paralelas e congruentes, chamadas **bases**, tal que as arestas que as unem são paralelas entre si.


BRASTOCK IMAGES/ISTOCK/GETTY IMAGES

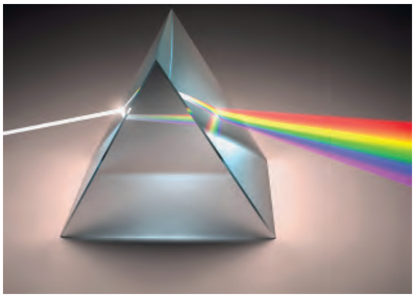
Vista aérea de entorno da Praça do Marco Zero, em Recife (PE). Foto de 2022.

Reflexão

Você já observou que algumas construções e monumentos das cidades têm formato que lembram um prisma? Converse com os colegas a esse respeito.

Reflexão: Resposta pessoal.

As imagens não respeitam as proporções reais entre os objetos.


KTSDESIGN/SHUTTERSTOCK

Isaac Newton utilizou um prisma de cristal de bases triangulares para decompor a luz do Sol nas cores do arco-íris.


KOREAKHW/SHUTTERSTOCK

As colunas de sustentação de pontes e viadutos têm, normalmente, formato que lembra um prisma.

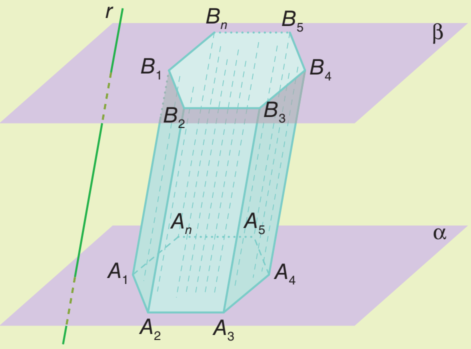

WETER78/SHUTTERSTOCK

As abelhas constroem os favos seguindo uma estrutura que pode ser associada a um prisma de base hexagonal.

Para o estudo desse tipo de poliedro, necessitamos de uma definição precisa, apresentada a seguir.

Sejam dois planos paralelos distintos α e β, uma reta *r* secante a esses planos e um polígono convexo $A_1A_2A_3...A_n$ contido em α. Consideremos todos os segmentos de reta paralelos a *r*, de modo que cada um deles tenha um extremo pertencente ao polígono e o outro extremo pertencente a β.

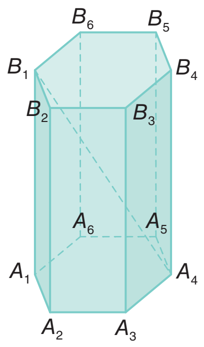
A reunião de todos esses segmentos de reta é um poliedro chamado de prisma convexo limitado ou, simplesmente, **prisma**.



FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

Observação

Lembre-se de que um polígono é uma superfície plana, e não apenas a linha formada pelos lados. Assim, o prisma é uma figura geométrica maciça (formada pela superfície e pelo seu interior).



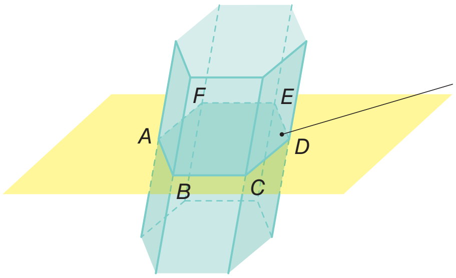
Elementos de um prisma

Observando o prisma hexagonal da figura, temos:

- os polígonos $A_1A_2A_3 \ldots A_6$ e $B_1B_2B_3 \ldots B_6$ são chamados de **bases** do prisma;
- as demais faces, exceto as bases, são chamadas de **faces laterais** do prisma; por exemplo, $A_1B_1B_2A_2$, $A_2B_2B_3A_3$ etc.;
- os vértices das faces são chamados de **vértices** do prisma; por exemplo, A_1, A_2, A_3 etc., B_1, B_2, B_3 etc.;
- os lados das bases são chamados de **arestas das bases** do prisma; por exemplo, $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_2A_3}$, $\overline{A_3A_4}$ etc., $\overline{B_1B_2}$, $\overline{B_2B_3}$, $\overline{B_3B_4}$ etc.;
- as demais arestas, exceto as das bases, são chamadas de **arestas laterais** do prisma; por exemplo, $\overline{A_1B_1}$, $\overline{A_2B_2}$, $\overline{A_3B_3}$ etc.
- a distância entre os planos das bases é chamada de **altura** do prisma;
- todo segmento de reta cujos extremos são vértices que não pertencem a uma mesma face do prisma é chamado de **diagonal do prisma**; por exemplo, $\overline{B_1A_4}$.

Secção transversal de um prisma

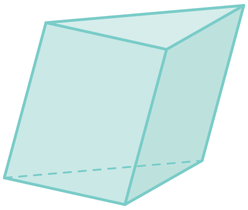
Uma **secção transversal** de um prisma é qualquer intersecção não vazia do prisma com um plano paralelo às suas bases.



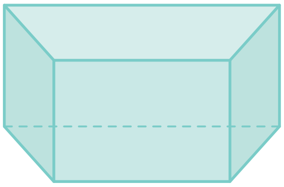
ABCDEF é uma secção transversal do prisma.

Nomenclatura

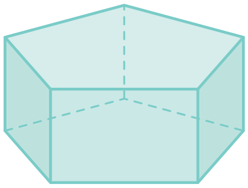
Um prisma é classificado de acordo com o número de arestas de sua base, por exemplo:



prisma triangular



prisma quadrangular



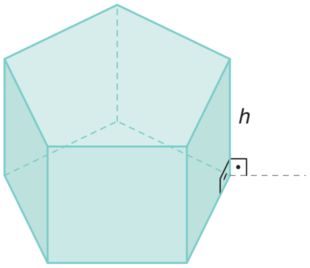
prisma pentagonal

Prisma reto e prisma oblíquo

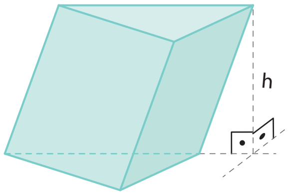
Um prisma é **reto** se, e somente se, suas arestas laterais são perpendiculares aos planos das bases. Um prisma que não é reto é chamado de prisma **oblíquo**.

Observação

Note que em todo prisma reto a medida de uma aresta lateral é a própria altura do prisma.



prisma pentagonal reto

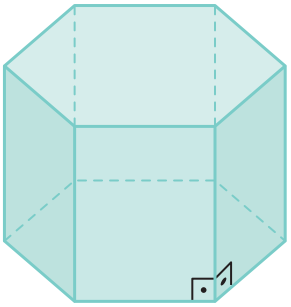


prisma triangular oblíquo

ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

Prisma regular

Um prisma é **regular** se, e somente se, é reto e suas bases são polígonos regulares.



prisma hexagonal regular: prisma reto com bases hexagonais regulares

Observação

Note que em todo prisma regular as faces laterais são retangulares e congruentes entre si.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Faça os exercícios no caderno.

1. Desenhe em seu caderno uma figura que represente um prisma pentagonal reto. Indique em seu desenho um plano α que separe esse prisma pentagonal em dois outros prismas, tal que um deles seja hexagonal. **1.** Resposta no final do livro.

2. No que se refere ao formato e ao tamanho, qual é a relação entre uma secção transversal e a base de um prisma qualquer? **2.** Toda secção transversal de um prisma é congruente às bases desse prisma.

3. Desenhe em seu caderno uma figura que represente um prisma hexagonal regular. Depois, indique uma diagonal do prisma que tenha a maior medida possível.
3. Resposta no final do livro.

Para retomar os conteúdos estudados, resolva o exercício complementar 1.

Áreas de um prisma

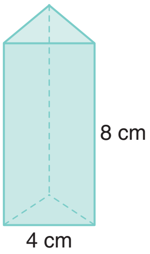
A soma das áreas de todas as faces laterais do prisma é denominada **área lateral** do prisma.

A soma da área lateral com as áreas das duas bases é chamada de **área total** do prisma.

Nesta coleção, para simplificar a escrita, ao nos referirmos à medida da área de uma região, vamos utilizar o termo "área". Dessa maneira, ao utilizarmos expressões como "área lateral", estaremos nos referindo à "medida da área lateral".

EXERCÍCIO RESOLVIDO

1. Em um prisma triangular regular, a medida de cada aresta lateral é 8 cm, e cada aresta da base mede 4 cm.



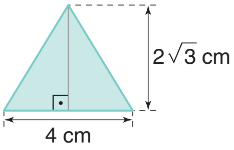
Calcule:
- **a.** a área de uma face lateral;
- **b.** a área de uma base;
- **c.** a área lateral;
- **d.** a área total.

Resolução

a. Cada face lateral do prisma é um retângulo medindo 4 cm de base e 8 cm de altura. Logo, a área A_f de uma face lateral é dada por:

$$A_f = (4 \cdot 8)\ \text{cm}^2 = 32\ \text{cm}^2$$

b. Cada base do prisma é um triângulo equilátero com 4 cm de lado.



Lembrando que a medida h da altura de um triângulo equilátero de lado a é dada por $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, temos:

$$h = \frac{4\sqrt{3}}{2}\ \text{cm} = 2\sqrt{3}\ \text{cm}$$

Portanto, a área B de uma base é dada por:

$$B = \frac{4 \cdot 2\sqrt{3}}{2}\ \text{cm}^2 = 4\sqrt{3}\ \text{cm}^2$$

c. A área lateral A_ℓ é dada por:

$$A_\ell = 3 \cdot A_f = 3 \cdot 32\ \text{cm}^2 = 96\ \text{cm}^2$$

d. A área total A_T é dada por:

$$A_T = A_\ell + 2B = (96 + 2 \cdot 4\sqrt{3})\ \text{cm}^2 =$$
$$= 8(12 + \sqrt{3})\ \text{cm}^2$$

ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

Observação

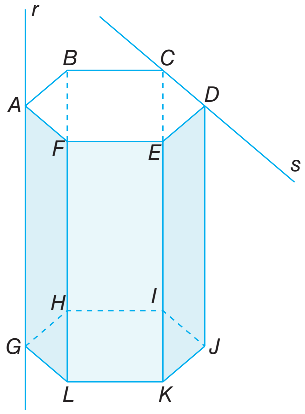
Por definição, a medida da distância entre duas retas reversas r e s é a medida do segmento de reta $\overline{PQ}$, perpendicular a r e a s, com $P \in r$ e $Q \in s$.

ANÁLISE DA RESOLUÇÃO

Reúna-se com um colega. Apontem o erro e conversem sobre o que pode tê-lo causado. Refaçam a resolução no caderno e depois conversem com o professor e outros colegas para expor a estratégia de raciocínio usada por vocês.

Exercício

A figura representa um prisma hexagonal regular de altura 10 dm e área lateral 240 dm^2. Calcule a distância entre as retas reversas r e s que contêm, respectivamente, as arestas $\overline{AG}$ e $\overline{CD}$ desse prisma.



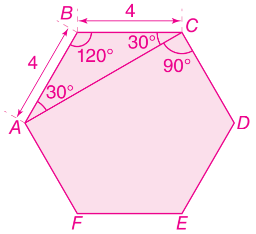
Análise da resolução:
Como o segmento $\overline{AD}$ não é perpendicular a $\overline{CD}$, pois $m(A\hat{D}C) = 60°$, temos que AD não é a distância entre as retas r e s.

Resolução correta:
Indicando por x a medida, em decímetro, de uma aresta da base do prisma, temos:

$$6 \cdot x \cdot 10 = 240 \Rightarrow x = 4$$

Logo, a medida do lado de cada base é 4 dm.

Traçando a diagonal $\overline{AC}$ da base $ABCDEF$, temos:



FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

- o triângulo ABC é isósceles, pois $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ são lados do hexágono regular;
- $A\hat{B}C$ mede 120°, pois é ângulo interno do hexágono regular;
- $B\hat{A}C$ e $B\hat{C}A$ são congruentes e medem 30° cada um;
- $A\hat{C}D$ mede 90°, pois $m(B\hat{C}A) = 30°$ e $m(B\hat{C}D) = 120°$.

Temos também que o segmento $\overline{AC}$ é perpendicular à aresta $\overline{AG}$, pois cada aresta lateral de um prisma reto é perpendicular às bases do prisma.
Portanto, $\overline{AC}$ é perpendicular às duas retas reversas r e s; logo, a medida AC é a distância entre essas retas. Aplicando a lei dos cossenos, temos:

$$(AC)^2 = 4^2 + 4^2 - 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot \cos 120° \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (AC)^2 = 4^2 + 4^2 - 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$$
$$\therefore AC = 4\sqrt{3}$$

Logo, a distância entre as retas r e s é $4\sqrt{3}$ dm.

Resolução

Sendo x a medida, em decímetro, de uma aresta da base, temos:

$$6 \cdot x \cdot 10 = 240 \Rightarrow x = 4$$

Dividindo o hexágono regular em triângulos equiláteros:

Logo, a distância AD entre as retas reversas r e s é 8 dm.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Faça os exercícios no caderno.

4. Cada aresta lateral de um prisma hexagonal regular mede 12 dm, e cada aresta da base mede 8 dm.

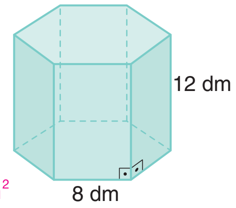
Calcule desse prisma:

a. a área de uma face lateral; **4. a.** 96 dm^2

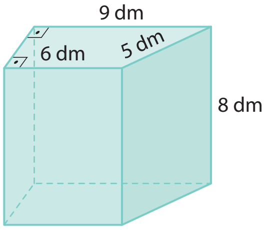
b. a área de uma base; **4. b.** $96\sqrt{3}$ dm^2

c. a área lateral; **4. c.** 576 dm^2

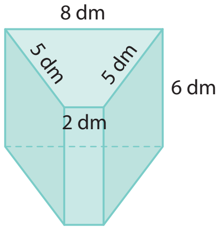
d. a área total. **4. d.** $192(3 + \sqrt{3})$ dm^2



5. As figuras a seguir representam prismas retos, P_1 e P_2, de bases trapezoidais. O prisma P_1 tem 8 dm de altura, e sua base é um trapézio retângulo com bases de 9 dm e 6 dm, sendo que o lado oblíquo às bases mede 5 dm. Já o prisma P_2 tem 6 dm de altura e sua base é um trapézio isósceles cujos lados medem 5 dm, 5 dm, 8 dm e 2 dm.



Prisma P_1



Prisma P_2

ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

De acordo com essas informações, qual das alternativas a seguir é correta? **5.** alternativa **d**

a. A área lateral de P_1 tem exatamente 50 dm^2 a mais que a área lateral de P_2.

b. A área total de P_1 tem exatamente 80 dm^2 a mais que a área total de P_2.

c. A soma das áreas totais de P_1 e P_2 é 482 dm^2.

d. A área lateral de P_1 é 20% maior que a área total de P_2.

e. A área total de P_1 é 52% maior que a área total de P_2.

6. O interior de uma sala tem formato que lembra um prisma reto com 3 m de altura e bases retangulares (teto e piso) com 6 m de comprimento por 5 m de largura. Nas paredes, há duas portas retangulares com medidas de 1,3 m por 2 m e uma janela retangular de 2,5 m por 1,8 m. Para pintar as paredes e o teto dessa sala, exceto as portas e a janela, um pintor estimou que eram necessárias duas demãos de tinta. Se o rendimento de uma lata de 18 L de tinta equivale a uma demão de uma superfície de 250 m^2 de área, conclui-se que o percentual da tinta dessa lata usado na pintura da sala, segundo a estimativa do pintor, será de: **6.** alternativa **b**

a. 58,32%
b. 69,04%
c. 45,98%
d. 39%
e. 39,65%

(**Nota**: Demão é cada camada de tinta aplicada para cobrir toda a superfície.)

7. (Enem) As torres Puerta de Europa são duas torres inclinadas uma contra a outra, construídas numa avenida de Madri, na Espanha. A inclinação das torres é de 15° com a vertical e elas têm, cada uma, uma altura de 114 m (a altura é indicada na figura como o segmento $\overline{AB}$). Estas torres são um bom exemplo de um prisma oblíquo de base quadrada e uma delas pode ser observada na imagem.

JOSE MIGUEL SANCHEZ/SHUTTERSTOCK

Utilizando 0,26 como valor aproximado para a tangente de 15° e duas casas decimais nas operações, descobre-se que a área da base desse prédio ocupa na avenida um espaço

a. menor que 100 m^2.

b. entre 100 m^2 e 300 m^2.

c. entre 300 m^2 e 500 m^2.

d. entre 500 m^2 e 700 m^2.

e. maior que 700 m^2.

7. alternativa **e**

Para retomar os conteúdos estudados, resolva o exercício complementar 2.

2. Paralelepípedo reto-retângulo

Você conseguiria citar quatro objetos com formato que pode ser associado ao de um prisma reto de bases retangulares?

Pensando um pouco, seria possível citar inúmeros objetos com esse formato; por exemplo: uma caixa de sapatos, um bloco usado na pavimentação de ruas, uma piscina e um dado, como mostrados nas fotos.

REALPERSON/SHUTTERSTOCK

VAIVIRGA/SHUTTERSTOCK

J.D.S/SHUTTERSTOCK

ANDREWWECT/SHUTTERSTOCK

As imagens não respeitam as proporções reais entre os objetos.

Todo prisma com essa forma é chamado de paralelepípedo reto-retângulo ou bloco retangular.

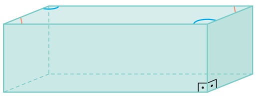
Definimos:

Paralelepípedo é todo prisma cujas bases são paralelogramos.

Um paralelepípedo é **reto** se suas arestas laterais são perpendiculares às bases. Um paralelepípedo que não é reto chama-se paralelepípedo **oblíquo**.

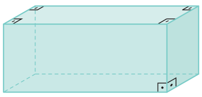
Paralelepípedo reto-retângulo é todo prisma reto cujas bases são retângulos.

Exemplos



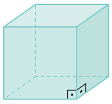
paralelepípedo reto

base: paralelogramo

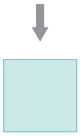


paralelepípedo reto-retângulo

base: retângulo



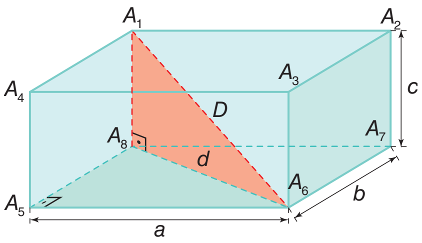
paralelepípedo reto-retângulo de faces quadradas (cubo ou hexaedro regular)



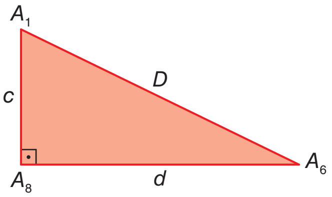
base: quadrado

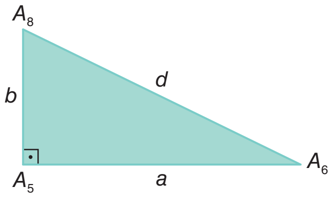
Medida da diagonal de um paralelepípedo reto-retângulo

Consideremos um paralelepípedo reto-retângulo cujas dimensões – comprimento, largura e altura – têm medidas a, b e c. Sendo d e D as medidas de uma diagonal da base e de uma diagonal do paralelepípedo, respectivamente, temos:



Aplicando o teorema de Pitágoras aos triângulos $A_1A_8A_6$ e $A_5A_8A_6$, temos:





$D^2 = d^2 + c^2$ (1)

$d^2 = a^2 + b^2$ (2)

Substituindo (2) em (1), obtemos:

$$D^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

Assim, concluímos que:

$$D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

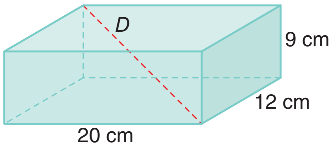
ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

EXERCÍCIO RESOLVIDO

2. O comprimento, a largura e a altura de um paralelepípedo reto-retângulo são, respectivamente, 20 cm, 12 cm e 9 cm. Calcule a medida de uma diagonal desse paralelepípedo.

Professor, enfatize que esse resultado pode ser obtido pelo teorema de Pitágoras. A fórmula do cálculo da diagonal apenas agiliza a resolução.



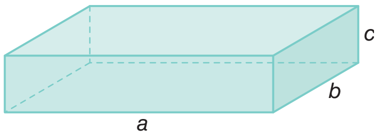
Resolução

Sendo D a medida de uma diagonal desse paralelepípedo, temos:

$$D = \sqrt{20^2 + 12^2 + 9^2}\text{ cm} = \sqrt{625}\text{ cm} = 25\text{ cm}$$

Área total de um paralelepípedo reto-retângulo

Consideremos um paralelepípedo reto-retângulo cujas dimensões medem a, b e c.



Entre as faces do paralelepípedo, temos dois retângulos de área ab, dois de área ac e dois de área bc. A área total A_T desse paralelepípedo é a soma das áreas de suas seis faces:

$$A_T = 2ab + 2ac + 2bc$$

Portanto:

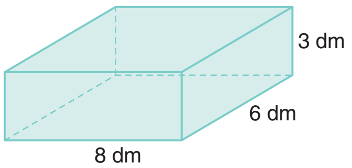
$$\boxed{A_T = 2(ab + ac + bc)}$$

Observação

Estabelecidas duas faces paralelas como bases de um paralelepípedo, a soma das áreas das demais faces é a área lateral do paralelepípedo.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

3. Calcule a área total de um paralelepípedo reto-retângulo cujas dimensões – comprimento, largura e altura – medem 8 dm, 6 dm e 3 dm.

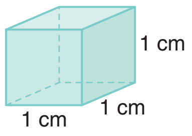


Resolução

A área total A_T desse paralelepípedo é dada por:

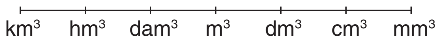
$$A_T = 2(8 \cdot 6 + 8 \cdot 3 + 6 \cdot 3)\text{ dm}^2 = 2 \cdot 90\text{ dm}^2 = 180\text{ dm}^2$$

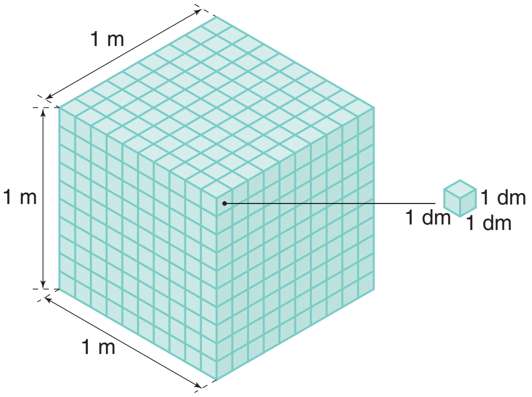
Unidades de volume



Consideremos um cubo (hexaedro regular) com aresta medindo 1 cm. A porção do espaço ocupada por esse cubo é uma unidade de volume definida como 1 cm^3.

De maneira análoga, definem-se 1 mm^3, 1 dm^3, 1 m^3, 1 dam^3, 1 hm^3 e 1 km^3 como a porção do espaço ocupada por cubos com arestas de 1 mm, 1 dm, 1 m, 1 dam,1 hm e 1 km, respectivamente. Essas unidades podem ser representadas na escala a seguir.





Cada unidade dessa escala vale 1.000 vezes a unidade imediatamente à direita dela. Para entender o porquê dessa relação, vamos dividir um cubo cuja aresta mede 1 m em cubinhos com aresta de 1 dm, conforme a figura.

Assim, observamos que o metro cúbico foi dividido em 1.000 decímetros cúbicos, com o que concluímos:

$$1\ m^3 = 1.000\ dm^3$$

Repetindo o raciocínio para as demais unidades da escala, concluímos também que:

$$1\ km^3 = 1.000\ hm^3$$

$$1\ hm^3 = 1.000\ dam^3$$

$$1\ dam^3 = 1.000\ m^3$$

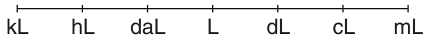
$$1\ dm^3 = 1.000\ cm^3$$

$$1\ cm^3 = 1.000\ mm^3$$

Outra unidade de volume (ou capacidade) muito usada é o **litro** (L), definido como 1 dm^3.

$$\boxed{1\ L = 1\ dm^3}$$

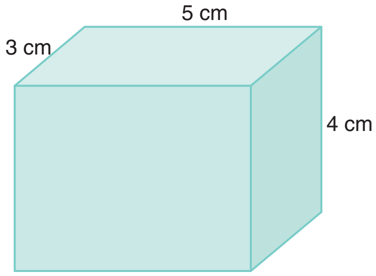
Os múltiplos do litro são o decalitro (daL), o hectolitro (hL) e o quilolitro (kL); e os submúltiplos são o decilitro (dL), o centilitro (cL) e o mililitro (mL). Essas unidades podem ser dispostas na escala a seguir, em que cada unidade vale dez vezes a unidade imediatamente à direita dela.



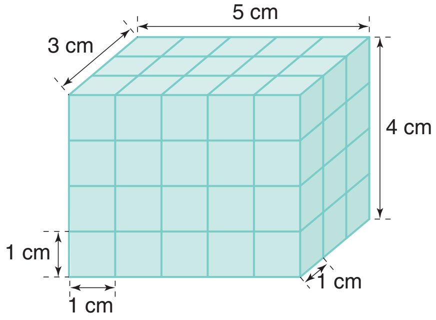
Ao iniciar o tópico **Unidades de volume**, pergunte aos estudantes: “O que é 1 metro cúbico?”. (É uma unidade de medida de volume que equivale à porção do espaço ocupada por um cubo de 1 m de aresta.); “O que é 1 centímetro cúbico?”. (É uma unidade de medida de volume que equivale à porção do espaço ocupada por um cubo de 1 cm de aresta.); “O que é 1 litro?”. (É uma unidade de capacidade equivalente a 1 dm³.). Em seguida, apresente as unidades de medida de volume e de capacidade, dando exemplos de conversão de unidades.

Volume de um paralelepípedo reto-retângulo

Adotando o centímetro cúbico como unidade, vamos medir o volume de um paralelepípedo reto-retângulo de dimensões 5 cm, 3 cm e 4 cm.



Para esse cálculo, dividimos o paralelepípedo em cubinhos cuja aresta mede 1 cm:



ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

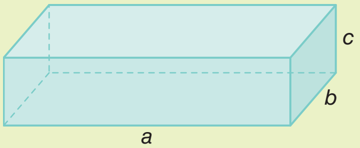
Como obtivemos 4 camadas horizontais com 15 cubinhos em cada uma, concluímos que o volume do paralelepípedo é igual ao volume de 60 cubinhos de aresta medindo 1 cm. Portanto, o volume V do paralelepípedo pode ser calculado pelo produto das três dimensões:

$$V = (5 \cdot 3 \cdot 4)\ \text{cm}^3 = 60\ \text{cm}^3$$

Reflexão: A medida da distância entre as bases de um paralelepípedo qualquer é a altura H do paralelepípedo. Sendo B a área de uma base, o volume V é calculado por: $V = B \cdot H$. Esse fato será justificado pelo princípio de Cavalieri mais adiante.

O **volume** V de um paralelepípedo reto-retângulo de dimensões a, b e c é o produto das três dimensões:

$$V = a \cdot b \cdot c$$

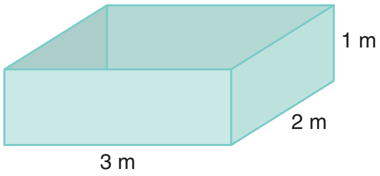


Reflexão

Como se calcula o volume de um paralelepípedo que não seja reto-retângulo?

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

4. Uma caixa-d'água tem, internamente, formato que lembra um paralelepípedo reto-retângulo com medidas de 3 m de comprimento, 2 m de largura e 1 m de altura. Calcule a medida da capacidade dessa caixa-d'água, em litro.



Resolução

O volume interno V da caixa-d'água é dado por:

$$V = (3 \cdot 2 \cdot 1)\ \text{m}^3 = 6\ \text{m}^3$$

Como $1\ \text{L} = 1\ \text{dm}^3$ e $1\ \text{m}^3 = 1.000\ \text{dm}^3$, temos:

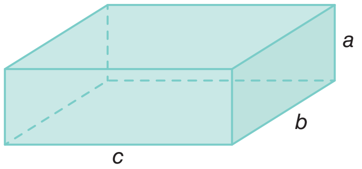
$$V = 6.000\ \text{dm}^3 \Rightarrow V = 6.000\ \text{L}$$

Logo, a capacidade da caixa-d'água, que é seu volume interno, é 6.000 L.

5. Calcule o volume V de um paralelepípedo reto-retângulo de área total 198 cm^2 e de dimensões diretamente proporcionais a 1, 2 e 3.

Resolução

Sejam a, b e c as medidas, em centímetro, das dimensões do paralelepípedo.



Temos: $\frac{a}{1} = \frac{b}{2} = \frac{c}{3} = k \Rightarrow \begin{cases} a = k \\ b = 2k \\ c = 3k \end{cases}$

E, ainda: $A_T = 2(ab + ac + bc)$ e $A_T = 198\ \text{cm}^2$.

Assim, podemos escrever:

$$2(k \cdot 2k + k \cdot 3k + 2k \cdot 3k) = 198$$
$$2(2k^2 + 3k^2 + 6k^2) = 198$$
$$22k^2 = 198 \Rightarrow k^2 = 9$$
$$\therefore k = \pm 3$$

O valor de k deve ser positivo, ou teríamos as dimensões do paralelepípedo representadas por números negativos, o que é absurdo. Assim, temos: $k = 3$.

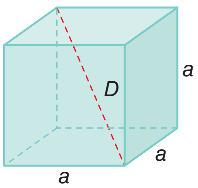
Logo, as medidas das dimensões do paralelepípedo são 3 cm, 6 cm e 9 cm, e, portanto, seu volume V é dado por:

$$V = (3 \cdot 6 \cdot 9)\ \text{cm}^3 = 162\ \text{cm}^3$$

ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

3. Cubo

O cubo (hexaedro regular) é um paralelepípedo reto-retângulo cujas arestas têm todas a mesma medida a. Para calcular a medida D de uma diagonal do cubo, a área total A_T e o volume V, basta aplicar as fórmulas correspondentes do paralelepípedo reto-retângulo, considerando as três dimensões iguais a a, isto é:



$$D = \sqrt{a^2 + a^2 + a^2} = \sqrt{3a^2} \Rightarrow D = a\sqrt{3}$$
$$A_T = 2(a \cdot a + a \cdot a + a \cdot a) \Rightarrow A_T = 6a^2$$
$$V = a \cdot a \cdot a \Rightarrow \text{V} = a^3$$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

6. Sabendo que uma diagonal de uma face de um cubo mede $5\sqrt{2}$ cm, calcule desse cubo:

a. a medida de uma diagonal; **b.** a área total; **c.** o volume.

Resolução

Professor, enfatize que, no item **a**, esse resultado pode ser obtido aplicando o teorema de Pitágoras. A fórmula apenas agiliza a resolução.

a. Indicando por *a* a medida da aresta do cubo, podemos representá-lo conforme a figura.

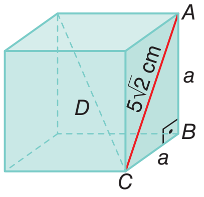
Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo *ABC*, obtemos a medida da aresta:

$$a^2 + a^2 = (5\sqrt{2})^2 \Rightarrow 2a^2 = 50$$

$$\therefore a = 5 \text{ cm}$$

Assim, a medida *D* da diagonal desse cubo é:

$$D = a\sqrt{3} \Rightarrow D = 5\sqrt{3} \text{ cm}$$



FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

b. $A_T = 6a^2 \Rightarrow A_T = (6 \cdot 5^2) \text{ cm}^2 = 150 \text{ cm}^2$

c. $V = a^3 \Rightarrow V = 5^3 \text{ cm}^3 = 125 \text{ cm}^3$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Faça os exercícios no caderno.

8. O comprimento, a largura e a altura de um paralelepípedo reto-retângulo são 6 dm, 3 dm e 2 dm. Calcule desse paralelepípedo:

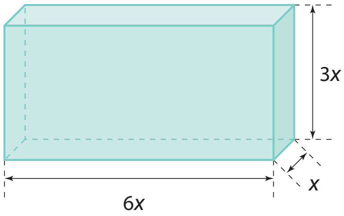
a. o volume *V*; **8. a.** 36 dm^3

b. a área total A_T; **8. b.** $A_T = 72 \text{ dm}^2$

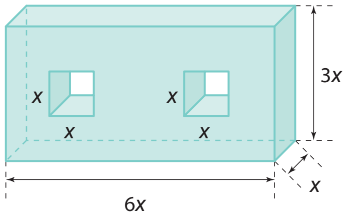
c. a medida *D* de uma de suas diagonais. **8. c.** 7 dm

9. Responda aos itens seguintes.

a. Em um paralelepípedo reto-retângulo, cujo volume é 144 m^3, o comprimento, a largura e a altura, em metro, medem 6*x*, *x* e 3*x*, respectivamente, conforme mostra a figura a seguir. Calcule a medida *x* e a área total desse paralelepípedo. **9. a.** $x = 2$ m e 216 m^2



b. Do paralelepípedo citado no item **a**, retiram-se dois cubos de aresta *x*, conforme sugere a figura a seguir. Calcule o volume e a área total do sólido remanescente para o valor de *x* encontrado no item **a**. **9. b.** 128 m^3 e 232 m^2



ILUSTRAÇÕES: ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

10. Em um paralelepípedo reto-retângulo, a largura mede o triplo da altura, e o comprimento mede o quádruplo da altura. Dado que uma diagonal desse paralelepípedo mede $2\sqrt{26}$ cm, determine seu volume. **10.** 96 cm^3

11. Um prisma reto com 3 m de altura e base quadrada tem área total igual a 80 m^2. O volume desse prisma é: **11.** alternativa **c**

a. 75 m^3

b. 56 m^3

c. 48 m^3

d. 58 m^3

e. 36 m^3

12. Uma piscina possui formato interno que lembra um paralelepípedo reto-retângulo. As medidas do comprimento, a largura e a profundidade dessa piscina, em metro, são diretamente proporcionais aos números 9, 4 e 1, respectivamente. Calcule cada uma dessas dimensões sabendo que a capacidade da piscina é de 288.000 litros.

12. comprimento: 18 m; largura: 8 m; profundidade: 2 m

13. O departamento de uma indústria de colchão produz dois modelos, *S* e *C*, de colchões destinados a solteiro e casal, respectivamente. Para a fabricação de cada um dos modelos, é recortada uma peça de espuma de poliuretano cujo formato lembra um paralelepípedo reto-retângulo, que depois é revestida inteiramente por tecido. As medidas do modelo *S* são 200 cm de comprimento por 90 cm de largura por 25 cm de altura; e as medidas do modelo *C* são 200 cm de comprimento por 150 cm de largura por 25 cm de altura. Devido às dobras e costuras do tecido de revestimento, os modelos *S* e *C* exigem, respectivamente,

13. a. Colchão *S*: 12,6 kg; colchão *C*: 21 kg

4% e 5% a mais de área do tecido do que a área total da superfície do paralelepípedo de espuma de poliuretano do respectivo colchão.

a. Dado que a densidade da espuma de poliuretano usada na fabricação desses colchões é de 28 kg/m^3, calcule a massa, em quilograma, da espuma de poliuretano em cada tipo de colchão.

b. Em determinado dia, esse departamento fabricou 28 colchões, distribuídos entre os dois modelos, utilizando 170,14 m^2 de tecido para o revestimento de todos eles. Quantos colchões de cada modelo foram produzidos por esse departamento nesse dia?

13. b. Colchão *S*: 20 unidades; colchão *C*: 8 unidades

14. A área total de um cubo é 96 dm^2. Calcule desse cubo:

a. a medida da diagonal; **14. a.** $4\sqrt{3}$ dm

b. a área lateral; **14. b.** 64 dm^2

c. o volume. **14. c.** 64 dm^3

15. (Enem) Uma fábrica produz barras de chocolates no formato de paralelepípedos e de cubos, com o mesmo volume. As arestas da barra de chocolate no formato de paralelepípedo medem 3 cm de largura, 18 cm de comprimento e 4 cm de espessura.

Analisando as características das figuras geométricas descritas, a medida das arestas dos chocolates que têm o formato de cubo é igual a: **15.** alternativa **b**

a. 5 cm

b. 6 cm

c. 12 cm

d. 24 cm

e. 25 cm

16. Para calcular a capacidade de um jarro de formato irregular, Paulo retirou água de um aquário que tem formato parecido com um paralelepípedo reto-retângulo e encheu completamente o jarro.

16. alternativa **a**

Observando que o fundo do aquário tem 50 cm de comprimento por 30 cm de largura e que, após a retirada, o nível da superfície da água desceu 2 cm, o rapaz concluiu, corretamente, que a capacidade do jarro é:

SERRALHEIRO/ARQUIVO DA EDITORA

a. 3 L

b. 0,3 L

c. 2 L

d. 2,8 L

e. 2,7 L

Na resolução da **atividade 18**, oriente os estudantes quanto à escolha do *site* e quanto à escolha dos materiais. Sugira artigos acessíveis, como papel-cartão, cola branca, grampeador, tinta nanquim ou guache e outros materiais que sejam facilmente encontrados em papelarias.

17. Dois blocos cúbicos maciços de alumínio com volumes diferentes foram fundidos juntos. O alumínio líquido foi moldado como um paralelepípedo reto-retângulo maciço de dimensões 8 cm, 9 cm e 21 cm. Se a medida de cada aresta de um dos cubos originais media 80% da medida de cada aresta do outro, calcule o volume do menor desses cubos.

17. $V = 512 \text{ cm}^3$

18. Junte-se a um colega e escolham um *site* da internet que ensine a construir maquetes. Seguindo o passo a passo do *site* escolhido, construam uma maquete representando o interior da casa ou do apartamento de um de vocês. Depois, elabore um problema envolvendo uma situação no contexto de maquetes. Em seguida, troque o problema elaborado com um colega para que um resolva o problema elaborado pelo outro. Por fim, analisem e discutam as resoluções.

18. Resposta pessoal.

Para retomar os conteúdos estudados, resolva os exercícios complementares 3 a 9.

4. Volume de um prisma

Princípio de Cavalieri

As fotos a seguir mostram as mesmas moedas empilhadas de duas maneiras diferentes. Qual relação existe entre o volume da primeira pilha de moedas e o volume da segunda pilha?

BETO CELLI/ARQUIVO DA EDITORA

É claro que as pilhas têm volumes iguais, pois o volume de cada pilha é a soma dos volumes das moedas que a compõem, e as duas pilhas são formadas pelas mesmas moedas.

Explore a intuição dos estudantes sobre o **princípio de Cavalieri**, perguntando: “Imaginem dois vasos de mesma altura e formatos diferentes dispostos sobre o tampo horizontal de uma mesa. Colocando água até uma mesma altura *h* nos dois vasos, verifica-se que as superfícies da água em ambos têm a mesma área (para qualquer valor possível de *h*). Que relação existe entre os volumes dos dois vasos? (São iguais.)”


FÁBIO CORTEZ REIS/ ARQUIVO DA EDITORA

Ilustração de busto de Bonaventura Cavalieri (1598-1647).

Observação

Entenda como sólido geométrico qualquer porção do espaço limitada por uma superfície fechada; por exemplo, um prisma.

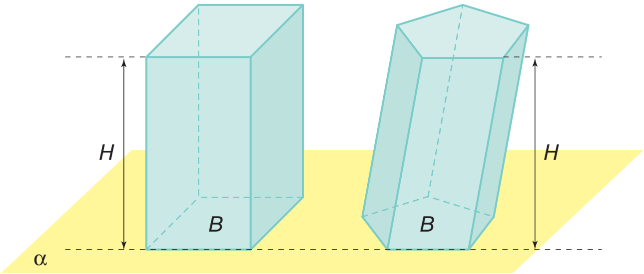
Essa ideia intuitiva foi transformada em uma importante proposição pelo matemático, professor da Universidade de Bolonha (Itália), Bonaventura Cavalieri. A obra mais importante de Cavalieri, *Geometria indivisibilibus continuorum* (*Geometria dos indivisíveis contínuos*), publicada em 1635, apresenta o princípio enunciado a seguir, para a comparação dos volumes de dois sólidos geométricos.

> Sejam dois sólidos geométricos P_1 e P_2 e um plano α. Se qualquer plano β, paralelo a α, que intercepta um dos sólidos também intercepta o outro e determina nesses sólidos secções de mesma área, então os sólidos P_1 e P_2 têm volumes iguais.

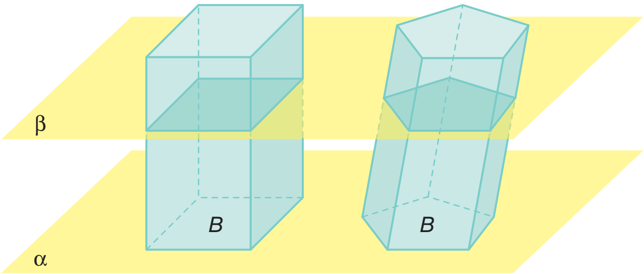
Para exemplificar, acompanhe como se calcula o volume de um prisma qualquer, comparando-o com o volume de um paralelepípedo reto-retângulo.

Cálculo do volume de um prisma

Consideremos, em um semiespaço de origem α, um paralelepípedo reto-retângulo e um prisma, ambos com altura H, cujas bases estão contidas em α e têm a mesma área B.



Note que qualquer plano β, paralelo a α, que intersecta um dos prismas também intersecta o outro.



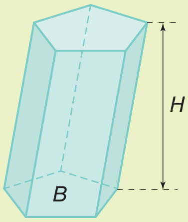
ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

Como qualquer secção transversal de um prisma é congruente às suas bases, qualquer plano β, nas condições anteriores, determina nesses prismas secções de mesma área. Assim, o princípio de Cavalieri garante que os prismas têm volumes iguais.

Sendo m e n as dimensões da base do paralelepípedo, seu volume V é dado por $V = mnH$. Como a área B da base desse paralelepípedo é $B = mn$, temos $V = B \cdot H$, que também é o volume do outro prisma.

Assim, concluímos que:

O **volume** de um prisma qualquer é igual ao produto da área de sua base por sua altura.



$$V = B \cdot H$$

Sugerimos que você assista a uma explicação sobre o princípio de Cavalieri por meios de experiências práticas no vídeo **3, 2, 1 – mistério,** disponível em: https://m3.ime.unicamp.br/recursos/1040. Acesso em: 27 jul. 2024.

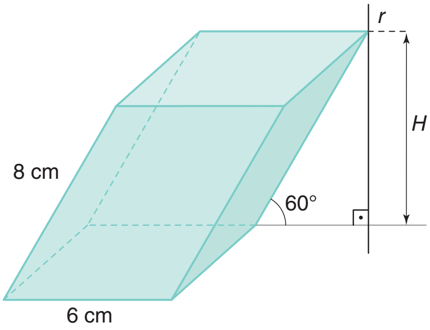
EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

7. A base de um prisma é um quadrado de lado de 6 cm. Cada aresta lateral desse prisma mede 8 cm e forma com os planos das bases ângulos de 60°. Calcule o volume desse prisma.

Resolução

A área B da base do prisma é a área de um quadrado cujo lado mede 6 cm; logo, $B = 36\text{ cm}^2$.

Para calcular a medida da altura H desse prisma, vamos traçar por um dos vértices a reta r perpendicular aos planos das bases, conforme mostra a figura.



Assim:

$$\text{sen } 60° = \frac{H}{8} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{H}{8}$$

$$\therefore H = 4\sqrt{3}\text{ cm}$$

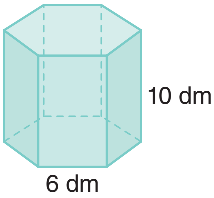
Calculando o volume V do prisma, que é dado por $V = B \cdot H$, temos:

$$V = (36 \cdot 4\sqrt{3})\text{ cm}^3 = 144\sqrt{3}\text{ cm}^3$$

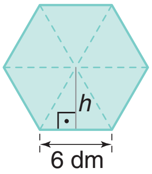
8. Em um prisma hexagonal regular, cada aresta da base mede 6 dm, e cada aresta lateral mede 10 dm. Calcule o volume desse prisma.

Resolução

Como todo prisma regular é reto, sua altura H é igual à medida de uma aresta lateral. Logo: $H = 10$ dm



Em todo prisma regular, as bases são polígonos regulares; assim, cada base desse prisma é um hexágono regular, conforme representado na figura.



A medida h é a altura de um triângulo equilátero de lado medindo 6 dm; logo:

$$h = \frac{6\sqrt{3}}{2}\text{ dm} = 3\sqrt{3}\text{ dm}$$

A área B da base do prisma é igual a seis vezes a área de um triângulo equilátero de lado medindo 6 dm, ou seja:

$$B = \left(6 \cdot \frac{6 \cdot 3\sqrt{3}}{2}\right)\text{ dm}^2 = 54\sqrt{3}\text{ dm}^2$$

Calculando o volume V do prisma, dado por $V = B \cdot H$, temos:

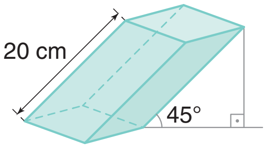
$$V = (54\sqrt{3} \cdot 10)\text{ dm}^3 = 540\sqrt{3}\text{ dm}^3$$

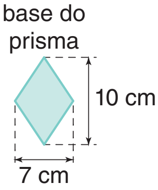
ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Faça os exercícios no caderno.

19. Em um prisma cujas bases são losangos de diagonais medindo 7 cm e 10 cm, as arestas laterais medem 20 cm e formam ângulos de 45° com os planos das bases.





FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

Em relação a esse prisma, calcule:

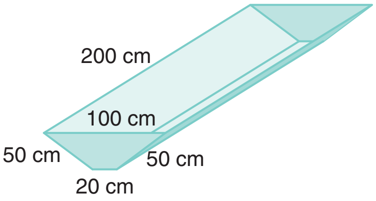
a. a altura;

b. o volume.

19. a. $10\sqrt{2}$ cm

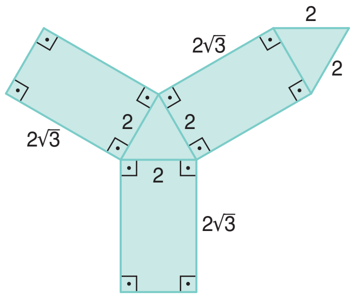
19. b. $350\sqrt{2}\text{ cm}^3$

20. Um bebedouro para gado tem, internamente, formato que pode ser associado a um prisma reto. As bases desse prisma são trapézios isósceles com lados medindo 50 cm, 50 cm, 20 cm e 100 cm, e a distância entre elas é 200 cm, conforme ilustra a figura. Calcule a capacidade desse bebedouro, em litro. **20.** 360 L



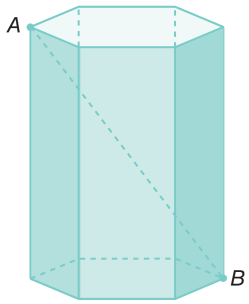
ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

21. A figura representa a planificação da superfície de um prisma triangular. Calcule o volume desse prisma. **21.** 6

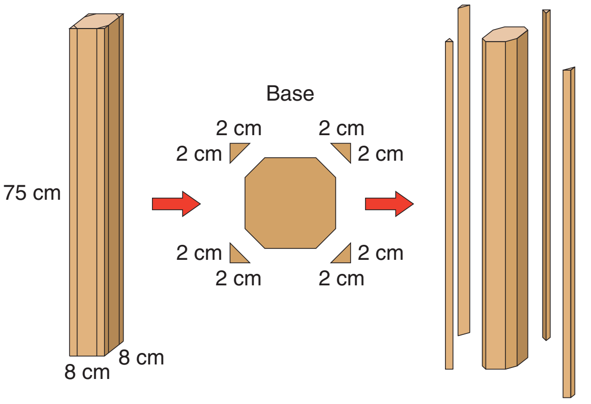


ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

22. A figura representa um prisma hexagonal regular de altura 8 dm, em que $\overline{AB}$ é a maior diagonal que passa pelo vértice A, com $AB = 10$ dm. Calcule o volume desse prisma. **22.** $108\sqrt{3}\ \text{dm}^3$

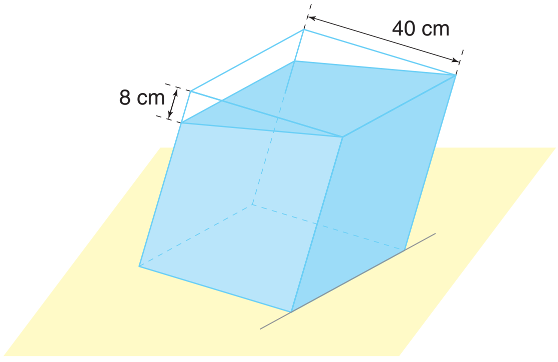


23. Para a confecção de cada pé de uma mesa, um marceneiro serrou um caibro com formato que se parece com um prisma quadrangular regular com 8 cm de aresta da base e 75 cm de altura. Cada um dos quatro cortes realizados foi feito paralelamente às arestas laterais, interceptando cada par de arestas consecutivas da base em pontos que distam 2 cm do vértice comum a elas, conforme sugerem as figuras. O pé da mesa é associado ao prisma octogonal obtido após esses cortes. Desconsiderando a perda de madeira ocorrida durante os cortes, calcule o volume de cada pé dessa mesa. **23.** 4.200 cm^3



ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

24. Um recipiente tem internamente o formato parecido com um cubo cuja aresta mede 40 cm, e sua base está em um plano horizontal. Esse recipiente, cheio de água, é inclinado em torno de uma aresta, que permanece na horizontal. De acordo com as medidas indicadas na figura, quantos litros de água foram derramados com essa inclinação? **24.** 6,4 L



ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

25. Elabore um problema envolvendo uma situação contextualizada sobre volume de um recipiente com formato que lembra um prisma e cujo volume inicial seja 1.000 L e o volume final seja 850 L. Em seguida, troque o problema elaborado com um colega para que um resolva o problema elaborado pelo outro. Por fim, analisem e discutam as resoluções. **25.** Resposta pessoal.

Para retomar os conteúdos estudados, resolva os exercícios complementares 10 a 14.

5. Pirâmide

No terceiro milênio antes da Era Cristã, os egípcios construíram grandes monumentos para servir de tumbas aos seus faraós. Esses monumentos têm o formato que se parece com um poliedro chamado **pirâmide**.

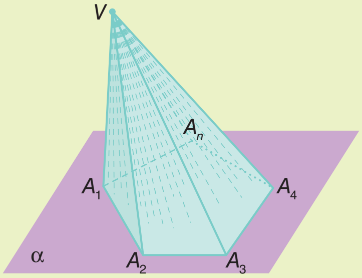
Pirâmides de Gizé, no Cairo, Egito. Foto de 2023.

SAYED HASSAN/PICTURE ALLIANCE/GETTY IMAGES

Por possuírem bases quadrangulares, as pirâmides egípcias podem ser associadas a pirâmides quadrangulares. Na Geometria, o conceito de pirâmide é mais amplo, conforme a definição a seguir.

Sejam um polígono convexo $A_1A_2A_3...A_n$ contido em um plano α e um ponto V, não pertencente a α. Consideremos todos os segmentos de reta que possuem um extremo pertencente ao polígono e o outro extremo em V.

A reunião de todos esses segmentos de reta é um poliedro chamado de pirâmide convexa limitada ou, simplesmente, **pirâmide**.



Elementos de uma pirâmide

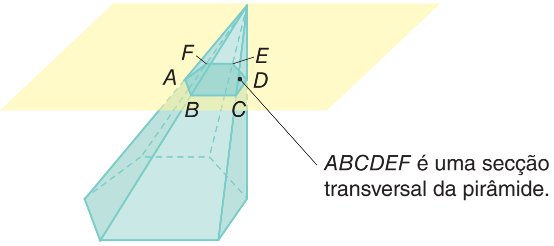
Observando a pirâmide apresentada anteriormente na definição, temos:

- o ponto V é chamado de **vértice** da pirâmide;
- o polígono $A_1A_2A_3...A_n$ é chamado de **base** da pirâmide, sendo A_1, A_2, A_3, ... e A_n os **vértices da base**;
- as demais faces, exceto a base, são chamadas de **faces laterais**;
- os lados da base são chamados de **arestas da base**;
- as demais arestas, exceto as das bases, são chamadas de **arestas laterais**;
- a distância entre o vértice V e o plano da base é chamada de **altura** da pirâmide.

ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

Secção transversal de uma pirâmide

Secção transversal de uma pirâmide é qualquer intersecção não vazia e não unitária da pirâmide com um plano paralelo à sua base.



ABCDEF é uma secção transversal da pirâmide.

Observação

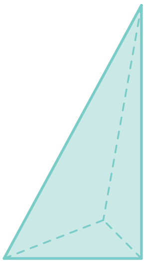
Qualquer secção transversal de uma pirâmide é um polígono semelhante à base.

Áreas de uma pirâmide

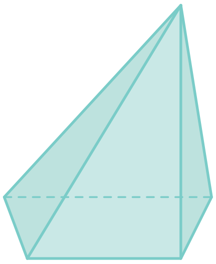
A soma das áreas de todas as faces laterais é chamada de **área lateral** da pirâmide e a soma da área lateral com a área da base é denominada **área total** da pirâmide.

Nomenclatura

Uma pirâmide é classificada de acordo com o número de arestas da base, por exemplo:



pirâmide triangular



pirâmide quadrangular

Pirâmide regular

Uma pirâmide é **regular** se, e somente se, sua base é um polígono regular e a projeção ortogonal de seu vértice sobre o plano da base é o centro dessa base.

Reflexão: Não. Você encontrará mais informações nas **Orientações Específicas** deste capítulo.

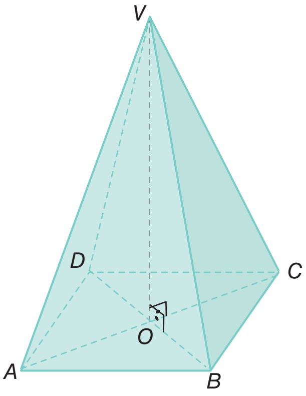
Observação

O centro de um polígono regular é o centro da circunferência circunscrita (ou inscrita) nesse polígono.

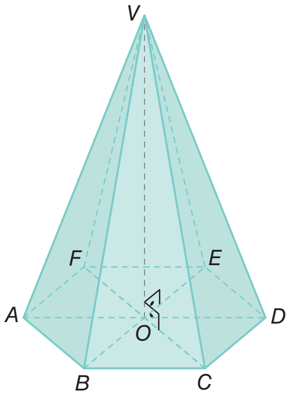
Reflexão

Toda pirâmide regular triangular é um tetraedro regular?

Exemplos



pirâmide regular quadrangular (o ponto *O* é o centro do quadrado *ABCD*)

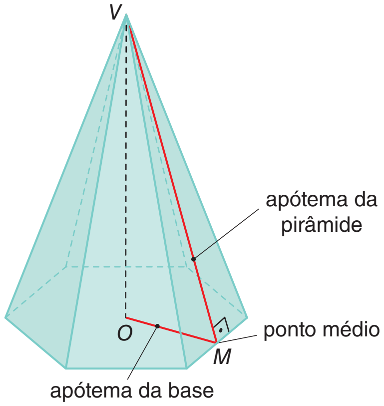


pirâmide regular hexagonal (o ponto O é o centro do hexágono regular *ABCDEF*)

Apótema de uma pirâmide regular e apótema da base

Considere uma pirâmide regular e o ponto médio *M* de um dos lados de sua base.

- O segmento de reta que tem um extremo em *M* e o outro no vértice da pirâmide é chamado de **apótema da pirâmide**.
- O segmento de reta que tem um extremo em *M* e o outro no centro da base é chamado de **apótema da base**.



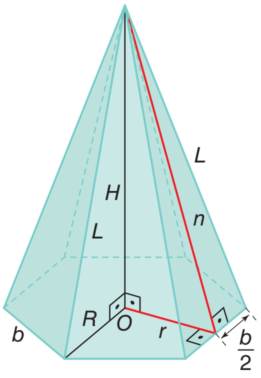
Observação

Note que o apótema $\overline{VM}$ é a altura de um triângulo isósceles, que é uma face lateral da pirâmide.

Relações entre os elementos de uma pirâmide regular

Em uma pirâmide regular, sejam:

- *H* a medida da altura;
- *n* a medida do apótema da pirâmide;
- *r* a medida do apótema da base;
- *b* a medida de uma aresta da base;
- *L* a medida de uma aresta lateral;
- *R* a medida do raio da circunferência circunscrita à base.



Neste tópico, peça aos estudantes que representem no caderno uma pirâmide regular qualquer, destacando um triângulo cujos lados sejam os apótemas (da base e da pirâmide) e a altura da pirâmide. Pergunte: “Qual é a classificação desse triângulo quanto aos ângulos?”. (Retângulo.); “Que relação você destacaria entre as medidas dos lados desse triângulo?”. (A principal relação que pode ser observada é o teorema de Pitágoras.

Pelo teorema de Pitágoras, temos:

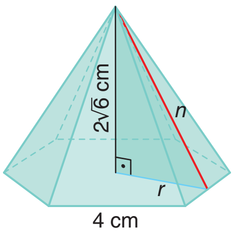
- $H^2 + r^2 = n^2$
- $n^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = L^2$
- $H^2 + R^2 = L^2$

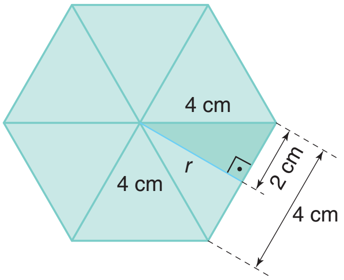
EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

9. Em uma pirâmide regular hexagonal com altura de $2\sqrt{6}$ cm, cada aresta da base mede 4 cm. Calcule a área lateral A_ℓ e a área total A_T dessa pirâmide.

Resolução

Sejam n a medida do apótema da pirâmide e r a medida do apótema da base.





Aplicando o teorema de Pitágoras aos triângulos retângulos destacados anteriormente nas figuras, temos:

$$(2\sqrt{6})^2 + r^2 = n^2 \qquad (1)$$

$$r^2 + 2^2 = 4^2 \;\Rightarrow\; r = 2\sqrt{3} \qquad (2)$$

Substituindo (2) em (1), obtemos:

$$(2\sqrt{6})^2 + (2\sqrt{3})^2 = n^2 \;\Rightarrow\; 24 + 12 = n^2$$

$$\therefore n^2 = 36 \;\Rightarrow\; n = 6$$

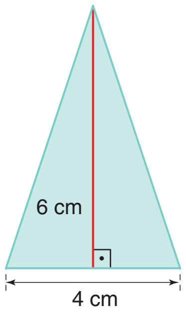
Assim, cada face lateral da pirâmide é um triângulo isósceles com base medindo 4 cm e altura, 6 cm.

Sendo A_f a área de uma face lateral, temos:

$$A_f = \frac{4 \cdot 6}{2}\text{ cm}^2 = 12\text{ cm}^2$$

A área lateral A_ℓ dessa pirâmide é seis vezes a área de uma face lateral, portanto:

$$A_\ell = (6 \cdot 12)\text{ cm}^2 = 72\text{ cm}^2$$



A área B do hexágono regular que é base da pirâmide é seis vezes a área de um triângulo equilátero de lado 4 cm, ou seja:

$$B = \left(6 \cdot \frac{4 \cdot 2\sqrt{3}}{2}\right)\text{ cm}^2 \;\Rightarrow\; B = 24\sqrt{3}\text{ cm}^2$$

Concluindo: a área total A_T é a soma da área lateral A_ℓ com a área B da base.

$$A_T = (72 + 24\sqrt{3})\text{ cm}^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_T = 24\,(3 + \sqrt{3})\text{ cm}^2$$

10. Em uma pirâmide regular triangular, cada aresta lateral mede 13 cm, e cada aresta da base, 10 cm. Calcule:

a. a medida n do apótema da pirâmide;

b. a medida r do apótema da base da pirâmide;

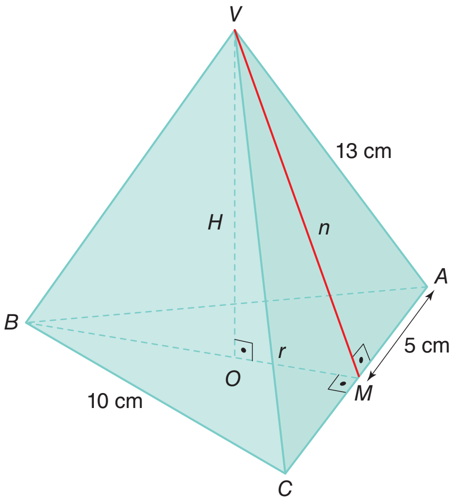
c. a medida da altura H da pirâmide.

Resolução

a. No triângulo VMA, temos:

$$n^2 + 5^2 = 13^2 \Rightarrow n^2 = 144$$

$$\therefore n = 12\text{ cm}$$



b. A base dessa pirâmide é um triângulo equilátero de lado 10 cm; logo, a medida da altura h desse triângulo é dada por:

$$h = \frac{10\sqrt{3}}{2}\text{ cm} = 5\sqrt{3}\text{ cm}$$

Como a medida r do apótema de um triângulo equilátero é a terça parte da medida da altura, concluímos que:

$$r = \frac{h}{3} \Rightarrow r = \frac{5\sqrt{3}}{3}\text{ cm}$$

c. No triângulo VOM, temos: $H^2 + r^2 = n^2$. Substituindo nessa equação os valores de n e r, obtidos nos itens **a** e **b**, concluímos que:

$$H^2 + \left(\frac{5\sqrt{3}}{3}\right)^2 = 12^2 \Rightarrow H^2 = \frac{407}{3}$$

$$\therefore H = \sqrt{\frac{407}{3}}\text{ cm}$$

ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

Aproveite para sugerir aos estudantes que acessem o objeto digital **Carrossel de imagens: Ilusões de óptica**. Neste objeto são apresentados outros exemplos de recursos que causam o efeito de ilusão de óptica, como nesta obra de Escher.

Mentes brilhantes

OBJETO DIGITAL Carrossel de imagens: Ilusões de óptica

O espaço absurdo de Escher

O artista holandês Maurits Cornelis Escher (1898-1972) explorou como ninguém as ilusões de óptica geradas pelas representações gráficas de figuras geométricas espaciais. Seus trabalhos possuem um toque surrealista, especialmente desenhos de edifícios em que se confundem as noções de espaço e posição, como na reprodução a seguir, no qual pessoas parecem subir escadas para terraços inferiores e descer para superiores.

No livro *Ao infinito e além: uma história cultural do infinito*, de Eli Maor, há uma citação de Escher sobre sua obra em que ele comenta que, ao enfrentar com entusiasmo os enigmas que nos cercam, ao considerar e analisar as observações que realizei, acabei na área da Matemática. Ainda que me considere absolutamente carente de informação ou conhecimento das ciências exatas, quase sempre pareço ter mais em comum com os matemáticos que com meus colegas artistas.

Até hoje a obra de Escher intriga e surpreende diversas pessoas pelo mundo.

M.C. ESCHER'S "ASCENDING AND DESCENDING" © 2024 THE M.C. ESCHER COMPANY-THE NETHERLANDS. ALL RIGHTS RESERVED.

ESCHER, M. C. **Subindo e descendo**. 1960. Litografia, 285 × 355 mm.

TRABALHO E JUVENTUDES *Designer*

CHAOSAMRAN_STUDIO/ISTOCK/GETTY IMAGES

Designer trabalhando em projeto de caixa ecológica de papelão.

O *designer* é um profissional que atua em diversas áreas, podendo criar e desenvolver projetos que vão desde a concepção de peças e objetos até a comunicação visual e a construção civil.

Para exercer essa função, esse profissional precisa especializar-se no ramo que pretende seguir e estar atualizado com as novidades que surgem com o avanço da tecnologia. Por exemplo, o *designer* de embalagem, além de criar embalagens adequadas para determinados produtos, precisa considerar o apelo visual e o transporte.

As habilidades matemáticas, como o uso de cálculos e geometria, estão presentes em outras disciplinas como princípios mecânicos, princípios da comunicação, sustentabilidade, história e teoria do *design* entre outros.

> "Hoje o *design* é fator essencial para a indústria, principalmente para aquelas que exportam seus produtos. Tanto é que o Ministério da Indústria, Comércio Exterior e Serviços lançou há 22 anos o Programa Brasileiro do *Design*, com o objetivo de promover o desenvolvimento dessa área..."

DESIGN. **Guia do Estudante**, 16 maio 2019. Disponível em: https://guiadoestudante.abril.com.br/profissoes/design. Acesso em: 31 jul. 2024.

Trabalho e juventudes: Pesquisa pessoal.

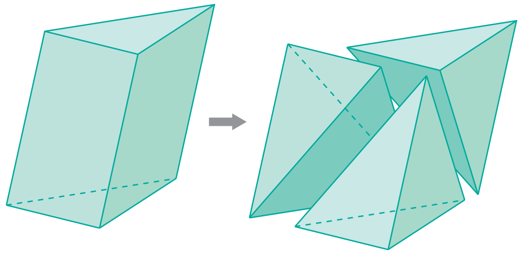
Quer saber mais sobre a profissão de *designer*? Faça uma pesquisa na internet e compartilhe com os colegas um resumo das informações que você obteve.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Volume da pirâmide

O objetivo neste tópico é demonstrar que:

- ao decompor um prisma triangular em três pirâmides, conforme mostra a figura, o volume de cada uma delas é a terça parte do volume do prisma;
- com base no volume da pirâmide triangular, conclui-se que o volume de uma pirâmide qualquer é a terça parte do volume do prisma que tem a mesma base e a mesma medida da altura da pirâmide.



Para demonstrar esses fatos, são necessárias duas propriedades, enunciadas a seguir.

P1. A razão entre as áreas de dois triângulos semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança.

Observação

A propriedade P1 é válida para quaisquer figuras semelhantes, isto é, a razão entre as áreas de duas figuras semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança.

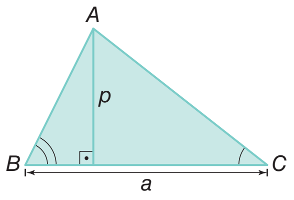
Usando um modelo de isopor ou cartolina, decomponha um prisma triangular em três pirâmides e demonstre que as três têm o mesmo volume. Portanto, o volume de uma pirâmide triangular é a terça parte do volume do prisma de mesma base e mesma altura da pirâmide.

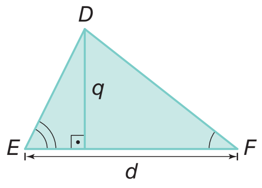
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

Demonstração

Consideremos os triângulos semelhantes *ABC* e *DEF* tais que a razão de semelhança do primeiro para o segundo seja *k*:





$$\frac{a}{d} = \frac{p}{q} = k$$

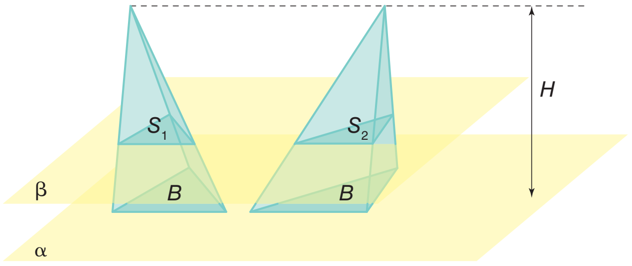
Calculando a razão da área A_1 do primeiro triângulo para a área A_2 do segundo, temos:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{\frac{ap}{2}}{\frac{dq}{2}} = \frac{ap}{dq} = \frac{a}{d} \cdot \frac{p}{q} = k \cdot k = k^2$$

P2. Duas pirâmides triangulares de mesma altura e bases de mesma área têm o mesmo volume.

Demonstração

As pirâmides triangulares representadas na figura têm a mesma altura *H* e bases com a mesma área *B*, contidas em um plano α. O plano β é paralelo a α e pode estar em qualquer posição, determinando nessas pirâmides os triângulos de áreas S_1 e S_2.



Em cada pirâmide, a secção determinada pelo plano β é semelhante à base, e a razão de semelhança entre cada secção e a base da respectiva pirâmide é o mesmo número k (pense no porquê dessas afirmações). Logo:

$$\frac{B}{S_1} = k^2 \text{ e } \frac{B}{S_2} = k^2 \Rightarrow S_1 = S_2$$

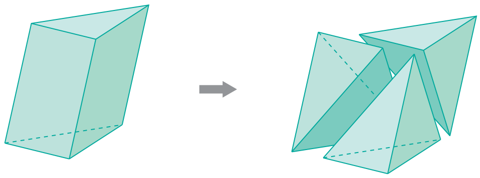
Assim, pelo princípio de Cavalieri, concluímos que as duas pirâmides têm o mesmo volume.

Volume de uma pirâmide triangular

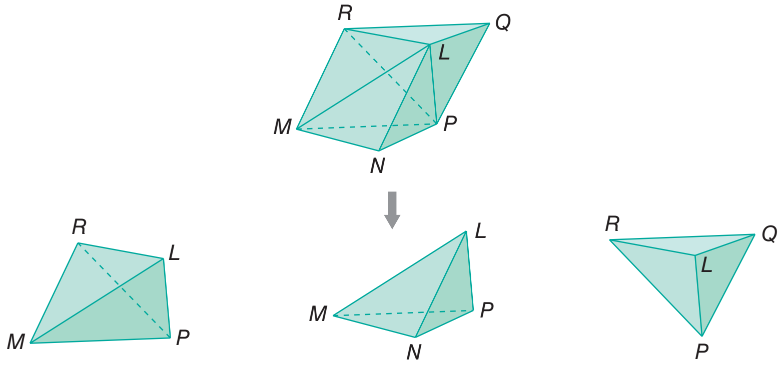
Observação

A decomposição de um prisma triangular em três pirâmides de mesmo volume é válida para qualquer tipo de prisma triangular, regular ou não.

Vamos demonstrar que o volume de uma pirâmide triangular é $\frac{1}{3}$ do volume de um prisma que tem a mesma base e a mesma altura da pirâmide. Para isso, basta provar que um prisma triangular pode ser decomposto em três pirâmides triangulares de mesmo volume, conforme mostra a figura a seguir.



Nomeando os vértices de um prisma triangular qualquer e, consequentemente, os correspondentes vértices das pirâmides triangulares obtidas pela decomposição indicada na figura anterior, temos:



ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

Observação

Figuras planas equivalentes são figuras de áreas iguais.

1. As pirâmides *LMNP* e *PLQR* têm volumes iguais, pois:
   - $\triangle MNP \cong \triangle RLQ$ (são bases do prisma *MNPLQR*);
   - a altura do prisma *MNPLQR* é também a altura de cada uma dessas pirâmides em relação às bases *MNP* e *RLQ*.

   Assim, as pirâmides *LMNP* e *PLQR* têm a altura de mesma medida em relação às bases equivalentes *MNP* e *RQL* e, portanto, possuem volumes iguais.
2. As pirâmides *LRQP* e *LRMP* têm volumes iguais, pois:
   - $\overline{RP}$ é a diagonal do paralelogramo *MRQP* e, portanto, $\triangle RPQ \cong \triangle RPM$;
   - as alturas relativas às bases *RPQ* e *RPM* são iguais à medida da distância do ponto *L* ao plano do paralelogramo *MRQP*.

   Assim, as pirâmides *LRQP* e *LRMP* têm a mesma altura em relação às bases equivalentes *RPQ* e *RPM* e, portanto, têm volumes iguais.

   Por 1 e 2, concluímos que as pirâmides *LMNP*, *PLQR* e *LRMP* possuem o mesmo volume *V*.

Demonstramos, desse modo, que o prisma triangular *MNPLQR* é composto de três pirâmides de volumes iguais. Sendo *H* a altura do prisma e *B* a área de sua base, concluímos que o volume *V* de cada uma dessas pirâmides é dado por:

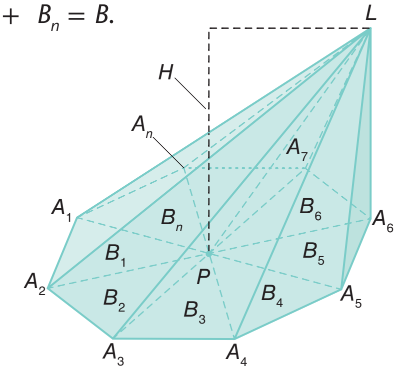
$$V = \frac{1}{3} \cdot B \cdot H$$

Portanto:

O **volume** de uma pirâmide triangular é igual a $\frac{1}{3}$ do produto da área de sua base pela sua altura.

Volume de uma pirâmide qualquer

Consideremos uma pirâmide de vértice L, base $A_1A_2A_3...A_n$, altura H e área da base B, e seja P um ponto interior à base. Essa pirâmide pode ser decomposta em n pirâmides triangulares, LA_1A_2P, LA_2A_3P, LA_3A_4P, ... e LA_nA_1P, cujas áreas da base são B_1, B_2, B_3, ... e B_n, respectivamente, conforme mostra a figura.



Note que todas essas pirâmides têm a mesma altura H e $B_1 + B_2 + B_3 + ... + B_n = B$. Sendo V_1, V_2, V_3, ... e V_n os volumes dessas pirâmides triangulares, temos:

$$V_1 = \frac{1}{3} \cdot B_1H; \quad V_2 = \frac{1}{3} \cdot B_2H; \quad V_3 = \frac{1}{3} \cdot B_3H; \quad ...; \quad V_n = \frac{1}{3} \cdot B_nH$$

Portanto:

$$V_1 + V_2 + V_3 + ... + V_n = \frac{1}{3} \cdot B_1H + \frac{1}{3} \cdot B_2H + \frac{1}{3} \cdot B_3H + ... + \frac{1}{3} \cdot B_nH =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot H \cdot (B_1 + B_2 + B_3 + ... + B_n) = \frac{1}{3} \cdot B \cdot H$$

Como a soma $V_1 + V_2 + V_3 + ... + V_n$ é igual ao volume V da pirâmide, concluímos que:

$$V = \frac{1}{3} \cdot B \cdot H$$

Tendo à mão o modelo de uma pirâmide não triangular, pergunte aos estudantes como é possível calcular o volume dessa pirâmide, com base no volume de uma pirâmide triangular (espera-se que alguns estudantes tenham a ideia de "cortar" essa pirâmide, obtendo pirâmides triangulares). Após essa discussão, mostre o resultado: o volume de uma pirâmide qualquer é a terça parte do produto da área da base pela altura (convém desenhar uma pirâmide qualquer na lousa, dividindo-a em pirâmides triangulares). Enfatize que, por meio da fórmula deduzida, calcula-se o volume de uma pirâmide qualquer, reta ou oblíqua.

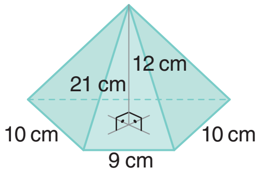
Ou seja:

O **volume** de uma pirâmide qualquer é igual a $\frac{1}{3}$ do produto da área de sua base pela sua altura.

ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

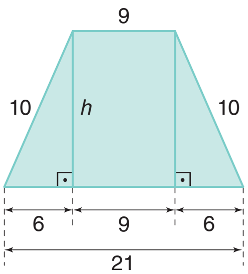
EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

11. Calcule o volume de uma pirâmide de altura 12 cm, cuja base é um trapézio isósceles em que os lados medem 10 cm, 10 cm, 9 cm e 21 cm.



Resolução

Esquematizando a base da pirâmide, temos:



Aplicando o teorema de Pitágoras, obtemos a altura h do trapézio da base:

$$h^2 + 6^2 = 10^2 \Rightarrow h^2 = 64$$

$$\therefore h = 8 \text{ cm}$$

Assim, a área B da base da pirâmide é dada por:

$$B = \left[\frac{(9 + 21) \cdot 8}{2}\right] \text{cm}^2 = 120 \text{ cm}^2$$

Sendo H a altura da pirâmide, seu volume V é dado por $V = \frac{1}{3} \cdot B \cdot H$; portanto:

$$V = \left(\frac{1}{3} \cdot 120 \cdot 12\right) \text{cm}^3 = 480 \text{ cm}^3$$

12. Em uma pirâmide regular triangular cujo volume é $36\sqrt{3}$ dm^3, cada aresta da base mede $6\sqrt{3}$ dm. Calcule a área lateral dessa pirâmide.

Resolução

A base da pirâmide é um triângulo equilátero cujo lado mede $6\sqrt{3}$ dm; logo, a altura h desse triângulo é dada por:

$$h = \frac{6\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{2}\ \text{dm} = 9\ \text{dm}$$

Calculando a área B da base da pirâmide, temos:

$$B = \frac{6\sqrt{3} \cdot 9}{2}\ \text{dm}^2 = 27\sqrt{3}\ \text{dm}^2$$

Indicando por H a medida, em decímetro, da altura da pirâmide, temos que o volume dessa pirâmide é calculado por $V = \frac{1}{3} \cdot B \cdot H$. Assim:

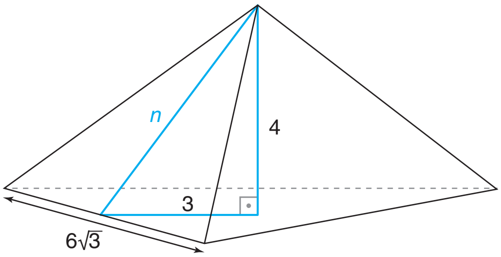
$$V = \frac{1}{3} \cdot B \cdot H \Rightarrow 36\sqrt{3} = \frac{1}{3} \cdot 27\sqrt{3} \cdot H$$

$$\therefore H = 4$$

Lembrando que a medida do apótema do triângulo equilátero é a terça parte da altura, calculamos a medida r do apótema da base da pirâmide por:

$$r = \frac{9}{3}\ \text{dm} = 3\ \text{dm}$$

Indicando por n a medida, em decímetro, do apótema da pirâmide, esquematizamos:



FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

Pelo teorema de Pitágoras, temos:

$$n^2 = 3^2 + 4^2 \Rightarrow n = 5$$

A área A_f de uma face lateral da pirâmide é dada por:

$$A_f = \frac{6\sqrt{3} \cdot 5}{2}\ \text{dm}^2 = 15\sqrt{3}\ \text{dm}^2$$

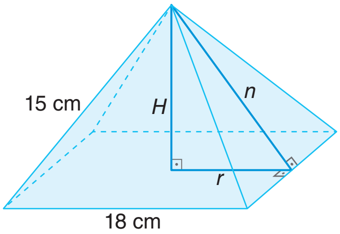
Concluímos, calculando a área lateral A_ℓ da pirâmide:

$$A_\ell = 3 \cdot A_f \Rightarrow A_\ell = 45\sqrt{3}\ \text{dm}^2$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Faça os exercícios no caderno.

26. Em uma pirâmide regular quadrangular, cada aresta lateral mede 15 cm, e cada aresta da base mede 18 cm.



Calcule:

a. a medida n do apótema da pirâmide; **26. a.** 12 cm

b. a medida r do apótema da base da pirâmide; **26. b.** 9 cm

c. a altura H da pirâmide; **26. c.** $3\sqrt{7}$ cm

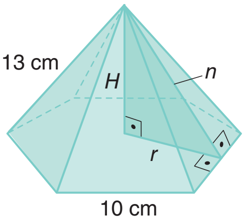
d. a área lateral A_ℓ da pirâmide; **26. d.** 432 cm^2

e. a área B da base da pirâmide; **26. e.** 324 cm^2

f. a área total A_T da pirâmide; **26. f.** 756 cm^2

g. o volume V da pirâmide. **26. g.** $324\sqrt{7}$ cm^3

27. Em uma pirâmide regular hexagonal, cada aresta lateral mede 13 cm, e cada aresta da base mede 10 cm.



ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

Calcule:

a. a medida n do apótema da pirâmide; **27. a.** 12 cm

b. a medida r do apótema da base da pirâmide; **27. b.** $5\sqrt{3}$ cm

c. a altura H da pirâmide; **27. c.** $\sqrt{69}$ cm

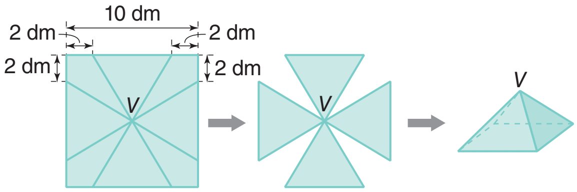
d. a área lateral A_ℓ da pirâmide; **27. d.** 360 cm^2

e. a área B da base da pirâmide; **27. e.** $150\sqrt{3}$ cm^2

f. a área total A_T da pirâmide; **27. f.** $30(12 + 5\sqrt{3})$ cm^2

g. o volume V da pirâmide. **27. g.** $150\sqrt{23}$ cm^3

28. Com uma folha quadrada de cartolina cujo lado mede 10 dm, um estudante construiu a superfície lateral de uma pirâmide quadrangular regular. Para isso, traçou os segmentos de reta que passam pelo centro V do quadrado e encontram os lados nos pontos que distam 2 dm dos vértices. Em seguida, recortou a cartolina, ficando apenas com as faces triangulares da pirâmide, conforme mostra a figura. Finalmente, montou a superfície lateral da pirâmide. Qual é a altura da pirâmide que tem essa superfície lateral? **28.** 4 dm



ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

29. Faça o que se pede. **29. a.** $V = 800\ \text{cm}^3$

a. Calcule o volume de uma pirâmide de altura 20 cm, cuja base é um triângulo isósceles com lados medindo 17 cm, 17 cm e 16 cm.

b. Calcule o volume de uma pirâmide regular quadrangular que possui todas as arestas medindo 4 dm de comprimento. **29. b.** $\frac{32\sqrt{2}}{3}\ \text{dm}^3$

30. Um tetraedro regular mede 6 cm de aresta. Calcule:

a. a medida *n* do apótema; **30. a.** $3\sqrt{3}$ cm

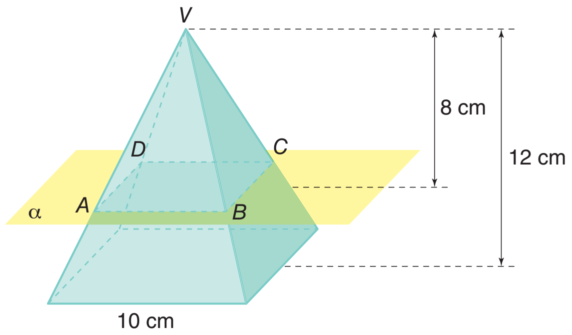
b. a medida *r* do apótema da base; **30. b.** $\sqrt{3}$ cm

c. a altura *H*; **30. c.** $2\sqrt{6}$ cm

d. a área total A_T **30. d.** $36\sqrt{3}\ \text{cm}^2$

e. o volume $_V$. **30. e.** $18\sqrt{2}\ \text{cm}^3$

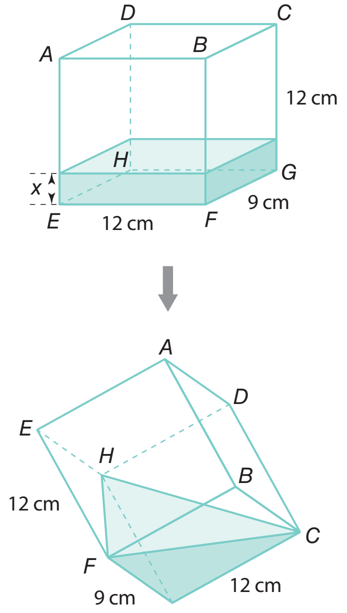
31. Em uma pirâmide quadrangular regular com altura de 12 cm, cada aresta da base mede 10 cm.



a. Calcule a medida *r* do apótema da base dessa pirâmide. **31. a.** 5 cm

b. Um plano α intercepta essa pirâmide, paralelamente à base, a 8 cm do vértice *V*, determinando uma secção *ABCD*, conforme mostra a figura. Calcule o volume da pirâmide de vértice *V* e base *ABCD*. **31. b.** $\frac{3.200}{27}\ \text{cm}^3$

32. Um recipiente de vidro com formato interno que se parece com um paralelepípedo reto-retângulo *ABCDEFGH*, com *EF* = *GC* = 12 cm e *FG* = 9 cm, cuja base é o retângulo *EFGH*, contém certa quantidade de água. Quando sua base está na posição horizontal, a superfície da água atinge uma altura *x*, em relação à base *EFGH*. Inclinando-se o recipiente, sem derramar, consegue-se formar com a superfície da água o triângulo *CFH*, conforme mostra a figura a seguir.



Determinem a medida *x* em centímetro. **32.** $x = 2$ cm

33. Elabore um problema envolvendo uma situação sobre o cálculo do volume de uma pirâmide que tenha como medida aproximada 450 cm^3. Em seguida, troque o problema elaborado com um colega para que um resolva o problema elaborado pelo outro. Por fim, analisem e discutam as resoluções. **33.** Resposta pessoal.

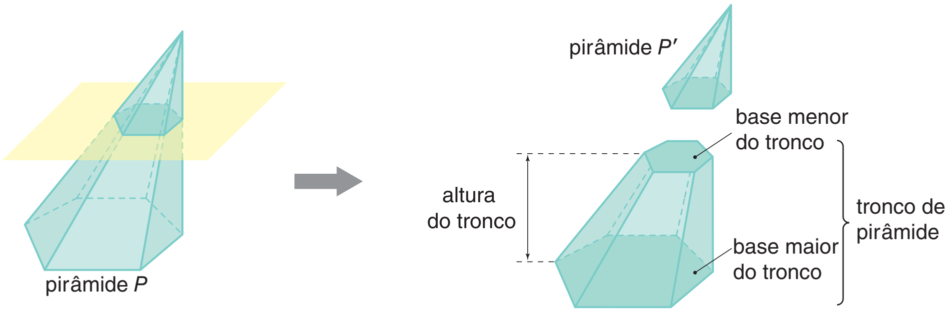
ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

ILUSTRAÇÕES: ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

Para retomar os conteúdos estudados, resolva os exercícios complementares 15 a 21.

Tronco de pirâmide de bases paralelas

Consideremos um plano paralelo à base de uma pirâmide *P* separando-a em dois poliedros. Um desses poliedros é uma pirâmide *Q′* (semelhante à pirâmide *P*), e o outro, um **tronco de pirâmide de bases paralelas**.



Observação

Como as pirâmides *P* e *P′* são semelhantes, a razão entre comprimentos correspondentes em *P* e *P′* é constante.

Usando um modelo de isopor ou cartolina, mostre que uma secção transversal de uma pirâmide a divide em dois sólidos: um deles é uma pirâmide, semelhante à original, e o outro é um tronco de pirâmide de bases paralelas. Pergunte: “Conhecendo o volume V_0 da pirâmide original e o volume V_s da pirâmide semelhante resultante do corte, como você calcularia o volume V_t do tronco de pirâmide?”. ($V_t = V_0 - V_s$)

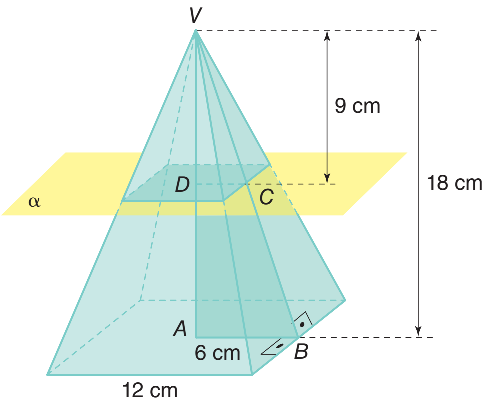
Note que o volume do tronco é igual à diferença entre os volumes V_P e $V_{P'}$ das pirâmides P e P', respectivamente, isto é:

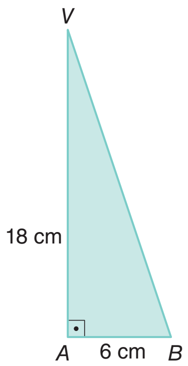
$$V_{\text{tronco}} = V_P - V_{P'}$$

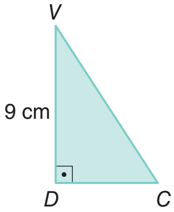
EXERCÍCIO RESOLVIDO

13. A altura de uma pirâmide regular quadrangular é de 18 cm, e cada aresta da base mede 12 cm. Um plano α, paralelo à base e distante 9 cm do vértice, intercepta a pirâmide. Calcule o volume do tronco de pirâmide assim determinado.

Resolução







Os triângulos VAB e VDC são semelhantes.

Como os lados correspondentes são proporcionais, temos:

$$\frac{18}{9} = \frac{6}{DC} \Rightarrow DC = 3\text{ cm}$$

Portanto, a base menor do tronco é um quadrado de lado medindo 6 cm.

O volume do tronco de pirâmide é a diferença entre o volume da pirâmide original e o da pirâmide acima do plano α, isto é:

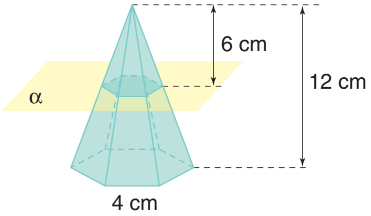
$$V_{\text{tronco}} = \left(\frac{1}{3} \cdot 12^2 \cdot 18 - \frac{1}{3} \cdot 6^2 \cdot 9\right)\text{ cm}^3 = 756\text{ cm}^3$$

ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Faça os exercícios no caderno.

34. Uma pirâmide hexagonal regular de altura 12 cm e aresta da base medindo 4 cm é seccionada por um plano paralelo à base e distante 6 cm do vértice. Calcule o volume do tronco de pirâmide assim determinado. **34.** $84\sqrt{3}$ cm^3



35. Uma caixa-d’água tem formato que pode ser associado a um tronco de pirâmide quadrangular regular de bases paralelas. Internamente, o lado da base maior mede 6 m, e o lado da menor mede 2 m; a altura do tronco mede 3 m. **35.** alternativa **e**

A capacidade dessa caixa-d’água é:

a. 48.000 L

b. 62.000 L

c. 36.000 L

d. 64.000 L

e. 52.000 L

(*Sugestão*: Prolonguem as arestas laterais do tronco da pirâmide, obtendo, assim, a pirâmide que contém esse tronco.)

Para retomar os conteúdos estudados, resolva o exercício complementar 22.

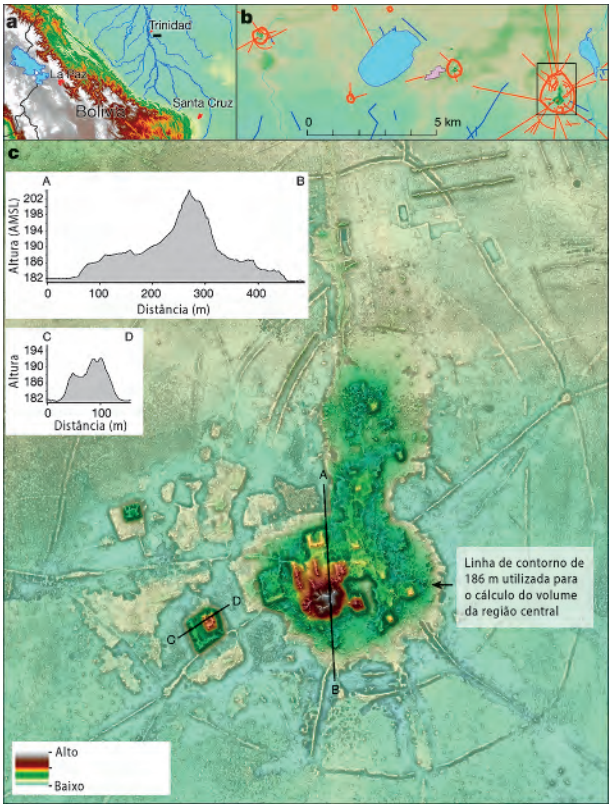
Arqueologia e história antiga dos povos indígenas

Os povos indígenas que habitaram há pelo menos 8 mil anos a Amazônia central viviam, no início, em pequenos grupos, mas há mil anos já se organizavam em grandes aldeias do tamanho de cidades atuais do interior do Amazonas.

A arqueologia nessa região permite reconstruir e compreender diferentes aspectos da cultura e organização desses povos. Um ponto em comum entre eles, segundo Eduardo Góes Neves, professor e diretor do Museu de Arqueologia da Universidade de São Paulo (USP), era a economia com base na diversificação, e não na especialização, isto é, na agrobiodiversidade, havendo indícios de grupos que já praticavam, há milhares de anos, o que hoje é chamado agrofloresta.

Até 1970, os arqueólogos acreditavam que a Amazônia nunca havia sido ocupada de maneira significativa, mas essa ideia é refutada atualmente, e o pesquisador Neves destaca que houve mais de 12 mil anos de presença indígena na floresta e de modo harmonioso: o machado de metal para derrubar árvores só foi introduzido pelos europeus.

Apesar de na Amazônia brasileira também ter havido estruturas complexas, como estradas, em 2022, as pesquisas dos arqueólogos Heiko Prümers e Carla Jaimes revelaram a existência de pirâmides com mais de 20 metros de altura na Amazônia boliviana.



PRÜMERS, H., BETANCOURT, CJ, IRIARTE, J./NATURE/CC BY 4.0

Nota: AMSL corresponde à distância vertical (altura ou altitude) de um ponto em relação ao nível médio do mar.

Mapeamento da área da Amazônia boliviana que revela vestígios de uma cidade da era pré-colonial.

As pesquisas e descobertas dos arqueólogos da Amazônia fazem Neves distinguir o termo pré-história do termo história antiga. Para o pesquisador:

"Pré-história é um conceito anacrônico porque traz a ideia de que não havia história aqui e quem inaugurou a história foram os europeus. É uma visão colonialista, parece que [os indígenas] viviam num estado vegetativo à espera da chegada dos colonizadores. E na verdade o que a arqueologia mostra é que há uma história que é muito rica, dinâmica, interessante".

LIMA, J. D. Guerra, pirâmides e agrofloresta: como era a Amazônia 8 mil anos atrás? **ECOA Uol**, 5 set. 2022. Disponível em: https://www.uol.com.br/ecoa/ultimas-noticias/2022/09/05/agrofloresta-ancestral-amazonia-foi-plantada-ha-milhares-de-anos.htm. Acesso em: 5 set. 2024.

Atividades

Faça as atividades no caderno.

Em grupo, façam uma pesquisa a fim de apresentar argumentos que sustentem a opinião de vocês acerca das perguntas a seguir.

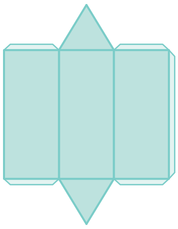
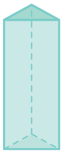
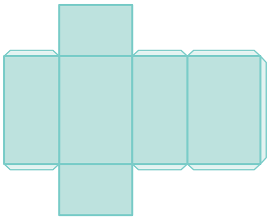
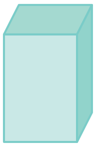
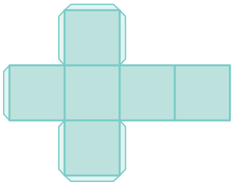
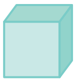
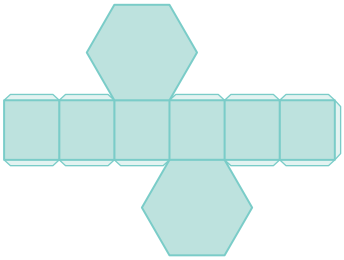
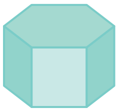
1. Qual é a importância de pesquisas arqueológicas que revelam aspectos das sociedades da história antiga dos povos indígenas? **1.** Resposta pessoal.
2. Como o modo de viver e a cultura dos povos indígenas podem influenciar positivamente a sociedade nos dias de hoje? **2.** Resposta pessoal.

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

Faça os exercícios no caderno.

1. Planificar a superfície de um prisma significa representar todas as suas faces em um mesmo plano. Na planificação, é usual representar cada face com um lado em comum com alguma outra face.
Junte-se a um colega e desenhem em folhas de cartolina figuras semelhantes às planificações dos prismas apresentadas a seguir, aumentando-as na razão 8 : 1. Recortando, dobrando e colando a cartolina, montem cada um dos prismas e identifiquem os elementos: bases, arestas, faces etc. (Considerem que cada uma dessas figuras montadas representa a superfície do prisma, pois ele é uma figura maciça, ou seja, é a reunião da superfície com seu interior.)

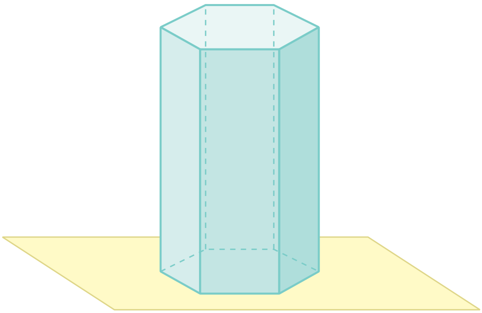
1. Construção de figuras.

Planificação	Prisma
	 Prisma triangular
	 Prisma retangular reto (Paralelepípedo reto-retângulo)
	 Hexaedro regular (Cubo; Prisma quandragular regular de faces congruentes; Paralelepípedo reto-retângulo de faces quadradas)
	 Prisma hexagonal regular

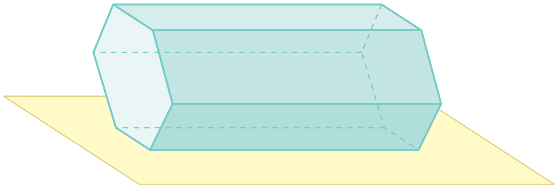
ILUSTRAÇÕES: ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

2. Um bloco com 61,2 N de peso foi colocado sobre um piso plano e horizontal. Ele tem formato parecido com um prisma regular hexagonal com arestas da base e lateral medindo $2\sqrt{3}$ m e 6 m, respectivamente. Adotando a aproximação $\sqrt{3} \approx 1{,}7$, responda às questões a seguir.

a. Se o bloco for apoiado sobre uma de suas bases, qual será a pressão, em Newton por metro quadrado (N/m^2), exercida pelo bloco sobre a região de contato? **2. a.** $P_B \approx 2$ N/m^2



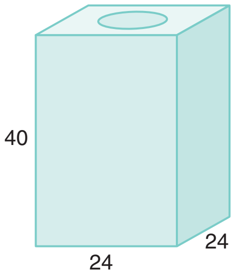
b. Se o bloco for apoiado sobre uma face lateral, qual será a pressão, em N/m^2, exercida pelo bloco sobre a região de contato? **2. b.** $P_f \approx 3$ N/m^2



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

(**Nota**: A unidade de pressão no Sistema Internacional (SI) é o N/m^2 (Newton por metro quadrado), que também pode ser chamada de pascal, cujo símbolo é Pa.)

3. (Enem) Uma lata de tinta, com a forma de um paralelepípedo retangular reto, tem as dimensões, em centímetros, mostrada na figura.

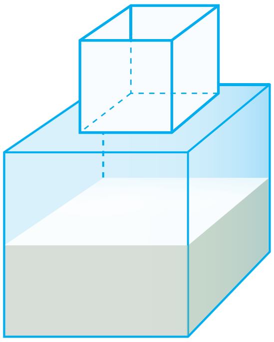


FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

Será produzida uma nova lata, com os mesmos formato e volume, de tal modo que as dimensões de sua base sejam 25% maiores que as da lata atual.
Para obter a altura da nova lata, a altura da lata atual deve ser reduzida em: **3.** alternativa **d**

a. 14,4%
b. 20,0%
c. 32,0%
d. 36,0%
e. 64,0%

4. (Enem) Um fazendeiro tem um depósito para armazenar leite formado por duas partes cúbicas que se comunicam, como indicado na figura. A aresta da parte cúbica de baixo tem medida igual ao dobro da medida da aresta da parte cúbica de cima. A torneira utilizada para encher o depósito tem vazão constante e levou 8 minutos para encher metade da parte de baixo.


FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

Quantos minutos essa torneira levará para encher completamente o restante do depósito?

a. 8

b. 10

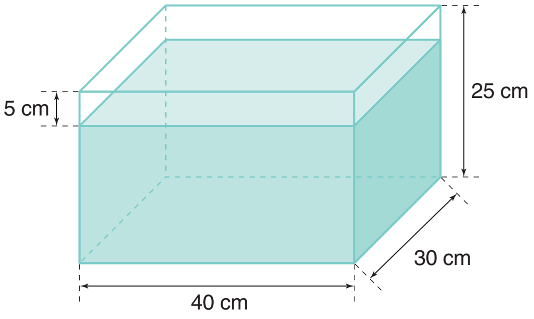
c. 16

d. 18

e. 24

4. alternativa **b**

5. (Enem) Alguns objetos, durante a sua fabricação, necessitam passar por um processo de resfriamento. Para que isso ocorra, uma fábrica utiliza um tanque de resfriamento, como mostrado na figura.



FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

O que aconteceria com o nível da água se colocássemos no tanque um objeto cujo volume fosse de 2.400 cm^3? **5.** alternativa **c**

a. O nível subiria 0,2 cm, fazendo a água ficar com 20,2 cm de altura.

b. O nível subiria 1 cm, fazendo a água ficar com 21 cm de altura.

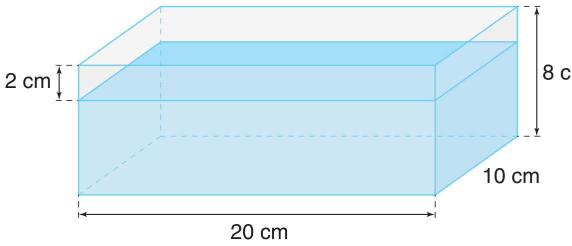
c. O nível subiria 2 cm, fazendo a água ficar com 22 cm de altura.

d. O nível subiria 8 cm, fazendo a água transbordar.

e. O nível subiria 20 cm, fazendo a água transbordar.

Nota: Suponha que o objeto colocado no tanque ficasse totalmente submerso.

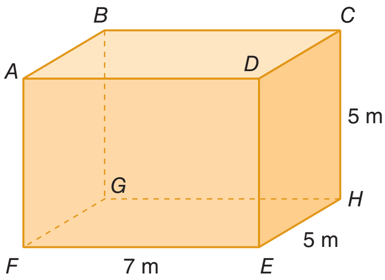
6. Um recipiente de vidro hermeticamente fechado, contendo água, tem, internamente, formato de um paralelepípedo reto-retângulo de dimensões 20 cm, 10 cm e 8 cm. Quando uma face mede 20 cm por 10 cm está apoiada sobre o tampo horizontal de uma mesa, a superfície da água dista 2 cm da face superior, conforme mostra a figura. Quando uma face de dimensões 10 cm por 8 cm está apoiada sobre o tampo da mesa, qual é a distância da superfície da água à face superior? **6.** 5 cm



ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

7. Três faces de um paralelepípedo reto-retângulo têm áreas de 80 cm^2, 24 cm^2 e 30 cm^2, respectivamente. Calcule o volume desse paralelepípedo. **7.** 240 cm^3

8. Uma sala tem, internamente, formato que se assemelha a um paralelepípedo reto-retângulo, cujas dimensões estão apresentadas na figura a seguir, em que as faces *ABCD* e *EFGH* representam o teto e o piso, respectivamente, e as demais faces representam as paredes. Um fio elétrico, embutido em paredes, deve ligar o ponto *A* ao ponto *H*. Para que seja usado o mínimo de fio, o eletricista pretende desenhar uma linha indicando o caminho mais curto entre *A* e *H*, onde serão embutidos os fios. Qual é a medida, em metro, dessa linha? **8.** 13 m



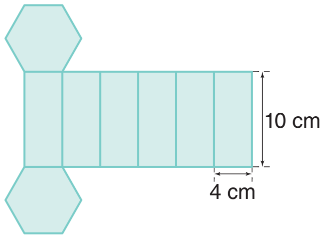
ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

9. Uma caixa-d'água tem, internamente, formato que pode ser associado a um paralelepípedo reto-retângulo de 25 dm de diagonal. A altura desse paralelepípedo é 75% de seu comprimento, e sua largura de 15 dm. Essa caixa será substituída por outra que, internamente, terá a forma de um cubo com 60% da capacidade da caixa atual. Calcule:

a. A capacidade da caixa atual, em litro. **9. a.** 2.880 L

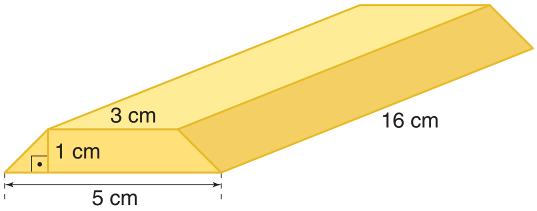
b. A medida da diagonal da nova caixa, em decímetro. **9. b.** $12\sqrt{3}$ dm

10. Calcule o volume de um prisma regular cuja superfície planificada é apresentada a seguir. **10.** $240\sqrt{3}$ cm^3



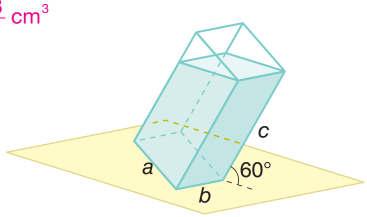
ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

11. Um ourives comprou uma barra de ouro puro, cuja densidade é 19,28 g/cm^3. A barra tem formato que se parece com um prisma reto cujas bases são trapézios com as dimensões mostradas na figura.
Quanto foi pago pela barra se na época da compra o preço do grama do ouro puro era de R\$ 148,39?
11. aproximadamente R\$ 183.101,39



ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

12. (UFRJ) Uma caixa sem tampa, completamente cheia de leite, tem a forma de um paralelepípedo retângulo de dimensões internas $a = 10$ cm, $b = 7$ cm e $c = 16$ cm. Inclina-se a caixa de 60° em relação ao plano horizontal de modo que apenas uma das menores arestas fique em contato com o plano, como mostra a figura abaixo. Qual o volume do leite derramado?
12. $\frac{350\sqrt{3}}{3}$ cm^3



ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

13. A figura 1 representa um prisma cujas bases são polígonos côncavos em formato de estrela que podem ser decompostos em 5 losangos congruentes, conforme mostra a figura 2. Sabendo que a altura desse prisma é de 8 cm e cada aresta das bases mede 2 cm, calcule:

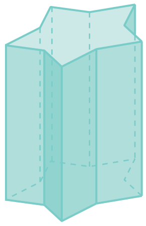


Figura 1

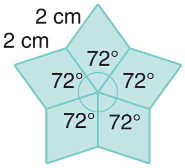


Figura 2 (base)

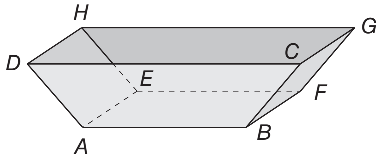
ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

a. a área B de uma de suas bases, adotando sen 72° = 0,95; **13. a.** 19 cm^2

b. o seu volume V. **13. b.** 152 cm^3

14. (Ibmec) Uma caçamba para recolher entulho, sem tampa, tem a forma de um prisma reto, conforme mostra a figura, em que o quadrilátero $ABCD$ é um trapézio isósceles.

Desprezando a espessura das paredes, as dimensões da caçamba, dadas em metro, são $AB = 2$, $CD = 3{,}2$, $BC = 1$ e $CG = 1{,}5$.



FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

a. Calcule a capacidade dessa caçamba, em metro cúbico. **14. a.** 3,12 m^3

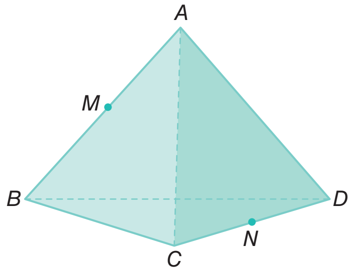
b. As chapas de aço que compõem a caçamba devem ser protegidas com tinta anticorrosiva, tanto na parte interna quanto na parte externa. Calcule a área a ser pintada, em metro quadrado.
14. b. 20,32 m^2

15. O pano de um guarda-sol armado tem formato que pode ser associado à superfície lateral de uma pirâmide octogonal regular com medidas de aresta lateral 100 cm e aresta da base 56 cm, como indicado na foto a seguir. Calcule a área desse pano. **15.** 21.504 cm^2

ELROI/SHUTTERSTOCK

Guarda-sol utilizado em praia.

16. A figura a seguir representa um tetraedro regular $ABCD$ de aresta $2\sqrt{3}$ dm, em que M e N são pontos médios das arestas $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, respectivamente.



ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

a. Prove que o segmento $\overline{MN}$ é perpendicular às arestas $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$. **16. a.** Resposta nas **Orientações Específicas** deste capítulo.
(*Sugestão*: Observe que os triângulos MCD e NAB são isósceles.)

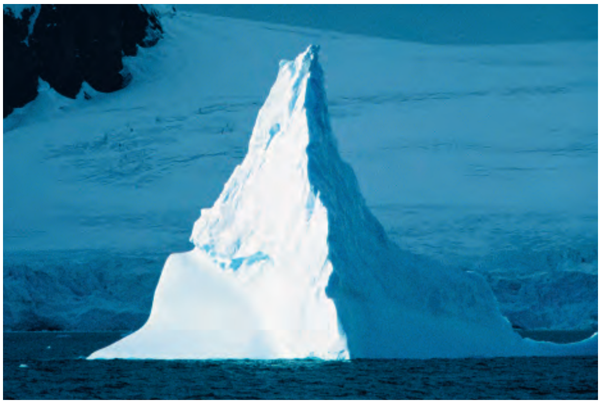
b. Calcule a distância, em decímetro, entre as retas reversas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{CD}$. **16. b.** $\sqrt{6}$ dm

17. A parte emersa de um *iceberg* pode ser associada, aproximadamente, a uma pirâmide regular quadrangular com 1,6 km de aresta da base e 0,6 km de altura. A densidade do gelo e da água na região permite concluir que 80% do *iceberg* está submerso.
Calcule, aproximadamente:

a. o volume do *iceberg*; **17. a.** 2,56 km^3

b. a área da superfície lateral da parte emersa do *iceberg*. **17. b.** 3,2 km^2

LIEUTENANT PHILIP HALL/CC BY 2.0/NOAA CORPS/FLICKR



Iceberg na ilha Elefante, região Antártica, no verão de 1994-1995.

18. (PUC-RS) Um cubo de aresta $2a$ é seccionado por um plano e a parte menor é retirada, restando a parte representada pela figura abaixo. O volume do sólido que foi retirado do cubo é: **18.** alternativa **a**

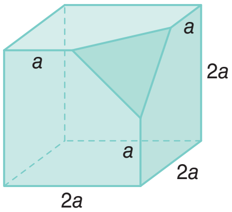
a. $\frac{a^3}{6}$

b. $a^3 - 3$

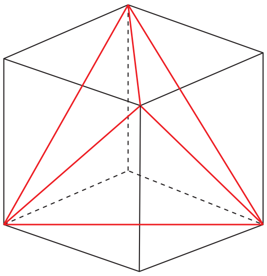
c. $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$

d. $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$

e. $\frac{8a^3}{3}$



19. (UFPE) Os quatro vértices de um tetraedro regular são vértices de um cubo (conforme a ilustração a seguir). Qual fração do volume do cubo é ocupada pelo tetraedro? **19.** alternativa **e**



a. $\frac{1}{5}$

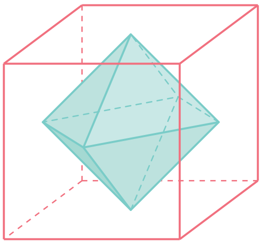
b. $\frac{1}{4}$

c. $\frac{3}{5}$

d. $\frac{1}{2}$

e. $\frac{1}{3}$

20. (UFRGS-RS) Um octaedro tem seus vértices localizados nos centros das faces de um cubo de aresta 2. O volume do octaedro é: **20.** alternativa **b**



a. $\frac{2}{3}$

b. $\frac{4}{3}$

c. 2

d. $\frac{8}{3}$

e. $\frac{10}{3}$

21. A figura a seguir representa uma pirâmide *PABCD*, com 9 m^3 de volume, inscrita no cubo *ABCDEFGH*, em que *P* é o centro da face *EFGH*. A medida do apótema dessa pirâmide é: **21.** alternativa **b**

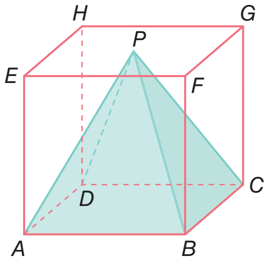
a. 3,5 m

b. $\frac{3\sqrt{5}}{2}$ m

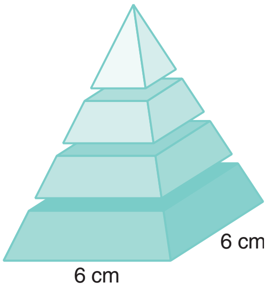
c. 4 m

d. $\frac{5\sqrt{5}}{4}$ m

e. $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ m



22. (Enem) Uma fábrica produz velas de parafina em forma de pirâmide quadrangular regular com 19 cm de altura e 6 cm de aresta da base. Essas velas são formadas por 4 blocos de mesma altura – 3 troncos de pirâmide de bases paralelas e 1 pirâmide na parte superior –, espaçados de 1 cm entre eles, sendo que a base superior de cada bloco é igual à base inferior do bloco sobreposto, com uma haste de ferro passando pelo centro de cada bloco, unindo-os, conforme a figura abaixo.



Se o dono da fábrica resolver diversificar o modelo, retirando a pirâmide da parte superior, que tem 1,5 cm de aresta na base, mas mantendo o mesmo molde, quanto ele passará a gastar com parafina para fabricar uma vela? **22.** alternativa **b**

a. 156 cm^3

b. 189 cm^3

c. 192 cm^3

d. 216 cm^3

e. 540 cm^3

ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

ILUSTRAÇÕES: ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

VERIFIQUE O QUE APRENDEU NO CAPÍTULO 9

Nesta seção, propomos uma avaliação e a elaboração de um mapa conceitual como ferramenta de estudo. Oriente os estudantes a fazerem essas atividades com atenção e, caso encontrem dificuldades, incentive-os a revisitar os conteúdos estudados para reforçar a compreensão.

Além do processo de avaliação promovido pelo professor, é de fundamental importância que você, estudante, realize uma autoavaliação. O objetivo desse instrumento é mensurar seu nível de aprendizagem em relação ao assunto desenvolvido no capítulo. Para ajudá-lo nessa tarefa, apresentamos as seguintes questões.

1. (Mackenzie) Uma fábrica de embalagens produz caixas de vários tamanhos. Uma delas tem formato cúbico com aresta medindo 30 cm. Se a caixa não tem tampa e o material utilizado para as faces laterais custa R$ 5,00 o metro quadrado e para a base custa R$ 6,00 o metro quadrado, então o custo do material dessa caixa é

a. R$ 28,80
b. R$ 23,40
c. R$ 10,88
d. R$ 2,88
e. R$ 2,34

1. alternativa **e**

2. Uma caixa-d'água tem internamente formato que pode ser associado a um paralelepípedo reto-retângulo com 2 m de comprimento, 1,5 m de largura e 80 cm de altura. Assinale a alternativa que apresenta o volume da caixa em metro cúbico.

a. $V = 2.400\ \text{m}^3$
b. $V = 240\ \text{m}^3$
c. $V = 24\ \text{m}^3$
d. $V = 2{,}4\ \text{m}^3$
e. $V = 0{,}24\ \text{m}^3$

2. alternativa **d**

3. O apótema de uma pirâmide hexagonal regular mede $3\sqrt{15}$ dm e o comprimento de uma aresta lateral mede o dobro do comprimento de uma aresta da base. Calcule a área total A_T dessa pirâmide.

3. alternativa **b**

a. $A_T = 18(\sqrt{3} + \sqrt{15})\ \text{dm}^2$
b. $A_T = 54(\sqrt{3} + \sqrt{15})\ \text{dm}^2$
c. $A_T = 45(\sqrt{3} + \sqrt{15})\ \text{dm}^2$
d. $A_T = 36(\sqrt{3} + \sqrt{15})\ \text{dm}^2$
e. $A_T = 6(\sqrt{3} + \sqrt{15})\ \text{dm}^2$

Observação

Após resolver os exercícios, compare sua resolução com a de alguns colegas. Se preciso, retome os conteúdos e converse sobre as estratégias utilizadas por eles.

Ferramenta de estudo

O mapa conceitual é uma ferramenta que representa de forma gráfica as relações entre conceitos, ou entre palavras que usamos para representar conceitos.

A seguir, apresentamos uma sugestão de elaboração de um mapa conceitual.

1. Retome os tópicos deste capítulo e faça um levantamento de informações relevantes para a elaboração do mapa. Por exemplo: conceitos, palavras-chave, situações-problema etc.
2. Escolha uma estrutura para o mapa e defina quais serão os recursos visuais que serão utilizados. Por exemplo: caixas, linhas, setas, cores, imagens, entre outros.
3. Organize a sequência das informações compondo ramificações que relacionem os conteúdos.

Agora, construa um mapa conceitual utilizando o que você aprendeu neste capítulo.

Se teve dificuldades em construir o mapa conceitual ou não resolveu algum exercício, retome os conteúdos abordados no capítulo. Após algumas tentativas, anote as dúvidas e converse com um colega que possa ajudá-lo. Se mesmo assim a dúvida persistir, pergunte ao professor na aula seguinte. Gerencie bem seu tempo de estudo em casa e estabeleça metas diárias alcançáveis, planejando seus estudos passo a passo.

CAPÍTULO

10

As figuras geométricas se distribuem em poliédricas ou arredondadas. Uma figura poliédrica pode ter sua forma associada ao formato de diferentes elementos presentes na natureza ou de construções feitas pelo ser humano. Por exemplo, nos cristais, nos alvéolos de uma colmeia, nos edifícios e no imobiliário de sua casa. E uma figura arredondada pode ter sua forma associada ao formato de planetas, animais, bola de futebol e de uma lata de refrigerante, por exemplo.

Corpos redondos

Embora variadas, essas figuras podem ser estudadas com base na Geometria plana, por meio de secções (cortes) e/ou planificações de suas superfícies. Neste capítulo, estudaremos três figuras arredondadas: o cilindro, o cone e a esfera.

Essa observação é inerente ao método científico e base da ciência, alinhando o trabalho à área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias. A integração com o professor de Física pode ser promovida para o desenvolvimento do estudo dos gases.

O tanque esférico é um dos principais tipos de recipientes para armazenamento de gases sob alta pressão, pois esse tipo de formato permite uma distribuição uniforme da pressão interna, reduzindo os riscos de pontos de fraqueza que poderiam causar vazamentos ou rupturas. Além disso, a área da superfície exposta ao ambiente externo é minimizada, ajudando a manter o gás em estado líquido mesmo sob pressão elevada.

Outra vantagem dos recipientes esféricos é a capacidade de armazenar maiores volumes de gás utilizando menos material, quando comparado com recipientes de outros formatos, como os cilíndricos. Isso otimiza o uso de materiais e facilita o armazenamento para um transporte eficiente dos gases.

EVGENII BAKHCHEV/ALAMY/FOTOARENA

Transportador de gás natural liquefeito atracado em um terminal de abastecimento de gás. Na imagem, é possível ver parte do tanque esférico para armazenamento e transporte do gás. Foto de 2022.

Além da teoria

2. Resposta pessoal. Os estudantes podem obter na pesquisa, por exemplo, que o tanque no formato cilíndrico também é bastante utilizado.

1. Você já viu pessoalmente, ou na televisão e na internet, algum tipo de transporte ou armazenamento de gás? Se a sua resposta for sim, comente com os colegas sobre isso. **Além da teoria: 1.** Resposta pessoal.
2. Faça uma pesquisa a respeito de outros formatos de tanques que são usados para o transporte e armazenamento de líquidos e gases inflamáveis. Compartilhe os resultados da sua pesquisa com os colegas.
3. Um tanque de armazenamento de gás liquefeito, no formato esférico, tem 8 m de diâmetro interno. Considerando que este tanque não apresenta deformidades, determine seu volume. **3.** $\frac{256\pi}{3}$ cm^3

Para o estudo dos corpos redondos, caso haja algum estudante cego ou com baixa visão, utilize modelos pedagógicos de sólidos geométricos (de madeira ou acrílico, por exemplo) a fim de que eles possam manipular esses objetos e os associar às figuras geométricas.

1. Introdução

Na natureza ou nas construções humanas, é possível notar o formato arredondado em muitas situações. No corpo humano, por exemplo, há diversos formatos arredondados. Alguns ossos lembram o formato cilíndrico, as pernas se aproximam da forma cônica, e a cabeça, da forma esférica.

Analise também a forma do globo ocular. Como você descreveria essa forma?


AFRICA STUDIO/SHUTTERSTOCK

(As imagens não respeitam as proporções reais entre os objetos.)


MARKUS GANN/SHUTTERSTOCK

Representação esquemática de um globo ocular.

Em construções humanas, o formato arredondado pode ser encontrado, por exemplo, em encanamentos cilíndricos, copos cônicos e bolas de futebol.

Neste capítulo, vamos estudar três corpos redondos: o cilindro, o cone e a esfera.

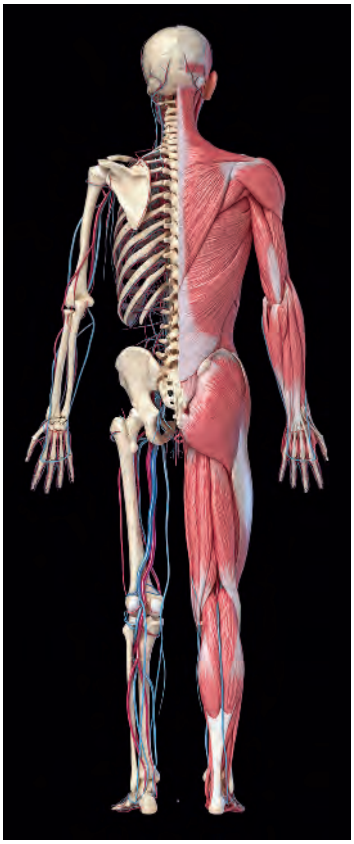

LEONELLO CALVETTI/SCIENCE PHOTO LIBRARY/GETTY IMAGES

Ilustração 3D dos sistemas esquelético, muscular e cardiovascular de corpo inteiro. Modelo didático sem escala e com cores fantasia.

2. Cilindro circular

Ao observar um automóvel em movimento, testemunhamos a evolução de uma das maiores invenções humanas: a roda. Ela não está presente apenas nos pneus, mas também no motor, de diferentes modos: nos eixos que giram no interior de peças fixas, nas manivelas que movimentam os pistões, nas polias que giram transmitindo movimento etc.

Além dos automóveis, a maioria das máquinas não poderia existir sem a roda. Mas como ela surgiu?

Provavelmente, o surgimento da roda teve início com a constatação de que objetos pesados poderiam ser deslocados com mais facilidade se colocados sobre troncos de árvores.


STEVE BOWER/SHUTTERSTOCK

Motor de carro e alguns de seus componentes: eixos, manivelas, pistões, polias, entre outros.


DOMINGOS AQUINO/ARQUIVO DA EDITORA

Reprodução artística de pessoas utilizando troncos de árvores para deslocar um objeto grande e muito pesado.

Muitas descobertas como essa basearam-se em propriedades físicas e geométricas de objetos da natureza.

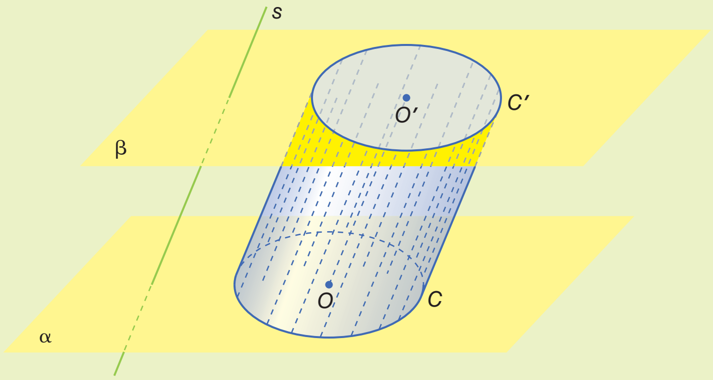
O movimento promovido por eixos, manivelas e polias pode ser explorado em conjunto com o professor de Física, estimulando a investigação de diferentes situações de integração entre as áreas do conhecimento.

Neste tópico, vamos estudar o **cilindro circular**. O formato cilíndrico pode ser associado a muitos elementos presentes em nosso dia a dia: em queijos, lápis, velas etc. Pense em outros exemplos de objetos com formatos cilíndricos.

Para o estudo desse corpo redondo, necessitamos da definição apresentada a seguir.

Sejam α e β dois planos paralelos distintos, uma reta s secante a esses planos e um círculo C de centro O contido em α. Consideremos todos os segmentos de reta, paralelos a s, de modo que cada um deles tenha um extremo pertencente ao círculo C e o outro extremo pertencente a β.

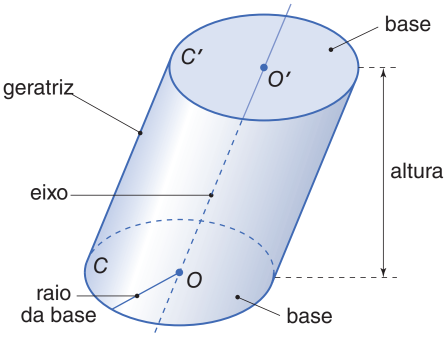
A reunião de todos esses segmentos de reta é um sólido chamado **cilindro circular limitado** ou, simplesmente, **cilindro**.



Elementos de um cilindro circular

Observando o cilindro apresentado na definição, nomeamos alguns elementos:

- os círculos C e C', de centros O e O', respectivamente, são chamados de **bases** do cilindro;
- a reta $\overleftrightarrow{OO'}$ é chamada de **eixo** do cilindro;
- o raio do círculo C (ou de C') é chamado de **raio** da base do cilindro;
- a distância entre as bases é chamada de **altura** do cilindro;
- todo segmento de reta, paralelo ao eixo $\overleftrightarrow{OO'}$, com extremidades nas circunferências das bases, é chamado de **geratriz** do cilindro.

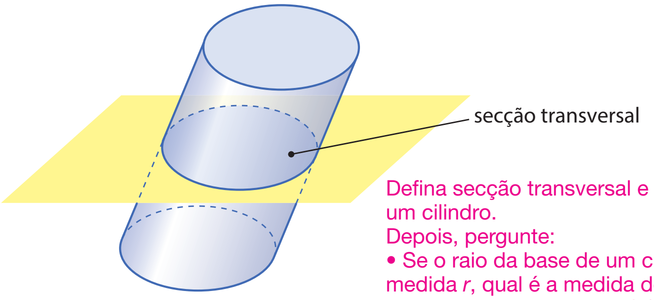


Observação

Há outros tipos de cilindro (por exemplo, os de bases elípticas), mas trataremos apenas dos cilindros circulares. Por comodidade, às vezes omitiremos a palavra "circulares", chamando-os simplesmente de **cilindros**. Além disso, para facilitar a escrita, não distinguiremos grandezas de suas respectivas medidas. Desse modo, diremos, por exemplo, "altura de 2 m" para nos referir à "medida da altura de 2 m".

Secções de um cilindro

Toda intersecção não vazia de um cilindro com um plano paralelo às bases é chamada de **secção transversal** do cilindro.



Defina secção transversal e secção meridiana de um cilindro.
Depois, pergunte:

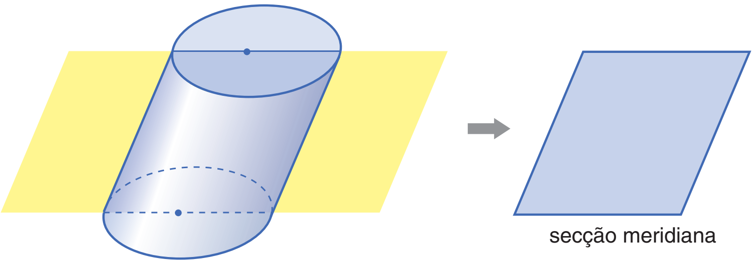
- Se o raio da base de um cilindro circular tem medida r, qual é a medida do raio de uma secção transversal desse cilindro? (r)
- Que figura plana é uma secção meridiana de um cilindro circular? (Paralelogramo.)

Observação

Qualquer secção transversal de um cilindro circular é um círculo congruente às bases.

ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

Toda intersecção de um cilindro com um plano que passa pelos centros de suas bases é chamada de **secção meridiana** do cilindro.

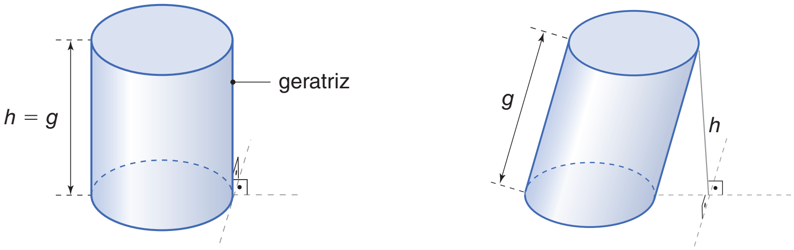


Cilindro circular reto e cilindro circular oblíquo

Cilindro circular **reto** é todo cilindro circular cujas geratrizes são perpendiculares às bases. Um cilindro circular que não é reto é chamado de cilindro circular **oblíquo**.

Observação

Nas figuras, g é a medida da geratriz e h é a da altura. No cilindro circular reto, a medida das geratrizes coincide com a altura.



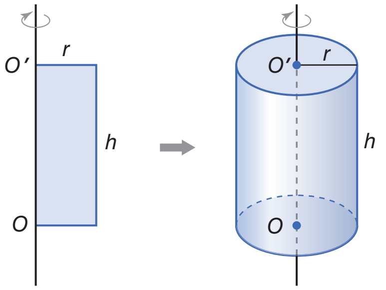
cilindro circular reto

cilindro circular oblíquo

Nota:

O cilindro circular reto também é conhecido como **cilindro de revolução**, pois pode ser obtido por uma revolução (rotação) de 360° de um retângulo em torno de um eixo que contém um de seus lados. Nesse caso, o eixo do cilindro é chamado **eixo de revolução**.

Para o estudo do cilindro circular reto, é importante usar, como modelo, um cilindro que se decomponha em dois semicilindros por uma secção meridiana e uma "capa" de cartolina, para representar a superfície lateral do cilindro, mais dois círculos representando suas bases. Com o auxílio dessas peças, os estudantes entendem mais facilmente os conceitos de secção meridiana, superfície lateral e superfície total.



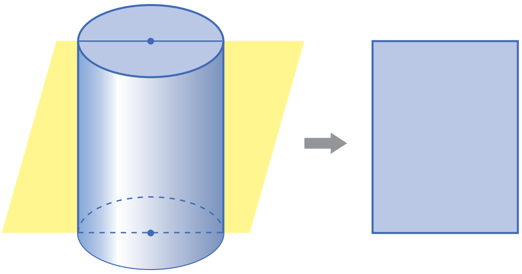
cilindro de revolução

Explicando o movimento de revolução de uma figura plana em torno de um eixo, enfatize que o cilindro circular reto é também chamado de cilindro de revolução.

ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

Propriedade

Toda secção meridiana de um cilindro circular reto é um retângulo cuja base é o diâmetro da base do cilindro e cuja altura é a altura do cilindro.



cilindro circular reto

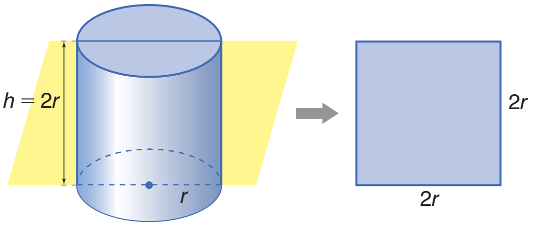
secção meridiana retangular

ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Cilindro equilátero

Todo cilindro circular reto cujas secções meridianas são quadradas é chamado de **cilindro equilátero**.

ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA



cilindro equilátero

secção meridiana

Assim, no cilindro equilátero, a medida da altura é igual à medida do diâmetro da base:

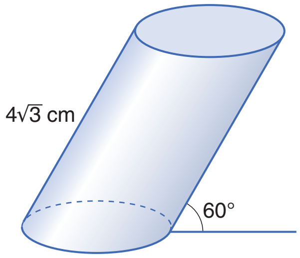
$$h = 2r$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Faça os exercícios no caderno.

1. Cada geratriz de um cilindro circular oblíquo mede $4\sqrt{3}$ cm e forma com os planos das bases ângulos de 60°, conforme mostra a figura a seguir. Calcule a medida da altura desse cilindro. **1.** 6 cm

ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

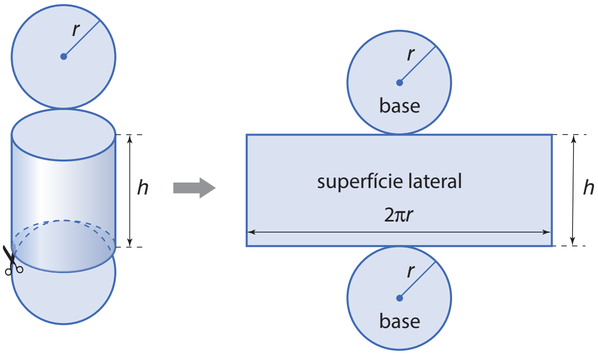


2. Uma diagonal de uma secção meridiana de um cilindro equilátero mede $4\sqrt{2}$ dm. Qual é o perímetro do círculo da base desse cilindro? **2.** 4π dm

Área lateral e área total de um cilindro circular reto

Para entender melhor este tópico, vamos planificar a superfície de um cilindro circular reto. Para isso, separamos as bases do cilindro e cortamos a superfície lateral sobre uma geratriz, obtendo dois círculos e um retângulo, conforme a figura a seguir.

FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA



Observação

Note que o comprimento do retângulo é o comprimento da circunferência da base do cilindro.

Note que a superfície de um cilindro circular reto de altura h e raio da base r é equivalente à reunião de um retângulo, de dimensões medindo $2\pi r$ e h, com dois círculos de raio r.

Observação

Lembre-se de que figuras planas equivalentes são figuras de áreas iguais.

Área lateral

A **área lateral** A_ℓ de um cilindro qualquer é a área da superfície formada pela reunião de todas as geratrizes do cilindro.

Observando a planificação feita na página anterior, concluímos que a área lateral A_ℓ de um cilindro circular reto de altura *h* e raio da base *r* é igual à área de um retângulo de altura *h* e base $2\pi r$. Assim:

$$A_\ell = 2\pi rh$$

Desenhe na lousa um cilindro circular e um prisma de base quadrada de mesma altura *h* cujas bases estejam contidas em um mesmo plano. Indicando por *r* a medida do raio da base do cilindro e por $r\sqrt{\pi}$ a medida de cada aresta da base do prisma, pergunte:

- Qual é a área da base do cilindro? E do prisma?

(Ambas são iguais a πr^2.)

Área total

A **área total** A_T de um cilindro qualquer é a soma da área lateral A_ℓ com as áreas das bases. No caso da superfície do cilindro circular reto planificada que observamos anteriormente, temos:

$$A_T = 2\pi rh + \pi r^2 + \pi r^2 = 2\pi rh + 2\pi r^2$$

Portanto:

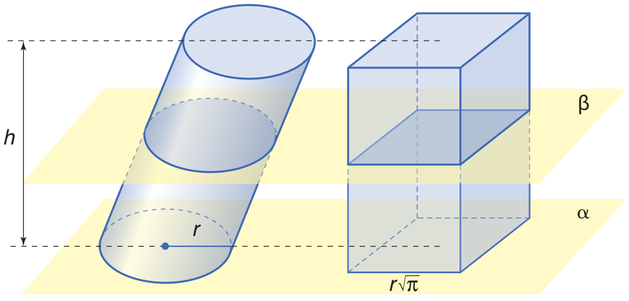
$$A_T = 2\pi r(h + r)$$

- Qual é a área de qualquer secção transversal do cilindro? (πr^2)
- Qual é a área de qualquer secção transversal do prisma? (πr^2)

Após a discussão, conclua, pelo princípio de Cavalieri, que o volume *V* do cilindro é igual ao volume do prisma: $V = \pi r^2 h$.

Volume de um cilindro circular

Consideremos um cilindro circular de altura *h* com raio da base *r* e um prisma de mesma altura *h* cuja base é um quadrado de lado $r\sqrt{\pi}$. Suponhamos que esses sólidos estejam em um mesmo semiespaço de origem em um plano α e que suas bases estejam contidas em α.



FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

Note que a área da base do cilindro, πr^2, é igual à área da base do prisma, $(r\sqrt{\pi})^2 = \pi r^2$.

Qualquer plano β, paralelo a α, que intersepta um desses sólidos também intersepta o outro e determina neles secções transversais de mesma área πr^2, pois cada secção é congruente à base do respectivo sólido. Assim, pelo princípio de Cavalieri, esses sólidos têm volumes iguais. Como o volume do prisma é o produto da área da base por sua altura, concluímos que:

O volume *V* de um cilindro circular qualquer é igual ao produto da área da base, πr^2, pela altura *h*:

$$V = \pi r^2 h$$

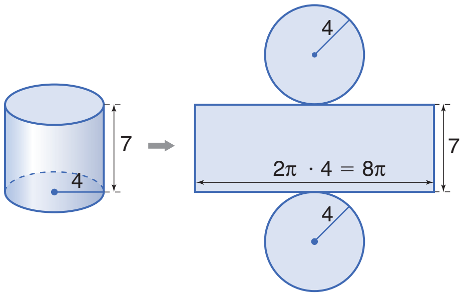
EXERCÍCIO RESOLVIDO

1. Em um cilindro circular reto de altura 7 cm, o raio da base mede 4 cm. Calcule, para esse cilindro:

a. a área *B* de uma base;
b. a área lateral A_ℓ;
c. a área total A_T;
d. a área A_{SM} de uma secção meridiana;
e. o volume *V*.

Resolução

Observe a seguir um esquema que representa a planificação da superfície do cilindro.



FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

a. A área B de cada base é a área de um círculo de raio 4 cm:

$$B = \pi \cdot 4^2\ \text{cm}^2 = 16\pi\ \text{cm}^2$$

b. A área lateral A_ℓ é a área de um retângulo de comprimento 8π cm e altura 7 cm:

$$A_\ell = (8\pi \cdot 7)\ \text{cm}^2 = 56\pi\ \text{cm}^2$$

c. A área total A_T é a soma da área lateral com as áreas das duas bases:

$$A_T = (56\pi + 2 \cdot 16\pi)\ \text{cm}^2 = 88\pi\ \text{cm}^2$$

d. A área A_{SM} de uma secção meridiana do cilindro é a área de um retângulo de base 8 cm e altura 7 cm:

$$A_{SM} = (8 \cdot 7)\ \text{cm}^2 = 56\ \text{cm}^2$$

e. O volume V é o produto da área da base pela altura do cilindro:

$$V = (16\pi \cdot 7)\ \text{cm}^3 = 112\pi\ \text{cm}^3$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Faça os exercícios no caderno.

3. Em um cilindro circular reto de altura 5 m, o raio da base mede 2 m. Calcule desse cilindro:

a. a área lateral A_ℓ; **3. a.** 20π m^2

b. a área B de uma base; **3. b.** 4π m^2

c. a área total A_T; **3. c.** 28π m^2

d. a área A_{SM} de uma secção meridiana; **3. d.** 20 m^2

e. o volume V. **3. e.** 20π m^3

4. Um cilindro equilátero tem 8 cm de altura. Calcule desse cilindro:

a. a área lateral A_ℓ; **4. a.** 64π cm^2

b. a área B de uma base; **4. b.** 16π cm^2

c. a área total A_T; **4. c.** 96π cm^2

d. a área A_{SM} de uma secção meridiana; **4. d.** 64 cm^2

e. o volume V. **4. e.** 128π cm^3

5. Uma secção meridiana de um cilindro equilátero tem 144 dm^2 de área. Calcule a área lateral, a área total e o volume desse cilindro. **5.** 144π dm^2; 216π dm^2; 432π dm^3

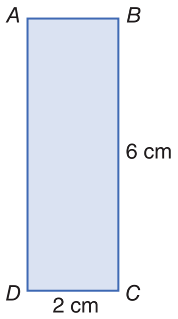
6. Um cilindro circular reto de raio da base 5 cm tem uma secção meridiana equivalente a uma de suas bases. Calcule a área lateral, a área total e o volume desse cilindro. **6.** $25\pi^2$ cm^2; $25\pi(\pi + 2)$ cm^2; $\frac{125\pi^2}{2}$ cm^3

7. Uma companhia de produção, refino e distribuição de derivados de petróleo tem tanques de armazenamento de gasolina sob a forma interna de cilindros circulares retos com 40 m de diâmetro da base horizontal e com 20 m de altura. Para armazenar 70.336.000 de litros de gasolina, qual é o menor número possível de tanques que serão utilizados? **7.** 3

R.AUGUSTUS/SHUTTERSTOCK

Tanque de armazenamento de petróleo e derivados, em Cubatão (SP). Foto de 2022.

8. Aprendemos que o cilindro circular reto também é chamado de cilindro de revolução, pois pode ser obtido pela revolução (rotação) de 360° de uma região retangular em torno de um de seus lados. Considerando a região retangular na figura, calcule:

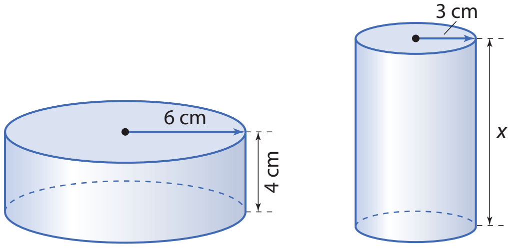


FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

a. o volume do cilindro gerado pela revolução dessa região retangular em torno do lado $\overline{AD}$; **8. a.** 24π cm^3

b. a área total do cilindro gerado pela revolução dessa região retangular em torno do lado $\overline{AB}$. **8. b.** 96π cm^2

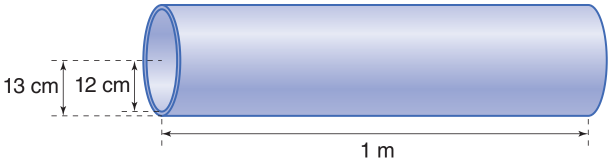
9. (Enem) Uma fábrica brasileira de exportação de peixes vende para o exterior atum em conserva, em dois tipos de latas cilíndricas: uma de altura igual a 4 cm e raio 6 cm, e outra de altura desconhecida e raio de 3 cm, respectivamente, conforme a figura. Sabe-se que a medida do volume da lata que possui raio maior, V_1, é 1,6 vezes a medida do volume da lata que possui raio menor, V_2.



A medida da altura desconhecida vale: **9.** alternativa **b**

a. 8 cm.
b. 10 cm.
c. 16 cm.
d. 20 cm.
e. 40 cm.

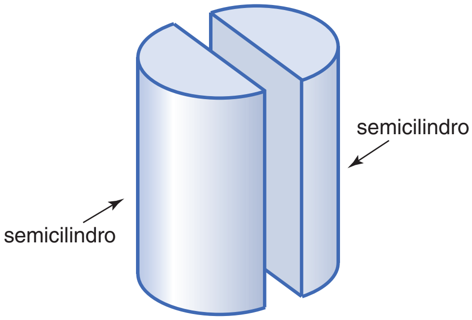
10. Um cano cilíndrico de PVC tem 1 m de comprimento, 12 cm de raio interno e 13 cm de raio externo, conforme mostra a figura.



Sabendo que a massa que compõe esse tubo é de 10,99 kg e adotando $\pi = 3{,}14$, pode-se concluir que a densidade do PVC é: **10.** alternativa **d**

a. 2,3 g/cm^3
b. 2,9 g/cm^3
c. 1,8 g/cm^3
d. 1,4 g/cm^3
e. 0,9 g/cm^3

11. Qualquer secção meridiana de um cilindro circular reto divide-o em dois sólidos chamados **semicilindros circulares retos**. O raio da base e a altura do cilindro são, também, o raio da base e a altura de cada semicilindro.



Considerando um semicilindro circular reto de altura 10 cm e raio da base 5 cm, calcule:

a. seu volume V; **11. a.** 125π cm^3

b. sua área lateral A_ℓ; **11. b.** $50(2 + \pi)$ cm^2

c. sua área total A_T. **11. c.** $25(4 + 3\pi)$ cm^2

12. Dois recipientes A e B têm, internamente, a mesma altura e o formato de um cubo e de um cilindro equilátero, respectivamente, cujas bases internas estão sobre um mesmo plano horizontal. O recipiente A contém metade de sua capacidade de água, e B está vazio. Se toda a água contida em A for despejada no recipiente B, ela atingirá uma altura, em relação à base interna de B: **12.** alternativa **d**

a. menor que 40% da altura interna do recipiente B.

b. maior que 40% e menor que 50% da altura interna do recipiente B.

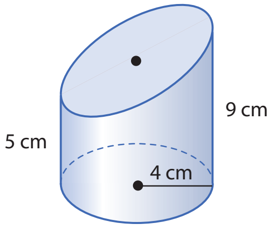
c. maior que 50% e menor que 60% da altura interna do recipiente B.

d. maior que 60% e menor que 70% da altura interna do recipiente B.

e. maior que 70% da altura interna do recipiente B.

13. Um plano α que intersepta obliquamente todas as geratrizes de um cilindro circular reto separa-o em dois sólidos chamados de **troncos de cilindro reto** com **uma base circular** (a outra base de cada tronco é elíptica). Em cada um desses troncos, o menor segmento perpendicular à base circular e com extremos nos contornos das bases é a geratriz menor do tronco, e o maior segmento nessas condições é a geratriz maior do tronco.

De acordo com essa definição, junte-se a um colega e calculem o volume de um tronco de cilindro reto com uma base circular de raio 4 cm, geratriz menor de 5 cm e geratriz maior de 9 cm. **13.** 112π cm^3



(*Sugestão*: Imaginem outro tronco congruente a esse e coloquem um sobre o outro, fazendo coincidir as bases não circulares, de modo que se forme um cilindro.)

14. Elabore um problema sobre cilindro circular que envolva uma situação do cotidiano. Em seguida, troque o problema elaborado com um colega para que um resolva o problema elaborado pelo outro. Por fim, analisem e discutam as resoluções. **14.** Resposta pessoal.

ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

Para retomar os conteúdos estudados, resolva os exercícios complementares 1 a 3.

3. Cone circular

Utilizando objetos do cotidiano – casquinha de sorvete, coberturas de silos, copos, funil etc. –, defina cone circular. Nomeie os elementos de um cone circular: base, superfície lateral, geratriz etc. Comente que existem outros tipos de cone (por exemplo, o de base elíptica), mas trataremos apenas dos cones circulares. Por comodidade, às vezes omitiremos a palavra “circulares”, chamando-os simplesmente de cones.

Podemos descrever o formato do vulcão e da concha das fotos a seguir como alongados e afunilados. Uma descrição equivalente é que eles têm, aproximadamente, o formato cônico.


ALFREDO MARTINEZ/GETTY IMAGES

Vulcão Popocatépetl em Puebla, México. Foto de 2023.


LEONID IASTREMSKYI/ALAMY/FOTOARENA

Concha do mar encontrada em águas profundas.

(As imagens não respeitam as proporções reais entre os objetos.)

Esse formato, tão frequente na natureza, também está presente nas construções feitas pelas pessoas, desde uma pequena casquinha para sorvete até grandes estruturas, por exemplo, as coberturas de silos usados para o armazenamento de grãos.

Esses objetos lembram o **cone circular**, que é caracterizado por ter uma base circular e por todos os seus pontos pertencerem a segmentos de reta com um extremo nessa base e o outro extremo em um mesmo ponto *V*, fora do plano da base, conforme definimos a seguir.


BINH THANH BUI/SHUTTERSTOCK

Casquinhas para sorvete.

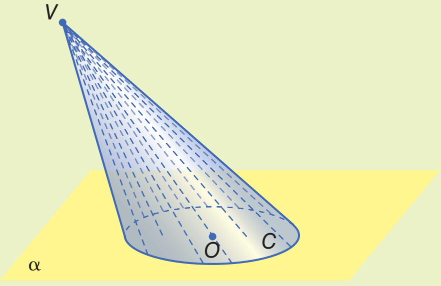

VINICIUS R. SOUZA/SHUTTERSTOCK

Silos para armazenagem de grãos, em Cassilândia (MS). Foto de 2024.

Sejam um círculo *C* de centro *O*, contido em um plano α, e um ponto *V* não pertencente a α.

Consideremos todos os segmentos de reta que têm um extremo pertencente ao círculo *C* e o outro no ponto *V*.

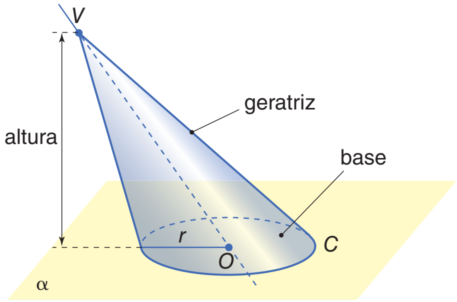
A reunião de todos esses segmentos de reta é um sólido chamado **cone circular limitado** ou simplesmente **cone circular**.



Elementos de um cone

Observando o cone representado a seguir, nomeamos alguns elementos:

- o círculo *C* e o ponto *V* são chamados, respectivamente, de **base** e **vértice** do cone;
- a reta $\overleftrightarrow{OV}$ é chamada de **eixo** do cone;
- o raio do círculo *C* é chamado de **raio da base** do cone;
- a distância entre o vértice e o plano da base é chamada de **altura** do cone;
- todo segmento de reta cujos extremos são o ponto *V* e um ponto da circunferência da base é chamado de **geratriz** do cone.

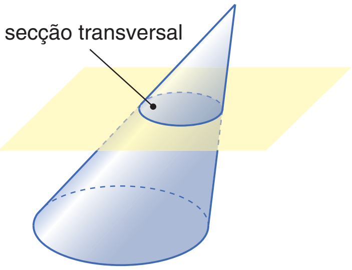


Observação

Há outros tipos de cone (por exemplo, o de base elíptica), mas trataremos apenas dos cones circulares. Por comodidade, às vezes omitiremos a palavra “circulares”, chamando-os simplesmente de cones.

Secções de um cone circular

Toda intersecção não vazia e não unitária de um cone com um plano paralelo à base é chamada de **secção transversal** do cone.

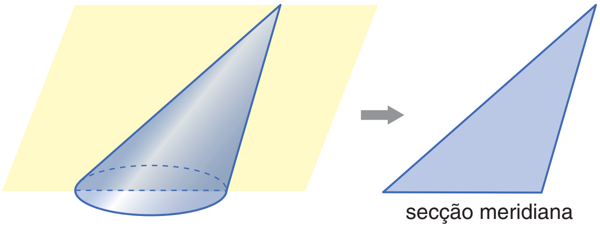


Observação

Qualquer secção transversal de um cone circular é um círculo.

ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

Toda intersecção de um cone com um plano que passa pelo vértice e pelo centro de sua base é chamada de **secção meridiana** do cone.

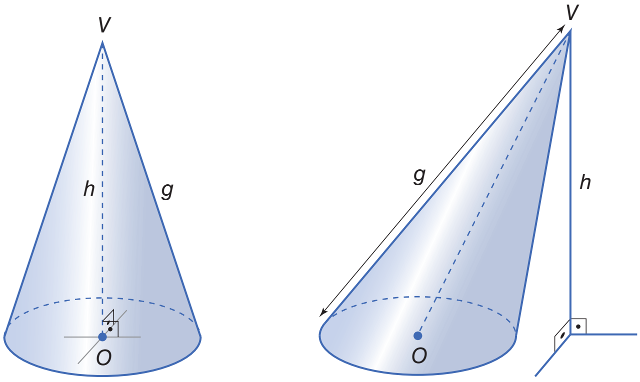


Cone circular reto e cone circular oblíquo

Cone circular **reto** é todo cone circular cujo eixo é perpendicular ao plano da base. Um cone circular não reto é chamado de cone circular **oblíquo**.

Observação

Nas figuras que seguem, *g* é a medida da geratriz e *h* é a da altura. Note que a altura do cone circular reto é a distância do vértice até o centro da base.



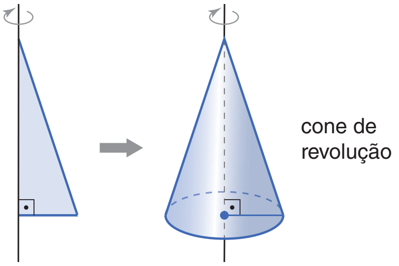
cone circular reto

cone circular oblíquo

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

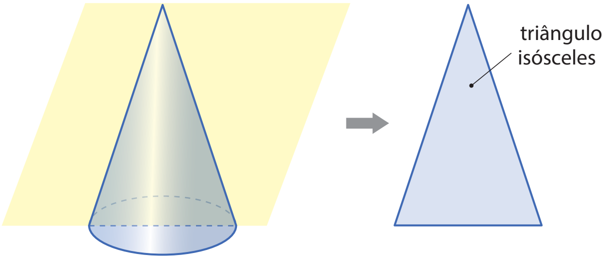
Nota:

O cone circular reto também é conhecido como **cone de revolução**, pois pode ser obtido por uma revolução (rotação) de 360° de um triângulo retângulo em torno de um dos catetos. Nesse caso, o eixo do cone é chamado de **eixo de revolução**.



Propriedade

Toda secção meridiana de um cone circular reto é um triângulo isósceles cuja base é o diâmetro da base do cone e cuja altura é a altura do cone.



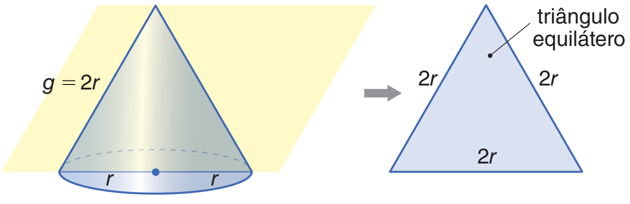
cone circular reto

secção meridiana

Cone equilátero

Todo cone circular reto cujas secções meridianas são triângulos equiláteros é chamado de **cone equilátero**.

ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA



cone equilátero

secção meridiana

Em todo cone equilátero, a medida g de cada geratriz é igual ao diâmetro da base:

No **exercício proposto 15**, destaque a semelhança entre os triângulos determinados por uma secção transversal.

$$g = 2r$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Faça os exercícios no caderno.

15. Em um cone circular reto com 24 cm de altura e 9 cm de raio da base, uma secção transversal tem 3 cm de raio. Calcule a distância entre o vértice do cone e o plano dessa secção.

15. 8 cm

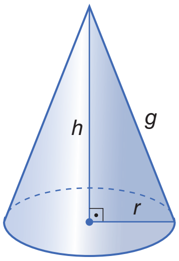
16. Uma altura de uma secção meridiana de um cone equilátero mede $4\sqrt{3}$ dm. Qual é a área da base desse cone? **16.** 16π dm^2

O cone circular reto e o teorema de Pitágoras

Consideremos um cone circular reto tal que o raio da base, a geratriz e a altura meçam r, g e h, respectivamente, conforme mostra a figura.

Pelo teorema de Pitágoras, temos:

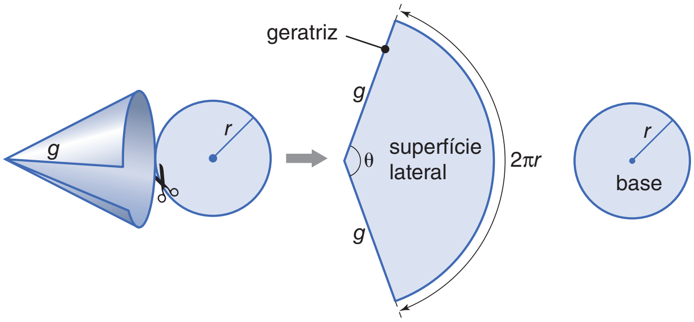
$$g^2 = r^2 + h^2$$



Área lateral e área total da superfície de um cone circular reto

Para entender melhor este tópico, vamos planificar a superfície de um cone circular reto. Para isso, separamos a base do cone e cortamos a superfície lateral sobre uma geratriz, obtendo um círculo e um setor circular, conforme mostra a figura a seguir.

ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA



Observação

Note que o comprimento do arco do setor é o comprimento da circunferência da base do cone.

Note que a superfície de um cone circular reto com raio da base r e geratriz de medida g é equivalente à reunião de um círculo de raio r com um setor circular de raio g e arco de comprimento $2\pi r$.

Área lateral

A **área lateral** A_ℓ de um cone qualquer é a área da superfície formada pela reunião de todas as geratrizes do cone.

Observando a planificação feita na página anterior, concluímos que a área lateral A_ℓ de um cone circular reto de geratriz g e raio da base r é igual à área de um setor circular de raio g e arco de medida $2\pi r$.

Como a área do setor é proporcional ao comprimento de seu arco, podemos calcular A_ℓ pela regra de três:

$$\begin{array}{ccc} \textbf{Comprimento do arco do setor} & & \textbf{Área do setor} \\ 2\pi g & \text{———————} & \pi g^2 \\ 2\pi r & \text{———————} & A_\ell \end{array} \Rightarrow A_\ell = \frac{2\pi r \cdot \pi g^2}{2\pi g}$$

Então, concluímos que:

$$\boxed{A_\ell = \pi r g}$$

Área total

A **área total** A_T de um cone qualquer é a soma da área lateral com a área da base. No caso do cone circular reto, cuja superfície foi planificada na página anterior, temos:

$$A_T = \pi r g + \pi r^2$$

Portanto:

$$\boxed{A_T = \pi r(g + r)}$$

Nota:

A medida θ, em grau, do ângulo central do setor circular equivalente à superfície lateral do cone é obtida pela regra de três:

$$\begin{array}{ccc} \textbf{Comprimento do arco do setor} & & \textbf{Medida do ângulo central em grau} \\ 2\pi g & \text{———————} & 360° \\ 2\pi r & \text{———————} & \theta \end{array} \Rightarrow \theta = \frac{2\pi r \cdot 360°}{2\pi g}$$

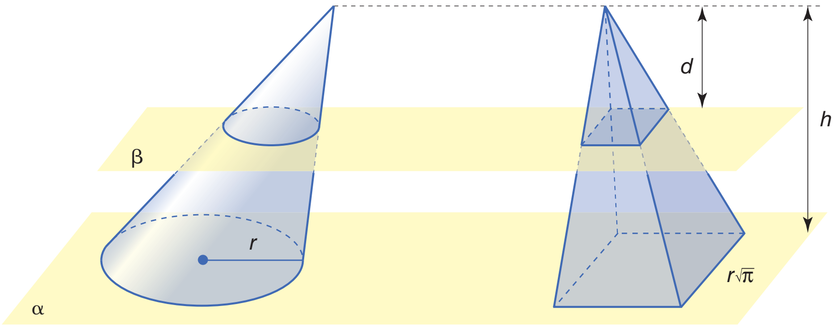
Assim, concluímos que:

$$\theta = \frac{360° \cdot r}{g}$$

Como 360° equivalem a 2π rad, podemos expressar a medida θ, em radiano, por $\theta = \dfrac{2\pi r}{g}$ rad.

Volume de um cone circular

Consideremos um cone circular de altura h com raio da base r e uma pirâmide com a mesma altura h, cuja base é um quadrado de lado $r\sqrt{\pi}$.



FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

Suponhamos que esses sólidos estejam em um mesmo semiespaço com origem em um plano α e que suas bases estejam contidas em α, conforme mostra a figura.

A área B da base do cone, $B = \pi r^2$, é equivalente à área B' da base da pirâmide, $B' = (r\sqrt{\pi})^2 = \pi r^2$.

Todo plano β, paralelo a α, que determina uma secção de área b no cone, determina também uma secção de área b' na pirâmide, de modo que:

$$\frac{b}{B} = \left(\frac{d}{h}\right)^2 \quad (1) \quad \text{e} \quad \frac{b'}{B'} = \left(\frac{d}{h}\right)^2 \quad (2),$$

em que d é a distância de β ao vértice do cone (ou ao vértice da pirâmide).

Por (1) e (2), temos:

$$\frac{b}{B} = \frac{b'}{B'}$$

Como $B = B'$, concluímos que $b = b'$.

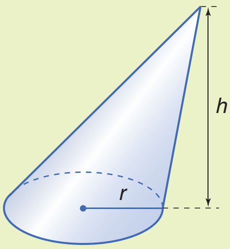
Resumindo:

- o cone e a pirâmide têm bases equivalentes;
- todo plano β, paralelo a α, que secciona um dos sólidos também secciona o outro, determinando neles secções transversais equivalentes.

Assim, pelo princípio de Cavalieri, os sólidos têm volumes iguais. O volume V da pirâmide, que é igual ao volume do cone, é dado por:

$$V = \frac{1}{3} \cdot B'h \Rightarrow V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

Assim, concluímos que:



O volume V do cone circular é igual a $\frac{1}{3}$ do produto da área de sua base, πr^2, por sua altura h:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

EXERCÍCIO RESOLVIDO

2. Um cone circular reto tem 9 cm de altura e 12 cm de raio da base. Calcule desse cone:

a. a área B da base;

b. a área lateral A_ℓ;

c. a área total A_T;

d. a medida θ, em grau, do ângulo central do setor circular equivalente à superfície lateral do cone;

e. a área A_{SM} de uma secção meridiana;

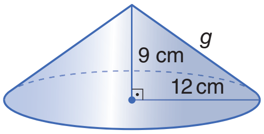
f. o volume V.

Resolução

a. A área B da base é a área de um círculo de raio 12 cm:

$$B = \pi \cdot 12^2 \text{ cm}^2 = 144\pi \text{ cm}^2$$

b. Pelo teorema de Pitágoras, temos:

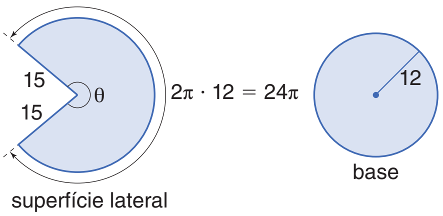


$g^2 = 12^2 + 9^2$

$g^2 = 225$

Logo, $g = 15$ cm.

Representando no plano a superfície lateral e a base do cone, com as medidas indicadas em centímetro, temos:



A área lateral A_ℓ é obtida pela regra de três:

Comprimento do arco do setor (cm)	Área do setor (cm²)
$2\pi \cdot 15$	$\pi \cdot 15^2$
24π	A_ℓ

Então, concluímos que:

$$A_\ell = \left(\frac{24\pi \cdot 225\pi}{30\pi}\right) \text{cm}^2 = 180\pi \text{ cm}^2$$

c. A área total A_T é a soma da área lateral A_ℓ com a área B da base:

$$A_T = A_\ell + B$$

$$A_T = (180\pi + 144\pi)\ \text{cm}^2 = 324\pi\ \text{cm}^2$$

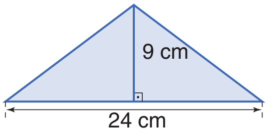
d. A medida θ, em grau, é dada pela regra de três:

Comprimento do arco do setor (cm)		**Medida do ângulo central (grau)**
$2\pi \cdot 15$	——————	$360°$
24π	——————	θ

Portanto:

$$\theta = \frac{24\pi \cdot 360°}{30\pi} \Rightarrow \theta = 288°$$

e. Qualquer secção meridiana desse cone é um triângulo isósceles cuja base é o diâmetro da base do cone e cuja altura é a mesma do cone. Acompanhe:



A área A_{SM} de uma secção meridiana é dada por:

$$A_{SM} = \left(\frac{24 \cdot 9}{2}\right)\ \text{cm}^2$$

$$A_{SM} = 108\ \text{cm}^2$$

f. O volume V é a terça parte do produto da área da base pela altura do cone:

$$V = \left(\frac{1}{3} \cdot 144\pi \cdot 9\right)\ \text{cm}^3 = 432\pi\ \text{cm}^3$$

ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Faça os exercícios no caderno.

17. Em um cone circular reto de altura 6 cm, o raio da base mede 8 cm. Calcule, para esse cone:

a. a área lateral A_ℓ; **17. a.** $80\pi\ \text{cm}^2$

b. a área B da base; **17. b.** $64\pi\ \text{cm}^2$

c. a área total A_T; **17. c.** $144\pi\ \text{cm}^2$ **17. d.** $\frac{8\pi}{5}$ rad ou 288°

d. a medida θ do ângulo central do setor circular equivalente à superfície lateral do cone;

e. a área A_{SM} de uma secção meridiana; **17. e.** $48\ \text{cm}^2$

f. o volume V. **17. f.** $128\pi\ \text{cm}^3$

18. Um cone equilátero tem 8 dm de diâmetro da base. Calcule, para esse cone:

a. a área lateral A_ℓ; **18. a.** $32\pi\ \text{dm}^2$

b. a área B da base; **18. b.** $16\pi\ \text{dm}^2$

c. a área total A_T; **18. c.** $48\pi\ \text{dm}^2$ **18. d.** π rad ou 180°

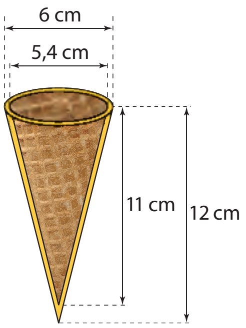
d. a medida θ do ângulo central do setor circular equivalente à superfície lateral do cone;

e. a área A_{SM} de uma secção meridiana; **18. e.** $16\sqrt{3}\ \text{dm}^2$

f. o volume V. **18. f.** $\frac{64\pi\sqrt{3}}{3}\ \text{dm}^3$

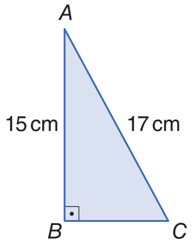
19. Uma secção meridiana de um cone equilátero tem $4\sqrt{3}\ \text{cm}^2$ de área. Calcule a área lateral, a área total e o volume desse cone. **19.** $8\pi\ \text{cm}^2$; $12\pi\ \text{cm}^2$; $\frac{8\pi\sqrt{3}}{3}\ \text{cm}^3$

20. Uma indústria produz casquinhas para sorvete confeccionadas com biju na forma de cone circular reto. Externamente, cada cone tem 6 cm de diâmetro da base e 12 cm de altura e, internamente, tem 5,4 cm de diâmetro da base e 11 cm de altura. Calcule o volume de biju, em centímetro cúbico, que compõe cada casquinha.



20. $9{,}27\pi\ \text{cm}^3 \approx 29{,}12\ \text{cm}^3$

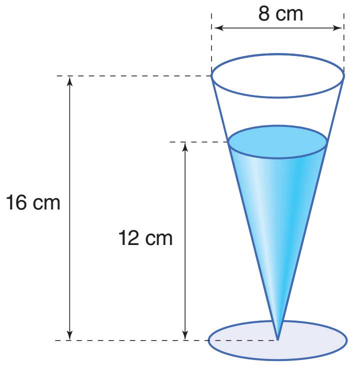
21. Aprendemos que o cone circular reto também é chamado de cone de revolução, pois pode ser obtido pela revolução (rotação) de 360° de um triângulo retângulo em torno de um dos catetos. Considerando o triângulo a seguir, calcule:



a. o volume do cone gerado pela revolução dessa região triangular em torno do cateto $\overline{AB}$; **21. a.** $320\pi\ \text{cm}^3$

b. a área total do cone gerado pela revolução dessa região triangular em torno do cateto $\overline{BC}$. **21. b.** $480\pi\ \text{cm}^2$

22. Um copo com o formato interno de um cone circular reto com 16 cm de altura e 8 cm de diâmetro da boca contém certa quantidade de água. Colocando-o sobre uma mesa de modo que o eixo do cone fique na posição vertical, constata-se que a água atinge 12 cm de altura, em relação ao vértice do cone, conforme mostra a figura. Calcule o volume de água contida no copo, em mililitro. **22.** 36π mL



ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

23. Um setor circular com ângulo central de 90° é retirado de um círculo de cartolina com 12 cm de raio, conforme mostra a figura 1, a seguir, em que $\overline{OA}$ e $\overline{OB}$ são raios do setor. Utilizando o restante da cartolina, constrói-se a superfície lateral de um cone circular reto, colando $\overline{OA}$ em $\overline{OB}$, conforme mostra a figura 2.

ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

Figura 1

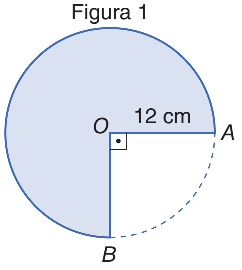
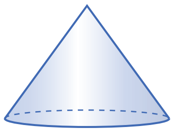


Figura 2



A altura desse cone é: **23.** alternativa **b**

a. 10 cm **b.** 12 cm **c.** 12,5 cm **d.** 13 cm **e.** 13,5 cm

24. Elabore um problema sobre o cone circular que envolva uma situação do cotidiano. Em seguida, troque o problema elaborado com um colega para que um resolva o problema elaborado pelo outro. Por fim, analisem e discutam as resoluções. **24.** Resposta pessoal.

Para retomar os conteúdos estudados, resolva o exercício complementar 4.

Tronco de cone circular de bases paralelas

Neste tópico, estudaremos uma figura geométrica com a qual você vai identificar muitos objetos do dia a dia, como um balde, uma rolha, um copo, a cúpula de um abajur etc.

MYLISA/SHUTTERSTOCK

HURST PHOTO/ SHUTTERSTOCK

AARON AMAT/SHUTTERSTOCK

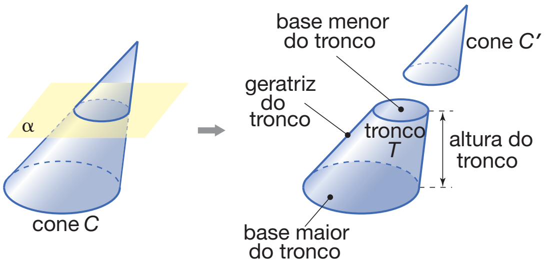
GAMARUBA/SHUTTERSTOCK

(As imagens não respeitam as proporções reais entre os objetos.)

Esses objetos têm o formato de um tronco de **cone circular de bases paralelas**, que definimos a seguir.

Considere um plano α paralelo à base de um cone circular *C* separando-o em dois sólidos. Um desses sólidos é um cone *C'* e o outro é um **tronco de cone circular de bases paralelas**.

FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA



Note que o volume V_{tronco} do tronco é igual à diferença entre os volumes V_C e $V_{C'}$ dos cones *C* e *C'*, respectivamente, isto é:

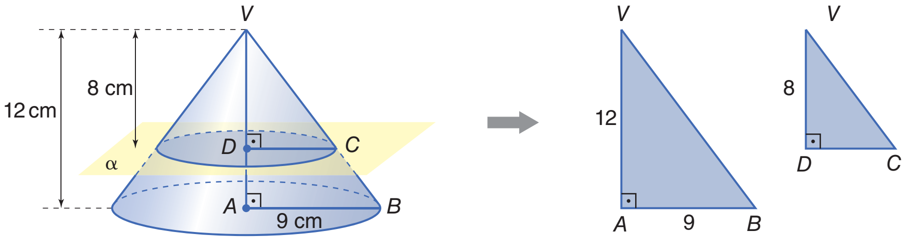
$$V_{tronco} = V_C - V_{C'}$$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

3. Seja um cone circular reto de altura 12 cm e raio da base 9 cm. Um plano α paralelo à base e distante 8 cm do vértice separa o cone em dois sólidos. Calcule o volume do tronco de cone assim determinado.

Resolução

Esquematizando, temos:



Da semelhança entre os triângulos *VAB* e *VDC*, temos:

$$\frac{12}{8} = \frac{9}{DC} \Rightarrow DC = 6$$

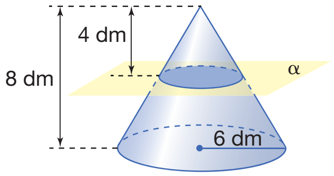
Assim, já podemos calcular o volume *V* do tronco, dado pela diferença entre os volumes do cone original e do cone acima do plano α:

$$V = \left(\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 9^2 \cdot 12 - \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 6^2 \cdot 8\right) \text{ cm}^3 = 228\pi \text{ cm}^3$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Faça os exercícios no caderno.

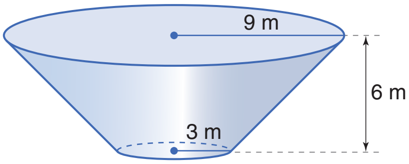
25. Em um cone circular reto de 8 dm de altura, o raio da base mede 6 dm. Um plano, paralelo à base desse cone e distante 4 dm de seu vértice, separa-o em dois sólidos.



Calcule, do tronco de cone assim determinado:

a. o volume; **25. a.** 84π dm^3 **b.** a área lateral; **25. b.** 45π dm^2 **c.** a área total. **25. c.** 90π dm^2

26. Um reservatório de água tem a forma de um tronco de cone circular reto de bases paralelas. Internamente, esse reservatório tem 6 m de altura e raios de 9 m e 3 m nas bases. Adotando $\pi = 3{,}14$, junte-se a um colega e calculem a capacidade desse reservatório em litro. **26.** 734.760 L



(*Sugestão*: Prolonguem as geratrizes do tronco para visualizar o cone que o contém.)

Para retomar os conteúdos estudados, resolva os exercícios complementares 5 e 6.

ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

MATEMÁTICA SEM FRONTEIRAS

OBJETO DIGITAL **Infográfico clicável: A arte das casas pintadas de Tiébélé**

Os diferentes formatos das casas de Tiébélé

As pinturas das casas de Tiébélé, em Burkina Faso, África Ocidental, expressam a originalidade única da arquitetura tradicional do povo Kassena, uma das etnias mais antigas do país. Tiébélé é uma pequena vila conhecida por suas habitações tradicionais ricamente decoradas, que são construídas pelos Kassena e mantidas principalmente pelas mulheres. O trabalho artístico realizado nas paredes das casas é uma prática que passa de geração em geração, simbolizando a herança e a identidade cultural da comunidade.


OLYMPIA DE MAISMONT/AFP/GETTY IMAGES

Casas em Tiébélé, próximo da fronteira com Gana. Foto de 2019.

A técnica de construção das casas em Tiébélé é manual e os materiais utilizados são os encontrados no local. Elas são construídas com blocos de adobe, uma mistura de terra, palha, esterco de gado e água. Essa mistura é moldada, compactada e deixada para secar, com a finalidade de formar paredes espessas, que ajudam a manter o interior fresco durante o dia, devido ao calor intenso, e a proteger do frio durante a noite. Após a construção das paredes, a superfície é suavizada e polida com pedras lisas, criando uma base uniforme para as decorações. O processo de pintura utiliza pigmentos naturais obtidos de argilas e minerais encontrados na região. As tintas mais comuns têm tons de preto, branco e vermelho, obtidos por meio de uma combinação de argila branca, carvão e argila vermelha. Uma camada de verniz natural, geralmente obtido da seiva de árvores, é aplicada após a pintura para protegê-las das intempéries.

As casas de Tiébélé têm formatos únicos e diversos, muitas vezes circulares, mas também retangulares. Cada formato tem um significado específico e uma função. Por exemplo, as casas com formato circular são tipicamente destinadas às famílias, enquanto as com formato retangular costumam ser usadas para o armazenamento de alimentos ou como locais de encontro. As paredes são decoradas com intrincados desenhos geométricos, que, além da função estética, têm significados simbólicos. Os desenhos podem representar a história da família, símbolos religiosos ou expressar as ideias da artista que os criou.

Além da beleza estética, a arquitetura e as pinturas das casas têm uma profunda conexão com a identidade cultural dos Kassena. O processo de decoração é um evento comunitário e ritualístico, no qual as mulheres da aldeia se reúnem para pintar as paredes das casas após a colheita, fortalecendo laços sociais e transmitindo as tradições culturais e religiosas e as habilidades artísticas para as novas gerações. Cada casa se torna, assim, uma espécie de obra de arte viva, que conta a história e as crenças de seus moradores.

Elaborado com base em: AFREAKA. **Arquitetura Gourounsi**. Disponível em: http://www.afreaka.com.br/arquitetura-gourounsi/; CASA E JARDIM. **A arte vibrante das casas pintadas de Tiébele, em Burkina Faso**. Disponível em: https://revistacasaejardim.globo.com/arte/noticia/2024/06/a-arte-vibrante-das-casas-pintadas-de-tiebele-em-burkina-faso.ghtml. Acesso em: 5 set. 2024.

Atividades

Faça as atividades no caderno.

1. Cilindro, com o telhado de uma das casas no formato de cone.

1. Uma das casas em Tiébélé, que aparece no centro da imagem, tem o formato de qual sólido geométrico?
2. Você conhece povos do Brasil que mantêm suas tradições culturais e simbólicas por meio de pinturas e da criação de determinados tipos de objeto? Pesquise esses povos e escreva um texto relatando o que descobriu, enriquecendo-o com fotos, se for possível.

2. Resposta e pesquisa pessoais.

3. Pesquise outros povos que têm casas com formatos semelhantes às do povo Kassena.

3. Pesquisa pessoal.

4. Compartilhem os resultados das pesquisas das questões **2** e **3** com os colegas.

4. Resposta pessoal.

4. Esfera

Há quem não conheça uma bola? Ela está presente desde muito cedo em nossa vida, das bolhas de sabão às formas da natureza, passando por dezenas de jogos que podem ser praticados com ela.


SEVENTYFOUR/SHUTTERSTOCK


TIM UR/SHUTTERSTOCK


OLEKSANDR OSIPOV/SHUTTERSTOCK

(As imagens não respeitam as proporções reais entre os objetos.)

Utilizando objetos do cotidiano – bola de gude, bola de futebol, bola de bilhar, bola de pingue-pongue etc. –, defina esfera e superfície esférica.
Enfatize que a esfera é maciça, como uma bolinha de gude, e a superfície esférica é oca, como uma bolinha de pingue-pongue.
Nomeie os elementos de uma esfera: centro, raio, superfície etc.
A referência ao pensador Aristóteles e à sua concepção esférica da Terra permite a análise de interpretações sobre o Cosmos, possibilitando a integração com a área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias.
A participação do professor de Física pode enriquecer uma discussão com os estudantes sobre o assunto.

A atração pelo formato esférico não é prerrogativa do ser humano moderno, pois desde a Antiguidade grega esse formato é considerado padrão de equilíbrio e perfeição, como mostra a frase a seguir, creditada a Aristóteles (384-322 a.C.):

> "O céu deve ser necessariamente esférico, pois a esfera sendo gerada pela rotação do círculo é, de todos os corpos, o mais perfeito".
>
> DREYER, J. L. E. **A history of astronomy from Thales to Kepler**. 2. ed. Nova York: Dover, 1953.

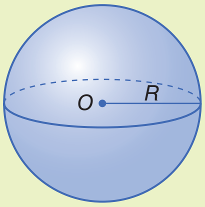
Além do fascínio estético, o formato esférico permitiu grandes invenções e descobertas. O próprio Aristóteles foi um dos primeiros pensadores a defender a concepção esférica da Terra. Seus argumentos fundamentavam-se no fato de a sombra da Terra sobre a Lua ser circular em um eclipse lunar.


ANDREW DARRINGTON/ALAMY/FOTOARENA

Sombra da Terra projetada na superfície lunar durante eclipse.

Neste tópico, estudaremos a esfera, seus elementos e suas propriedades. Acompanhe as definições a seguir.

Consideremos um ponto O e uma distância não nula R. Chama-se **esfera** de centro O e raio de medida R o conjunto dos pontos do espaço cujas distâncias ao ponto O sejam menores ou iguais a R.

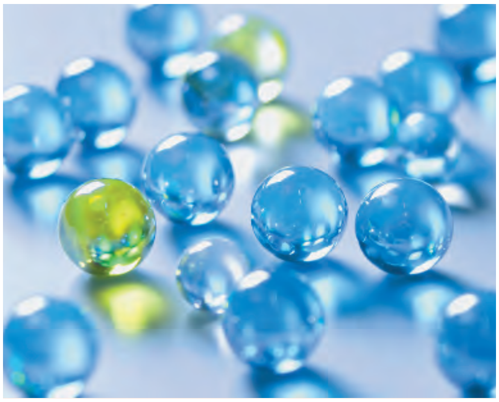


FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

Considerando a definição anterior, temos:

- o conjunto dos pontos do espaço cujas distâncias ao ponto O são **menores** que R é chamado de **interior** da esfera;
- o conjunto dos pontos do espaço cujas distâncias ao ponto O são **iguais** a R é chamado de **superfície esférica**;
- o conjunto dos pontos do espaço cujas distâncias ao ponto O são **maiores** que R é chamado de **exterior** da esfera.

Por essas definições, concluímos que a esfera é maciça enquanto a superfície esférica é apenas a “casca” da esfera. Dois bons modelos para representar esses objetos, respectivamente, são a bolinha de gude e a bolinha de pingue-pongue.


KPG_PAYLESS/SHUTTERSTOCK

Bolinhas de gude são maciças, sugerindo a ideia de esfera.

(As imagens não respeitam as proporções reais entre os objetos.)

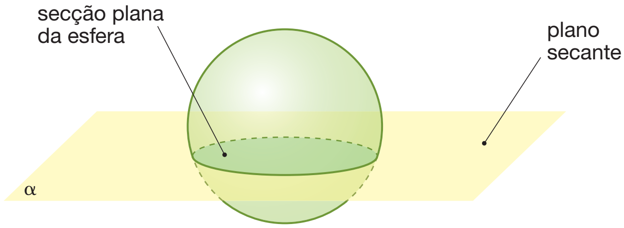

CN BOON/ALAMY/FOTOARENA

Uma bolinha de pingue-pongue é oca, sugerindo a ideia de superfície esférica.

Posições relativas entre um plano e uma esfera

Plano secante a uma esfera

Um plano α é **secante** a uma esfera se, e somente se, ambos têm em comum infinitos pontos. Esses infinitos pontos comuns formam um círculo chamado de **secção plana** da esfera.

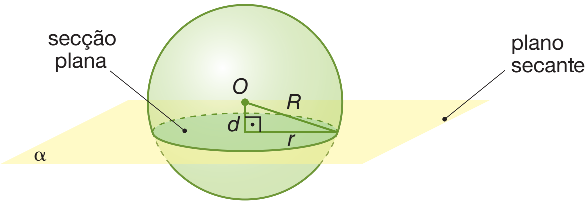


Observação

Se o plano secante passa pelo centro da esfera, a secção plana é chamada de círculo máximo da esfera.

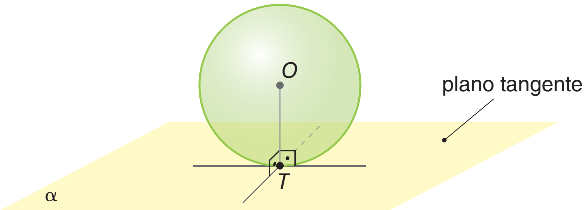
Sendo R a medida do raio da esfera, r a medida do raio de uma secção plana e d, com $d > 0$, a distância do plano α ao centro O da esfera, temos, pelo teorema de Pitágoras:

$$R^2 = d^2 + r^2$$



Plano tangente a uma esfera

Um plano α é **tangente** a uma esfera se, e somente se, ambos têm em comum um único ponto.



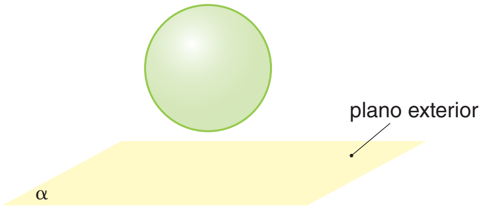
Observação

O raio da esfera é perpendicular ao plano tangente no ponto de contato.

ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

Plano exterior a uma esfera

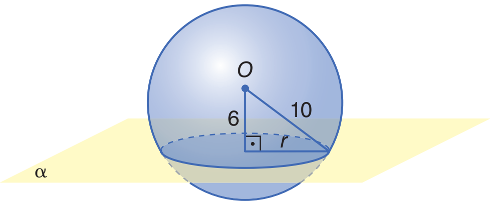
Um plano α é **exterior** a uma esfera se, e somente se, não existe ponto comum aos dois.



ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

EXERCÍCIO RESOLVIDO

4. Um plano α secciona uma esfera de raio 10 cm à distância de 6 cm de seu centro. Calcule a medida *r* do raio da secção plana determinada por α nessa esfera.



Resolução

Pelo teorema de Pitágoras, temos:

$$r^2 + 6^2 = 10^2 \Rightarrow r^2 = 64$$

$$\therefore r = \sqrt{64} \Rightarrow r = 8$$

Logo, o raio da secção plana mede 8 cm.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Faça os exercícios no caderno.

27. Uma esfera de centro *O* e raio medindo 17 cm é seccionada por um plano α distante 15 cm de *O*.

a. Calcule a área da secção plana determinada por α na esfera. **27. a.** 64π cm^2

b. Calcule o perímetro da secção plana. **27. b.** 16π cm

c. Se $\overline{AB}$ é um diâmetro da secção plana e $\overline{AC}$ é um diâmetro da esfera, calcule a distância entre *B* e *C*. **27. c.** 30 cm

(**Lembrete**: A área *A* e o perímetro *P* de um círculo de raio *r* são dados por: $A = \pi r^2$ e $P = 2\pi r$.)

28. A área de um círculo máximo de uma esfera de 4 cm de raio é o quádruplo da área de uma secção plana feita a uma distância *d* do centro *O* dessa esfera. Assim, podemos concluir que:

a. O perímetro do círculo máximo é o quádruplo do perímetro da secção plana.

28. alternativa **e**

b. O raio da secção plana mede 3 cm.

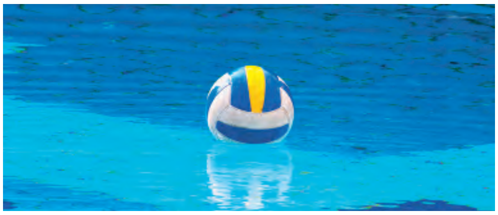
c. A distância do centro da esfera ao centro da secção plana é $\sqrt{3}$ cm.

d. O perímetro *P* da secção plana é 16π cm.

e. A área da secção plana é 4π cm^2.

29. Uma bola com 20 cm de raio boia na água de uma piscina, tendo 20% do diâmetro vertical submerso. Calcule a medida do raio da circunferência determinada pela intersecção da superfície da bola com o plano da superfície da água.

29. 8 cm



EVIKKA/SHUTTERSTOCK

Reflexão: Relativamente a uma esfera, uma reta pode ser exterior, tangente ou secante.

Reflexão

Quais são as possíveis posições relativas entre uma reta e uma esfera?

Conectado **Conectado:** Respostas pessoais.

Usando um *software* de Geometria dinâmica, faça o que se pede.

a. Represente um cilindro e uma de suas secções meridianas.

b. Represente um cilindro e uma de suas secções transversais.

c. Represente um cone e uma de suas secções meridianas.

d. Represente um cone e uma de suas secções transversais.

e. Represente a intersecção de uma esfera de centro O com um plano secante que não passe por O.

f. Represente uma esfera de centro O. Em seguida, desenhe um círculo máximo dessa esfera.

Com a atividade proposta no boxe **Conectado**, incentive os estudantes a explorar os sólidos geométricos estudados em diferentes vistas, utilizando um *software* de Geometria dinâmica.

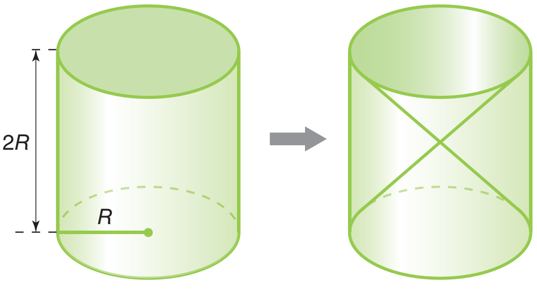
Volume de uma esfera

Reproduza em sala de aula os procedimentos descritos no livro, demonstrando a fórmula para o cálculo do volume da esfera.

Para o cálculo do volume da esfera, utilizamos um sólido auxiliar chamado de **anticlepsidra**.

Esse sólido é obtido retirando-se de um cilindro equilátero de diâmetro $2R$ dois cones cujas bases coincidem com as bases do cilindro e cujos vértices coincidem com o centro do cilindro.

Assim, o **volume da anticlepsidra** é igual à diferença entre o volume do cilindro equilátero de raio da base R e o volume do sólido formado por dois cones circulares retos de altura R e raio da base R.



anticlepsidra

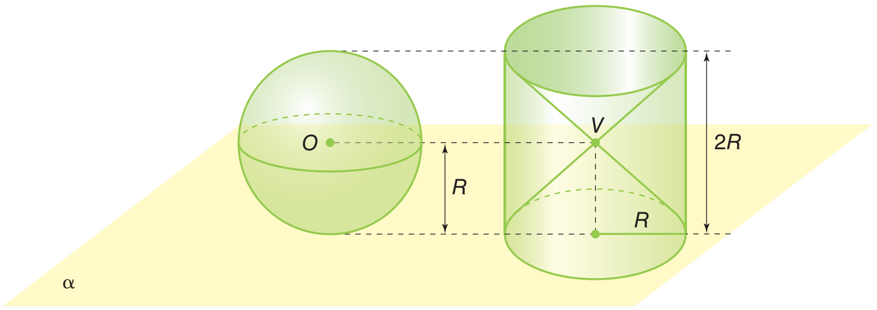
- O volume V_1 do cilindro é $V_1 = \pi R^2 \cdot 2R$, ou seja: $V_1 = 2\pi R^3$
- O volume V_2 do sólido formado pelos dois cones é $V_2 = 2\left(\frac{1}{3} \cdot \pi R^2 \cdot R\right)$, ou seja: $V_2 = \frac{2\pi R^3}{3}$

Logo, o volume V da anticlepsidra é:

$$V = V_1 - V_2 \Rightarrow V = 2\pi R^3 - \frac{2\pi R^3}{3}$$

$$\therefore V = \frac{4\pi R^3}{3}$$

Agora, vamos demonstrar que o volume dessa anticlepsidra é igual ao volume de uma esfera de raio R. Para isso, consideremos esses dois sólidos em um mesmo semiespaço de origem em um plano α de modo que a base da anticlepsidra esteja contida em α e a esfera seja tangente a α:

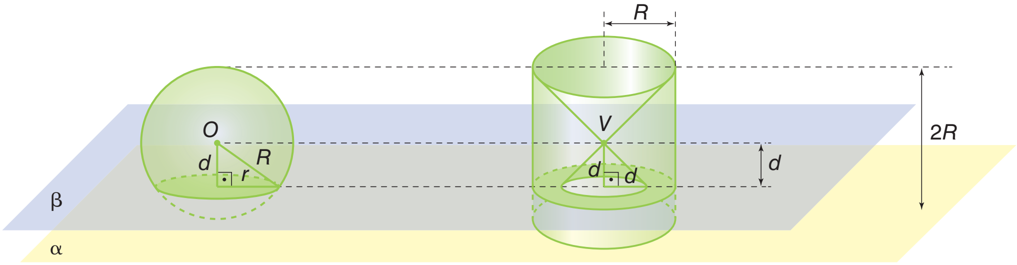


Todo plano β, paralelo a α, que secciona a esfera secciona também a anticlepsidra.

Se β passa pelo centro O da esfera, então passa também pelo centro V da anticlepsidra e determina em ambos os sólidos secções de áreas iguais a πR^2, pois as duas secções são círculos de raio R.

ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

Suponhamos que β seccione esses sólidos à distância d, com $d > 0$, do centro da esfera (ou do centro da anticlepsidra):

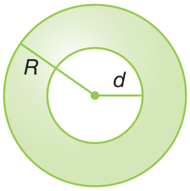


- Se r é a medida do raio da secção determinada na esfera, então a área A_1 dessa secção é: $A_1 = \pi r^2$. Observamos, pelo teorema de Pitágoras, que:

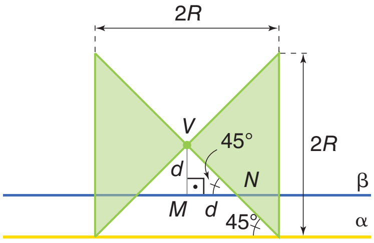
$$r^2 + d^2 = R^2 \Rightarrow r^2 = R^2 - d^2$$

  Assim, podemos expressar a área A_1 por: $A_1 = \pi(R^2 - d^2)$

- A secção determinada pelo plano β na anticlepsidra é uma coroa circular:



  O raio interno dessa coroa é igual à distância d entre o plano β e o centro da anticlepsidra. Para compreender essa afirmação, considere uma secção meridiana da anticlepsidra:



  O triângulo VMN é isósceles; logo, o raio interno da coroa circular mede d. Assim, a área A_2 dessa coroa é:

$$A_2 = \pi(R^2 - d^2)$$

Note que: $A_1 = A_2$

Resumindo, todo plano que secciona a esfera também secciona a anticlepsidra, determinando, em ambas, secções de mesma área. Logo, pelo princípio de Cavalieri, a esfera tem o mesmo volume da anticlepsidra. Assim:

O volume V de uma esfera de raio R é dado por:

$$V = \frac{4\pi R^3}{3}$$

Área da superfície esférica

Demonstra-se que:

A área A da superfície de uma esfera de raio R é dada por:

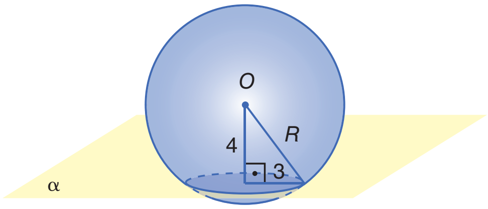
$$A = 4\pi R^2$$

Ao inscrever uma esfera em um cilindro equilátero, Arquimedes mostrou que a área total e o volume do cilindro são, respectivamente, $\frac{3}{2}$ da área e do volume da esfera. Ele teria considerado essa a sua mais bela descoberta e pedido para que, quando morresse, gravassem em seu túmulo um cilindro e uma esfera nele inscrita. Para saber mais fatos curiosos como esse, você pode ler o livro **A rainha das ciências: um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da matemática**, de Gilberto Geraldo Garbi.

ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

EXERCÍCIO RESOLVIDO

5. Um plano α secciona uma esfera a 4 cm do centro O, determinando uma secção plana de raio 3 cm. Calcule o volume dessa esfera e a área de sua superfície.



FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

Resolução

Seja R a medida, em centímetro, do raio da esfera. Pelo teorema de Pitágoras, temos:

$$R^2 = 4^2 + 3^2 \Rightarrow R = 5$$

Logo, o volume V da esfera e a área A de sua superfície são:

$$V = \frac{4\pi \cdot 5^3}{3}\ \text{cm}^3 \Rightarrow V = \frac{500\pi}{3}\ \text{cm}^3$$

$$A = 4\pi \cdot 5^2\ \text{cm}^2 \Rightarrow A = 100\pi\ \text{cm}^2$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Faça os exercícios no caderno.

30. Uma esfera de centro O e 15 cm de raio é seccionada por um plano α a 12 cm de O. Calcule:

a. a área da secção plana; **30. a.** 81π cm^2

b. a área da superfície esférica; **30. b.** 900π cm^2

c. o volume da esfera. **30. c.** 4.500π cm^3

31. Uma esfera de centro O e volume $\frac{256\pi}{3}$ dm^3 é seccionada por um plano α que dista 2 dm de O. Calcule:

a. a área da superfície dessa esfera; **31. a.** 64π dm^2

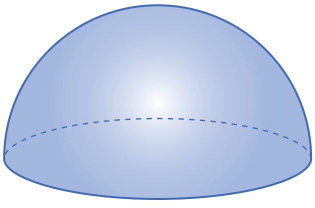
b. a área de um círculo máximo dessa esfera; **31. b.** 16π dm^2

c. o perímetro da secção plana determinada por α nessa esfera. **31. c.** $4\pi\sqrt{3}$ dm

32. (Fuvest-SP) Para pintar a base plana de um hemisfério maciço, gastamos doze galões de tinta. Quantos galões serão necessários para pintar toda a parte externa do hemisfério?

Nota: Hemisfério (ou semiesfera) é metade de uma esfera, portanto é uma figura maciça.

32. 36



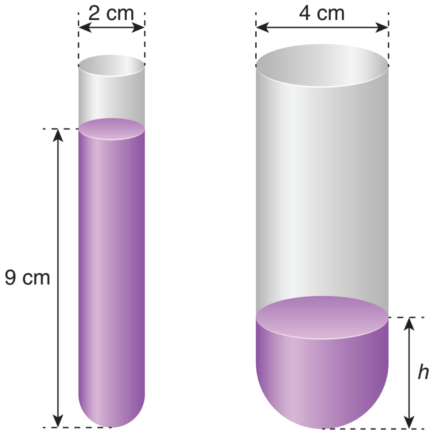
hemisfério

ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

33. Uma fundição transformou uma esfera maciça de ferro em oito esferas maciças com 5 cm de raio. Qual é a medida do raio da esfera original? **33.** 10 cm

34. A área da superfície de uma bola de basquetebol é 576π cm^2 e o perímetro interno do aro da cesta é 45π cm. Quanto por cento o diâmetro interno do aro é maior que o diâmetro da bola? **34.** 87,5% maior

35. As figuras a seguir representam dois tubos de ensaio de corpo cilíndrico e fundo semiesférico. Cada um contém 26 g de um mesmo tipo de líquido, ambos à mesma temperatura. As medidas indicadas referem-se aos diâmetros internos das bocas dos tubos e às alturas internas atingidas pelos líquidos.



ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

a. Lembrando que a densidade d de uma amostra de matéria (corpo) é a razão entre sua massa m e seu volume v, nessa ordem, $\left(d = \frac{m}{v}\right)$, calcule a densidade, em grama por centímetro cúbico, do líquido contido nesses tubos. **35. a.** $\frac{3}{\pi}$ g/cm^3

b. Calcule a altura h, em centímetro.

36. Elabore um problema sobre a esfera que envolva uma situação do cotidiano. Em seguida, troque o problema elaborado com um colega para que um resolva o problema elaborado pelo outro. Por fim, analisem e discutam as resoluções. **36.** Resposta pessoal.

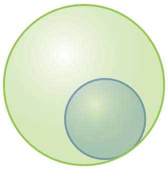
Para retomar os conteúdos estudados, resolva os exercícios complementares 7 a 9.

35. b. $\frac{17}{6}$ cm ou 2,83 cm, aproximadamente.

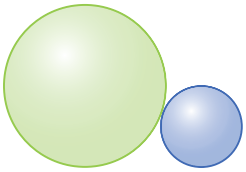
ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

Esferas tangentes

Duas esferas são **tangentes** se, e somente se, suas superfícies têm um único ponto comum.



esferas tangentes
interiormente



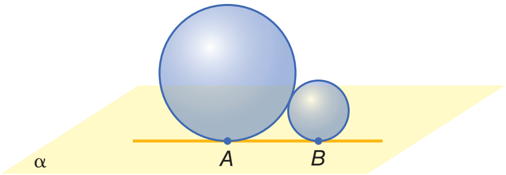
esferas tangentes
exteriormente

Propriedade

Se duas esferas de centros O e O' são tangentes em um ponto T, então os pontos O, O' e T são colineares.

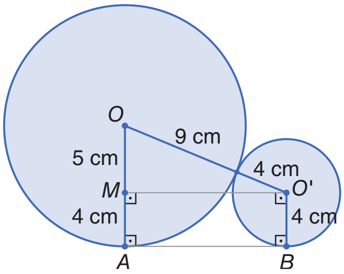
EXERCÍCIO RESOLVIDO

6. Duas esferas tangentes exteriormente e tangentes a um plano α nos pontos A e B têm raios de medidas 9 cm e 4 cm. Calcule a distância entre A e B.



Resolução

Considere um plano que passa pelos centros das esferas e pelos pontos A e B. Um esquema da secção obtida pela intersecção desse plano com as esferas é mostrado na figura a seguir.



No triângulo $OO'M$, temos:

$$(MO')^2 + 5^2 = 13^2 \Rightarrow (MO')^2 + 25 = 169$$

$$\therefore (MO')^2 = 144 \Rightarrow MO' = \sqrt{144}$$

$$\therefore MO' = 12$$

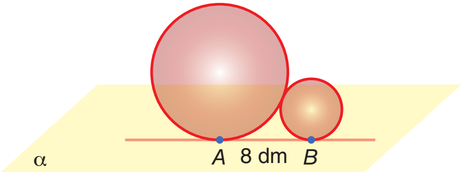
Como $MO' = AB$, concluímos que $AB = 12$ cm.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

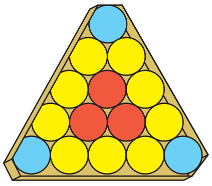
Faça os exercícios no caderno.

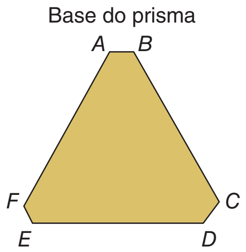
37. Duas esferas são tangentes entre si exteriormente. O raio da esfera maior é o quádruplo do raio da menor. Ambas tangenciam um plano α nos pontos A e B, com $AB = 8$ dm. Calcule as medidas dos raios dessas esferas.

37. 2 dm e 8 dm



38. Quinze bolas com o mesmo raio de 3 cm estão acondicionadas em uma caixa com formato de um prisma reto de base hexagonal $ABCDEF$, conforme figuras.





ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

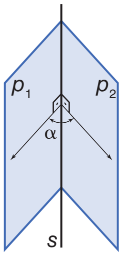
Cada bola amarela tangencia uma face lateral do prisma, cada bola azul tangencia três faces laterais do prisma e cada bola vermelha tangencia seis bolas. Calcule a distância entre as arestas $\overline{AB}$ e $\overline{ED}$ da base do prisma. **38.** $6(2\sqrt{3} + 1)$ cm

Para retomar os conteúdos estudados, resolva o exercício complementar 10.

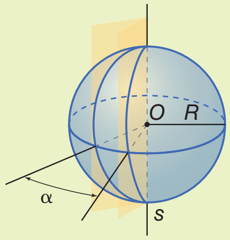
Fuso esférico e cunha esférica

Para poder definir fuso esférico e cunha esférica, é necessário o conceito de **ângulo diedro**.

Dois semiplanos, p_1 e p_2, de mesma origem *s* separam o espaço em duas partes. A reunião desses semiplanos com cada uma dessas partes é chamada de **ângulo diedro** de faces p_1 e p_2 e aresta *s*. A medida α do ângulo entre as faces é a medida do ângulo diedro.



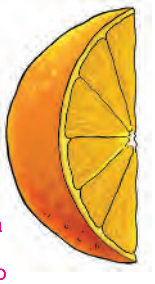
Considere um ângulo diedro de medida α, cuja aresta *s* passa pelo centro *O* de uma esfera de raio *R*:



- A parte da esfera contida nesse diedro é chamada de **cunha esférica** de raio *R* e ângulo diedro de medida α.
- A parte da superfície esférica contida nesse diedro é chamada de **fuso esférico** de raio *R* e ângulo diedro de medida α.

ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

Para compreender melhor uma cunha e um fuso esférico, vamos imaginar dois cortes em uma laranja passando pelo centro da fruta. O pedaço limitado por esses cortes lembra uma cunha esférica, e a casca contida nesse pedaço dá a ideia de fuso esférico.

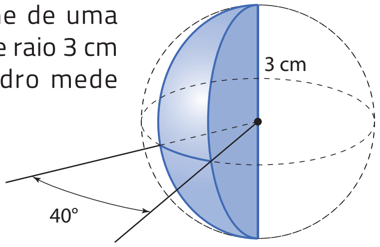


GEORGE TUTUMI/ARQUIVO DA EDITORA

Proponha aos estudantes que obtenham no caderno as respostas para os **exercícios resolvidos 7** e **8** e, depois, comparem a estratégia de resolução utilizada com a apresentada no Livro do Estudante corrigindo e comentando eventuais erros.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

7. Calcule o volume de uma cunha esférica de raio 3 cm cujo ângulo diedro mede 40°.



Resolução

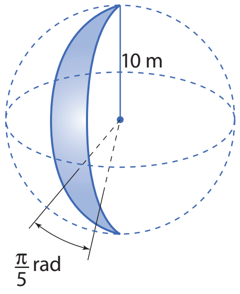
A razão entre o volume de uma esfera e a medida do ângulo diedro de uma volta completa (360° ou 2π rad) é igual à razão entre o volume de uma cunha qualquer dessa esfera e a medida de seu ângulo diedro. Assim, o volume *V* da cunha em questão pode ser calculado pela regra de três:

Ângulo (grau)	Volume (cm^3)
360	$\frac{4\pi \cdot 3^3}{3}$
40	V

Então, concluímos que:

$$V = \frac{40 \cdot 36\pi}{360}\ \text{cm}^3 = 4\pi\ \text{cm}^3$$

8. Calcule a área de um fuso esférico com 10 m de raio cujo ângulo diedro mede $\frac{\pi}{5}$ rad.



Resolução

A razão entre a área da superfície de uma esfera e a medida do ângulo diedro de uma volta completa (360° ou 2π rad) é igual à razão entre a área de um fuso qualquer dessa superfície e a medida de seu ângulo diedro. Assim, a área *A* do fuso esférico em questão pode ser calculada pela regra de três:

Ângulo (rad)	Área (m^2)
2π	$4\pi \cdot 10^2$
$\frac{\pi}{5}$	A

Portanto:

$$A = \left(\frac{\frac{\pi}{5} \cdot 400\pi}{2\pi}\right)\ \text{m}^2 = 40\pi\ \text{m}^2$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Faça os exercícios no caderno.

39. Calcule o volume de uma cunha esférica com 1 m de raio cujo ângulo diedro mede 20°. **39.** $\frac{2\pi}{27}$ m^3

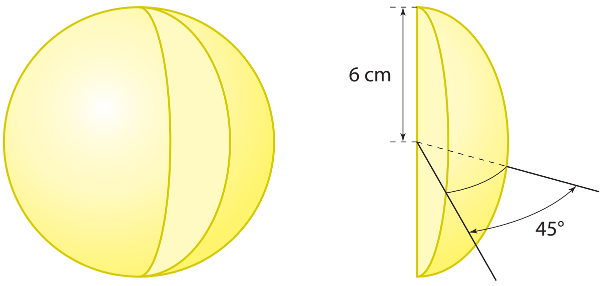
40. Calcule o volume de uma cunha esférica com 2 m de raio cujo ângulo diedro mede $\frac{3\pi}{8}$ rad. **40.** 2π cm^3

41. Uma cunha esférica tem volume 6π cm^3 e ângulo diedro de 60°. Calcule a medida, em centímetro, do raio dessa cunha esférica. **41.** 3 cm

42. Calcule a área de um fuso esférico com 5 m de raio cujo ângulo diedro mede 80°. **42.** $\frac{200\pi}{9}$ m^2

43. Uma esfera tem volume igual a 36π dm^3. Sobre a superfície dessa esfera desenha-se um fuso com 3π dm^2 de área. Calcule a medida do ângulo diedro desse fuso. **43.** 30°

44. Um comerciante vende queijos esféricos com 6 cm de raio em pedaços com o formato de cunha esférica com 45° de ângulo diedro. Junte-se a um colega e resolvam os itens a seguir.



ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

a. Calculem o volume de cada um desses pedaços. **44. a.** 36π cm^3

b. O queijo, ainda no formato esférico, apresenta uma película cobrindo sua superfície, que serve para protegê-lo contra contaminações. Qual é a área dessa película em cada um desses pedaços? **44. b.** 18π cm^2

c. Cada um desses pedaços é embalado a vácuo em embalagem plástica com área 10% maior que a área do pedaço. Qual é a área necessária de plástico para cada embalagem? **44. c.** $59{,}4\pi$ cm^2

Para retomar os conteúdos estudados, resolva o exercício complementar 11.

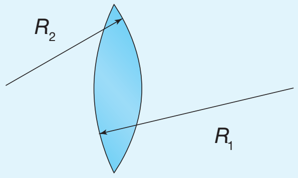
Essa seção **Mentes brilhantes** promove integração com a área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias ao mostrar um pouco da história da Ciência e a aplicação do desenvolvimento do estudo de lentes esféricas em instrumentos ópticos de grande impacto na sociedade, dos pontos de vista econômico e social. Além disso, destaca a aplicação do estudo em lentes de uso pessoal na correção de problemas de visão em seres humanos. O tema pode ser explorado em parceria com o professor de Física.
A seção também estimula a exposição ao conhecimento científico no que diz respeito à capacidade humana de investigar fenômenos naturais e produzir mecanismos de impacto na saúde e na vida cotidiana da sociedade.

Mentes brilhantes

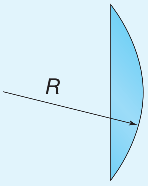
Lentes esféricas

Edmund Halley (1656-1742), astrônomo, matemático e físico inglês, é mais conhecido por ter sido o primeiro cientista a calcular a órbita de um cometa. Porém, há muitos outros trabalhos de destaque desse cientista. Um deles se refere ao estudo das lentes esféricas, esquematizadas a seguir.

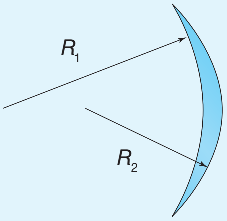
Biconvexa



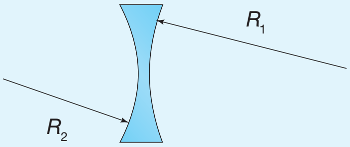
Plano-convexa



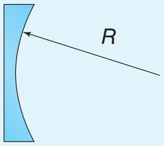
Côncavo-convexa



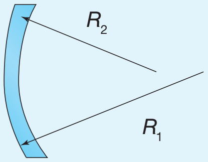
Bicôncava



Plano-côncava



Convexo-côncava



ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

Halley descobriu que a distância focal f de uma lente esférica pode ser calculada por meio das equações a seguir, em que n_2 é o índice de refração da lente e n_1 é o índice de refração do meio que a envolve.

$\frac{1}{f} = \left(\frac{n_2}{n_1} - 1\right)\ \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$, se as duas faces da lente forem esféricas de raios R_1 e R_2,

ou

$\frac{1}{f} = \left(\frac{n_2}{n_1} - 1\right) \cdot \frac{1}{R}$ se uma face da lente for plana e a outra esférica de raio R.

Nessas equações são adotadas as seguintes convenções de sinais: raio positivo para face convexa e raio negativo para face côncava.

Há inúmeras aplicações das lentes esféricas em instrumentos ópticos como telescópios, microscópios e câmaras fotográficas, mas, sem dúvida, sua aplicação mais presente no nosso dia a dia está na correção de problemas de visão como miopia, hipermetropia, astigmatismo e presbiopia.

Elaborado com base em: SOGA, D.; PAIVA JR., R. D.; MURAMATSU, M. Comprimento focal de lentes esféricas. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 39, n. 3, 2017. Disponível em: https://www.scielo.br/j/rbef/a/Q5ZNXhR58yYvKdbWqnCZF5P/. Acesso em: 6 ago. 2024.

TRABALHO E JUVENTUDES

Geógrafo

Com o boxe **Trabalho e juventudes**, incentive os estudantes a pesquisarem cursos gratuitos relacionados à profissão de Geógrafo, oferecidos na região onde moram ou na internet, por instituições certificadas pelo MEC. Desenvolva uma conversa com eles a fim de reconhecer a importância desse profissional em assuntos emergentes, como as mudanças climáticas.

O Geógrafo é o profissional que estuda a Terra, seus fenômenos e a relação entre a população humana e o meio ambiente mediante coleta, processamento e interpretação de informações relativas ao espaço geográfico e suas modificações.

Seu campo de atuação é bastante amplo envolvendo análises de aspectos sociais, econômicos e políticos de determinada região; desenvolvimento de mapas, gráficos e cartogramas; magistério; pesquisa científica; incrementação de projetos de planejamento urbano (cidades) e rural (formas sustentáveis para o desenvolvimento de uma agricultura proveitosa e estável); consultoria ambiental; estudo do relevo, clima, vegetação etc.

A Matemática está na vida profissional do Geógrafo sob forma de escalas para a elaboração de mapas; nos gráficos de crescimento populacional e nos cálculos de taxa de natalidade e densidade demográfica (crescimento vegetativo); nos dados sobre temperatura e índices pluviométricos está presente a estatística com suas médias, desvios e tendências; há ainda aspectos quantitativos, coordenadas geográficas etc.

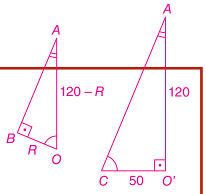
Quer saber mais sobre a profissão de Geógrafo? Faça uma pesquisa na internet e compartilhe com os colegas um resumo das informações que você obteve.

Trabalho e juventudes: Pesquisa pessoal.

KLAUS-DIETMAR GABBERT/PICTURE ALLIANCE/GETTY IMAGES

Geógrafa prestando serviço de consultoria ambiental. Nesse tipo de serviço, o profissional realiza análises detalhadas dos impactos ambientais e sociais que projetos, empresas ou eventos podem causar. O trabalho envolve identificar, avaliar e propor medidas de mitigação para reduzir danos ao meio ambiente e garantir a sustentabilidade das atividades desenvolvidas.

Na resolução foi cometido um erro na montagem da proporção entre os lados correspondentes dos triângulos semelhantes. Para evitar esse tipo de erro, é conveniente separar os triângulos semelhantes e assinalar os ângulos correspondentes congruentes:



ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

ANÁLISE DA RESOLUÇÃO

Pelo teorema de Pitágoras, calculamos *AC*:
$(AC)^2 = 50^2 + 120^2 \Rightarrow AC = 130$
Pela semelhança entre os triângulos *AOB* e *ACO'*, calculamos a medida *R*:

$$\frac{AC}{AO} = \frac{CO'}{OB} \Rightarrow \frac{130}{120-R} = \frac{50}{R}$$

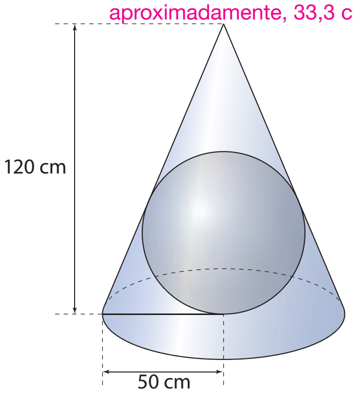
$$\therefore 130R = 6.000 - 50R \Rightarrow 180R = 6.000$$

$$\therefore R = \frac{100}{3}$$

Reúna-se com um colega. Apontem o erro cometido na resolução a seguir e, depois, refaçam a resolução no caderno, corrigindo-a.

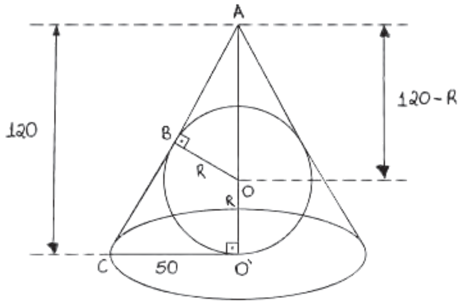
Exercício

Uma esfera tangencia a base e todas as geratrizes de um cone circular reto, conforme mostra a figura. Dado que a altura e o raio da base do cone medem 120 cm e 50 cm, respectivamente, calculem a medida do raio da esfera. Logo, o raio da esfera mede $\frac{100}{3}$ cm ou, aproximadamente, 33,3 cm.



Resolução

Indicando por O e R o centro e a medida, em centímetro, do raio da esfera, respectivamente, e por O' o centro da base do cone, esquematizamos:



ELISA NIEVAS/ARQUIVO DA EDITORA

Pela semelhança dos triângulos AOB e AO'C, calculamos a medida R:

$$\frac{120}{120-R} = \frac{50}{R} \Rightarrow 120R = 6.000 - 50R$$

$$\therefore 170R = 6.000 \Rightarrow R = \frac{600}{17}$$

Logo, o raio da esfera mede $\frac{600}{17}$ cm.

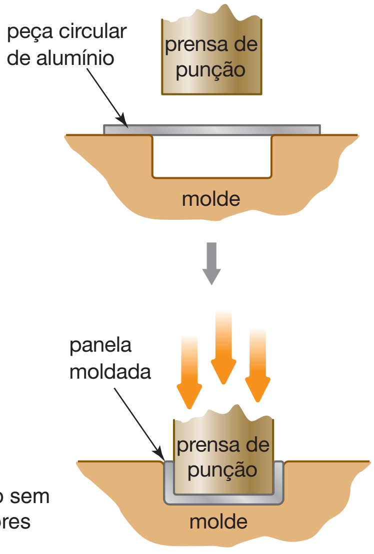
Alguns dos **exercícios complementares** podem ser utilizados como instrumentos de avaliação. Proponha aos estudantes que os resolvam em grupos e compartilhem as estratégias e as respostas com os colegas, corrigindo-as quando necessário.

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

Faça os exercícios no caderno.

1. Um dos processos de fabricação de panelas, bacias, formas e canecas de alumínio é o repuxo ou embutimento, no qual uma chapa plana de alumínio é moldada sob a forma de um recipiente. As ferramentas que executam esse trabalho são basicamente uma prensa de punção e um molde. Na figura a seguir, vemos o esquema de uma ferramenta de repuxo simples, utilizada para a fabricação de panelas cilíndricas.

Supondo que, na figura, a chapa circular de alumínio tenha 28 cm de raio e a profundidade da panela moldada seja de 12 cm, calcule a capacidade da panela em litro.
1. 9,6 L

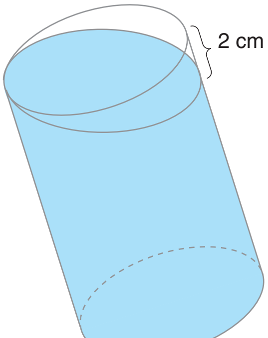


(Modelo didático sem escala e com cores fantasia.)

ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

2. Um copo cilíndrico reto, cujo diâmetro interno mede 6 cm e cuja altura interna mede 10 cm, contém certo volume de água. Inclinando o máximo possível esse copo, sem derramar a água, obtemos a medida indicada na figura.

Qual é o volume da água contida no copo? **2.** 81π cm^3



FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

3. Faltam dados para a resolução do problema.

3. A área de uma secção meridiana de um cilindro circular reto é 36 cm^2, e a área lateral do cilindro é 36π cm^2. Calcule a medida da altura desse cilindro.

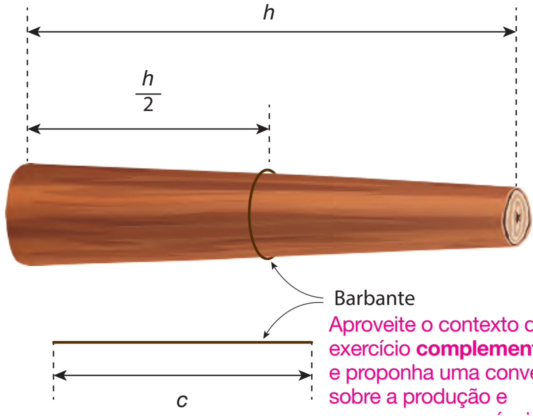
4. (Enem) Ao se perfurar um poço no chão, na forma de um cilindro circular reto, toda a terra retirada é amontoada na forma de um cone circular reto, cujo raio da base é o triplo do raio da base do poço e a altura é 2,4 metros. Sabe-se que o volume desse cone de terra é 20% maior do que o volume do poço cilíndrico, pois a terra fica mais fofa após ser escavada. Qual é a profundidade, em metro, desse poço? **4.** alternativa **b**

a. 1,44
b. 6,00
c. 7,20
d. 8,64
e. 36,00

Oriente os estudantes a consultar as páginas 6 e 7 para saber mais sobre este e os demais Objetivos de Desenvolvimento Sustentável.

5. De fato, é verdade o que os noticiários confiáveis divulgam sobre o desmatamento descontrolado da Amazônia. Porém, nem todas as madeireiras são ilegais na Amazônia, por exemplo, a madeira pode ser extraída por empresas com Plano de Manejo Florestal Sustentável, que garantem a conservação das florestas e a continuidade da disponibilidade de matéria-prima para as próximas gerações. É sobre essas empresas que trataremos a seguir. Para a comercialização de toras de madeira bruta pela indústria de móveis ou da construção civil é necessário calcular o volume de madeira aproveitável, pois parte da madeira bruta será perdida na transformação das toras em tábuas. Para esse cálculo, os madeireiros usam métodos práticos, como o descrito. Se as toras tiverem o formato de um tronco de cone circular reto, inicialmente são medidos, em uma mesma unidade de medida, a altura (h) da tora e o comprimento (c) de um barbante sobreposto à circunferência da secção transversal que divide a altura da tora ao meio. Depois, multiplica-se o quadrado da quarta parte do comprimento do barbante pela altura da tora. O resultado é o volume aproximado da parte aproveitável da tora.

ODS 12



ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

Aproveite o contexto do **exercício complementar 5** e proponha uma conversa sobre a produção e consumo responsáveis, abordando o **ODS 12**.

De acordo com essas informações, faça o que se pede a seguir.

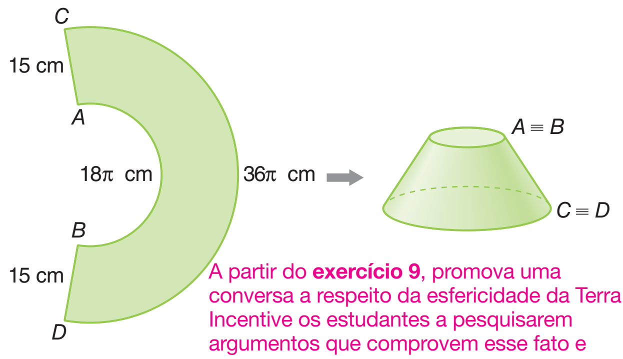
a. Determine uma fórmula que calcula o volume V_A de madeira aproveitável da tora da ilustração, em função de h e c, de acordo com o método prático dos madeireiros. **5. a.** $V_A = \left(\frac{c}{4}\right)^2 \cdot h$

b. Calcule o volume V_A de madeira aproveitável de uma tora bruta com o formato de um tronco de cone circular reto com 4,8 m de altura tal que o comprimento da circunferência da seção transversal que divide ao meio a altura do tronco meça 100 cm. **5. b.** 0,3 m^3

c. Na tora de madeira da ilustração, cujo formato é o de um tronco de cone circular reto, suponha que $h = 3{,}2$ m e que as bases do tronco tenham raios medindo 0,36 m e 0,12 m. Calcule o volume V_T desse tronco de cone e o volume V_A de madeira aproveitável dessa tora, segundo o método enunciado. O volume V_A representa que percentual de V_T?

5. c. $V_T = 0{,}19968\pi$ m^3; $c = 0{,}48\pi$; $V_A = 0{,}04608\pi^2$ m^3; $\approx 72{,}46\%$

6. Para a fabricação de um modelo de copa de abajur, é utilizada uma peça de tecido limitada por dois arcos circulares concêntricos, $\overset{\frown}{AB}$ e $\overset{\frown}{CD}$, de comprimentos 18π cm e 36π cm, respectivamente, e por dois segmentos de reta, $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$, com 15 cm de comprimento cada um e contidos em retas que passam pelo centro dos arcos. Essa peça de tecido é moldada no formato da superfície lateral de um tronco de cone, fazendo coincidir A com B e C com D, conforme mostra a figura.



ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

A partir do **exercício 9**, promova uma conversa a respeito da esfericidade da Terra. Incentive os estudantes a pesquisarem argumentos que comprovem esse fato e como refutar *fake news* acerca desse tema.

a. Calcule as medidas dos raios das bases do tronco de cone. **6. a.** 9 cm e 18 cm

b. Calcule a altura do tronco de cone. **6. b.** 12 cm

c. Calcule a área de tecido usado na confecção dessa copa. **6. c.** 405π cm^2

7. A densidade média do planeta Terra é estimada em 5,5 g/cm^3 e seu raio, em 6.370 km. Com base nesses valores, calcule a massa, em quilograma, do planeta. **7.** $\approx 5{,}94 \cdot 10^{24}$ kg

8. Suponha que uma bola maciça de determinado material tenha 12 cm de raio à temperatura ambiente e que aumentando-se a temperatura continuamente por 61 minutos, o volume da bola aumente na razão de 36π cm^3 por minuto. Sob essas condições, calcule:

a. a medida do raio da bola, em centímetro, ao final dos 61 minutos de aquecimento.

8. a. O raio da bola, ao final do aquecimento, media 15 cm.

b. a taxa média de variação da área da superfície da bola, em cm^2/min, desde o instante inicial até o instante final do aquecimento.

9. Embora na Idade Média (século V ao XIV) muitos acreditassem que o planeta Terra fosse plano como o tampo de uma mesa, terminando em abismos sem fim, os sábios da Grécia antiga (século XX a.C. a I a.C.) já tinham consciência da esfericidade do planeta. Vários estudiosos gregos, como Aristóteles, Arquimedes e Eratóstenes, avaliaram o perímetro de uma circunferência máxima da Terra e, consequentemente, a medida de seu raio.

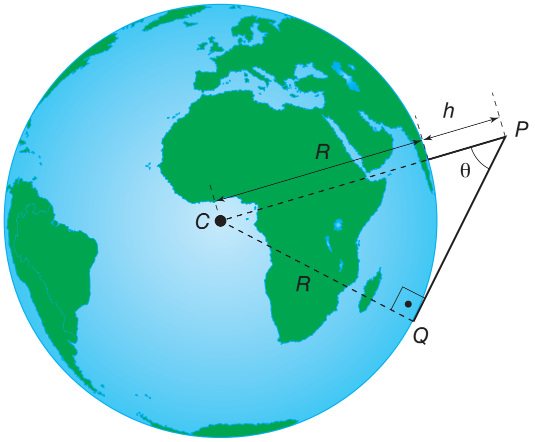
Observação

Atualmente ainda há quem acredite que a Terra é plana. Fique atento, pois trata-se de uma *fake news*. Nesses casos, é importante sempre buscarmos informações em fontes confiáveis e em estudos científicos.

8. b. A taxa média de variação da área da superfície da bola foi de 5,31 cm^2/min, aproximadamente.

Com os **exercícios complementares 12** e **13**, retome a conversa sobre o **ODS 12**. A implementação eficaz do manejo florestal sustentável pode reduzir significativamente as taxas de desmatamento ilegal. Além disso, o manejo sustentável contribui para a conservação da biodiversidade e para a mitigação das mudanças climáticas ao manter os estoques de carbono nas florestas.

Também data da Antiguidade grega o método descrito a seguir para o cálculo da medida do raio da Terra, mas não se sabe quem foi seu idealizador. De um ponto P, localizado próximo a uma praia à altura h em relação ao nível do mar, mira-se um ponto Q da linha do horizonte marítimo, obtendo-se a medida θ do ângulo agudo que a reta $\overleftrightarrow{PQ}$ forma com a vertical. Assim, supondo-se que a Terra seja uma esfera de centro C e raio R, e lembrando que a reta tangente a uma esfera é perpendicular ao raio no ponto de contato, tem-se o esquema a seguir.



(Modelo didático sem escala e com cores fantasia.)

a. Determine a medida R do raio da Terra em função de h e θ. **9. a.** $R = \frac{h \text{ sen } \theta}{1 - \text{sen } \theta}$

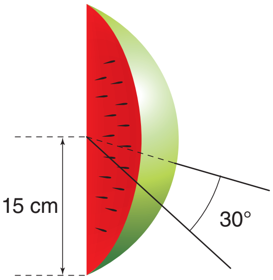
b. Calcule a medida do raio da Terra, aplicando o método descrito no texto. **9. b.** Resposta pessoal.

c. Qual é o percentual de erro cometido na medida que você obteve no item **b**, quando comparada com a medida adotada como raio médio da Terra, que é de 6.371 km? **9. c.** Resposta pessoal.

10. Cinco bolas com o mesmo diâmetro de 20 cm foram empilhadas sobre um plano horizontal α da seguinte maneira: as quatro primeiras tangenciam o plano, e seus centros são vértices de um quadrado com 20 cm de lado; a quinta bola tangencia cada uma das quatro primeiras, conforme mostra a figura. Calcule a altura dessa pilha de bolas, em relação ao plano α.

10. $10(\sqrt{2} + 2)$ cm

11. De uma melancia com o formato de uma esfera com 15 cm de raio retirou-se um pedaço com o formato de cunha esférica com ângulo diedro de 30°.



a. Calcule o volume desse pedaço. **11. a.** 375π cm^3

b. Calcule a área do fuso esférico referente a esse pedaço. **11. b.** 75π cm^2

c. Calcule a área total desse pedaço.
11. c. 300π cm^2

12. O termo "sustentabilidade" tem vários significados, a depender do contexto. Em seu sentido literal, ele vem do latim '*sustentare*', do qual derivam os significados de sustentar, suportar, conservar em bom estado, manter e resistir. Vamos abordar o conceito de sustentabilidade no contexto da preservação dos recursos naturais que exploramos do planeta Terra para a nossa sobrevivência e bem-estar. Ele parte do princípio de que os recursos naturais são finitos. Assim, sustentabilidade é a capacidade de explorar os recursos naturais, sem esgotá-los, garantindo as necessidades das próximas gerações.

12. a. Resposta pessoal.

a. Além da madeira, existem muitos outros recursos naturais que exigem ações em favor da sustentabilidade. Cite pelo menos quatro desses recursos.

ODS 12

b. Os ambientalistas resumem três pilares da sustentabilidade: social, ambiental e econômico. Esses pilares formam o chamado "Tripé da sustentabilidade". Pesquise sobre esse tripé e faça um breve texto sobre cada um de seus pilares.

12. b. Resposta pessoal.

c. Escolha um recurso natural e construa um gráfico que possa ser usado em uma campanha em prol da sustentabilidade. Compartilhe esse gráfico com os colegas. **12. c.** Resposta pessoal.

13. Apesar das leis existirem e estarem constantemente em atualizações, como a que contempla o Plano de Manejo Florestal Sustentável, citado anteriormente, a Floresta Amazônica continua enfrentando, além de incêndios, altas taxas de desmatamento para a comercialização ilegal de madeira.

Organizem-se em grupos, façam pesquisas e proponham diferentes pontos de vista a respeito do crescimento do desmatamento. Para isso, respeitem a diversidade de percepções e posicionamentos e determinem funções para cada integrante. Ao final, elaborem um relatório e apresentem para a turma e para o professor.

ODS 12

13. Resposta pessoal.

Matemática sem fronteiras: Este momento propicia o trabalho com a área de Ciências da Natureza e suas tecnologias. Nas **Orientações Específicas** deste capítulo há mais orientações.

MATEMÁTICA SEM FRONTEIRAS

Projeções cartográficas

OBJETO DIGITAL **Vídeo:** Algumas evidências da esferecidade da Terra

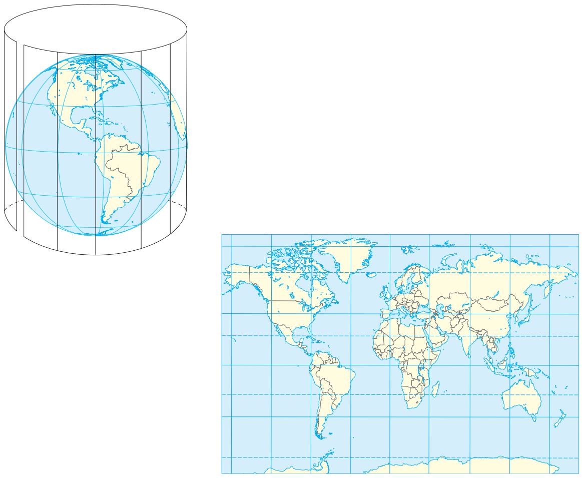
Projeção cartográfica é uma representação da superfície terrestre, ou de parte dela, em um plano. Com base nessa projeção, constroem-se mapas planos utilizando coordenadas geográficas. Como o planeta Terra é, aproximadamente, esférico, todo mapa plano apresenta deformações no formato e/ou nos ângulos, em relação à respectiva região mapeada da Terra.

O desenho de um mapa supõe a Terra perfeitamente esférica e baseia-se em algumas técnicas de projeção, das quais destacaremos as três principais.

Projeção cilíndrica

Na confecção de um mapa que represente a superfície terrestre, podemos utilizar a projeção cilíndrica, em que se supõe uma folha cilíndrica envolvendo a Terra e tangente a ela na Linha do Equador, conforme mostra a figura 1. A projeção de cada ponto *P* da superfície terrestre sobre a folha cilíndrica é a intersecção *P'* dessa folha com a reta *r* que passa por *P* e é perpendicular ao eixo de simetria do cilindro. A seguir a folha é desenrolada e estendida em uma forma plana retangular. Assim, observa-se que: as projeções dos meridianos no plano são representadas por linhas retas paralelas interceptadas perpendicularmente por linhas retas que representam as projeções dos paralelos; logo, os ângulos são preservados; toda região próxima à Linha do Equador é representada no mapa com maior fidelidade da forma da respectiva região da Terra; quanto mais distante da Linha do Equador, maior a deformação sofrida no mapa em relação à respectiva região na Terra.

Figura 1: Projeção cilíndrica

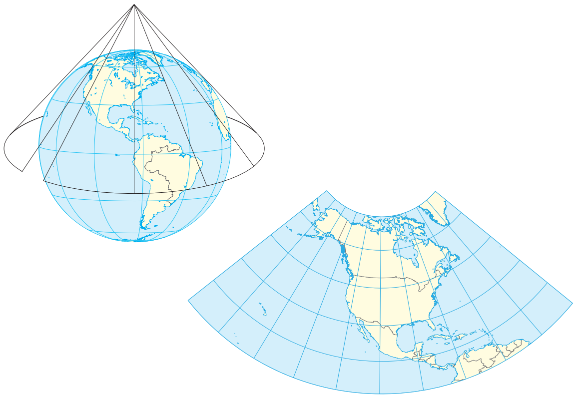


ANDERSON DE ANDRADE PIMENTEL/ARQUIVO DA EDITORA

Projeção cônica

Na projeção cônica, considera-se uma superfície cônica tangente à Terra em um paralelo terrestre, conforme mostra a figura 2. A projeção de cada ponto *Q* da superfície terrestre sobre a folha cônica é a intersecção *Q'* dessa folha com a reta *s* que passa por *Q* e é perpendicular ao eixo de simetria do cone. A seguir a folha é desenrolada e estendida em um plano. Assim, observa-se que: a projeção de cada meridiano sobre a folha cônica é a intersecção dessa folha com o plano β que contém o meridiano. Assim, observa-se que: as projeções dos meridianos no plano são representadas por linhas retas distintas que convergem para um mesmo ponto, que não é representado na projeção; e as projeções dos paralelos são arcos de circunferências concêntricas; toda região próxima do paralelo comum às superfícies, terrestre e cônica, são representadas no mapa com maior fidelidade da forma da respectiva região da Terra; quanto mais distante do paralelo comum às superfícies, terrestre e cônica, estiver uma região maior será a deformação sofrida na projeção em relação à respectiva região na Terra.

Figura 2: Projeção cônica

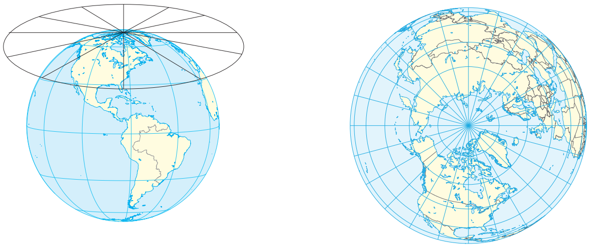


ANDERSON DE ANDRADE PIMENTEL/ARQUIVO DA EDITORA

Projeção azimutal (ou plana)

Esse tipo de projeção considera um plano tangente à superfície terrestre, sobre o qual se projeta, ortogonalmente, a região que deseja representar no mapa, conforme mostra a figura 3, em que o ponto de tangência na esfera terrestre é o polo norte, porém o ponto de tangência pode ser qualquer outro da superfície terrestre. O ponto de tangência é chamado de centro da projeção azimutal. Observe que: as projeções dos meridianos no plano são representadas por linhas retas distintas que convergem para o centro da projeção azimutal; e as projeções dos paralelos são circunferências concêntricas; quanto mais próxima uma região estiver do ponto de tangência, menor será a deformação sofrida na projeção, em relação à região representada; quanto mais distante uma região terrestre estiver do ponto de tangência, maior será a deformação na projeção, em relação à região representada.

Figura 3: Projeção azimutal



ANDERSON DE ANDRADE PIMENTEL/ARQUIVO DA EDITORA

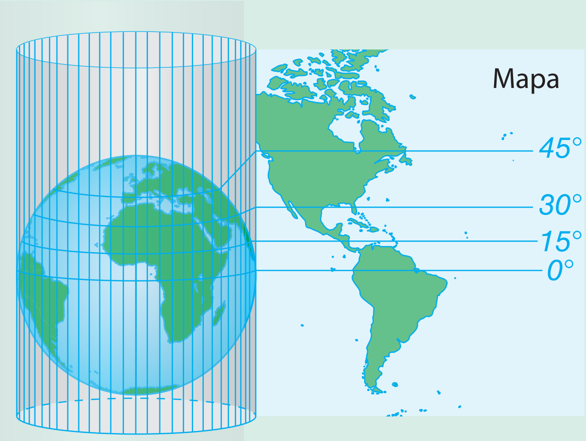
Nota: As projeções apresentadas são as mais comumente usadas, mas é importante salientar que há muitos tipos de projeção cartográfica. Por exemplo, na projeção cilíndrica, podemos supor que a superfície cilíndrica tangencie a esfera terrestre em qualquer circunferência máxima do planeta, não necessariamente na Linha do Equador, ou podemos supor a superfície cilíndrica secante ao globo terrestre; na projeção cônica, também podemos supor a superfície cônica secante à superfície terrestre, em vez de tangente. A escolha do tipo de projeção depende da propriedade que se deseja destacar no mapa.

2. Nesse tipo de projeção, toda região próxima do paralelo comum às superfícies, terrestre e cônica, são representadas no mapa com maior fidelidade da forma da respectiva região da Terra. Logo, a região *B* sofre a menor deformação, pois, entre as três, *A*, *B* e *C*, é a mais próxima do paralelo 40°, que é a circunferência comum à superfície terrestre e à folha cônica.

Atividades

Faça as atividades no caderno.

1. Na confecção do mapa foi utilizado um tipo de projeção cilíndrica, em que se supõe uma folha cilíndrica envolvendo a Terra e tangente a ela na Linha do Equador. A projeção de um ponto *P* da superfície terrestre sobre a folha cilíndrica é a intersecção *P*′ dessa folha com a semirreta $\overrightarrow{OP}$, em que *O* é o centro do nosso planeta. Se, nesse mapa, a distância entre as linhas que representam os paralelos 0° e 45° N é 12 cm, qual é a distância entre as linhas que representam os paralelos 0° e 30° N? **1.** $4\sqrt{3}$ cm



ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

2. Considere que uma folha cônica tangencie a superfície terrestre no paralelo 40° N. Agora, imagine a projeção do hemisfério norte da superfície terrestre sobre a folha cônica, conforme a descrição da projeção cônica no texto. Se três regiões, *A*, *B* e *C*, da superfície terrestre são tais que: *A* está entre os paralelos 0° e 30° N; *B* está entre os paralelos 30° N e 50° N; e *C* está entre os paralelos 50° N e 70° N, qual das projeções sofre a menor deformação em relação à respectiva região da superfície da Terra?

3. Vamos adotar outra forma de projeção azimutal, diferente daquela descrita no texto. Supondo a Terra perfeitamente esférica, de centro *C*, seja α um plano tangente a ela no polo sul S. A projeção de qualquer ponto *A* da superfície do hemisfério Sul sobre o plano α é a intersecção *A*′ desse plano com a semirreta $\overrightarrow{CA}$. De acordo com essa forma de projeção responda aos itens seguintes.

a. Se a esfera usada como modelo da Terra nessa projeção tem 6 cm de raio, qual é o comprimento da linha que representa o paralelo 30° S no plano α? **3. a.** aproximadamente 65 cm

b. As propriedades apresentadas para a projeção azimutal continuam valendo para essa nova forma de projeção? **3. b.** sim

4. Cada projeção cartográfica é classificada segundo a preservação (ou não) de ângulos, distâncias, formatos e áreas. Basicamente, existem três tipos de projeção cartográfica: conforme, equivalente ou afilática. Reúna-se com um colega e, pesquisem sobre esses três tipos, com destaque para as projeções cilíndricas de Mercator e de Peters. Depois, elaborem um texto sobre o que aprenderam. Por fim, compartilhem os textos com os colegas.

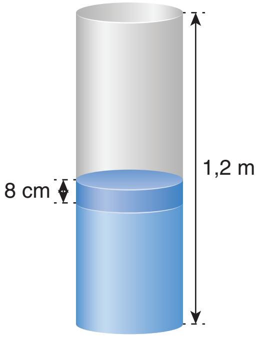
4. Resposta pessoal.

VERIFIQUE O QUE APRENDEU NO CAPÍTULO 10

Para aperfeiçoar os estudos, você pode retomar os exercícios propostos no decorrer deste capítulo, rever suas resoluções ou utilizar os **Exercícios complementares** para estudar com os colegas. Você também pode utilizar as questões propostas a seguir para verificar sua aprendizagem.

1. Uma fábrica de alimentos embala um de seus produtos em latas com o formato de um cilindro circular reto de 10 cm de altura. O rótulo de cada lata é confeccionado em papel e cobre apenas e totalmente a superfície lateral do cilindro, sem haver sobreposição do papel. Se a área de um rótulo é 80π cm^2, qual é a área total da superfície dessa lata, em cm^2? **1.** 112π cm^2

2. (UFPE) Um reservatório de água tem a forma de um cilindro reto com 1,20 m de altura. Quando são colocados 350 litros de água no reservatório, o nível de água sobe 8 cm. Qual é a capacidade do reservatório? **2.** alternativa **d**



ILUSTRAÇÕES: ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

a. 5.000 litros

b. 5.100 litros

c. 5.150 litros

d. 5.250 litros

e. 5.300 litros

A seção **Verifique o que aprendeu no capítulo 10** fornece mais instrumentos de avaliação. Os estudantes podem resolver esses exercícios em uma folha avulsa e entregar para algum colega corrigir. Depois, destrocam e conferem a correção proposta pelo colega, comentando-a.

3. Em um cone circular reto com 6 dm de altura, a área lateral é o dobro da área da base. Calcule a medida da geratriz desse cone. **3.** $g = 4\sqrt{3}$ dm

4. alternativa **b**

4. Um cilindro circular reto de altura H e um cone equilátero têm a mesma medida R do raio da base. Dado que a área total do cone é igual a área lateral do cilindro, conclui-se que:

a. $H = \frac{2R}{3}$

b. $H = \frac{3R}{2}$

c. $H = \frac{R}{3}$

d. $H = 3R$

e. $H = \frac{4R}{3}$

5. Um plano secciona uma esfera de centro C a 3 cm de distância de C, determinando uma secção plana de área 27π cm^2. Calcule o volume V dessa esfera e a área A de sua superfície.

5. $V = 288\pi$ cm^3 e $A = 144$ cm^2

Ferramenta de estudo

O mapa conceitual é uma ferramenta que representa de forma gráfica as relações entre conceitos, ou entre palavras que usamos para representar conceitos. A seguir, apresentamos uma sugestão de elaboração de um mapa conceitual.

1. Retome os tópicos deste capítulo e faça um levantamento de informações relevantes para a elaboração do mapa. Por exemplo: conceitos, palavras-chave, situações-problema etc.

2. Escolha uma estrutura para o mapa e defina quais serão os recursos visuais que serão utilizados. Por exemplo: caixas, linhas, setas, cores, imagens, entre outros.

3. Organize a sequência das informações compondo ramificações que relacionem os conteúdos.

Agora, construa um mapa conceitual utilizando o que você aprendeu neste capítulo. Se teve dificuldades em construir o mapa conceitual ou não resolveu algum exercício, retome os conteúdos abordados no capítulo. Após algumas tentativas, anote as dúvidas e converse com um colega que possa ajudá-lo. Se mesmo assim a dúvida persistir, pergunte ao professor na aula seguinte. Gerencie bem seu tempo de estudo em casa e estabeleça metas diárias alcançáveis, planejando seus estudos passo a passo.

RESPOSTAS

CAPÍTULO 1

Além da teoria

(100 g; 50 g, 25 g; 12,5 g; 6,25 g)

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

2. **a.** (7, 9, 11, 13, ...)
  b. (2, 6, 12, 20, ...)
  c. $\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots\right)$
  d. (4, 9, 14, 19, ...)
  e. (3, 7, 4, −3, ...)

3. **a.** 110 **c.** 10
  b. 2 **d.** $2n$

4. **a.** 46 **b.** $4n + 2$ **c.** 9 mesas

5. alternativa **a**

6. mi

7. **a.** $\left(\frac{t+1}{2}, \frac{t+1}{4}, \frac{t+1}{8}, \frac{t+1}{16}\right)$
  b. 15 horas.

8. **c.** (0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181)

9. alternativa **d**

10. **a.** (148, 168, 188, 208, ..., 828)
  b. $a_n = 148 + (n - 1) \cdot 20$

12. **a.** 4.200 L
  b. 1.200 litros por hora

13. 431

14. $a_n = 6n - 4$

15. $a_1 = 39k - 38$

16. 25 termos

17. $\left(2, \frac{22}{7}, \frac{30}{7}, \frac{38}{7}, \frac{46}{7}, \frac{54}{7}, \frac{62}{7}, 10\right)$

18. *A*: 30, *B*: 33, *C*: 36 e *D*: 39

19. **a.** 2.352 **b.** 500

20. **a.** 1977 **b.** 2013 **c.** 2055

21. alternativa **c**

22. 234 conjuntos

23. 6

24. **a.** $x = 7$ **b.** $y = 2$
  c. Não, pois nessa sequência não é possível achar nenhum número real que satisfaça a propriedade P2 das progressões aritméticas.

25. 150 m

26. alternativa **a**

27. 100 km

28. 50°

29. 1.290

30. **a.** 2.842 **b.** 50.100

31. **a.** $5n - 3$ **b.** $\frac{5n^2 - n}{2}$

32. **a.** n^2 **b.** $n^2 - n$ **c.** $n^2 + n$

33. **a.** 20 de janeiro **b.** 55.000

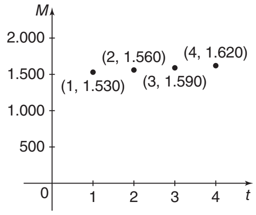
34. alternativa **a**

35. 560 poltronas

36. 16 fases

37. 15

39. **a.** 2%
  b. Sim, a razão da P.A. é 30.
  c. $M(t) = 1.500 + 30t$
  e.



40. **a.** É P.G. **c.** É P.G.
  b. Não é P.G. **d.** É P.G.

41. alternativa **c**

42. **a.** 1,02 **c.** ≈ 486.907
  b. 468.000

43. $\frac{3}{16}$

44. $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$

45. $\frac{5}{9}$

46. $\left(\frac{4}{9}, \frac{8}{27}, \frac{16}{81}, \frac{32}{243}, \dots\right)$

47. 16 termos

48. **a.** $\left(1, \sqrt[5]{3}, \sqrt[5]{9}, \sqrt[5]{27}, \sqrt[5]{81}, 3\right)$
  b. $S = 244$

49. $q = 3$

50. **a.** 4.096 **b.** 8^{n-1}

51. **a.** (300, 600, 1.200, 2.400, 4.800)
  b. 19.200 indivíduos
  c. $300 \cdot 2^{2k}$

52. **a.** 6.400 árvores **b.** 51 dias

54. $x = 0$ ou $x = -2$

55. $a = -6$, $b = -24$, $c = 48$ e $d = -96$

56. $a = 2$ e $c = 6$

57. 45 mil reais

58. **a.** 100 gramas **b.** 72,9 gramas

59. 3 cm, 6 cm e 12 cm

60. $R_{eq} = \frac{R}{7}$

61. **a.** 3.069 **c.** 0
  b. $\frac{2.047}{256}$ **d.** 5

62. 3

63. alternativa **c** **64.** $n = 12$

65. **a.** 1.048.576 **b.** 2.097.150

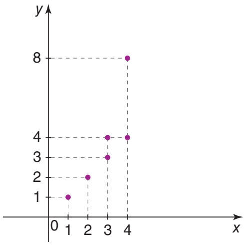
66. alternativa **e**

68. **a.** $\frac{125}{4}$ **c.** $\frac{20}{3}$
  b. $\frac{1}{3}$ **d.** $\frac{k^6}{k - 1}$

69. $S = \{100\}$ **70.** 32 cm²

71. 40 cm **72.** $\frac{44}{9}$

73. **a.** empréstimo A: (1, 2, 3, 4); empréstimo B: (1, 2, 4, 8)
  b.

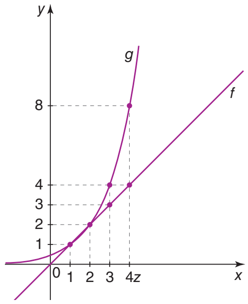


ILUSTRAÇÕES: ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

ILUSTRAÇÕES: ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

ILUSTRAÇÕES: ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

c.



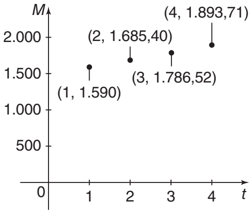
74. **a.** 20 km

75. **a.** 6%

b. Sim, a razão da P.G. é 1,06.

c. $M(t) = 1.500 \cdot (1{,}06)^t$

e.



EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

1. **a.** 225 azulejos brancos

c. 84 azulejos cinza

b. n^2 azulejos

d. $(4n + 4)$ azulejos

2. **a.** $\left(2, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{13}{8}, \frac{21}{13}\right)$

b. $\left(12, \frac{13}{12}, \frac{25}{13}, \frac{38}{25}, \frac{63}{38}, \frac{101}{63}\right)$

c. $\left(1, 2, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{13}{8}\right)$

3. **a.** (16, 4, 2, 16, 4, 2, 16, 4, 2, 16)

b. 4

4. **a.** (3.204, 6.104, 9.004, ..., 38.004)

b. 195 minutos

5. **a.** 36 minutos **b.** 19 h 27 min **c.** 16 h 27 min

6. **a.** $x = -1$

7. 13,5 dm^2

8. **a.** 730 atendimentos

b. 9.280 atendimentos

c. $10n^2 + 420n$ atendimentos

9. alternativa **d**

10. alternativa **d**

12. alternativa **b**

13. ≈ 24 pessoas

14. ≈ 60 s

Matemática sem fronteiras

1. Os resultados com mais de uma casa decimal foram aproximados para uma casa decimal.

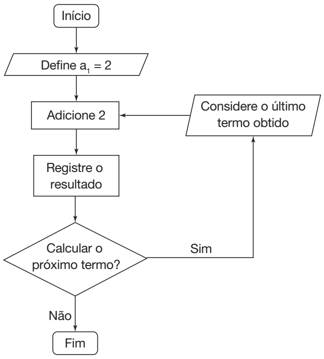
Cargo: Gerência		Matriz para a conversão de graus em pontos					
		Total mínimo de pontos = 100			Total máximo de pontos = 500		
Fator de avaliação	Ponderação (peso)	I	II	III	IV	V	VI
Escolaridade	19	19	38	57	76	95	—
Conhecimento específico	13	13	30,3	47,6	65	—	—
Responsabilidade pelo patrimônio	13	13	23,4	33,8	44,2	54,6	65
Experiência	18	18	54	90	—	—	—
Responsabilidade por contatos	14	14	28	42	56	70	—
Responsabilidade por supervisão	11	11	22	33	44	55	—
Complexidade	12	12	24	36	48	60	—

2. Os resultados com mais de uma casa decimal foram aproximados para uma casa decimal.

Cargo: Gerência		Matriz para a conversão de graus em pontos					
		Total mínimo de pontos = 100			Total máximo de pontos = 500		
Fator de avaliação	Ponderação (peso)	I	II	III	IV	V	VI
Escolaridade	19	19	28,4	42,5	63,5	95	—
Conhecimento específico	13	13	22,2	38,0	65	—	—
Responsabilidade pelo patrimônio	13	13	17,9	24,7	34,1	47,1	65
Experiência	18	18	40,2	90	—	—	—
Responsabilidade por contatos	14	14	20,9	31,3	46,8	70	—
Responsabilidade por supervisão	11	11	16,4	24,6	36,8	55	—
Complexidade	12	12	17,9	26,8	40,1	60	—

Conectado

Página 13:



ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

Verifique o que aprendeu no Capítulo 1

1. **a.** (48, 58, 68, ..., 2.848)

b. $a_n = 48 + (n - 1) \cdot 10$, com $n \in \mathbb{N}^*$ e $n \leqslant 281$

2. alternativa **a**

3. alternativa **c**

4. **a.** aproximadamente 10.222 t de lixo

b. aproximadamente 121.329 t de lixo

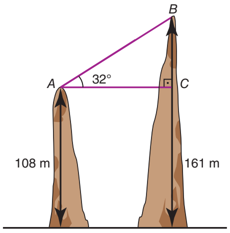
CAPÍTULO 2

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. **a.** 3,52 cm **b.** 2,35 cm **c.** 5,3 dm

2. 120 m

3. **a.**



FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

b. 100 m

4. 64,8 m

5. 48 m

6. alternativa **e**

8. 64 m

9. $E = 0,77$

10. 14,4 cm

11. 25 m

12. 96 m

13. $\frac{1}{16}$

14. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ cm

15. alternativa **c**

16. alternativa **d**

17. **a.** $6(3 - \sqrt{3})$ m ou ≈7,6 m

b. $6(3\sqrt{2} - \sqrt{6})$ m ou ≈10,76 m

18. alternativa **b**

19. 60 m

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

1. alternativa **d**

2. 2 cm

4. alternativa **b**

5. 96 m

6. alternativa **e**

7. 50 m

Matemática sem fronteiras

1. ≈ 693.000 km

Verifique o que aprendeu no Capítulo 2

1. alternativa **d**

2. alternativa **b**

3. alternativa **c**

4. alternativa **c**

5. alternativa **d**

6. alternativa **a**

CAPÍTULO 3

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. 4 rad

2. 50π m

3. **a.** $\frac{\pi}{6}$ rad **c.** $\frac{5\pi}{4}$ rad **e.** $\frac{4\pi}{3}$

b. $\frac{2\pi}{3}$ rad **d.** $\frac{5\pi}{3}$ rad **f.** $\frac{11\pi}{6}$

4. **a.** 45° **c.** 210° **e.** 300°

b. 270° **d.** 72°

5. $\frac{10\pi}{9}$ rad/s ou ≈ 3,5 rad/s

6. **a.** 1.208,9 km **b.** 1.727 km

8. **a.** 50°, 410° e 770° **b.** −310° e −670°

9. **a.** $\frac{6\pi}{7}$ rad, $\frac{20\pi}{7}$ rad, $\frac{34\pi}{7}$ rad **b.** $-\frac{8\pi}{7}$ rad, $-\frac{22\pi}{7}$ rad

10. **a.** 43° **c.** $\frac{\pi}{11}$ rad **e.** $\frac{25\pi}{13}$ rad

b. 320° **d.** $\frac{8\pi}{5}$ rad

11. **a.** 240° **b.** 600° **c.** 960° **d.** −120°

12. **a.** 0 rad, $\frac{\pi}{3}$ rad, $\frac{2\pi}{3}$ rad, π rad, $\frac{4\pi}{3}$ rad e $\frac{5\pi}{3}$ rad

b. $\frac{8\pi}{3}$ rad e $\frac{14\pi}{3}$ rad

c. $-\frac{\pi}{3}$ rad e $-\frac{7\pi}{3}$ rad

13. **a.** $x = \pi + k \cdot 2\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$ **c.** $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$

b. $x = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$ **d.** $x = k \cdot \frac{\pi}{2}$, com $k \in \mathbb{Z}$

14. **a.** $k \cdot \frac{\pi}{3}$, com $k \in \mathbb{Z}$ **b.** $\frac{\pi}{3} + k \cdot \frac{2\pi}{3}$, com $k \in \mathbb{Z}$

15. alternativa **c**

17. **a.** $N(121°)$, $P(239°)$, $Q(301°)$

b. $N\left(\frac{7\pi}{9}\right)$, $P\left(\frac{11\pi}{9}\right)$, $Q\left(\frac{16\pi}{9}\right)$

c. $N(64°)$; $P(244°)$; $Q(296°)$

18. alternativa **c**

19. **a.** $M(60°)$, $P(240°)$, $Q(300°)$

b. $M(30°)$, $N(150°)$, $Q(330°)$

c. $M(50°)$, $N(130°)$, $P(230°)$

20. **a.** $M\left(\frac{2\pi}{7}\right)$, $P\left(\frac{9\pi}{7}\right)$, $Q\left(\frac{12\pi}{7}\right)$

b. $M\left(\frac{\pi}{3}\right)$, $N\left(\frac{2\pi}{3}\right)$, $Q\left(\frac{5\pi}{3}\right)$

c. $M\left(\frac{\pi}{6}\right)$, $N\left(\frac{5\pi}{6}\right)$, $P\left(\frac{7\pi}{6}\right)$

22. alternativa **e**

23. **a.** não **b.** $-1 \leqslant m \leqslant 5$

24. alternativa **b**

25. alternativa **d**

26. **a.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **c.** $-\frac{1}{2}$ **e.** $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

b. $-\frac{1}{2}$ **d.** $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ **f.** $\frac{1}{2}$

27. **a.** $N\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $P\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ e $Q\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

b. $M\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $N\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ e $Q\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

c. $M\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $N\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ e $P\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

28. **a.** $E = -\frac{1}{2}$ **b.** $E = \frac{\sqrt{3}}{2}$

30. **a.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **b.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **c.** $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ **d.** $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

31. alternativa **a**

32. **a.** 300 km **c.** 300 km

b. $-150\sqrt{3}$ km **d.** 1,5 h

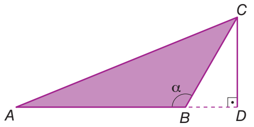
33. $-\frac{3}{5}$

34. $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$

35. $\text{sen}\,\beta = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$; $\cos\beta = -\frac{\sqrt{5}}{5}$

36. $m = 2$

37. **a.**



b. 30 cm

38. $S = \{-2 + \text{sen}\,\alpha, -2 - \text{sen}\,\alpha\}$

39. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

40. $\frac{1}{4}$

41. 26 cm

43. **a.** $S = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right\}$

b. $S = \left\{\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right\}$

c. $S = \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\}$

d. $S = \left\{\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right\}$

e. $S = \{0\}$

f. $S = \{0, \pi\}$

g. $S = \varnothing$

h. $S = \varnothing$

44. **a.** $S = \{60°, 300°\}$ **c.** $S = \{0°\}$

b. $S = \{240°, 300°\}$ **d.** $S = \{30°, 150°, 210°, 330°\}$

45. **a.** $S = \left\{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}\right\}$

b. $S = \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right\}$

c. $S = \left\{0, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}\right\}$

46. alternativa **b**

47. **a.** $S = \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right\}$

b. $S = \{0\}$

c. $S = \left\{0, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\}$

48. $\alpha = 30°$

49. **a.** $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi \text{ ou } x = \frac{7\pi}{4} + k \cdot 2\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

b. $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = 0 + k \cdot \pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\}$

c. $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

d. $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{2}, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

1. alternativa **b** **2.** alternativa **e**

3. **a.** 3.000°/s **c.** 2.000π rad

b. 25π rad/s **d.** 300π rad

4. 2 min 8 seg

5. **a.** $\frac{\pi}{10}$

b. $\frac{7\pi}{10}$, $\frac{27\pi}{10}$ e $\frac{47\pi}{10}$

c. $-\frac{3\pi}{10}$, $-\frac{23\pi}{10}$ e $-\frac{43\pi}{10}$

6. alternativa **d**

7. **a.** $\frac{1}{2}$ **b.** $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ **c.** $\frac{1}{2}$ **d.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$

8. 19,2 cm

9. alternativa **d**

10. ≈ 153 m

11. 2,5 m

12. **a.** $S = \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right\}$

b. $S = \left\{\frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right\}$

c. $S = \left\{\frac{3\pi}{2}\right\}$

d. $S = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right\}$

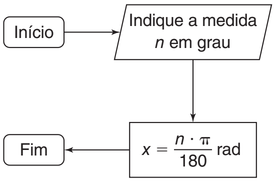
e. $S = \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\}$

13. **a.** 60° **b.** 40,82 m

14. $\alpha = 60°$

Conectado

Página 70:



Matemática sem fronteiras

1. ≈ 46,17°

3. ≈ 227.721.000 km

Verifique o que aprendeu no Capítulo 3

1. **a.** 2 rad

b. 5 voltas completas.

2. **a.** 60°

3. **a.** $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$,
$\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$,
$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ e $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

4. **a.** $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{17}}{17}$; $\text{sen}\,\alpha = \frac{4\sqrt{17}}{17}$

CAPÍTULO 4

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

2. $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{5}$; $\text{sen}\,\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

3. $-2\sqrt{2}$

4. **a.** $\frac{3}{4}$ **b.** $\frac{\alpha}{2}$ **c.** $\frac{1}{3}$

5. 75 m

7. **a.** −1 **c.** 1 **e.** −1

b. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ **d.** $\sqrt{3}$ **f.** $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

9. $E = 1$

10. alternativa **d**

12. **a.** −1 **b.** $\sqrt{3}$ **c.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$

13. $E = -1$

14. 5 cm

15. **a.** 2,4 **c.** 2,4

b. 0 **d.** 50 m

16. **a.** $S = \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right\}$

b. $S = \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right\}$

c. $S = \left\{\frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\}$

d. $S = \left\{\frac{5\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right\}$

17. **b.** $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{6} + k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

c. $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{2\pi}{3} + k, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

18. $S = \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right\}$

19. a. $S = \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right\}$

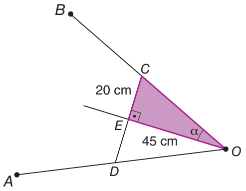
b. $S = \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right\}$

c. $S = \left\{0, \pi, \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right\}$

20. a. $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{4} + k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

b. $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{3} + k\pi \text{ ou } x = \frac{2\pi}{3} + k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

21. a.



b. ≈ 48°

23. $\frac{1}{2}$

24. a. -5 **b.** 13

25. $S = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right\}$

26. $\frac{\pi}{6}$ e $\frac{5\pi}{6}$

27. $-\sqrt{10}$

28. alternativa **c** **29.** 10 m

30. a. $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

b. $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

c. $2 + \sqrt{3}$

31. a. $\frac{1}{2}$

b. $\frac{1}{2}$

c. 1

32. $-\frac{\sqrt{10}}{10}$

33. alternativa **c**

34. a. $S = \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\}$

b. $S = \left\{x\ \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{3} + k \cdot 2\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

35. a. $-\frac{3\sqrt{3}}{5}$

b. $\frac{\sqrt{3}}{7}$

36. 1.000

37. $\alpha + \beta = 45°$

38. 12 m **39.** 1,2 m

41. $\text{sen } 2x = \frac{120}{169}$; $\cos 2x = \frac{119}{169}$

42. $-\frac{3}{4}$

43. 480

44. alternativa **c**

45. $-\frac{7}{25}$ **46.** $\frac{3}{4}$

47. a. $S = \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}\right\}$

b. $S = \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}\right\}$

c. $S = \left\{0, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\}$

48. 5 **49.** 96 m **50.** alternativa **e**

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

1. $\frac{10}{\pi}$ m ou ≈ 3,18 m **3.** $\alpha \approx 18{,}435°$

4. 201 m

5. 384.000 km

6. a. $\frac{7\sqrt{2}}{26}$

b. $\frac{\sqrt{6} - 3}{6}$

c. $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$

7. alternativa **b**

8. $\alpha \approx 36{,}87°$

9. $\frac{1}{3}$

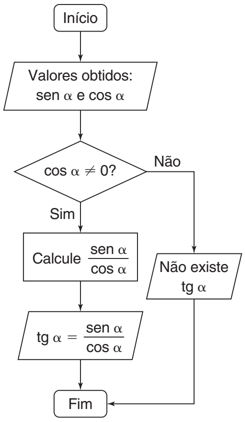
10. a. $\alpha = 30°$

b. $(100\sqrt{3} + 1{,}6)$ m ou ≈174,8 m

11. 9,6 m e 5 m

Conectado

Página 102:



Matemática sem fronteiras

1. 40° **2.** ≈ 43,73 m

Verifique o que aprendeu no Capítulo 4

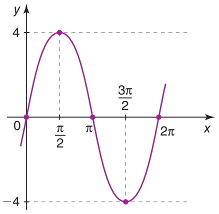
1. alternativa **a** **3.** alternativa **e**

2. alternativa **c** **4.** alternativa **d**

CAPÍTULO 5

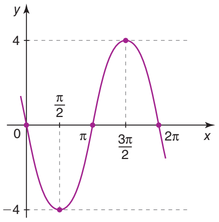
EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. a.



$D(f) = \mathbb{R}$; $Im(f) = [-4, 4]$; $p = 2\pi$

b.

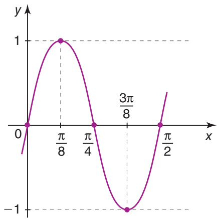


$D(z) = \mathbb{R}$; $Im(z) = [-4, 4]$; $p = 2\pi$

ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

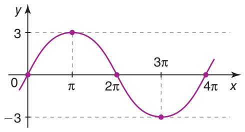
ILUSTRAÇÕES: ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

c.



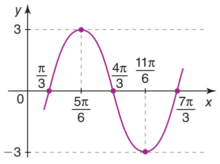
$D(g) = \mathbb{R}$; $Im(g) = [-1, 1]$; $p = \frac{\pi}{2}$

d.



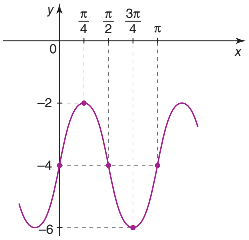
$D(h) = \mathbb{R}$; $Im(h) = [-3, 3]$; $p = 4\pi$

e.



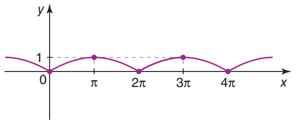
$D(v) = \mathbb{R}$; $Im(v) = [-3, 3]$; $p = 2\pi$

f.



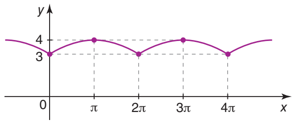
$D(t) = \mathbb{R}$; $Im(t) = \{y \in \mathbb{R} \mid -6 \leqslant y \leqslant -2\}$; $p = \pi$

g.



$D(r) = \mathbb{R}$; $Im(r) = \{y \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant y \leqslant 1\}$; $p = 2\pi$

h.



$D(s) = \mathbb{R}$; $Im(s) = \{y \in \mathbb{R} \mid 3 \leqslant y \leqslant 4\}$; $p = 2\pi$

3. **a.** -2 **b.** -1

4. **a.** $\frac{2}{3} \leqslant m \leqslant 1$

b. $k < 2$ ou $k > 3$

c. $-\frac{1}{2} \leqslant p \leqslant 1$

5. **a.** 100 km²

b. 150 km²

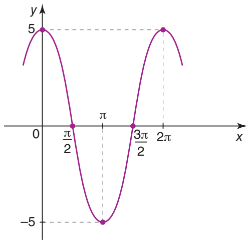
c. março

d. 50 km²

e. setembro

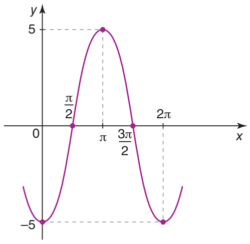
f. janeiro e maio

6. **a.**



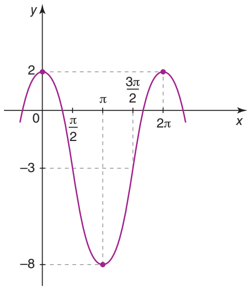
$D(f) = \mathbb{R}$; $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid -5 \leqslant y \leqslant 5\}$; $p = 2\pi$

b.



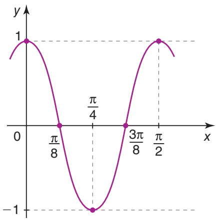
$D(g) = \mathbb{R}$; $Im(g) = \{y \in \mathbb{R} \mid -5 \leqslant y \leqslant 5\}$; $p = 2\pi$

c.



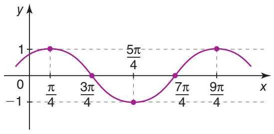
$D(h) = \mathbb{R}$; $Im(h) = \{y \in \mathbb{R} \mid -8 \leqslant y \leqslant 2\}$; $p = 2\pi$

d.



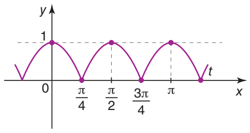
$D(v) = \mathbb{R}$; $Im(v) = [-1, 1]$; $p = \frac{\pi}{2}$

e.



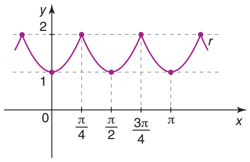
$D(z) = \mathbb{R}$; $Im(z) = [-1, 1]$; $p = 2\pi$

f.



$D(t) = \mathbb{R}$; $Im(t) = \{y \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant y \leqslant 1\}$; $p = \frac{\pi}{2}$

g.



$D(r) = \mathbb{R}$; $Im(r) = \{y \in \mathbb{R} \mid 1 \leqslant y \leqslant 2\}$; $p = \frac{\pi}{2}$

ILUSTRAÇÕES: ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

7. **a.** 5
   b. $\frac{\pi}{2}$
   c. $3 \leqslant k \leqslant \frac{7}{2}$
8. alternativa **c**
9. **a.** 120 mmHg e 80 mmHg
   b. 0,375 s
10. $a = 4$ e $m = -\frac{1}{2}$
11. $h = 10$ cm; $d = 4\pi$ cm $\approx$ 12,56 cm
12. $a = 60.000$; $b = 30.000$; $m = \frac{\pi}{182}$ e $q = \frac{181\pi}{182}$
13. alternativa **c**
14. alternativa **d**
15. $f(t) = 1{,}3 \operatorname{sen} \frac{\pi(t - 2)}{6}$
16. alternativa **b**
18. **a.** 7 cm **b.** 14 m **c.** 10 dm
19. 7 N
20. **a.** $-\frac{1}{5}$
21. **a.** $d = 10\sqrt{2(1 - \cos\theta)}$
    b. 10 cm
    c. $10\sqrt{3}$ cm
    d. 60°
23. $3\sqrt{2}$
24. alternativa **d**
25. $400\sqrt{6}$ m ou $\approx$ 980 m
26. $4\sqrt{3}$ cm
28. **a.** 15 cm^2 **b.** 5 cm^2
29. 30° ou 150°
30. $3(4\pi - 3\sqrt{3})$ cm^2

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

1. 11 m
2. alternativa **d**
3. alternativa **d**
4. **a.** 120 bpm **b.** $\frac{1}{2}$
5. **a.** 0,1 m/s
   b. 0,5 s; 1,5 s; 2,5 s; 3,5 s
   c. $y = \operatorname{sen}(\pi t)$
6. **a.** 6.952,02 km
   b. $\approx$ 6.613 km
7. 40,8 m
8. $\approx$ 637.943,13 m^2
9. $\left(16 + \frac{112\pi}{3}\right)$ cm^2

Matemática sem fronteiras

Página 144: **1.** $V(t) = 1.450 - 250 \cos \frac{2\pi t}{5}$

2. 1.325 mL

Verifique o que aprendeu no Capítulo 5

1. **a.** sim
   b. não
   c. $Im(f) = [-1; 9]$
2. **a.** sim **b.** não
3. 20 anos-luz

CAPÍTULO 6

Além da teoria

3. 6

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. **a.** 320 poltronas
   b. 640 baldes de pipoca
2. 4.680 cadeiras
3. **a.** 1.296 **b.** 360
4. **a.** 500
   b. 96
5. **a.** 216 **b.** 60
6. 5.760 maneiras diferentes
7. alternativa **e**
8. alternativa **e**
9. 18 maneiras diferentes
10. alternativa **c**
11. **a.** 456.976.000 **c.** 198.640.000 **e.** 358.800.000
    b. 258.336.000 **d.** 329.022.720
14. **a.** 27 **b.** 9
15. 12.860 aparelhos
16. 4 pessoas
17. 200
18. 216
19. 320
20. **a.** 98 **b.** 270 **c.** 246
22. **a.** 5.040 **c.** 22
    b. 12 **d.** $\frac{1}{6}$
24. **a.** 120 **d.** n
    b. 40 **e.** $\frac{1}{n^2 + 3n + 2}$
    c. $\frac{43}{5}$
25. **a.** $S = \{2\}$ **b.** $S = \{6\}$ **c.** $S = \{27\}$
26. $n = 10$
27. **a.** 30! **c.** 28!
    b. 29! **d.** $2 \cdot 28!$

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

1. **a.** 512 maneiras diferentes
   b. 2^{100}
2. **a.** 50.000.000 de linhas
   b. 100.000.000 de linhas
3. 300
4. alternativa **a**
5. 63 caracteres
6. **a.** 78.806.407.680 senhas
   b. 2.176.782.336 senhas
   c. 77.403.997.440 senhas
7. **a.** $0 \leqslant k \leqslant 4$, $0 \leqslant x \leqslant 2$, $0 \leqslant y \leqslant 3$ e $0 \leqslant z \leqslant 1$
   b. 120 divisores naturais
8. alternativa **d**
9. 45 peças
10. alternativa **e**
11. $S = \{3\}$
12. $S = \{0, 3\}$
13. alternativa **a**

Matemática sem fronteiras

Página 163: **2.** 8.748 fragmentos

Verifique o que aprendeu no Capítulo 6

1. alternativa **d** 3. alternativa **c**
2. alternativa **c** 4. alternativa **d**

CAPÍTULO 7

Além da teoria

a. 24 **b.** 84

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

2. **a.** 120 **b.** 90 **c.** 5.040
3. 579

4. alternativa **d**

5. alternativa **a**

6. **a.** $S = \{5\}$ **b.** $S = \{5\}$ **c.** $S = \{3\}$

7. alternativa **b**

9. 120

10. 8 aviões

11. **a.** 5.040 **d.** 2.160 **g.** 120
b. 720 **e.** 2.880 **h.** 720
c. 120 **f.** 1.440 **i.** 4.320

12. alternativa **e**

13. alternativa **d**

15. **a.** 360 **b.** 840 **c.** 420 **d.** 1.680

16. **a.** 120 **c.** 80 **e.** 32 **g.** 40
b. 60 **d.** 40 **f.** 20

17. **a.** 10 **b.** 16 **c.** 31

18. 300 caminhos

19. **a.** 21 **c.** 35 **e.** 15
b. 35 **d.** 21 **f.** 10

20. **a.** 26 **d.** 60
b. 96 **e.** 90
c. 33

21. **a.** 66 jogos
b. 10 jogadores

22. **a.** 21 **b.** 14

23. 35 **24.** 200 **25.** 2.240

26. **a.** 56 **b.** 8 **c.** 28

27. **a.** 165 **b.** 651

28. 140

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

1. alternativa **c**

2. alternativa **a** **3.** alternativa **e**

4. **a.** 40.320 **c.** 720 **e.** 36.000
b. 1.440 **d.** 4.320

5. alternativa **a**

6. alternativa **e**

7. **a.** 3.360 **c.** 120 **e.** 1.260
b. 840 **d.** 2.100 **f.** 900

8. alternativa **a**

9. 2.520 equipamentos

10. 1.365

11. alternativa **a** **12.** alternativa **c**

13. 10 capitais

14. **a.** 10 **b.** 26

15. 280 equipes

Matemática sem fronteiras

Página 188: **2.** 56

Verifique o que aprendeu no Capítulo 7

1. alternativa **e**

2. alternativa **b**

3. alternativa **d**

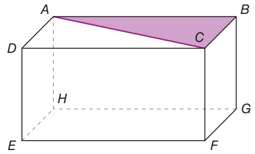
4. alternativa **a**

CAPÍTULO 8

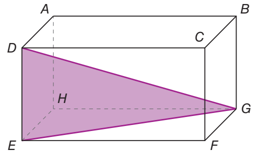
EXERCÍCIOS PROPOSTOS

4. Respostas possíveis:

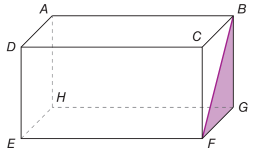
a.



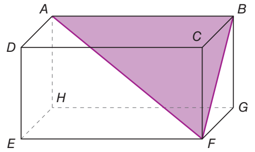
b.



c.



d.



ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

8. alternativa **e** **10.** alternativa **c** **18.** alternativa **b**

19. **a.** 80°
b. $\overleftrightarrow{AD}$, $\overleftrightarrow{DC}$, $\overleftrightarrow{HE}$ e $\overleftrightarrow{EF}$

20. 30°

21. **a.** 140°
b. Não, pois a inclinação de cada face do telhado é de 20° em relação a um plano horizontal.

22. 30°

23. **a.** $3\sqrt{3}$ cm **b.** 3 cm

24. 4,8 dm

25. 30

26. 32

27. 18

28. 28

29. alternativa **e**

30. 10

31. alternativa **d**

32. **a.** Não existe. **b.** Não existe.

33. **a.** 1.680 **b.** 840

34. **a.** 4 ângulos triédricos e 12 ângulos tetraédricos
b. 16 faces

35. alternativa **d**

36. hexaedro regular

37. $5\sqrt{2}$ cm

38. $180\sqrt{3}$ cm^2

39. **a.** 90° **b.** $3\sqrt{2}$ dm

40. 14 faces, sendo 6 quadradas e 8 hexagonais

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

2. A distância entre *PQ* não pode ser determinada apenas com os dados do enunciado.

3. **a.** $5\sqrt{7}$ cm **b.** 90° **c.** 16 cm

5. **a.** 60° **b.** $\frac{13}{14}$ **c.** $\approx 158{,}2°$

6. $12\sqrt{3}$ m^2

7. $\approx 107{,}46°$

8. alternativa **c**

9. 12

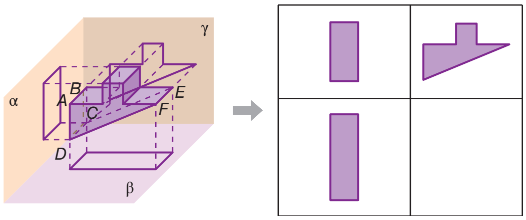
10. 13,5 m

12. b.

Poliedros regulares	Número de faces	Número de vértices	Número de arestas	Número de arestas por face	Número de arestas por vértice
Tetraedro	4	4	6	3	3
Hexaedro	6	8	12	4	3
Octaedro	8	6	12	3	4
Dodecaedro	12	20	30	5	3
Icosaedro	20	12	30	3	5

Matemática sem fronteiras

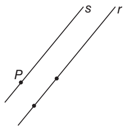
As faces paralelas aos planos α, β e γ são, respectivamente, congruentes às suas projeções ortogonais nesses planos; e a projeção ortogonal da face retangular *CDEF*, oblíqua a um dos planos de projeção, é um retângulo, pois os lados $\overline{CD}$ e $\overline{EF}$ são paralelos a esse plano. Assim, temos:



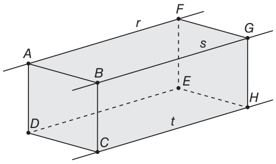
Conectado

Página 205: Respostas possíveis:

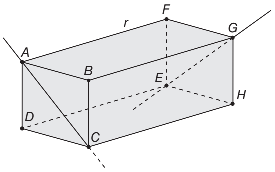
a. Por *P* existe uma única reta *s*, paralela a *r*.



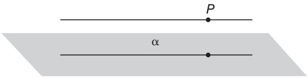
b. As retas paralelas *r*, *s* e *t* não são coplanares, pois não existe um plano que as contenha.



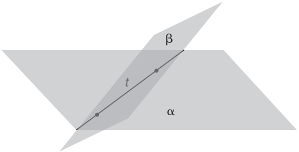
c. As retas $\overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{EG}$ são reversas.



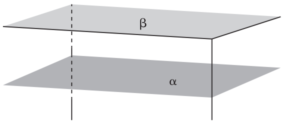
d.



e.



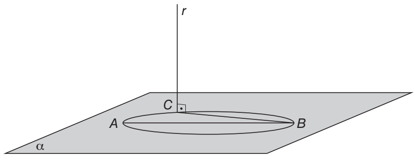
f.



Verifique o que aprendeu no Capítulo 8

1. b. Pode-se representar, por exemplo, uma pirâmide de base triangular *ABC* e vértice *V*; pl($\overleftrightarrow{AB}$, *C*); pl($\overleftrightarrow{AB}$, *V*); pl($\overleftrightarrow{BC}$, *V*); pl($\overleftrightarrow{AC}$, *V*).
   c. Pode-se representar, por exemplo, uma pirâmide cuja base é um quadrilátero *ABCD* e vértice *V*; pl($\overleftrightarrow{AB}$, *C*); pl($\overleftrightarrow{AB}$, *V*); pl($\overleftrightarrow{BC}$, *V*); pl($\overleftrightarrow{CD}$, *V*); pl($\overleftrightarrow{AD}$, *V*).

3. a.

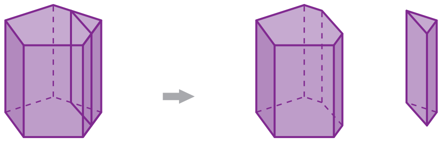


4. a. 24 b. 120

CAPÍTULO 9

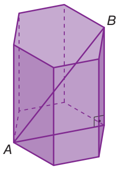
EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1.



Prisma pentagonal
Prisma hexagonal
Prisma triangular

3.



4. a. 96 dm² c. 576 dm²
   b. $96\sqrt{3}$ dm² d. $192(3 + \sqrt{3})$ dm²

5. alternativa **d**

6. alternativa **b**

7. alternativa **e**

8. a. 36 dm³ c. 7 dm
   b. $A_T = 72$ dm²

9. a. $x = 2$ m e 216 m²
   b. 128 m³ e 232 m²

10. 96 cm³ **11.** alternativa **c**

12. comprimento: 18 m; largura: 8 m; profundidade: 2 m

13. a. Colchão *S*: 12,6 kg; colchão *C*: 21 kg
    b. Colchão *S*: 20 unidades; colchão *C*: 8 unidades

14. a. $4\sqrt{3}$ dm b. 64 dm² c. 64 dm³

15. alternativa **b**

16. alternativa **a**

17. $V = 512$ cm³

19. a. $10\sqrt{2}$ cm
    b. $350\sqrt{2}$ cm³

20. 360 L

ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

21. 6

22. $108\sqrt{3}\ \text{dm}^3$

23. $4.200\ \text{cm}^3$

24. 6,4 L

26. **a.** 12 cm
  - **b.** 9 cm
  - **c.** $3\sqrt{7}$ cm
  - **d.** $432\ \text{cm}^2$
  - **e.** $324\ \text{cm}^2$
  - **f.** $756\ \text{cm}^2$
  - **g.** $324\sqrt{7}\ \text{cm}^3$

27. **a.** 12 cm
  - **b.** $5\sqrt{3}$ cm
  - **c.** $\sqrt{69}$ cm
  - **d.** $360\ \text{cm}^2$
  - **e.** $150\sqrt{3}\ \text{cm}^2$
  - **f.** $30\left(12 + 5\sqrt{3}\right)\text{cm}^2$
  - **g.** $150\sqrt{23}\ \text{cm}^3$

28. 4 dm

29. **a.** $V = 800\ \text{cm}^3$
  - **b.** $\frac{32\sqrt{2}}{3}\ \text{dm}^3$

30. **a.** $3\sqrt{3}$ cm
  - **b.** $\sqrt{3}$ cm
  - **c.** $2\sqrt{6}$ cm
  - **d.** $36\sqrt{3}\ \text{cm}^2$
  - **e.** $18\sqrt{2}\ \text{cm}^3$

31. **a.** 5 cm
  - **b.** $\frac{3.200}{27}\ \text{cm}^3$

32. $x = 2$ cm

34. $84\sqrt{3}\ \text{cm}^3$

35. alternativa **e**

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

2. **a.** $P_B \approx 2\ \text{N/m}^2$
  - **b.** $P_f \approx 3\ \text{N/m}^2$

3. alternativa **d**

4. alternativa **b**

5. alternativa **c**

6. 5 cm

7. $240\ \text{cm}^3$

8. 13 m

9. **a.** 2.880 L
  - **b.** $12\sqrt{3}$ dm

10. $240\sqrt{3}\ \text{cm}^3$

11. ≈ R$ 183.101,39

12. $\frac{350\sqrt{3}}{3}\ \text{cm}^3$

13. **a.** $19\ \text{cm}^2$
  - **b.** $152\ \text{cm}^3$

14. **a.** $3{,}12\ \text{m}^3$
  - **b.** $20{,}32\ \text{m}^2$

15. $21.504\ \text{cm}^2$

16. **b.** $\sqrt{6}$ dm

17. **a.** $2{,}56\ \text{km}^3$
  - **b.** $3{,}2\ \text{km}^2$

18. alternativa **a**

19. alternativa **e**

20. alternativa **b**

21. alternativa **b**

22. alternativa **b**

Verifique o que aprendeu no Capítulo 9

1. alternativa **e**

2. alternativa **d**

3. alternativa **b**

CAPÍTULO 10

Além da teoria

3. $\frac{256\pi}{3}\ \text{m}^3$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. 6 cm

2. 4π dm

3. **a.** $20\pi\ \text{m}^2$
  - **b.** $4\pi\ \text{m}^2$
  - **c.** $28\pi\ \text{m}^2$
  - **d.** $20\ \text{m}^2$
  - **e.** $20\pi\ \text{m}^3$

4. **a.** $64\pi\ \text{cm}^2$
  - **b.** $16\pi\ \text{cm}^2$
  - **c.** $96\pi\ \text{cm}^2$
  - **d.** $64\ \text{cm}^2$
  - **e.** $128\pi\ \text{cm}^3$

5. $144\pi\ \text{dm}^2$; $216\pi\ \text{dm}^2$; $432\pi\ \text{dm}^3$

6. $25\pi^2\ \text{cm}^2$; $25\pi(\pi + 2)\ \text{cm}^2$; $\frac{125\pi^2}{2}\ \text{cm}^3$

7. 3 tanques

8. **a.** $24\pi\ \text{cm}^3$
  - **b.** $96\pi\ \text{cm}^2$

9. alternativa **b**

10. alternativa **d**

11. **a.** $125\pi\ \text{cm}^3$
  - **b.** $50(2 + \pi)\ \text{cm}^2$
  - **c.** $25(4 + 3\pi)\ \text{cm}^2$

12. alternativa **d**

13. $112\pi\ \text{cm}^3$

15. 8 cm

16. $16\pi\ \text{dm}^2$

17. **a.** $80\pi\ \text{cm}^2$
  - **b.** $64\pi\ \text{cm}^2$
  - **c.** $144\pi\ \text{cm}^2$
  - **d.** $\frac{8\pi}{5}$ rad ou 288°
  - **e.** $48\ \text{cm}^2$
  - **f.** $128\pi\ \text{cm}^3$

18. **a.** $32\pi\ \text{dm}^2$
  - **b.** $16\pi\ \text{dm}^2$
  - **c.** $48\pi\ \text{dm}^2$
  - **d.** π rad ou 180°
  - **e.** $16\sqrt{3}\ \text{dm}^2$
  - **f.** $\frac{64\pi\sqrt{3}}{3}\ \text{dm}^3$

19. $8\pi\ \text{cm}^2$; $12\pi\ \text{cm}^2$; $\frac{8\pi\sqrt{3}}{3}\ \text{cm}^3$

20. $9{,}27\pi\ \text{cm}^3 \approx 29{,}12\ \text{cm}^3$

21. **a.** $320\pi\ \text{cm}^3$
  - **b.** $480\pi\ \text{cm}^2$

22. 36π mL

23. alternativa **b**

25. **a.** $84\pi\ \text{dm}^3$
  - **b.** $45\pi\ \text{dm}^2$
  - **c.** $90\pi\ \text{dm}^2$

26. 734.760 L

27. **a.** $64\pi\ \text{cm}^2$
  - **b.** 16π cm
  - **c.** 30 cm

28. alternativa **e**

29. 8 cm

30. **a.** $81\pi\ \text{cm}^2$
  - **b.** $900\pi\ \text{cm}^2$
  - **c.** $4.500\pi\ \text{cm}^3$

31. **a.** $64\pi\ \text{dm}^2$
  - **b.** $16\pi\ \text{dm}^2$
  - **c.** $4\pi\sqrt{3}$ dm

32. 36

33. 10 cm

34. 87,5% maior

35. **a.** $\frac{3}{\pi}\ \text{g/cm}^3$
  - **b.** $\frac{17}{6}$ cm ou ≈ 2,83 cm

37. 2 dm e 8 dm

38. $6(2\sqrt{3} + 1)$ cm

39. $\frac{2\pi}{27}\ \text{m}^3$

40. $2\pi\ \text{cm}^3$

41. 3 cm

42. $\frac{200\pi}{9}\ \text{m}^2$

43. 30°

44. **a.** $36\pi\ \text{cm}^3$
  - **b.** $18\pi\ \text{cm}^2$
  - **c.** $59{,}4\pi\ \text{cm}^2$

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

1. 9,6 L

2. $81\pi\ \text{cm}^3$

3. Faltam dados para a resolução do problema.

4. alternativa **b**

5. **a.** $V_A = \left(\frac{c}{4}\right)^2 h$
  - **b.** $V_A = 0{,}3\ \text{m}^3$
  - **c.** $V_T = 0{,}19968\pi\ \text{m}^3$; $V_A = 0{,}04608\pi^2\ \text{m}^3$; V_A representa ≈ 72,46% de V_T

6. **a.** 9 cm e 18 cm
  - **b.** 12 cm
  - **c.** $405\pi\ \text{cm}^2$

7. $\approx 5{,}94 \cdot 10^{24}$ kg

8. **a.** 15 cm
  - **b.** $\approx 5{,}31\ \text{cm}^2/\text{min}$

9. **a.** $R = \frac{h \cdot \text{sen}\ \theta}{1 - \text{sen}\ \theta}$

10. $10(\sqrt{2} + 2)$ cm

11. **a.** $375\pi\ \text{cm}^3$
  - **b.** $75\pi\ \text{cm}^2$
  - **c.** $300\pi\ \text{cm}^2$

Matemática sem fronteiras

Página 292: **1.** $4\sqrt{3}$ cm **3.** **a.** ≈ 65 cm

Verifique o que aprendeu no Capítulo 10

1. $112\pi\ \text{cm}^2$

2. alternativa **d**

3. $g = 4\sqrt{3}$ dm

4. alternativa **b**

5. $V = 288\pi\ \text{cm}^3$ e $A = 144\ \text{cm}^2$

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS COMENTADAS

AGUIAR, A. F. A. *et al.* **Cálculo para ciências médicas e biológicas**. São Paulo: Harbra, 1988.

Apresenta as aplicações da Matemática nas ciências médicas e biológicas.

ANTAR NETO, A. *et al.* **Conjuntos e funções**. São Paulo: Moderna, 1979.

A obra contempla as noções de lógica, conjuntos e funções.

ÁVILA, G. **Introdução às funções e às derivadas**. São Paulo: Atual, 1994.

Traz as funções elementares, além de uma introdução ao estudo de derivadas.

BARBOSA, J. L. M. **Geometria euclidiana plana**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2012.

A exposição sistemática permite iniciar e aprofundar os conceitos fundamentais de Geometria plana.

BOYER, C. B.; MERZBACH, U. C. **História da Matemática**. 3. ed. São Paulo: Blucher, 2012.

O livro contempla desde vestígios matemáticos encontrados em culturas primitivas até as tendências mais recentes em matemática.

BRACKMANN, C. P. **Desenvolvimento do pensamento computacional através de atividades desplugadas na Educação Básica**. 2017. Tese (Doutorado em Informática na Educação) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2017.

Pesquisa acadêmica cujo intuito foi avaliar a possibilidade de desenvolver o pensamento computacional na Educação Básica exclusivamente por meio de atividades sem o uso de computadores.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. 2018. Brasília: MEC, 2018.

Documento oficial do Ministério da Educação que apresenta as competências e habilidades a serem desenvolvidas em cada área do conhecimento na Educação Infantil, no Ensino Fundamental e no Ensino Médio de todo o país.

BRASIL. Ministério da Educação. **Diretrizes Curriculares Nacionais Gerais da Educação Básica**. Brasília, DF: MEC/SEB/DICEI, 2013.

Documento do Ministério da Educação que define as diretrizes curriculares da Educação Básica no país.

BRASIL. Ministério da Saúde. Secretaria de Atenção à Saúde. Departamento de Atenção Básica. **Guia alimentar para a população brasileira**. 2. ed. Brasília, DF: Ministério da Saúde, 2014.

Guia com o objetivo de instruir a população para uma alimentação saudável e diversa.

BRASIL. Ministério da Saúde. Secretaria de Atenção Primária à Saúde. Departamento de Promoção da Saúde. **Guia de atividade física para a população brasileira**. Brasília, DF: Ministério da Saúde, 2021.

Guia com sugestões e recomendações de atividades físicas para diversas faixas etárias, frisando a importância delas para a saúde.

BRASIL. Ministério da Educação. **Temas contemporâneos transversais na BNCC**: proposta de práticas de implementação, 2019.

Elaborado pelo Ministério da Educação, guia prático com explicações e orientações a respeito dos temas contemporâneos transversais.

CARAÇA, Bento J. **Conceitos fundamentais de Matemática**. Lisboa: Brás Monteiro, 1951.

Apresenta a importância das circunstâncias históricas e das concepções filosóficas e visões de Ciência no desenvolvimento da Matemática.

DAVIS, Philip J.; HERSH, Reuben. **A experiência matemática**. São Paulo: Francisco Alves, 1986.

Discute a prática da Matemática sob uma perspectiva histórica, filosófica e psicológica.

DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José N. **Fundamentos da Matemática elementar**. São Paulo: Atual, 2013. v. 5.

São apresentadas as noções de Geometria plana, com muitos exercícios resolvidos e propostos.

EVES, H. **Introdução à história da Matemática**. 5. ed. Campinas: Editora da Unicamp, 2011.

O livro traz uma abordagem sobre a história dos números, passando por diferentes sistemas de numeração e relatando diferentes temáticas da história da Matemática até o século XX.

HARSHBARGER, Ronald J.; REYNOLDS, James J. **Matemática aplicada**: administração, economia e ciências sociais e biológicas. 7. ed. São Paulo: McGraw-Hill, 2006.

Os 8 primeiros capítulos podem ser explorados no Ensino Médio com aplicações das funções elementares.

IEZZI, Gelson. MURAKAMI, Carlos. **Fundamentos da Matemática elementar**. São Paulo: Atual, 2013. v. 1.

São apresentadas as noções de conjunto e funções, com muitos exercícios resolvidos e propostos.

IEZZI, Gelson *et al*. **Fundamentos da Matemática elementar**. São Paulo: Atual, 2013. v. 11.

São estudadas as noções de Matemática comercial, Matemática financeira e Estatística descritiva.

JOHNSON, Donovan A. *et al*. **Matemática sem problemas.** São Paulo: José Olympio, 1972. v. 1, 2, 3, 4 e 5

Destaca, de forma lúdica, importantes aplicações da Matemática no cotidiano.

KASNER, Edward; NEWMAN, James. **Matemática e imaginação**. Rio de Janeiro: Zahar, 1968.

São apresentados problemas algébricos em forma de charadas, exercícios de topologia, paradoxos e suas resoluções, questões lógicas e de logística.

LIMA, Elon L. *et al*. **A Matemática do Ensino Médio**. São Paulo: Sociedade Brasileira de Matemática, 2001. v. 1, 2 e 3.

São abordados os temas do Ensino Médio por meio de uma linguagem acessível e precisa.

MACHADO, Antônio S. **Temas e metas**. São Paulo: Atual, 1988. v. 1.

Trata dos conjuntos numéricos e das funções elementares.

OLIVEIRA, José F. M. **Pavimentações do plano euclidiano**. Dissertação (Mestrado profissional em Educação Matemática) – Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. Universidade Estadual de Campinas. São Paulo, 2015. p. 27-43.

São estudadas algumas pavimentações do plano com polígonos.

PERUZZO, Tito M.; CANTO, Eduardo L. **Química**: na abordagem do cotidiano. São Paulo: Saraiva, 2015.

Possibilita o trânsito entre o conceito de função e o de fenômenos químicos.

POMPEO, José. N.; HAZZAN, Samuel. **Matemática financeira**. São Paulo: Saraiva, 2014.

Apresenta conceitos básicos de Matemática comercial e financeira.

PUCCINI, Abelardo L. **Matemática financeira objetiva e aplicada**. 10. ed. São Paulo: Saraiva, 2017.

Apresenta conceitos fundamentais de Matemática financeira com exercícios resolvidos.

RAMALHO Jr., Francisco *et al*. **Os fundamentos da Física**. São Paulo: Moderna, 1993.

Possibilita o trânsito entre o conceito de função e o de fenômenos físicos.

ROSA, Carlos A. P. **História da ciência**. Brasília: Funag, 2012. v. 1, 2 e 3.

Narra a história da ciência desde o Renascimento até o mundo contemporâneo.

STEWART, Ian. **Em busca do infinito**: uma história da Matemática dos primeiros números à teoria do caos. Rio de Janeiro: Zahar, 2014.

Uma narrativa histórica que destaca o que cada descoberta matemática provocou em sua época e nos dias atuais.

SUPLEMENTO PARA O PROFESSOR

Apresentação

Professor, esta coleção tem o objetivo de proporcionar aos estudantes uma sólida formação matemática, alinhada com as mais recentes diretrizes educacionais e políticas públicas.

Como material de apoio à prática pedagógica, este *Suplemento* traz, de maneira concisa, orientações e sugestões para o uso do livro do estudante, como texto de referência, com o objetivo de subsidiar seu trabalho em sala de aula. Esperamos que este material contribua para a compreensão das diretrizes pedagógicas que nortearam a elaboração dos livros desta coleção.

Para atender a esse objetivo, este *Suplemento* é composto de orientações gerais e orientações específicas que compõem cada capítulo, além das referências bibliográficas que embasaram a elaboração da coleção.

Nas orientações gerais apresentamos as diretrizes pedagógicas da coleção e trazemos discussões sobre diferentes temáticas, como saúde mental e emocional, *bullying* e *cyberbullying*, culturas juvenis, tecnologias digitais na educação e métodos de avaliação. Também expomos a estrutura da coleção e sugestões de cronogramas de trabalho.

Já nas orientações específicas trazemos as habilidades e competências da BNCC trabalhadas ao longo do volume e os objetivos de cada capítulo. Também indicamos sugestões para o desenvolvimentos dos capítulos, com propostas de ampliação e de trabalho interdisciplinar, além de referências suplementares de sites e livros que complementam as propostas do livro do estudante. As resoluções e encaminhamentos de exercícios de cálculo são apresentadas como apoio de trabalho ao professor.

Assim, este *Suplemento* foi elaborado para contribuir com reflexões e sugestões de trabalho; no entanto, as orientações não devem ser entendidas como um modelo a ser seguido, mas como um complemento à formação e à experiência do professor.

Bom trabalho!

Os Autores.

SUMÁRIO

ORIENTAÇÕES GERAIS

O novo Ensino Médio

O século XX foi um período de extraordinários avanços científicos e tecnológicos na história da humanidade. Entre as grandes conquistas daquele século estão: a teoria da relatividade; a descoberta da estrutura do DNA; a invenção da televisão, do avião, do computador e da fibra ótica; a exploração espacial; os satélites de comunicação, tendo como consequência o telefone celular; a descoberta do *laser* e o primeiro transplante de coração, só para citar alguns exemplos.

Além dessa evolução científica e tecnológica, o século XX apresentou significativas transformações sociais e políticas, provocadas por variados fatores, como o próprio avanço tecnológico; as duas guerras mundiais; a instauração de uma nova ideologia política e socioeconômica; e as disputas estratégicas e os conflitos indiretos entre os Estados Unidos da América e a extinta União Soviética.

Mas como se comportaram os sistemas de ensino em todo o mundo, diante do fecundo e tumultuado século XX?

Os conteúdos, a didática e os objetivos do ensino também foram se remodelando ao longo daquele século, chegando ao início do século XXI com a proposta desafiadora de formar cidadãos produtivos e criativos, capazes de enfrentar as novas relações com os saberes, nas quais nem sempre as respostas se apresentam prontas.

Acompanhando a tendência mundial, o Brasil também realizou reformas periódicas no sistema de ensino. Neste momento, vivemos o processo de implantação de uma nova reforma do Ensino Médio, que pretende emparelhar-se com as exigências contemporâneas.

Em julho de 2024 foi sancionada a Lei nº 14.945/2024, que estabelece a Política Nacional de Ensino Médio. A norma, que passa a valer em 2025, altera a Lei nº 9.394/1996, de Diretrizes e Bases da Educação Nacional, e revoga parcialmente a Lei nº 13.415/2017, que dispõe sobre a reforma do Ensino Médio. As principais mudanças foram:

> [...] o aumento da carga horária destinada à formação geral básica; a definição dos itinerários formativos, conectados às áreas do conhecimento; e a valorização do ensino profissional e tecnológico integrado ao ensino médio.
>
> Carga horária: a formação é de, no mínimo, 3.000 horas, sendo 2.400 horas para a formação geral básica e 600 horas para os itinerários formativos.
>
> Itinerários formativos: o estudante cursa uma das áreas de conhecimento (Linguagens e suas Tecnologias; Matemática e suas Tecnologias; Ciências da Natureza e suas Tecnologias; e Ciências Humanas e Sociais Aplicadas) ou a formação técnica e profissional. Cada escola deve oferecer pelo menos dois itinerários.
>
> Ensino profissional: reserva 2.100 horas para a formação básica, com 300 horas podendo ser destinadas a conteúdos da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) relacionados à formação técnica. A nova lei prevê que até 1.200 horas sejam destinadas para o ensino técnico (Itinerários Formativos Técnicos).

BRASIL. Ministério da Educação. Política Nacional de Ensino Médio. **Gov.br**. Brasília, DF, 2024. Disponível em: https://www.gov.br/mec/pt-br/areas-de-atuacao/eb/politica-nacional-ensino-medio. Acesso em: 31 ago. 2024.

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC)

O Brasil, por suas dimensões continentais e diversidades regionais, sempre teve diferentes propostas curriculares e pedagógicas para a Educação Básica. Para estabelecer um núcleo comum, foi publicada a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), definida a seguir, cujos princípios devem regulamentar tanto o Ensino Fundamental como o Ensino Médio.

> A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é um documento de caráter normativo que define o conjunto orgânico e progressivo de **aprendizagens essenciais** que todos os estudantes devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica, de modo a que tenham assegurados seus direitos de aprendizagem e desenvolvimento, em conformidade com o que preceitua o Plano Nacional de Educação (PNE). Este documento normativo aplica-se exclusivamente à educação escolar, tal como a define o § 1º do Artigo 1º da Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB, Lei n. 9.394/1996), e está orientado pelos princípios éticos, olíticos e estéticos que visam à formação humana integral e à construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva, como fundamentado nas Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica (DCN).

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. 2018. Brasília, DF: MEC, 2018. p. 7.

Esse documento se propõe a ser uma referência nacional comum e obrigatória para a elaboração de currículos e de propostas pedagógicas das redes de ensino e instituições escolares públicas e privadas do país.

É importante destacar, porém, que os currículos propostos constituem o conteúdo mínimo a ser desenvolvido durante o período escolar, podendo ser complementado. Com isso, preservam-se a autonomia das escolas e dos professores e as particularidades regionais.

Competências na BNCC

Visando assegurar as aprendizagens essenciais a que todo estudante da Educação Básica tem direito, a BNCC propõe o desenvolvimento de competências que vão além dos conteúdos curriculares a serem ensinados, pois é preciso assumir a necessidade de os estudantes se tornarem capazes de mobilizar conteúdos, habilidades, atitudes e valores. Nesse sentido, propõe 10 competências gerais para a Educação Básica e 5 competências específicas para a área de Matemática, as quais listamos a seguir.

No Ensino Médio, as competências gerais devem ser contempladas e promovidas pelas quatro áreas do conhecimento: Linguagens e suas Tecnologias, Matemática e suas Tecnologias, Ciências da Natureza e suas Tecnologias, Ciências Humanas e Sociais Aplicadas.

Competências gerais da Educação Básica

1. Valorizar e utilizar os conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico, social, cultural e digital para entender e explicar a realidade, continuar aprendendo e colaborar para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva.
2. Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas.
3. Valorizar e fruir as diversas manifestações artísticas e culturais, das locais às mundiais, e também participar de práticas diversificadas da produção artístico-cultural.
4. Utilizar diferentes linguagens – verbal (oral ou visual-motora, como Libras, e escrita), corporal, visual, sonora e digital –, bem como conhecimentos das linguagens artística, matemática e científica, para se expressar e partilhar informações, experiências, ideias e sentimentos em diferentes contextos e produzir sentidos que levem ao entendimento mútuo.
5. Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva.
6. Valorizar a diversidade de saberes e vivências culturais e apropriar-se de conhecimentos e experiências que lhe possibilitem entender as relações próprias do mundo do trabalho e fazer escolhas alinhadas ao exercício da cidadania e ao seu projeto de vida, com liberdade, autonomia, consciência crítica e responsabilidade.
7. Argumentar com base em fatos, dados e informações confiáveis, para formular, negociar e defender ideias, pontos de vista e decisões comuns que respeitem e promovam os direitos humanos, a consciência socioambiental e o consumo responsável em âmbito local, regional e global, com posicionamento ético em relação ao cuidado de si mesmo, dos outros e do planeta.
8. Conhecer-se, apreciar-se e cuidar de sua saúde física e emocional, compreendendo-se na diversidade humana e reconhecendo suas emoções e as dos outros, com autocrítica e capacidade para lidar com elas.
9. Exercitar a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação, fazendo-se respeitar e promovendo o respeito ao outro e aos direitos humanos, com acolhimento e valorização da diversidade de indivíduos e de grupos sociais, seus saberes, identidades, culturas e potencialidades, sem preconceitos de qualquer natureza.
10. Agir pessoal e coletivamente com autonomia, responsabilidade, flexibilidade, resiliência e determinação, tomando decisões com base em princípios éticos, democráticos, inclusivos, sustentáveis e solidários.

Competências específicas

Além de competências gerais, a BNCC estabelece competências específicas que particularizam as competências gerais para cada área do conhecimento. As competências específicas para o Ensino Médio estão articuladas às competências específicas de área para o Ensino Fundamental, com as adequações necessárias ao atendimento das especificidades de formação dos estudantes nessa etapa. Para assegurar o desenvolvimento das competências específicas, cada uma delas está relacionada a um conjunto de habilidades, que representa as aprendizagens essenciais a serem garantidas a todos os estudantes do Ensino Médio.

A interdisciplinaridade e a Matemática

Nesse vasto panorama do processo de ensino-aprendizagem, a formação dos estudantes em Matemática não se restringe à construção do "edifício da Matemática", mas está imbricada nas outras áreas de conhecimento. Então, esse ensino apenas será completo se houver um trabalho interdisciplinar na escola. Cabe aqui uma reflexão sobre o trabalho interdisciplinar, de acordo com o professor Nilbo Ribeiro Nogueira:

> ### Uma atitude interdisciplinar
>
> É importante refletir sobre a postura do professor, pois é ela que norteará os trabalhos de caráter interdisciplinar. Acreditamos que não basta apenas ter vontade de praticar a interdisciplinaridade; deve haver uma *vontade política* que vai além do discurso e assume uma atitude interdisciplinar.
>
> "[...] uma atitude diante de alternativas para conhecer mais e melhor, atitude de espera ante os atos consumados, atitude de reciprocidade que impele à troca, que impele ao diálogo – ao diálogo com pares idênticos, com pares anônimos ou consigo mesmo – atitude de humildade diante da limitação do próprio saber, atitude de perplexidade ante a possibilidade de desvendar novos saberes, atitude de desafio – desafio perante o novo, desafio em redimensionar o velho –, atitude de envolvimento e comprometimento com as pessoas neles envolvidas, atitude, pois, de compromisso em construir sempre da melhor forma possível, atitude de responsabilidade, mas, sobretudo, de alegria, de revelação, de encontro, enfim, de vida" (Fazenda, 1998, p. 82).
>
> Tal atitude ainda exigirá romper com velhos paradigmas, acreditar no novo, conceber a hipótese de que o aprendiz é possuidor de um espectro de competências ávidas a serem desenvolvidas, e que apenas ministrando 100% de um determinado conteúdo não garantirá os estímulos, as ações, as vivências, a interação social e todos os demais fatores essenciais à construção do conhecimento.
>
> Por outro lado, a postura e a atitude interdisciplinar podem garantir uma atuação mediadora do professor que, tal qual um facilitador, busca o foco de interesse, facilita o acesso aos materiais de pesquisa, indaga mais do que responde, promove discussões etc., sempre preocupado mais com o processo do que com o produto, garantindo o sucesso do processo de aprendizagem.

> Esta não pode e nem deve ser uma postura de um único professor. A grande dificuldade reside em disseminá-la por toda a equipe, evitando desta forma a desuniformidade das ações, que ora podem surgir de forma disciplinar e [ora] compartimentada em alguns professores, comprometendo o desenrolar do processo interdisciplinar. A equipe deve possuir perfeito canal de comunicação. A regra decisória passa a ser o consenso, já que desta forma pode-se cobrar o comprometimento; há de se estabelecer divisões de tarefas e equidade nas informações tanto de ordem procedimental como de resultados.
>
> Desta forma, só é possível pensar em interdisciplinaridade quando se possui uma equipe comprometida, bem diferente dos *grupos de sujeitos isolados*, que preocupam-se no máximo com o produto mensurável, demonstrado nas avaliações de caráter quantitativo.

NOGUEIRA, N. R. **Pedagogia dos projetos**: uma jornada interdisciplinar rumo ao desenvolvimento das múltiplas inteligências. 7. ed. São Paulo: Érica, 2010.

Conforme exposto pelo autor, o trabalho interdisciplinar só é efetivo se for desenvolvido em conjunto, por uma equipe comprometida de professores e com o apoio da escola. Além disso, os professores, mediadores do trabalho interdisciplinar, devem se preocupar mais com o processo do que com o produto. Para auxiliar nesse processo, a obra sugere propostas interdisciplinares, mas é importante ressaltar que compete a cada escola e equipe de profissionais definir o projeto que será desenvolvido de acordo com sua realidade. Nesse sentido, cabe uma reflexão e discussão coletiva para que se realize um trabalho interdisciplinar consistente e coerente com a proposta da escola.

É importante também ressaltar que a Matemática, por sua universalidade de quantificar e de expressar, entendida, portanto, como linguagem, incorpora uma característica única.

Nesse segmento de ensino, momento em que a abordagem das ciências tem um caráter mais elaborado e abstrato, a Matemática fornece instrumentos que favorecem a compreensão de vários fenômenos. Contudo, há Matemática impregnada em quase todas as atividades da vida atual (na informática, na música, no comércio, na meteorologia, na medicina, nas comunicações etc.), permitindo às pessoas codificar, ordenar, criar e analisar índices ou taxas, avaliar e interpretar dosagens etc.

Também devemos considerar que a Matemática entendida como ciência desenvolve os processos de construção e validação de conceitos, elaboração e refutação de argumentações, assim como as habilidades de generalizar, relacionar e concluir, contribuindo para o estabelecimento de relações e para a interpretação de fenômenos e informações. As competências formadas por essa disciplina, portanto, não se limitam a descrever uma situação, mas abrangem a elaboração de modelos, propondo soluções.

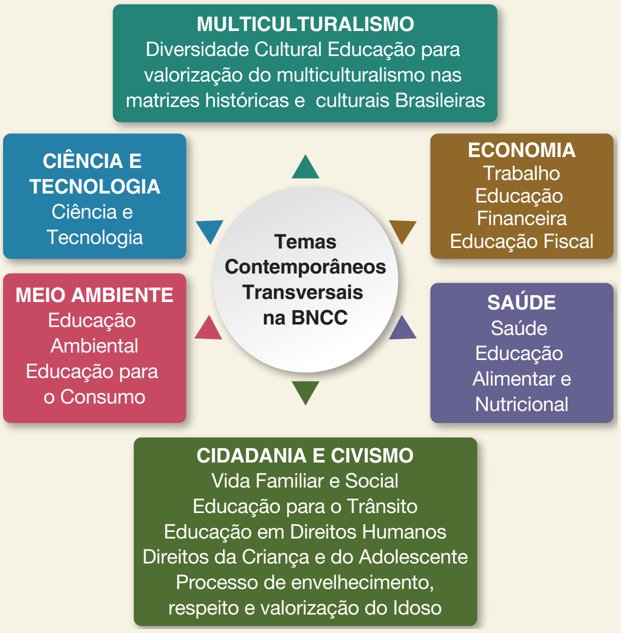
Isso posto, espera-se que o desenvolvimento da Matemática incorpore habilidades globais para o desenvolvimento dos estudantes, mas também compartilhe com as outras disciplinas a responsabilidade de desenvolver habilidades de raciocínio e expressão de pensamento. Feito de forma coordenada, esse trabalho permitirá que os estudantes desenvolvam as competências esperadas.

O trabalho interdisciplinar pode ser apoiado no desenvolvimento dos Temas Contemporâneos Transversais (TCTs). Os TCTs são aqueles conteúdos que não pertencem a apenas um componente curricular, uma vez que podem ser trabalhados por todos eles. Dizem respeito a temas relacionados ao mundo contemporâneo e à atualidade, o que favorece a integração dos componentes curriculares em um processo pedagógico com vistas à construção da cidadania e à formação de atitudes e valores éticos.

> Os Temas Contemporâneos Transversais (TCTs) buscam uma contextualização do que é ensinado, trazendo temas que sejam de interesse dos estudantes e de relevância para seu desenvolvimento como cidadão. O grande objetivo é que o estudante não termine sua educação formal tendo visto apenas conteúdos abstratos e descontextualizados, mas que também reconheça e aprenda sobre os temas que são relevantes para sua atuação na sociedade. Assim, espera-se que os TCTs permitam ao aluno entender melhor: como utilizar seu dinheiro, como cuidar de sua saúde, como usar as novas tecnologias digitais, como cuidar do planeta em que vive, como entender e respeitar aqueles que são diferentes e quais são seus direitos e deveres, assuntos que conferem aos TCTs o atributo da **contemporaneidade**.
>
> Já o **transversal** pode ser definido como aquilo que atravessa. Portanto, TCTs, no contexto educacional, são aqueles assuntos que não pertencem a uma área do conhecimento em particular, mas que atravessam todas elas, pois delas fazem parte e a trazem para a realidade do estudante. Na escola, são os temas que atendem às demandas da sociedade contemporânea, ou seja, aqueles que são intensamente vividos pelas comunidades, pelas famílias, pelos estudantes e pelos educadores no dia a dia, que influenciam e são influenciados pelo processo educacional.

BRASIL. Ministério da Educação. **Temas contemporâneos transversais na BNCC**: proposta de práticas de implementação. Brasília, DF: MEC, 2019. p. 7.

Publicado pelo Ministério da Educação em 2019, o documento Temas contemporâneos transversais na BNCC: proposta de práticas de implementação selecionou quinze temas e os distribuiu em seis macroáreas, conforme indicado a seguir.



ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

Além dos Temas Contemporâneos Transversais, destacamos o trabalho apoiado aos Objetivos de Desenvolvimento que fazem parte de uma agenda mundial adotada durante a Cúpula das Nações Unidas sobre o Desenvolvimento Sustentável em setembro de 2015 composta por 17 objetivos e 169 metas a serem atingidos até 2030. Nesta agenda estão previstas ações mundiais nas áreas de erradicação da pobreza, segurança alimentar, agricultura, saúde, educação, igualdade de gênero, redução das desigualdades, energia, água e saneamento, padrões sustentáveis de produção e de consumo, mudança do clima, cidades sustentáveis, proteção e uso sustentável dos oceanos e dos ecossistemas terrestres, crescimento econômico inclusivo, infraestrutura, industrialização, entre outros.

Identidades e diversidade na educação

A diversidade de perfis dos estudantes pode configurar um desafio às rotinas tradicionais e padronizadas de ensino e aprendizagem, levando estudantes e professores a buscar alternativas que satisfaçam os objetivos escolares e contribuam com a formação global desses estudantes.

Cada indivíduo apresenta interesses e história de vida distintos e o processo de ensino e aprendizagem acompanha essa diversidade. Muitos estudantes podem não demonstrar dificuldade em apreender conteúdos apresentados visualmente por meio de textos e imagens, enquanto outros alcançam resultados melhores quando têm a oportunidade de conversar com colegas e professores ou de colocar em prática aspectos de determinado tema.

Atividades que reconheçam as diferenças cognitivas entre os estudantes, e incluam todos em um mesmo propósito podem gerar maior confiança entre os estudantes e confortar aqueles que porventura se sentem desfavorecidos pelas metodologias convencionais de ensino e aprendizagem.

Vale ressaltar que não existem consensos científicos a respeito da efetividade de métodos de ensino e aprendizagem, o que leva à compreensão de que cada educador deve avaliar seu contexto e considerar a viabilidade dessas ferramentas em sala de aula.

Nesse sentido, fazem-se úteis diferentes metodologias de ensino e aprendizagem. É importante destacar o ensino centrado no estudante, de modo a torná-lo autônomo e ativo, lançando mão de situações-problemas que demandem o uso de diferentes habilidades cognitivas. A partir do momento em que os estudantes são convidados a solucionar problemas, habilidades subjacentes serão desenvolvidas juntamente com a apreensão dos objetos de aprendizagem, aprimorando o raciocínio, o trabalho coletivo, a escuta, a argumentação e a comunicação. Assim, um leque de conhecimentos conceituais, atitudinais e procedimentais são trabalhados de forma integrada, contemplando diferentes formas de aprender presentes em sala de aula e corroborando a formação global do estudante que, em seu futuro próximo, irá se deparar com desafios complexos que requerem desenvoltura social e habilidade de ouvir e argumentar de maneira clara e objetiva.

Nesse contexto, o professor assume o papel de mediador de discussões e pesquisas, direcionando o processo de ensino e aprendizagem, abandonando o papel de detentor e transmissor do conteúdo. É importante destacar que não há um melhor método para ensinar todos os estudantes, pois podemos encontrar diferentes formas de aprender na sala de aula.

De acordo com Cruz (2016), existem 10 práticas que podem trazer benefícios ao processo de ensino e aprendizagem com base nos estudos sobre como o cérebro aprende. São elas:

> 1. Introduzir o material a ser aprendido fazendo ligações com o que já é sabido.
>
> 2. Criar situações semelhantes à vida real.
>
> 3. Criar oportunidades de rememoração e de novas associações.
>
> 4. Utilizar trabalhos em grupo seguidos de exposição pelos alunos.
>
> 5. Aprender fazendo.
>
> 6. Utilizar técnicas mnemônicas, ou seja, que auxiliam a memória, como a música, rimas.
>
> 7. Dividir as atividades em intervalos.
>
> 8. Introduzir o novo, o intenso e o pouco usual.
>
> 9. Utilizar tempo de relaxamento entre as atividades.
>
> 10. Levar em conta a necessidade de consolidação da memória.
>
> CRUZ, L. F. C. Bases neuroanatômicas e neurofisiológicas do processo ensino e aprendizagem. *In*: **III Curso de Atualização de Professores da Educação Infantil, Ensino Fundamental e Médio A Neurociência e a Educação**: Como nosso cérebro aprende. Ouro Preto, 2016.

Saúde mental e emocional

Nos últimos anos, a saúde mental e emocional dos estudantes e sua interação com a escola tem recebido cada vez mais atenção. Estudiosos argumentam que a pré-adolescência oferece uma janela de oportunidade única para a prevenção e intervenção precoce, uma vez que é durante esse período que muitos resultados negativos de saúde física e mental começam a se manifestar pela primeira vez.

É imprescindível observar sinais que os jovens em sofrimento emocional costumam dar, como isolamento e distanciamento dos amigos e dos grupos sociais, brigas constantes e agressividade, publicações com conteúdo negativo nas redes sociais ou participação em grupos virtuais que incentivam automutilação ou suicídio, entre outros. Nesses casos, para auxiliar o estudante, acolha-o e procure estabelecer uma conversa amigável, questionando se está passando por alguma dificuldade, dizendo perceber que ele mostra condutas que têm preocupado você, como isolamento ou tristeza, muito sono nas aulas, entre outras. Em seguida, procure os gestores escolares para pensarem juntos em uma estratégia que possa envolver a equipe docente, como, por exemplo, alertar os demais professores para que também fiquem atentos ao jovem em questão. Chamar a família para uma conversa também pode ser produtivo. Além disso, com a equipe gestora, pode ser feito o encaminhamento para o serviço especializado do Sistema Único de Saúde (SUS), que oferece atendimento por meio dos Centros de Atenção Psicossocial (CAPS).

Os desafios escolares referentes às competências socioemocionais transcendem os limites disciplinares e se apresentam nas mais diversas situações durante a vida estudantil. Assim, a construção de um ambiente favorável ao bem estar emocional é responsabilidade de estudantes, professores, funcionários e demais atores da comunidade escolar. Atividades que abordam com clareza e objetividade as dimensões psíquicas vividas por estudantes corroboram não apenas o amadurecimento de jovens e crianças em relação à sua educação emocional, mas desenvolvem relações harmônicas entre todos e um melhor desempenho escolar.

A capacidade de solucionar problemas além de ajudar nos estudos, é uma importante competência socioemocional que pode e deve ser desenvolvida desde cedo a fim de que os estudantes consigam ter clareza dos desafios para, então, propor as soluções apropriadas. Para auxiliar o desenvolvimento dessa habilidade, propomos a seguinte atividade:

Peça aos estudantes que formem grupos ou duplas e relatem uns aos outros algumas dificuldades enfrentadas por eles, em diferentes situações do cotidiano, e que eles se sintam à vontade para compartilhar. Em seguida, deverão selecionar uma delas e seguir os 6 passos:

1. Qual é o problema?
   (Eles devem descrever detalhadamente o problema em um papel.)
2. Liste todas as soluções possíveis.
   (Após uma reflexão, devem listar todas as ideias que surgirem, mesmo aquelas mais improváveis. Este é um bom momento para usar a criatividade.)
3. Analise isoladamente cada solução e escreva seus prós e contras.
   (Peça que componham uma tabela com três colunas. Na primeira está a ideia de solução, na segunda seus pontos favoráveis e na terceira os contrários.)
4. Escolha a solução mais prática e rápida e coloque em prática.
   (O grupo deve eleger a alternativa mais viável e promissora para que o estudante que compartilhou o problema possa adotar.)
5. Avalie a eficácia da solução e, se for necessário, recorra às ideias seguintes presentes na lista.
   (Oriente o estudante a sempre retornar à tabela e dar uma nova chance à solução do problema.)[1]

O objetivo é que a atividade seja de fácil execução e ajude os estudantes a perceberem que verbalizar e sistematizar os pensamentos e as emoções podem ser extremamente úteis ao lidar com problemas de natureza emocional. Peça aos estudantes que façam uma autoavaliação sobre a atividade e seus próprios desempenhos.

---

[1] BLACK DOG INSTITUTE. Structured Problem Solving. Disponível em: https://www.blackdoginstitute.org.au/wp-content/uploads/2020/04/16-structured-problem-solving.pdf. Acesso em: 22 set. 2024.

Bullying e *cyberbullyng*

O *bullying* tem sido um dos grandes problemas encarados no ambiente escolar e a principal forma de violência praticada nesse espaço.

> O *bullying* caracteriza antes um padrão de comportamento do que incidentes isolados, e com frequência se agrava caso não seja controlado. Pode ser definido como o comportamento intencional e agressivo recorrente contra uma vítima, em uma situação em que há um desequilíbrio real ou percebido de poder e as vítimas se sentem vulneráveis e impotentes para se defenderem. Comportamentos de *bullying* podem ser físicos (golpes, chutes e a destruição de bens), verbais (provocação, insulto e ameaça), ou relacionais (difamação e exclusão de um grupo).
>
> ORGANIZAÇÃO das Nações Unidas para a Educação, a Ciência e a Cultura. **Violência escolar e *bullying***: relatório sobre a situação mundial. Brasília, DF: UNESCO, 2019. p. 15.

Segundo a Unesco (2019), estima-se que, todos os anos, 246 milhões de crianças e adolescentes sofrem algum tipo de violência escolar e *bullying*. As estimativas do número de crianças e jovens afetados pelo *bullying* escolar variam de acordo com os países e o tipo de estudo, em uma escala que varia de menos de 10% até mais de 65%.

As novas tecnologias digitais e as tecnologias de informação e comunicação (TIC) geram tanto oportunidades quanto desafios para a educação. Por um lado, existe o potencial para apoiar e melhorar os processos educacionais de estudantes, inclusive aqueles com necessidades educacionais especiais. Por outro lado, muitos países enfrentam um desafio real em relação às desigualdades no acesso às tecnologias digitais e à internet na educação. Além disso, com o grande alcance da internet, um outro tipo de violência, derivada do *bullying*, tem ganhado grande repercussão: o *cyberbullying*. Nesses casos, crianças e jovens são hostilizados, atacados, depreciados e até ameaçados virtualmente.

Devido a essas atitudes é comum que os estudantes percam o interesse em frequentar a escola, o desempenho e a expectativa de aprendizagem tendem a ser baixos, e eles podem desenvolver ansiedade e outros transtornos psicológicos, assim como transtornos alimentares e até evasão escolar.

> Uma das ações que promove a paz nas escolas envolve os alunos conversarem com os responsáveis da instituição de ensino para fazer encontros de imersão sobre fazer o bem, entender sobre o *bullying* e suas consequências, e ainda, onde podem se informar sobre saúde mental compartilhando seus posicionamentos sobre o tema e experiências que passaram. Também é importante uma rede de apoio das instituições para auxiliar as vítimas de violência, *bullying*, como psicólogos nas escolas, prontos para atender todos os alunos. Em suma, algumas dicas podem nortear algumas de nossas ações, como:
>
> - Inserir o enfrentamento do *bullying* e a valorização da diversidade durante o ano escolar, para que as reflexões possam acontecer não apenas em períodos, aulas ou atividades específicas;
> - Campanhas e/ou práticas solidárias, como, por exemplo, campanhas do agasalho ou arrecadação de alimentos, de forma a engajar a comunidade escolar a solidarizar-se com o próximo;
> - Promoção de atividades colaborativas, com o intuito de desenvolver competências e valores que auxiliem os estudantes a respeitar os diversos saberes e momentos das turmas, criando um senso de pertencimento à comunidade;
> - Diálogos com a direção escolar de forma a criar um espaço como uma sala de imersão para fazer o bem, que fomente o compartilhamento de experiências, fortalecendo experiências exitosas e positivas para resolução de problemas;
> - Incentivar a criação de redes de apoio para pessoas vítimas de violência;
> - Implementação da psicologia escolar como forma de fortalecer a rede de apoio e a comunidade escolar para a consolidação de uma cultura de paz.
>
> PITANGA, G. *et al*. *Bullying* e violência escolar: suas consequências e como combatê-las. *In*: **Blog #tmjUNICEF**. Brasília, DF: 18 jul. 2023. Disponível em: https://www.unicef.org/brazil/blog/bullying-e-violencia-escolar. Acesso em: 22 set. 2024.

Apresentação da obra

Os objetivos gerais do Ensino Médio podem ser resumidos em formar cidadãos: produtivos e criativos; com raciocínio analítico; que saibam antecipar-se a inovações; que busquem novos conhecimentos em um processo de formação contínua; com conhecimentos básicos de higiene e saúde; conscientes de seus direitos e deveres; e capazes de se inserir no mundo do trabalho e no convívio social.

Considerando esses objetivos, além dos objetivos específicos relativos à Matemática, elaboramos a obra em concordância com os referenciais teórico-metodológicos descritos no item a seguir, cujo entendimento depende dos conceitos de competência e habilidade. Esses conceitos frequentemente aparecem juntos por serem indissociáveis e são muitas vezes tomados como sinônimos. Contudo, na verdade, eles têm significados diferentes, embora complementares.

Na BNCC, competência é definida como "mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos), habilidades (práticas, cognitivas e socioemocionais), atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho". É interessante notar que essa definição pressupõe o conhecimento do conceito de habilidade. Mas o que é habilidade?

Habilidade pode ser definida como a capacidade de mobilizar conhecimentos para resolver determinado tipo de problema da vida pessoal, social e produtiva. O desenvolvimento de uma habilidade envolve:

- ação (compreender o problema, identificando variáveis; relacionar elementos relevantes; comparar com situações prévias);
- planejamento (visualizar possíveis métodos de resolução; adotar estratégias e recursos que serão usados);
- execução (conforme o planejamento, pôr em prática a ideia da resolução);
- checagem (analisar criticamente a solução encontrada).

Referenciais teórico-metodológicos

Os referenciais teórico-metodológicos da obra seguem as orientações da BNCC, que mantêm e ampliam a linha das políticas educacionais anteriores, propostas pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) e pelas Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica (DCN). O foco continua sendo o desenvolvimento de competências, como se constata pelo texto a seguir.

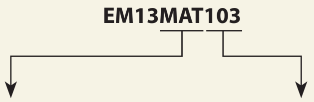
> O conceito de competência, adotado pela BNCC, marca a discussão pedagógica e social das últimas décadas e pode ser inferido no texto da LDB, especialmente quando se estabelecem as finalidades gerais do Ensino Fundamental e do Ensino Médio (Artigos 32 e 35). Além disso, desde as décadas finais do século XX e ao longo deste início do século XXI, o foco no desenvolvimento de competências tem orientado a maioria dos Estados e Municípios brasileiros e diferentes países na construção de seus currículos. É esse também o enfoque adotado nas avaliações internacionais da Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE), que coordena o Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (Pisa, na sigla em inglês), e da Organização das Nações Unidas para a Educação, a Ciência e a Cultura (Unesco, na sigla em inglês), que instituiu o Laboratório Latino-americano de Avaliação da Qualidade da Educação para a América Latina (LLECE, na sigla em espanhol).
>
> Ao adotar esse enfoque, a BNCC indica que as decisões pedagógicas devem estar orientadas para o desenvolvimento de competências. Por meio da indicação clara do que os estudantes devem "saber" (considerando a constituição de conhecimentos, habilidades, atitudes e valores) e, sobretudo, do que devem "saber fazer" (considerando a mobilização desses conhecimentos, habilidades, atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho), a explicitação das competências oferece referências para o fortalecimento de ações que assegurem as aprendizagens essenciais definidas na BNCC.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. 2018. Brasília, DF: MEC, 2018. p. 13.

Para a consulta a esses referenciais, neste *Suplemento* são reproduzidas as competências gerais da Educação Básica e as competências específicas e habilidades da área de Matemática e suas Tecnologias para o Ensino Médio.

Competências específicas de outras áreas do conhecimento também são parcialmente contempladas ao longo dos livros desta coleção, no sentido de estabelecer relações entre essas áreas e a Matemática no Ensino Médio.

Cada habilidade é identificada por um código alfanumérico, iniciado por uma sequência de duas letras e dois números (EM13) que identificam a etapa do Ensino Médio e seus respectivos anos (1º, 2º e 3º ano). Na sequência, temos o código da área do conhecimento ou componente curricular, da competência específica e da habilidade relacionada àquela competência, conforme esquema a seguir:



EM13MAT103

MAT: Matemática e suas Tecnologias
LGG: Linguagens e suas Tecnologias
LP: Língua Portuguesa
CNAT: Ciências da Natureza e suas Tecnologias
CHS: Ciências Humanas e Sociais Aplicadas

O primeiro número indica a competência específica da área ou do componente curricular e é seguido do número da habilidade propriamente dita. É importante destacar que tal número não representa hierarquia nem sequência em que as habilidades devem ser trabalhadas.

Objetivos e estratégias

Procuramos contribuir com os objetivos gerais do Ensino Médio transmitindo três tipos de orientações ao longo da obra: "como se faz", "para que se faz" e "porque se faz". Na expectativa de que essas orientações sejam entendidas e seguidas, fixamos os objetivos gerais descritos a seguir.

- Apresentar os rudimentos do pensamento científico.
- Propiciar a compreensão da evolução do pensamento científico por meio da ampliação de conceitos e/ou da construção de objetos abstratos.
- Entender a Matemática como um sistema de proposições verdadeiras e ordenadas, em que as primeiras justificam as seguintes.

- Estabelecer ligações entre o estágio de aprendizado do Ensino Médio e os conhecimentos adquiridos no Ensino Fundamental.
- Estabelecer ligações entre o conhecimento matemático/etnomatemático e as experiências da vida pessoal, social e produtiva.
- Ampliar as possibilidades de representações, por meio da linguagem matemática, exercitando: a construção de esquemas, tabelas e gráficos; as argumentações lógicas; o uso de expressões algébricas etc.
- Transitar pelas várias formas de representação de um mesmo objeto matemático.
- Fornecer embasamento científico para a tomada de decisões, por meio de análises de dados.
- Implementar o trabalho em equipe.

A pertinência desses objetivos pode ser justificada pelas seguintes concepções:

Argumentação e reflexão

Organizamos, em todos os volumes, atividades para que os estudantes desenvolvam a capacidade de análise crítica, criativa e propositiva em relação ao conteúdo abordado, estimulando o aprender a aprender e aprender sempre, a curiosidade investigativa e crítica por meio da proposição de hipóteses e argumentação baseada em fatos científicos e sociais. Quando realizados coletivamente, proporcionarão aos estudantes a possibilidade de diálogo, confronto de ideais, argumentação e o desenvolvimento da empatia, do aprender com o outro e do respeito à diversidade de ideias, pensamentos, valores e comportamentos.

Representações e registros

O filósofo e psicólogo francês Raymond Duval é responsável pelo desenvolvimento da Teoria dos registros de representação semiótica e outros importantes estudos em psicologia cognitiva.

> Segundo Duval (2013b), a principal dificuldade na aprendizagem da Matemática decorre do fato que os objetos matemáticos não possuem existência física e, sendo assim, o acesso a esses objetos só é possível com a utilização de um sistema semiótico. Desta forma, na Matemática, muito mais do que em qualquer outra área do conhecimento, a diversidade dos sistemas semióticos é fundamental para a aprendizagem e para a construção de novos conceitos
>
> Um sistema semiótico é, de acordo com Duval (2011), um conjunto de signos, organizados segundo regras próprias de formação e convenções, que apresentam relações internas que permitem identificar os objetos representados. Em outras palavras, é um sistema que desempenha a função de comunicação uma vez que é capaz de produzir e transmitir informações.
>
> Para designar os sistemas semióticos específicos da Matemática, Duval (2011) escolheu o termo registro. Para ele, um registro de representação é um sistema semiótico que cumpre, além da função de comunicação, as funções cognitivas de objetivação (entendimento para si) e tratamento. Partindo desta ideia, o autor faz referência a quatro tipos de registros de representação: a língua natural, os sistemas de escrita (numérica, algébrica e simbólica), os gráficos cartesianos e as figuras geométricas.
>
> DENARDI, V. B. Teoria dos registros e representação semiótica: contribuições para a formação de professores de matemática. *In*: XXI Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática, 2017, Pelotas, RS. **Anais do XXI EBRAPEM**. Pelotas: Universidade Federal de Pelotas, 2017.

Em linhas gerais, as pesquisas de Duval constatam que o trânsito por pelo menos duas representações de um mesmo objeto matemático aumenta a possibilidade de entendimento do objeto. Seguindo essa orientação, exploramos, sempre que possível, mais de uma representação de um mesmo objeto de estudo.

Interação, diálogo e colaboração

Uma das principais competências exigidas pelo mundo moderno é saber trabalhar em equipe. Essa competência resulta de algumas habilidades, de algum conhecimento e de certas posturas e atitudes, como: modéstia, respeito, doação e dedicação. Trabalhar em equipe não é fácil, pois um objetivo deve ser alcançado a partir de opiniões que nem sempre convergem; por isso, é preciso exercitar essa prática.

> Há, no entanto, um alerta quanto à realização efetiva de um trabalho em grupo na sala de aula de matemática, onde o significado da cooperação deve ser negociado pelo professor e pelos alunos no curso de suas interações sociais, sendo ambos responsáveis pela construção e execução das normas de sala de aula. Tais normas que não são regras estáticas a serem seguidas, mas, sim, regularidades no processo de interação social, incluem o seguinte: (a) os alunos cooperam para resolver problemas; (b) a atividade significativa é valorizada mais do que as respostas corretas; (c) a persistência pessoalmente desafiadora no problema é mais importante que completar um grande número de atividades; e (d) os parceiros devem encontrar consenso quando trabalham nas atividades.
>
> Quando trabalham juntos, cooperativamente, em pequenos grupos, os alunos se engajam em dois tipos de resolução de problemas. Por um lado, eles tentam solucionar seus problemas matemáticos e, por outro lado, procuram trabalhar juntos produtivamente, completando, com persistência, as atividades instrucionais propostas. A língua falada é obviamente um meio importante de comunicação nesse processo. Oportunidades para a aprendizagem matemática também surgem quando os alunos tentam alcançar um consenso. Aqui a vontade de ouvir as explicações de outros, de aprender a ouvir, é fundamental. Quando o aluno é obrigado a explicar e justificar o seu método de solução ao parceiro e, por sua vez, a escutar a explicação, tem a oportunidade tanto de dar esclarecimentos ao outro, como de revisar sua própria compreensão.
>
> SILVA, M. R. G. da. Considerações sobre o trabalho em grupo na aula de Matemática. **Mimesis**, Bauru, v. 19, n. 2, 1998. p. 135-145.

De acordo com esse preceito, propomos, em diversas situações, essa forma de trabalho, propiciando uma participação mais ativa dos estudantes.

Progressão do pensamento científico

Os assuntos são desenvolvidos de modo a possibilitar a progressão do pensamento científico. Para isso, adotamos estratégias, viabilizando:

- articulação horizontal (por meio da revisão de conteúdos essenciais do Ensino Fundamental) e vertical (por meio do aprofundamento daqueles conteúdos e da apresentação de novos conteúdos);
- conjectura e o teste de hipóteses;
- visão sistêmica da Matemática como uma sequência de verdades, em que as primeiras justificam as seguintes;
- compreensão dos três fundamentos: “como se faz”, “para que se faz” e “por que se faz”, visando a competência fundamental, que é **aprender a aprender**.

As tecnologias digitais na educação

A tecnologia revolucionou a forma como recebemos, enviamos e usamos informações todos os dias. Além disso, está em diferentes lugares, moldando a comunicação, o transporte, as relações interpessoais e as práticas sociais. Conforme a ciência e a tecnologia evoluem, essa constante transformação se reflete diretamente no funcionamento da sociedade e, consequentemente, no mundo do trabalho e na educação. No entanto, apesar de apresentar benefícios, muitas escolas no Brasil enfrentam desafios significativos quando se trata de integrar efetivamente a tecnologia na sala de aula.

Em 2022, a Base Nacional Comum Curricular ganhou um documento complementar, Normas sobre Computação na Educação Básica – Complemento à BNCC (Resolução CNE/CE nº 1 /2022), que estabeleceu competências e habilidades computacionais a serem desenvolvidas ao longo de toda a Educação Básica. Este documento está organizado em três eixos estruturantes:

- Pensamento computacional: enfatiza a resolução de problemas por meio do pensamento lógico. Não se limita à programação, incentiva a incorporação às atividades cotidianas que estimulam o pensamento estruturado desde a Educação Infantil.
- Mundo digital: perpassa a compreensão do funcionamento da tecnologia – transmissão de dados, atuação em redes e *gadgets* são explorados.
- Cultura digital: aborda o uso da tecnologia, levantando questões cruciais como privacidade online, ética no uso de dados e a influência da inteligência artificial.

Ainda, como forma de ampliar o trabalho com as tecnologias na educação, em 2023 foi sancionada a Lei nº 14.533/23 que institui a Política Nacional de Educação Digital (PNED), que se apoia em quatro eixos: inclusão digital da sociedade, educação digital nas escolas, ações de capacitação do mercado de trabalho e incentivo à inovação, à pesquisa e ao desenvolvimento.

> Art. 3º O eixo Educação Digital Escolar tem como objetivo garantir a inserção da educação digital nos ambientes escolares, em todos os níveis e modalidades, a partir do estímulo ao letramento digital e informacional e à aprendizagem de computação, de programação, de robótica e de outras competências digitais, englobando:
>
> I – pensamento computacional, que se refere à capacidade de compreender, analisar, definir, modelar, resolver, comparar e automatizar problemas e suas soluções de forma metódica e sistemática, por meio do desenvolvimento da capacidade de criar e adaptar algoritmos, com aplicação de fundamentos da computação para alavancar e aprimorar a aprendizagem e o pensamento criativo e crítico nas diversas áreas do conhecimento;
>
> II – mundo digital, que envolve a aprendizagem sobre *hardware*, como computadores, celulares e *tablets*, e sobre o ambiente digital baseado na internet, como sua arquitetura e aplicações;
>
> III – cultura digital, que envolve aprendizagem destinada à participação consciente e democrática por meio das tecnologias digitais, o que pressupõe compreensão dos impactos da revolução digital e seus avanços na sociedade, a construção de atitude crítica, ética e responsável em relação à multiplicidade de ofertas midiáticas e digitais e os diferentes usos das tecnologias e dos conteúdos disponibilizados;
>
> IV – direitos digitais, que envolve a conscientização a respeito dos direitos sobre o uso e o tratamento de dados pessoais, nos termos da Lei nº 13.709, de 14 de agosto de 2018 (Lei Geral de Proteção de Dados Pessoais), a promoção da conectividade segura e a proteção dos dados da população mais vulnerável, em especial crianças e adolescentes;
>
> V – tecnologia assistiva, que engloba produtos, recursos, metodologias, estratégias, práticas e serviços que objetivam promover a funcionalidade e a aprendizagem, com foco na inclusão de pessoas com deficiência ou mobilidade reduzida.

BRASIL. **Lei nº 14.533, de 11 de janeiro de 2023**. Diário Oficial da União: seção 1, Brasília, DF, 12 jan. 2023.

O pensamento computacional

O pensamento computacional se apoia nos quatro pilares expostos a seguir.

- Decomposição: consiste em dividir um problema em partes menores (subproblemas) ou etapas, de maneira que a resolução de cada uma das partes ou etapas resulta na resolução do problema inicial. Dessa maneira, um problema complexo pode ser resolvido aos poucos, com estratégias e abordagens diversas.
- Reconhecimento de padrões: ocorre ao se perceber similaridade da situação enfrentada com outra previamente resolvida, o que permite o reaproveitamento de uma estratégia conhecida. Esse reconhecimento de padrões pode se dar entre instâncias distintas de um problema ou dentro dele mesmo, quando há repetições de etapas ou padrões em sua resolução.
- Abstração: no contexto do pensamento computacional, significa filtrar as informações e dados relevantes à resolução, eliminando dados desnecessários, permitindo uma modelagem do problema mais limpa e eficaz.
- Algoritmo: a aplicação dos pilares anteriores pode facilitar o surgimento de um algoritmo, que é uma generalização da resolução e permite resolver toda uma família de problemas similares. Um algoritmo pode ser definido como uma

sequência finita de passos cuja finalidade é resolver um problema ou executar uma tarefa.

O uso das tecnologias nesta coleção

Nesta coleção, consideramos que o uso das tecnologias digitais pode favorecer e ampliar o processo de resolução de problemas, reforçando o raciocínio lógico, a formulação de hipóteses e a argumentação, além de inspirar os estudantes a aprender cada vez mais e de maneira significativa.

Criando caminhos e conexões entre os alunos e os conteúdos apresentados, com vistas, sempre, ao desenvolvimento de competências e habilidades que permitam a extrapolação dos conteúdos de sala de aula para o cotidiano dos estudantes e comunidades, esta obra propõe, em todos os seus volumes, estratégias intencionais para o desenvolvimento do pensamento científico e computacional, para a ampliação das redes de diálogo e comunicação dos estudantes por meio de aplicativos, *sites*, vídeos, entre outras ferramentas que permitam maior aproximação com o mundo tecnológico.

As seções *Conectado* e *Educação Midiática* foram criadas para trabalhar temáticas relacionadas ao Pensamento computacional, Mundo digital e Cultura digital. Além dessas seções, em alguns exercícios resolvidos, apresentamos a resolução estruturada segundo os pilares do Pensamento computacional. É importante destacar que nem todos os pilares do Pensamento computacional precisam ser acionados para a resolução de todos os problemas. Além disso, há atividades desplugadas que podem ser realizadas para ensinar Pensamento computacional, sem fazer uso de um computador.

Também propomos o uso de *softwares* para a realização de atividades que envolvam confecção de gráficos, elaboração de planilhas eletrônicas, gravações de vídeos entre outras propostas. Esse conjunto de atividades fazem parte de uma proposta para o implemento dos eixos Cultura digital e Mundo digital, estimulando as habilidades de uso das tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, e promovendo formas diversas de comunicação e disseminação de informações de maneira tecnológica.

Juventudes, educação e trabalho

As rápidas mudanças no mercado de trabalho, têm produzido diversos desafios para a inserção laboral dos jovens, como destaca o texto a seguir.

> Os jovens estão inseridos em grupos de variados níveis e, por isso, sujeitos a diferentes oportunidades, restrições e influências.
>
> Esferas como a família e as políticas sociais produzem diversos impactos nas trajetórias de jovens, seja pela reprodução, seja pelo enfrentamento de vulnerabilidades. No Brasil, é possível identificar cinco categorias de jovens em transição escola-trabalho (18 a 24 anos) quanto à sua inserção educacional e laboral: jovem apenas estudando (15% das juventudes); jovem estudando e trabalhando (14% das juventudes); jovem apenas trabalhando (39% das juventudes); jovem estudando e desempregado (5% das juventudes); jovem “sem-sem” (sem oportunidade de estudar e trabalhar) (27% das juventudes). Cada categoria possui uma configuração específica em termos de marcadores sociais e demanda estratégias que deem conta de diferentes desafios para a inserção no mercado de trabalho.
>
> As evidências acima indicam temas centrais que devem pautar a agenda da inclusão produtiva de jovens no Brasil. Um primeiro ponto e a necessidade de agir com urgência para aproveitar a janela de oportunidade representada pelo “bônus demográfico”. É preciso ampliar as oportunidades formativas, visando tanto à qualificação das juventudes, quanto ao desenvolvimento de habilidades.

ITAÚ EDUCAÇÃO E TRABALHO (org.). **O Futuro do mundo do trabalho para as juventudes Brasileiras**. São Paulo: Itaú educação e trabalho, 2023. p. 9.

Nesse sentido, a escola tem um papel central na melhoria das oportunidades e das condições para este grupo. Assim, além do ensino propedêutico, é preciso educar emocionalmente os jovens. Para isso, consideramos importante apresentar aos estudantes, por meio de palestras, relatos de diferentes trabalhadores de diversas áreas e de profissionais como psicólogos, com o objetivo de ajudar os jovens a lidar com as próprias emoções em situações difíceis, para que possam ser estimulados a conquistar a autoconfiança.

Como professor de Matemática, é importante destacar a participação dos conceitos e práticas matemáticas nas mais variadas profissões do mercado de trabalho. Qualquer profissão demandará, em maior ou menor profundidade e frequência, um conjunto de conhecimentos matemáticos. Na seção *Trabalho e juventudes*, presente em todos os volumes da coleção, buscou-se apresentar que a Matemática será parte indissociável da rotina de trabalho em diferentes profissões. Identificar com os estudantes a participação da Matemática nas profissões que lhes aprouverem será um ótimo exercício de aproximação entre matemática, trabalho e juventudes.

Além disso, é preciso considerar a diversidade entre os estudantes:

> Considerar que há muitas juventudes implica organizar uma escola que acolha as diversidades, promovendo, de modo intencional e permanente, o respeito à pessoa humana e aos seus direitos. E mais, que garanta aos estudantes ser protagonistas de seu próprio processo de escolarização, reconhecendo-os como interlocutores legítimos sobre currículo, ensino e aprendizagem. Significa, nesse sentido, assegurar-lhes uma formação que, em sintonia com seus percursos e histórias, permita-lhes definir seu projeto de vida, tanto no que diz respeito ao estudo e ao trabalho como também no que concerne às escolhas de estilos de vida saudáveis, sustentáveis e éticos.
>
> Para formar esses jovens como sujeitos críticos, criativos, autônomos e responsáveis, cabe às escolas de Ensino Médio proporcionar experiências e processos que lhes garantam as aprendizagens necessárias para a leitura da realidade, o enfrentamento dos novos desafios da contemporaneidade (sociais, econômicos e ambientais) e a tomada de decisões éticas e fundamentadas. O mundo deve lhes ser apresentado como campo aberto para investigação e intervenção quanto a seus aspectos políticos, sociais, produtivos, ambientais e culturais, de modo que se sintam estimulados a equacionar e resolver questões legadas pelas gerações anteriores – e que se refletem nos contextos atuais –, abrindo-se criativamente para o novo.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. 2018. Brasília, DF: MEC, 2018. p. 463.

Culturas juvenis

A escola do jovem precisa reconhecer o contexto social e psicológico vivido pelos estudantes nesse período de constantes mudanças de valores e sentimentos. É desejável, portanto, acolher os adolescentes e aproximar conteúdos e procedimentos escolares à vida e aos interesses deles, reconhecendo suas culturas e identidades.

Em vez de ignorar ou modificar as formas de expressão trazidas pelos jovens à sala de aula, os educadores podem aproveitar essa oportunidade para conhecer melhor essa geração. Conhecer os conteúdos de mídias e redes sociais consumidos pelos adolescentes, seu jeito de falar, suas preferências artísticas e esportivas é entender quais são seus sonhos e como eles pensam. Identificar aquilo que é importante para o adolescente pode ser chave para atribuir maior sentido e valor aos conteúdos e às rotinas escolares.

Atividades que convidem estudantes de diferentes perfis a expor seus interesses e a expressar suas diferentes culturas e linguagens em um ambiente livre e seguro na sala de aula podem encorajar os estudantes a se conectar uns com os outros, além de trazerem uma oportunidade de diversificação do trabalho docente. Reforce a importância da diversidade entre as pessoas e da prática da tolerância com relação à sua origem, à identidade de gênero, à orientação sexual, à aparência física, à etnia, à presença de deficiências psíquico-motoras, à condição social entre outras características pessoais visando a cultura de paz em sala de aula.

Organização dos conteúdos na coleção

A obra é constituída por 3 volumes e traz uma seleção de tópicos programáticos fundamentais à Matemática, que contemplam habilidades da BNCC para Matemática e suas Tecnologias. A seguir apresentamos sugestões de cronogramas bimestrais, trimestrais e semestrais para o trabalho com esses conteúdos.

Sugestão de cronograma bimestral para o volume 1

Bimestre	Capítulos do livro
1º	1. A linguagem dos conjuntos 2. Temas básicos da Álgebra e Matemática financeira
2º	3. Geometria plana: triângulos e proporcionalidade 4. Circunferência, círculo e área de figuras planas
3º	5. A linguagem das funções 6. Função polinomial do 1º grau ou função afim 7. Função polinomial do 2º grau ou função quadrática
4º	8. Função modular 9. Função exponencial 10. Função logarítmica

Sugestão de cronograma trimestral para o volume 1

Trimestre	Capítulos do livro
1º	1. A linguagem dos conjuntos 2. Temas básicos da Álgebra e Matemática financeira 3. Geometria plana: triângulos e proporcionalidade
2º	4. Circunferência, círculo e área de figuras planas 5. A linguagem das funções 6. Função polinomial do 1º grau ou função afim 7. Função polinomial do 2º grau ou função quadrática
3º	8. Função modular 9. Função exponencial 10. Função logarítmica

Sugestão de cronograma semestral para o volume 1

Semestre	Capítulos do livro
1º	1. A linguagem dos conjuntos 2. Temas básicos da Álgebra e Matemática financeira 3. Geometria plana: triângulos e proporcionalidade 4. Circunferência, círculo e área de figuras planas
2º	5. A linguagem das funções 6. Função polinomial do 1º grau ou função afim 7. Função polinomial do 2º grau ou função quadrática 8. Função modular 9. Função exponencial 10. Função logarítmica

Sugestão de cronograma bimestral para o volume 2

Bimestre	Capítulos do livro
1º	1. Sequências 2. Trigonometria no triângulo retângulo
2º	3. Circunferência trigonométrica: seno e cosseno 4. Outras razões trigonométricas e adição de arcos 5. Funções trigonométricas e resolução de triângulos
3º	6. Os princípios da Análise combinatória 7. Agrupamentos e métodos de contagem
4º	8. Geometria de posição e poliedros 9. Prismas e pirâmides 10. Corpos redondos

Sugestão de cronograma trimestral para o volume 2

Trimestre	Capítulos do livro
1º	1. Sequências 2. Trigonometria no triângulo retângulo 3. Circunferência trigonométrica: seno e cosseno
2º	4. Outras razões trigonométricas e adição de arcos 5. Funções trigonométricas e resolução de triângulos 6. Os princípios da Análise combinatória 7. Agrupamentos e métodos de contagem
3º	8. Geometria de posição e poliedros 9. Prismas e pirâmides 10. Corpos redondos

Sugestão de cronograma semestral para o volume 2

Semestre	Capítulos do livro
1º	1. Sequências 2. Trigonometria no triângulo retângulo 3. Circunferência trigonométrica: seno e cosseno 4. Outras razões trigonométricas e adição de arcos 5. Funções trigonométricas e resolução de triângulos
2º	6. Os princípios da Análise combinatória 7. Agrupamentos e métodos de contagem 8. Geometria de posição e poliedros 9. Prismas e pirâmides 10. Corpos redondos

Sugestão de cronograma bimestral para o volume 3

Bimestre	Capítulos do livro
1º	1. Probabilidade 2. Estatística
2º	3. Matrizes 4. Sistemas lineares e determinantes
3º	5. Geometria analítica: ponto e reta 6. Complementos sobre o estudo da reta 7. Equações da circunferência
4º	8. As cônicas: elipse, hipérbole e parábola 9. Conjunto dos números complexos 10. Polinômios e equações polinomiais

Sugestão de cronograma trimestral para o volume 3

Trimestre	Capítulos do livro
1º	1. Probabilidade 2. Estatística 3. Matrizes
2º	4. Sistemas lineares e determinantes 5. Geometria analítica: ponto e reta 6. Complementos sobre o estudo da reta 7. Equações da circunferência
3º	8. As cônicas: elipse, hipérbole e parábola 9. Conjunto dos números complexos 10. Polinômios e equações polinomiais

Sugestão de cronograma semestral para o volume 3

Semestre	Capítulos do livro
1º	1. Probabilidade 2. Estatística 3. Matrizes 4. Sistemas lineares e determinantes
2º	5. Geometria analítica: ponto e reta 6. Complementos sobre o estudo da reta 7. Equações da circunferência 8. As cônicas: elipse, hipérbole e parábola 9. Conjunto dos números complexos 10. Polinômios e equações polinomiais

A estrutura da obra

A coleção é composta de três volumes do estudante e respectivos manuais do professor. O *Manual do professor* de cada volume reúne o livro do estudante com orientações e respostas dos exercícios, além do *Suplemento para o professor*, que é dividido em: *Orientações gerais*, comum a cada um dos volumes da coleção, *Orientações específicas* de cada volume e *Resolução de exercícios*.

Cada volume foi organizado em 10 capítulos. A seguir apresentamos a organização de cada capítulo:

Abertura: apresentamos recursos visuais e textuais que despertam o interesse do estudante, buscando ainda resgatar seus conhecimentos prévios por meio de questões apresentadas no boxe *Além da teoria*. As atividades desse boxe podem ser discutidas em grupo, e suas conclusões, compartilhadas com a turma.

Desenvolvimento do conteúdo: ao desenvolver a teoria, a escolha de textos, de atividades e aplicações no desenvolvimento dos exercícios resolvidos, o estabelecimento gradual da terminologia matemática e de outros procedimentos visam facilitar a compreensão dos assuntos pelo estudante. Isso, porém, não significa que optamos pela exclusão de situações mais complexas, mas que sua inclusão foi criteriosa.

Exercícios resolvidos e **Análise da resolução**: intercalados aos textos explicativos, todos os capítulos trazem *Exercícios resolvidos* apresentando estratégias de resolução e aplicação dos conteúdos estudados. Além disso, em alguns momentos, apresentamos diferentes estratégias de resolução de um mesmo exercício e a resolução seguindo as etapas do Pensamento Computacional. A seção *Análise da resolução* explora erros comuns e recorrentes cometidos pelos estudantes. Entendemos que uma estratégia para minimizar esses erros é submetê-los à crítica. Para isso, eles devem apontar e corrigir um erro cometido, propositalmente, em um exercício resolvido. Dessa maneira, estimula-se o levantamento de dúvidas e o posicionamento crítico dos estudantes, embasados na ciência, favorecendo a reflexão crítica, investigando causas que permitam a elaboração e testagem de hipóteses e a criação de soluções individuais e coletivas.

Exercícios propostos e **Exercícios complementares**: os *Exercícios propostos* estão organizados como forma de auxiliar a compreensão dos conceitos, promovendo uma aplicação imediata dos conteúdos. A seção de *Exercícios complementares* oferece questões de aprofundamento que promovem a fixação e a revisão dos conteúdos. São atividades que podem ser desenvolvidas conforme as características de cada turma e as necessidades didáticas, por exemplo: tarefa extraclasse, revisão do conteúdo trabalhado, fonte de exercícios para uma recuperação paralela ou reforço do conteúdo trabalhado. Seu objetivo, no entanto, é verificar o aprendizado, pois permitem avaliar se os estudantes compreenderam os conteúdos conceituais e assimilaram os procedimentos envolvidos.

Mentes brilhantes: nesses boxes são apresentados conhecimentos de diferentes grupos populacionais, povos ou contribuições de pesquisadores para o desenvolvimento da Matemática ou de outra Ciência. Os temas escolhidos buscam valorizar os conhecimentos historicamente produzidos, os aplicados em situações diversas e os passados entre gerações, favorecendo a compreensão da realidade, estimulando a curiosidade e objetivando estimular novas aprendizagens.

Conectado: esse boxe tem por objetivo auxiliar os estudantes a compreenderem o conceito de algoritmo, interpretar e construir fluxogramas, compreender linguagem de programação e suas estruturas e propõe alguns problemas para serem resolvidos com o auxílio de *softwares*.

Trabalho e juventudes: nesse boxe são abordadas várias profissões e sua relação com a Matemática. Ao explorar diversas profissões e os requisitos associados a cada uma, os estudantes podem identificar suas próprias vocações e interesses.

Educação midiática: esta seção abrange temas essenciais para a formação crítica dos estudantes no mundo digital, incentivando a análise criteriosa de dados e informações.

Matemática sem fronteiras: neste boxe exploramos a relação da Matemática com outras áreas de conhecimento, com o objetivo de contextualizar a teoria matemática por meio de situações reais e despertar a curiosidade dos estudantes para aplicações mais elaboradas. Também apresentamos propostas de atividades para serem realizadas em grupo, promovendo reflexões e discussões sobre o tema trabalhado.

Verifique o que aprendeu no capítulo: ao final de cada capítulo, é apresentado um conjunto de testes que podem ser utilizados para autoavaliação ou como uma avaliação formativa relativa aos conteúdos trabalhados no capítulo. As propostas indicadas no tópico *Ferramenta de estudo* têm como objetivo auxiliar os estudantes na organização seu aprendizado, promovendo retomadas e reflexões sobre o conteúdo estudado.

O trabalho com o livro

Entendemos que, em geral, os recursos presentes em salas de aula não são suficientes para fornecer todos os elementos necessários ao trabalho do professor e à aprendizagem do estudante. Nesse caso, o livro didático desempenha um papel importante, assessorando nesse processo, como organização e encaminhamento da teoria e propostas de exercícios. Assim, o livro didático contribui para o processo de ensino-aprendizagem e atua como mais um interlocutor na comunicação entre professor e estudante.

Mas é preciso considerar que o livro didático, por mais completo que seja, deve ser utilizado intercalado com outros recursos que enriqueçam o trabalho do professor.

No Ensino Fundamental, os estudantes tiveram contato com vários campos do conhecimento matemático. No Ensino Médio, espera-se que estejam em condições de utilizar e enriquecer esses conhecimentos, desenvolvendo de modo mais amplo capacidades como abstrair, investigar, analisar e compreender os fatos matemáticos e interpretar a própria realidade.

É importante que entendam que as verdades matemáticas (não sendo definições nem postulados) podem ser demonstradas. Não defendemos que todos os teoremas devam ser demonstrados em sala de aula, mas que alguns o sejam, para que os estudantes compreendam o significado de uma demonstração e o método sistêmico da ciência matemática.

As atividades propostas nas seções *Exercícios propostos* e *Exercícios complementares*, por serem bastante diversificadas, podem ser desenvolvidas individualmente, em duplas ou em grupos maiores, de acordo com a finalidade didática e as características de cada turma. O trabalho em grupo favorece a comunicação oral, a argumentação e a troca de experiências.

Sugerimos um destaque especial às atividades de elaboração de problemas, pois consideramos que elaborar e resolver corretamente um problema sobre determinado assunto é um indicador da compreensão daquele tema, além de ser um modo eficaz de autoavaliação.

O professor pode ainda complementar e ampliar as atividades com o uso do computador. Em alguns capítulos, no boxe *Conectado*, propomos atividades com o uso de *softwares* de construção de gráficos, de Geometria Dinâmica e, de exploração e construção de poliedros, planilha eletrônica e de linguagem de programação que podem ser obtidos gratuitamente na internet. Esses recursos auxiliam o estudo de alguns tópicos da Matemática, permitindo, por exemplo, que o estudante transite facilmente entre a representação algébrica e a representação gráfica e faça relações entre elas. É importante que, antes de propor essas atividades, o professor conheça os *softwares* e faça simulações, avalie como e quando esse recurso pode ser empregado em suas aulas, para melhor orientar os estudantes.

Outro aspecto relevante trabalhado no Livro do Estudante refere-se à comunicação matemática, que pode ser apresentada como relato escrito ou oral, registro ou expressão. Pode-se também explorar o boxe *Matemática sem fronteiras*, trabalhando-a como tema de pesquisa ou como problematização do texto. Destacamos ainda o trabalho em grupo, que estimula os estudantes a conversar, a ler e a escrever sobre assuntos matemáticos.

Nas atividades de pesquisa, é fundamental que o professor instrua os estudantes a pesquisarem em fontes confiáveis, como *sites* de universidades, publicações científicas, livros etc., e que citem essas fontes no trabalho.

Certas aulas podem ser desenvolvidas com a participação de professores de outras áreas do conhecimento. Nas **Orientações específicas**, sugerimos momentos oportunos em que isso pode ser feito.

Avaliações e reflexões

A avaliação é um instrumento fundamental para obter informações sobre o andamento do processo de ensino-aprendizagem. No decorrer desse processo, é preciso que os momentos de avaliação não se restrinjam ao final de cada bimestre, trimestre ou semestre, pois o diagnóstico contínuo possibilita a reformulação de procedimentos e estratégias, visando ao sucesso efetivo do estudante.

Ao longo do livro, muitas oportunidades de observação e avaliação surgem e podem ser aproveitadas para isso, como por exemplo, a seção *Verifique o que aprendeu no capítulo*, que é proposta ao final de todos os capítulos. A mobilização do conhecimento prévio dos estudantes, por exemplo, pode ser um bom início de avaliação. Além disso, no decorrer do trabalho com o conteúdo do capítulo, pontuar, registrar e relatar procedimentos comuns, relevantes e diferentes contribuem para melhor avaliar cada estudante. Acompanhar a resolução de atividades e as produções orais e escritas da turma possibilita a criação de perfis e a percepção sobre quais aspectos devem ser reforçados no ensino, quais conteúdos e habilidades convêm privilegiar e sobre quais assuntos os estudantes têm mais domínio.

Para obter informações sobre a apreensão de conteúdos, pode-se observar: a compreensão conceitual, a leitura e a interpretação do texto matemático e as atitudes (hesitante, alheio, preocupado com as questões sociais e ambientais, confiante, interessado etc.) na resolução das atividades. Também pode ser útil verificar se os estudantes fazem perguntas pertinentes, se participam das atividades e dos trabalhos em grupo, se são operativos com os colegas, se argumentam com justificativas coerentes para defender suas opiniões.

Além de empregar esses recursos, podem-se criar outras oportunidades de avaliação, por exemplo:

- solicitar aos estudantes que expliquem, na lousa ou oralmente, exercícios, resoluções de problemas ou ainda textos lidos em sala de aula;
- propor que façam estimativas de cálculo para a solução de uma situação-problema;
- propor que elaborem, individualmente ou em grupo, uma atividade ou situação-problema para um colega resolver individualmente ou em grupo.

Essas estratégias auxiliam a avaliar a coerência da argumentação e do pensamento matemático dos estudantes, a adequação das situações-problema criadas e do que é exigido em sua resolução.

Muitos e importantes autores tratam do tema avaliação em seus estudos pedagógicos. Jussara Hoffmann, por exemplo, discute aspectos relacionados à avaliação do ensino e da aprendizagem.

> Quando se desenvolve um processo mediador de avaliação, não há como prever todos os passos e tempos desse processo, pois as condições e ritmos diferenciados de aprendizagem irão lhe conferir uma dinâmica própria.
>
> As novas concepções de aprendizagem propõem fundamentalmente situações de busca contínua de novos conhecimentos, questionamento e crítica sobre as ideias em discussão, complementação através da leitura de diferentes portadores de texto, mobilização dos conhecimentos em variadas situações-problema, expressão diversificada do pensamento do aprendiz. Nesse sentido, a visão do educador/avaliador ultrapassa a concepção de alguém que simplesmente "observa" se o aluno acompanhou o processo e alcançou resultados esperados, na direção de um educador que propõe ações diversificadas e investiga, confronta, exige novas e melhores soluções a cada momento.

HOFFMANN, J. **Avaliar para promover**: as setas do caminho.
Porto Alegre: Mediação, 2005. p. 77.

Assim, pode-se afirmar que a avaliação deve ser um processo, não uma série de obstáculos a serem vencidos. As provas escritas, quando atendem aos objetivos dos conteúdos, são meios adequados para examinar o domínio de procedimentos, a interpretação de texto, a compreensão conceitual e o entendimento de contextos. Mas, mesmo esse tipo de avaliação, muito comum no cotidiano escolar, pode ser utilizado como um momento de aprendizagem, pois permite a percepção de avanços e dificuldades em relação ao conteúdo avaliado.

Com esse propósito, também pode ser bastante interessante promover a aplicação de provas elaboradas pelos próprios estudantes, em duplas ou em grupos. A correção dessas provas também pode ser feita pelos estudantes, que trocariam de prova com o colega, sob a supervisão do professor. O fato de serem requisitados a "trocar de lugar" com o professor pode proporcionar momentos produtivos de reflexão sobre o que eles esperam do curso de Matemática no Ensino Médio e se enxergarem como produtores de conhecimento.

Outro ponto importante a ser discutido quando tratamos de avaliação é abordar o erro e seu papel no processo de aprendizagem. Conforme Helena de Noronha Cury:

> Ao corrigir qualquer prova, teste ou trabalho de Matemática, muitas vezes, o professor costuma apontar os erros cometidos pelos alunos passando pelos acertos como se estes fossem esperados. Mas quem garante que os acertos mostram o que o aluno sabe? E quem diz que os erros evidenciam somente o que ele não sabe? Qualquer produção, seja aquela que apenas repete uma resolução-modelo, seja a que indica a criatividade do estudante, tem características que permitem detectar as maneiras como o aluno pensa e, mesmo, que influências ele traz de sua aprendizagem anterior, formal ou informal. Assim, analisar as produções é uma atividade que traz para o professor e para os alunos a possibilidade de entender, mais de perto, como se dá a apropriação do saber pelos estudantes.
>
> A análise das respostas, além de ser uma metodologia de pesquisa, pode ser também enfocada como metodologia de ensino, se for empregada em sala de aula como "trampolim para a aprendizagem" [...], partindo dos erros detectados e levando os alunos a questionar suas respostas para construir o próprio conhecimento.
>
> Assim, a análise das produções dos estudantes não é um fato isolado na prática do professor; ela é – ou deveria ser – um dos componentes dos planos pedagógicos das instituições e dos planos de aula dos docentes, levando em conta os objetivos do ensino de cada disciplina.

CURY, H. N. **Análise de erros***:* o que podemos
aprender com as respostas dos alunos.
Belo Horizonte: Autêntica, 2007. p. 13.

Essa introdução às ideias da autora nos possibilita refletir um pouco sobre o tratamento dado ao erro. Habitualmente, ele é associado ao fracasso escolar. Contudo, seria mais apropriado abordá-lo como mais um instrumento de aprendizagem e reflexão disponível ao professor. Entre outras estratégias a serem empregadas para trabalhar com o erro em sala de aula, podem-se propor discussões com a turma sobre as causas de determinado tipo de erro ter aparecido com mais frequência. Dessa maneira, estimula-se o levantamento de dúvidas comuns entre os estudantes e seu esclarecimento, favorecendo a aprendizagem de determinado conteúdo.

Não são incomuns os casos de estudantes que receiam cometer um erro e serem humilhados pelos colegas (*bullying*) e, em casos assim, cabe ao professor discutir com a turma que o erro é uma parte integrante do processo de aprendizagem e não permitir que estudante algum se afaste dos demais, seja por motivo cognitivo, comportamental, moral, econômico etc, contribuindo, dessa maneira, para manter a autoconfiança e a autoestima dos discentes e evitar frustrações. Em toda sala de aula é certo que alguns estudantes necessitam de maior assistência do que outros. Em Matemática, por exemplo, um erro rotineiro que os estudantes cometem é a afirmação de que $(x + y)^2 = x^2 + y^2$. Acreditamos que uma tática eficiente para a abordagem/correção desse equivoco e evitar constrangimentos, é incentivar o estudante a substituir as variáveis x e y por números, efetuar as operações e comparar os resultados. Assim, digamos, para $x = 3$ e $y = 2$, tem-se $(3 + 2)^2 = 5^2 = 25$, ao passo que $3^2 + 2^2 = 9 + 4 = 13$, dessa maneira o estudante perceberá claramente que $(3 + 2)^2 \neq 3^2 + 2^2$ e o professor terá transformado o erro em um mecanismo do estudo e pode, a partir daí, fazer as generalizações necessárias. Essa tática pode ser aplicada dividindo a turma em grupos heterogêneos de forma que os estudantes que terminam a atividade antes possam transformar-se em auxiliares na edificação do aprendizado compartilhando seus conhecimentos e habilidades auxiliando aqueles com maiores dificuldades e estimulando as diferentes formas de discernimentos presente na sala.

No exercício da docência, espera-se ainda que o professor, ao analisar a frequência com que determinados erros ocorrem (em um grupo de estudantes ou até mesmo em várias turmas), reflita sobre sua prática docente e pense como poderá retomar e conduzir o desenvolvimento do conteúdo em que os estudantes apresentam dificuldades. É importante lembrar que o professor não está sozinho no processo de ensino-aprendizagem; há outros profissionais na escola que poderão auxiliar os estudantes ou as turmas a superar suas dúvidas, colaborando com visões e ideias diferentes, ou por meio de uma proposta de trabalho em conjunto.

Práticas avaliativas

A atribuição de um conceito ainda é a base para o professor mensurar o desempenho dos estudantes, mas isso não significa que as avaliações tenham de obedecer, necessariamente, o modelo tradicional. Neste item apresentaremos algumas práticas avaliativas que possam ser adequadas aos diferentes grupos de estudantes.

Team Based Learning (Aprendizagem baseada em equipes)

Esse método pode substituir as provas tradicionais por discussões em grupo, em sala de aula, estimulando a aprendizagem colaborativa e a percepção de dúvidas. Uma sequência possível para a aplicação desse método pode ser:

- Os estudantes, individualmente ou em grupos, estudam o material disponibilizado pelo professor. Esse material pode ser, por exemplo, um tópico já estudado do livro didático.
- A seguir, uma tarefa é proposta individualmente.
- Depois, a mesma tarefa é proposta aos grupos.
- Esses procedimentos visam proporcionar aos estudantes o conhecimento dos fundamentos do tema. Para que isso ocorra, o gabarito deve ser fornecido imediatamente após a realização da tarefa.
- O passo seguinte é revisar o tema para esclarecer eventuais dúvidas.
- A seguir, são propostas novas questões aos grupos, para novas discussões. Essas questões devem ser mais complexas que as anteriores e não devem ser encontradas facilmente no material disponibilizado pelo professor (nesse caso, um tópico do livro didático).
- Concluída a tarefa, o gabarito é fornecido, propiciando mais um momento de aprendizado.
- Finalmente, as eventuais dúvidas são esclarecidas pelo professor.

Avaliação formativa

Essa forma de avaliação visa verificar se os objetivos estabelecidos pelo professor estão sendo atingidos, permitindo acompanhar a evolução dos estudantes e identificar suas dificuldades. Os resultados podem orientá-lo quanto a algum ajuste necessário. Por meio da comunicação entre professor e estudantes, essa avaliação permite a redefinição de estratégias didáticas e de outras decisões que apoiem a turma em suas necessidades.

A aplicação desse formato deve ser feita em curtos períodos, para que o professor possa fazer uma correção de rumo em momentos oportunos. Como exemplos desse tipo de avaliação podemos citar: supervisionar os deveres de casa; observar a participação e o desempenho do estudante; aplicar provas, além das periódicas; propor projetos etc.

Avaliação somativa

Esse tipo de avaliação visa examinar a retenção dos conhecimentos ao final de um período, avaliando de modo geral em que grau os objetivos preestabelecidos foram atingidos pelos estudantes. Essa prática deve ser aplicada ao término de um ciclo, por meio de provas e trabalhos finais. Os conceitos atribuídos possibilitam identificar as dificuldades dos estudantes, permitindo avaliar se as estratégias de ensino utilizadas estão adequadas para a turma.

Avaliação diagnóstica

Pode ser entendida como uma ação avaliativa realizada no início de um processo de aprendizagem, que tem a função de obter informações sobre os conhecimentos, as aptidões e as competências dos estudantes, visando ao planejamento do curso a ser ministrado. Por isso, é mais recomendada no início de um ciclo. Entre as opções desse tipo de avaliação estão: entrevistas com estudantes, exercícios ou simulações, observação dos estudantes, questionários ou perguntas etc.

Avaliação comparativa

É a avaliação que compara o desempenho dos estudantes com um padrão externo ou com outros grupos de estudantes. Compreende conteúdos de um ciclo e visa, principalmente, avaliar o nível de conhecimento dos estudantes e identificar os pontos fortes e fracos do ensino.

Pode servir para identificar as diferenças entre os estudantes, ajudando no planejamento de intervenções pessoais. Como instrumento pode-se utilizar provas padronizadas ou trabalhos individuais. Destacamos a importância para o cuidado com que esse tipo de avaliação não se torne um instrumento de competição entre os estudantes.

VI. Avaliação ipsativa

Nesta avaliação consideramos o desempenho de um estudante consigo mesmo ao longo de um período, em vez de compará-lo com outros estudantes. Assim, o foco está no progresso individual, no crescimento e no desenvolvimento do estudante. Os instrumentos de avaliação neste caso, devem estar focados no acompanhamento do estudante do ciclo, na autoavaliação e no desempenho para a entrega das tarefas. O acompanhamento mais individualizado pode permitir que o estudante analise seu próprio crescimento e pontos de melhoria.

Autoavaliação

Além do processo de avaliação promovido pelo professor, é de fundamental importância que os estudantes realizem ao menos uma autoavaliação bimestral. O objetivo é verificar a visão que cada estudante tem de si mesmo, como pensa seu processo de aprendizagem e se consegue estabelecer estratégias para avançar nos conteúdos. Deve-se ressaltar que os estudantes poderão obter ajuda do professor e dos colegas.

Na seção *Verifique o que aprendeu no capítulo*, apresentamos, em alguns capítulos, como sugestão fichas de autoavaliação que devem ser copiadas no caderno e usadas para identificar os conteúdos estudados que ainda precisam ser retomados.

Também pode ser proposta aos estudantes uma ficha de autoavaliação para acompanhamento das atitudes diante do processo de aprendizagem. É importante discutir com eles quais atitudes consideram mais adequadas para o processo de aprendizagem e se uma mudança de conduta pode trazer benefícios para a produtividade de cada um.

Ficha de autoavaliação de atitudes diante do processo de aprendizagem

Nome do estudante:	Sempre	Às vezes
Presto atenção nas aulas e estudo em casa.		
Presto atenção nas aulas, mas não vejo necessidade de estudar em casa.		
Converso bastante com meus colegas, mas procuro estudar em casa.		
Converso durante as aulas e não estudo em casa.		
Gosto de desafios e procuro resolvê-los.		
Verifico se a solução que encontrei para o exercício é a correta.		
Tento resolver um exercício, mesmo que o considere difícil e trabalhoso.		
Comparo minhas resoluções com as dos colegas e gosto de conversar sobre como eles resolvem os exercícios.		
Resolvo os exercícios e não acho necessário saber como os colegas os resolvem.		
Não tento resolver os exercícios, prefiro pedir ajuda.		
Não tento resolver os exercícios e não peço ajuda.		
Observe quantas vezes você assinalou **Sempre** e **Às vezes**. Como você analisa as respostas mais frequentes? O que elas representam para você? Agora, escreva no caderno se você está satisfeito com suas atitudes no processo de aprendizagem e o que pretende fazer para mudá-las, se julgar necessário.		

Uma palavra sobre avaliações em larga escala

As avaliações educacionais em larga escala são realizadas no Brasil para monitorar a qualidade da educação dos sistemas de ensino e permitem a comparação dos aprendizados dos diferentes grupos de estudantes. Por isso, essas avaliações são particularmente úteis para analisar a eficácia de propostas educacionais e subsidiar decisões relativas, por exemplo, à promoção de estudantes.

A avaliação em larga escala do Ensino Básico, que inicialmente se reduzia ao Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica (Saeb), como uma avaliação focada nas competências em leitura e Matemática, desdobrou-se em diversas modalidades. Uma delas é o Exame Nacional do Ensino Médio (Enem), que é usado como forma de seleção para o ingresso no sistema federal de Educação Superior, substituindo, em muitos casos, o tradicional vestibular. A prova de Matemática do Enem é composta de testes de múltipla escolha. Cada teste apresenta cinco alternativas, das quais apenas uma é correta. Devido à importância do Enem, sugerimos que, periodicamente, sejam aplicadas provas no formato desse exame. Atentamos, porém, que ao elaborar questões similares às do Enem, o professor consulte a *Matriz de Referência* desse exame, disponível em: http://download.inep.gov.br/download/enem/matriz_referencia.pdf (acesso em: 22 set. 2024).

ORIENTAÇÕES ESPECÍFICAS

Competências específicas e habilidades

A seguir, listamos as competências específicas e as habilidades que foram trabalhadas neste volume. As competências gerais serão indicadas pontualmente ao longo das orientações.

Competência específica 1

1. Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.

Habilidades

(EM13MAT101) Interpretar criticamente situações econômicas, sociais e fatos relativos às Ciências da Natureza que envolvam a variação de grandezas, pela análise dos gráficos das funções representadas e das taxas de variação, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

(EM13MAT103) Interpretar e compreender textos científicos ou divulgados pelas mídias, que empregam unidades de medida de diferentes grandezas e as conversões possíveis entre elas, adotadas ou não pelo Sistema Internacional (SI), como as de armazenamento e velocidade de transferência de dados, ligadas aos avanços tecnológicos.

(EM13MAT105) Utilizar as noções de transformações isométricas (translação, reflexão, rotação e composições destas) e transformações homotéticas para construir figuras e analisar elementos da natureza e diferentes produções humanas (fractais, construções civis, obras de arte, entre outras).

(EM13MAT106) Identificar situações da vida cotidiana nas quais seja necessário fazer escolhas levando-se em conta os riscos probabilísticos (usar este ou aquele método contraceptivo, optar por um tratamento médico em detrimento de outro etc.).

Competência específica 2

2. Propor ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas sociais, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, mobilizando e articulando conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática.

Habilidades

(EM13MAT201) Propor ou participar de ações adequadas às demandas da região, preferencialmente para sua comunidade, envolvendo medições e cálculos de perímetro, de área, de volume, de capacidade ou de massa.

(EM13MAT203) Aplicar conceitos matemáticos no planejamento, na execução e na análise de ações envolvendo a utilização de aplicativos e a criação de planilhas (para o controle de orçamento familiar, simuladores de cálculos de juros simples e compostos, entre outros), para tomar decisões.

Competência específica 3

3. Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.

Habilidades

(EM13MAT301) Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

(EM13MAT302) Construir modelos empregando as funções polinomiais de 1º ou 2º graus, para resolver problemas em contextos diversos, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

(EM13MAT303) Interpretar e comparar situações que envolvam juros simples com as que envolvem juros compostos, por meio de representações gráficas ou análise de planilhas, destacando o crescimento linear ou exponencial de cada caso.

(EM13MAT306) Resolver e elaborar problemas em contextos que envolvem fenômenos periódicos reais (ondas sonoras, fases da lua, movimentos cíclicos, entre outros) e comparar suas representações com as funções seno e cosseno, no plano cartesiano, com ou sem apoio de aplicativos de álgebra e geometria.

(EM13MAT308) Aplicar as relações métricas, incluindo as leis do seno e do cosseno ou as noções de congruência e semelhança, para resolver e elaborar problemas que envolvem triângulos, em variados contextos.

(EM13MAT309) Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de áreas totais e de volumes de prismas, pirâmides e corpos redondos em situações reais (como o cálculo do gasto de material para revestimento ou pinturas de objetos cujos formatos sejam composições dos sólidos estudados), com ou sem apoio de tecnologias digitais.

(EM13MAT310) Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo agrupamentos ordenáveis ou não de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas, como o diagrama de árvore.

(EM13MAT314) Resolver e elaborar problemas que envolvem grandezas determinadas pela razão ou pelo produto de outras (velocidade, densidade demográfica, energia elétrica etc.).

(EM13MAT315) Investigar e registrar, por meio de um fluxograma, quando possível, um algoritmo que resolve um problema.

Competência específica 4

4. Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.

Habilidades

(EM13MAT405) Utilizar conceitos iniciais de uma linguagem de programação na implementação de algoritmos escritos em linguagem corrente e/ou matemática.

Competência específica 5

5. Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.

Habilidades

(EM13MAT504) Investigar processos de obtenção da medida do volume de prismas, pirâmides, cilindros e cones, incluindo o princípio de Cavalieri, para a obtenção das fórmulas de cálculo da medida do volume dessas figuras.

(EM13MAT505) Resolver problemas sobre ladrilhamento do plano, com ou sem apoio de aplicativos de geometria dinâmica, para conjecturar a respeito dos tipos ou composição de polígonos que podem ser utilizados em ladrilhamento, generalizando padrões observados.

(EM13MAT507) Identificar e associar progressões aritméticas (PA) a funções afins de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.

(EM13MAT508) Identificar e associar progressões geométricas (PG) a funções exponenciais de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.

(EM13MAT509) Investigar a deformação de ângulos e áreas provocada pelas diferentes projeções usadas em cartografia (como a cilíndrica e a cônica), com ou sem suporte de tecnologia digital.

Sugestões para o desenvolvimento dos capítulos

Ao longo da apresentação do conteúdo, na reprodução do livro do estudante, algumas orientações de trabalho foram apresentadas, bem como as respostas dos exercícios e atividades.

A seguir, apresentamos orientações complementares para o desenvolvimento dos capítulos e seus objetivos, além das habilidades e competências trabalhadas. Você também encontrará sugestões de atividades e de leituras complementares.

CAPÍTULO 1 Sequências

Objetivos

Ao final do capítulo, espera-se que o estudante esteja apto a:

- Discorrer sobre o conceito de sequência.
- Determinar uma sequência pela lei de formação.
- Reconhecer uma progressão aritmética e uma progressão geométrica.
- Classificar uma P.A. como crescente, decrescente ou constante e uma P.G. como crescente, decrescente, constante, oscilante ou quase nula.
- Determinar um termo qualquer de uma P.A. a partir de outro termo e da razão.
- Determinar um termo qualquer de uma P.G. a partir de outro termo e da razão.
- Representar genericamente uma P.A. e uma P.G.
- Calcular a soma dos *n* primeiros termos de uma P.A. e de uma P.G.
- Calcular a soma dos infinitos termos de uma P.G. de razão q, com $0 < q < 1$.

Habilidades e competências específicas da BNCC

Neste capítulo são exploradas diferentes situações que envolvem a variação de grandezas. Ao explorar a variação dessas grandezas e a relação com representações gráficas, analisando criticamente essas variações, contribuímos para o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT101** e da **competência específica 1**.

Ao resolver problemas contextualizados envolvendo funções polinomiais, interpretar e comparar situações que envolvem juros simples com as que envolvem juros compostos e propor a construção de fluxogramas, contribuímos para o desenvolvimento das habilidades **EM13MAT302**, **EM13MAT303** e **EM13MAT315** e da **competência específica 3**.

No boxe **Conectado**, apresentamos uma proposta que envolve conceitos iniciais de linguagem de programação, o que contribui para o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT405** e da **competência específica 4**.

Ao longo do capítulo, identificamos e associamos progressões aritméticas a funções afins e progressões geométricas a funções exponenciais. Além disso, analisamos propriedades dessas funções, deduzimos fórmulas e resolvemos atividades. Ao fazer isso, contribuímos para o desenvolvimento das habilidades **EM13MAT507** e **EM13MAT508** e da **competência específica 5**.

Sugestões de encaminhamento dos conteúdos

Podem ser acrescentadas novas questões ao boxe **Além da teoria** da **abertura**, relacionando o conceito de meia-vida às funções exponencial e logarítmica, por exemplo: "Suponha que neste momento uma amostra de iodo-131 tenha 100 g. Daqui a n dias, qual será a massa remanescente dessa amostra? $\left(\frac{100}{2^{\frac{n}{8}}}\right)$ E daqui a quanto tempo a massa remanescente dessa amostra terá 5 g? (34,58 dias, aproximadamente)".

2. Lei de formação de uma sequência

O boxe **Mentes Brilhantes** explora a importância histórica de Ada Lovelace, uma mulher que desempenhou um papel pioneiro na Ciência da Computação. Incentive os estudantes a reconhecerem sua contribuição significativa, não apenas como colaboradora de Charles Babbage na criação da máquina analítica, precursora dos computadores modernos, mas também como uma mente inovadora que enxergou o potencial das máquinas além de simples cálculos. Ao traduzir o artigo de Luigi Menabrea, Ada não apenas traduziu ideias, mas também acrescentou suas notas, desenvolvendo o primeiro algoritmo da história, um marco considerado o primeiro programa de computador. Enfatize como seu trabalho, realizado em uma época em que a participação feminina na ciência era limitada, foi fundamental para a evolução tecnológica, elevando a imagem da mulher como agente transformadora na história da Computação e da Ciência.

3. Progressão aritmética

Se julgar conveniente, ao trabalhar com o **exercício resolvido 5**, aproveite a oportunidade para discutir o papel dos radares no contexto da segurança viária, explorando como esses dispositivos contribuem para a redução de acidentes e o respeito às leis de trânsito. Incentive os estudantes a refletirem sobre como a presença de radares pode modificar comportamentos no trânsito, promovendo uma cultura de respeito e responsabilidade. Ao explorar esse tema, favorecemos o desenvolvimento do **TCT Educação para o Trânsito**.

No tópico **Soma dos *n* primeiros termos de uma progressão aritmética**, antes de comentar a fórmula para o cálculo da soma dos *n* primeiros termos de uma P.A., apresente a situação a seguir. Em uma viagem que durou 10 horas, um veículo percorreu 60 km na primeira hora e, em cada hora seguinte, percorreu 5 km a mais do que na hora anterior. "Qual é a sequência (a_n) em que a_n representa a distância, em quilômetro, percorrida na hora *n* dessa viagem? (60, 65, 70, 75, 80, 85, 90, 95, 100, 105)"; "Que distância percorreu o veículo nessa viagem? (825 km)"; "Qual é a soma dos extremos na sequência (a_n)? (165)"; "Qual é a soma de dois termos equidistantes dos extremos na sequência (a_n)? (165)"; "Com base nas duas últimas respostas, é possível calcular a soma dos termos da sequência (a_n) sem a necessidade de adicioná-los um a um? (Sim, pois $60 + 105 = 165$; $65 + 100 = 165$; $70 + 95 = 165$; $75 + 90 = 165$; $80 + 85 = 165$. Como a soma de dois termos equidistantes dos extremos é igual à soma dos extremos da P.A., concluímos que a soma de todos os termos é dada por $5 \cdot 165 = 825$.)"

Após essa situação, comente a fórmula da soma dos *n* primeiros termos de uma P.A.

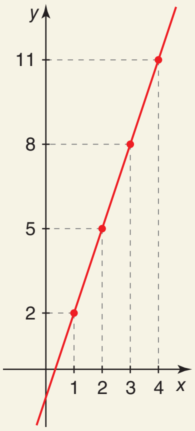
No boxe **Mentes brilhantes**, oriente os estudantes a explorar a geometria *sona* como uma forma de conectar a Matemática com a cultura africana, destacando sua origem entre os povos de Angola e países vizinhos. Explique que os desenhos, feitos na areia com pontos e linhas, têm significados que são passados de geração em geração, servindo como um meio de comunicação e preservação cultural. Informe aos estudantes que essa tradição permite trabalhar conceitos matemáticos, como multiplicação, números primos, simetria de figuras e soma de sequências aritméticas. Incentive-os a refletir sobre como a Matemática pode ser aplicada de maneira cultural e visual, promovendo um aprendizado interdisciplinar. Ao explorar esse tema, favorecemos o desenvolvimento do **TCT Diversidade cultural**.

O **exercício resolvido 11** explora a importância do Cerrado como "berço das águas do Brasil", enfatizando seu papel fundamental na oferta de cerca de 40% da água doce do país. É importante discutir o alarmante aumento do desmatamento e a significativa perda da vegetação nativa ao longo do tempo. Encoraje os estudantes a refletirem sobre as consequências ambientais e sociais desse desmatamento, assim como a importância de preservar esse bioma para garantir a sustentabilidade dos recursos hídricos no Brasil. Ao explorar esse tema, favorecemos o desenvolvimento do **TCT Educação Ambiental**. Além disso, favorece o desenvolvimento da **competência geral 2**, ao estimular a análise crítica dos dados sobre desmatamento e suas consequências, promovendo a reflexão sobre a preservação ambiental, e da **competência geral 10**, ao promover a consciência ambiental e a cidadania, incentivando os estudantes a se envolverem na proteção do bioma e na promoção da sustentabilidade.

No tópico **A progressão aritmética e a função afim**, comente que a representação gráfica de uma P.A. $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \dots, a_n, \dots)$ é formada pelos pontos (n, a_n) do plano cartesiano. Considerando a P.A. (2, 5, 8, 11, …), proponha as atividades a seguir.

a. Represente graficamente essa P.A. e obtenha o seu termo geral.

b. No mesmo plano cartesiano em que foi representada a P.A., construa o gráfico da função *f* de lei $f(x) = -1 + 3x$.



ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

Observando que os pontos do gráfico da P.A. pertencem ao gráfico da função *f*, generalize: a representação gráfica de uma P.A. $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \dots, a_n, \dots)$ de razão *r* é formada por pontos da reta cuja equação é $y = a_1 + (x - 1)r$. Dessa maneira, algumas importantes propriedades da função afim podem ser aplicadas na resolução de problemas que envolvem progressões aritméticas; por exemplo, a constância da taxa de variação, isto é, dados dois termos a_n e a_k de uma P.A., com $n \neq k$, a taxa de variação $\frac{a_n - a_k}{n - k}$ é constante.

4. Progressão geométrica

Se julgar conveniente, ao trabalhar com o **exercício proposto 57**, discuta temas como empréstimos bancários, dívidas e amortização. Proponha aos estudantes que reflitam sobre as implicações de obter dívidas e a importância de planejar a quitação de empréstimos de maneira consciente e responsável. É importante que eles compreendam os mecanismos por trás dos empréstimos e as melhores formas de gerenciar as finanças pessoais, reforçando a importância do planejamento financeiro na vida cotidiana. Ao explorar esse tema, favorecemos o desenvolvimento do **TCT Educação Financeira**.

Antes de comentar a fórmula do tópico **Soma dos *n* primeiros termos de uma progressão geométrica**, apresente a situação a seguir.

Durante 9 semanas consecutivas, um biólogo mediu a altura de uma planta. Observou que na primeira semana a planta havia crescido 16 mm e que em cada uma das 8 semanas seguintes o crescimento foi a metade do da semana anterior. Pergunte: "Qual é a sequência (a_n) em que a_n representa o acréscimo na altura da planta, em milímetro, no dia *n* de observação? (É a progressão geométrica: $\left(16, 8, 4, 2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}\right)$.)"; "Qual foi o crescimento da planta durante o período de observação?

$\left(\frac{511}{16}\text{ mm}\right)$". Comente que podemos calcular a soma dos termos dessa P.G. reduzindo as frações ao mesmo denominador ou transformando cada fração em número decimal; porém, vamos adotar um método que nos levará a uma fórmula geral para esse tipo de cálculo.

Indicando por S a soma dos termos da P.G., temos:

$$S = 16 + 8 + 4 + 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}$$

Multiplicando ambos os membros da igualdade anterior pela razão $\frac{1}{2}$ da P.G., obtemos:

$$\frac{S}{2} = 8 + 4 + 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32}$$

Subtraindo membro a membro as duas igualdades anteriores, obtemos:

$$S - \frac{S}{2} = \left(16 + 8 + 4 + 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}\right) - \left(8 + 4 + + 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32}\right) \Rightarrow S - \frac{S}{2} = 16 - \frac{1}{32}$$

Portanto: $\frac{S}{2} = \frac{511}{32} \Rightarrow S = \frac{511}{16}$

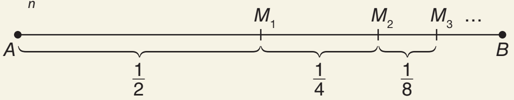
Concluímos que a planta cresceu $\frac{511}{16}$ mm durante o período de observação.

Generalize, deduzindo a fórmula da soma dos n primeiros termos de uma P.G. não constante $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots)$, dada por: $S_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q}$

Peça aos estudantes que leiam o texto sobre profissões, apresentado no boxe **Trabalho e juventudes**. Depois, solicite a eles que relatem o que sabem sobre a profissão Programador. Incentive todos a participar e a argumentar para justificar suas opiniões. Pode-se aprofundar esta conversa inicial, propondo aos estudantes que citem habilidades que precisam ser desenvolvidas para alguém se tornar programador. Após a leitura e a discussão inicial, peça aos estudantes que pesquisem mais informações sobre essa profissão, façam um resumo da pesquisa e compartilhem-na com os demais colegas. Ao explorar esse tema, contribuímos para o desenvolvimento do **TCT Trabalho** e da **competência geral 6**, pois os estudantes podem se apropriar de procedimentos adotados no mundo do trabalho.

No tópico **Soma dos infinitos termos de uma progressão geométrica**, o cálculo da soma dos infinitos termos de uma P.G. exige muita abstração, por isso recomendamos a introdução do assunto a partir da situação a seguir, que permite a associação com uma imagem.

O segmento de reta $\overline{AB}$, representado a seguir, mede 1 unidade de comprimento, e os infinitos pontos M_1, M_2, M_3, M_4, … são tais que M_1 é o ponto médio de $\overline{AB}$; M_2 é o ponto médio de $\overline{M_1B}$; M_3 é o ponto médio de $\overline{M_2B}$; …; M_{n+1} é o ponto médio de $\overline{M_nB}$.



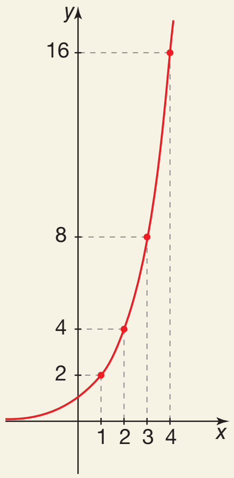
Pergunte: "Qual é a sequência decrescente infinita formada pelas medidas dos segmentos $\overline{AM_1}$, $\overline{M_1M_2}$, $\overline{M_2M_3}$, …? (É a progressão geométrica $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots\right)$"; "Qual é a soma das medidas dos três primeiros segmentos $\overline{AM_1}$, $\overline{M_1M_2}$ e $\overline{M_2M_3}$? $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8} = 0{,}875\right)$"; "Qual é a soma das medidas dos quatro primeiros segmentos $\overline{AM_1}$, $\overline{M_1M_2}$, $\overline{M_2M_3}$ e $\overline{M_3M_4}$? $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{15}{16} = 0{,}9375\right)$"; "Qual é a soma das medidas dos infinitos segmentos $\overline{AM_1}$, $\overline{M_1M_2}$, $\overline{M_2M_3}$, …? (Como a união dos infinitos segmentos $\overline{AM_1}$, $\overline{M_1M_2}$, $\overline{M_2M_3}$, … é o segmento $\overline{AB}$, concluímos que a soma das medidas desses infinitos segmentos é 1.)". Comente que, adicionando uma quantidade cada vez maior de medidas dos segmentos $\overline{AM_1}$, $\overline{M_1M_2}$, $\overline{M_2M_3}$, …, nos aproximaremos "tanto quanto quisermos" da medida 1 do segmento $\overline{AB}$. Por isso, dizemos que o limite da soma dos infinitos termos da P.G. $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots\right)$ é 1. Indicando esse limite pelo símbolo S_∞, temos que $S_\infty = 1$. Para abreviar, chamaremos esse limite simplesmente de soma dos infinitos termos da P.G. $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots\right)$ e escrevemos: $S_\infty = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \dots = 1$

No **exercício proposto 74**, oriente os estudantes a refletirem sobre as práticas predatórias de pesca, como o uso de cianeto e explosivos. Explique que essas técnicas, apesar de facilitarem a captura dos peixes, causam sérios danos aos ecossistemas marinhos e são consideradas insustentáveis. Promova discussões sobre os impactos ambientais dessas práticas, como a destruição de hábitats e a ameaça à biodiversidade. Se julgar oportuno, proponha uma pesquisa sobre métodos de pesca sustentáveis e sobre como a conservação dos oceanos é essencial para a manutenção da vida marinha e dos recursos pesqueiros. Ao explorar esse tema, contribuímos para o desenvolvimento do **ODS 14**.

No tópico **A progressão geométrica e a função exponencial**, comente que a representação gráfica de uma P.G. $(a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n, \dots)$, é formada pelos pontos (n, a_n) do plano cartesiano. Considerando a P.G. (2, 4, 8, 16, …), proponha as atividades a seguir.

a. Represente graficamente essa P.G. e obtenha o seu termo geral.

b. No mesmo plano cartesiano em que foi representada a P.G., construa o gráfico da função $f(x) = 2^x$.



ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

Observando que os pontos do gráfico da P.G. pertencem ao gráfico da função f, generalize: a representação gráfica de uma P.G. $(a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n, \dots)$ de razão q, com $q > 0$ e $q \neq 1$, é formada por pontos do gráfico da função exponencial dada por $y = \frac{a_1}{q} \cdot q^x$. Dessa maneira, algumas importantes propriedades da função exponencial podem ser aplicadas na resolução de problemas envolvendo progressões geométricas.

Referências suplementares

EVANS, C. L. **A história desconhecida das mulheres que criaram a internet**. Rio de Janeiro: BestSeller, 2022.

O autor apresenta a luta das mulheres que estiveram por trás da criação da internet e suas histórias de vida.

SANTOS, D. F. **Geometria africana**: uma abordagem etnomatemática para o ensino de matemática. São Paulo: Quirino Edições, 2020.

A autora descreve a Geometria Sona com enfoque nas manifestações matemáticas encontradas nos sona: desenhos africanos feitos na areia, utilizando como base os estudos do pesquisador holandês Paulus Gerdes.

CAPÍTULO 2 Trigonometria no triângulo retângulo

Objetivos

Ao final do capítulo, espera-se que o estudante esteja apto a:

- Definir seno, cosseno e tangente de um ângulo agudo no triângulo retângulo.
- Aplicar as razões trigonométricas em cálculos de distâncias e ângulos.
- Demonstrar a relação entre seno, cosseno e tangente de um ângulo agudo.
- Demonstrar as relações entre o seno e o cosseno de ângulos complementares.
- Aplicar a tabela trigonométrica dos ângulos notáveis na resolução de problemas.

Habilidades e competências específicas da BNCC

A partir da leitura e interpretação de textos que envolvem distâncias entre a Terra e a Lua ou na velocidade de transmissão de fibras ópticas, contribuímos para o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT103** e da **competência específica 1**. Ao apresentar e explorar as razões trigonométricas de maneira que os estudantes possam utilizar esse conhecimento elaborando e resolvendo problemas em contextos diversos, contribuímos para o desenvolvimento das habilidades **EM13MAT308** e **EM13MAT314** e a **competência específica 3**.

Sugestões de encaminhamento dos conteúdos

A partir da **abertura**, verifique se os estudantes identificam outros contextos que poderiam aplicar conhecimentos de Trigonometria. Nesse momento, não é necessário que calculem as distâncias entre os pontos *A* e *B* mencionados no **Além da teoria**, é suficiente que retomem algumas relações trigonométricas que já conheçam.

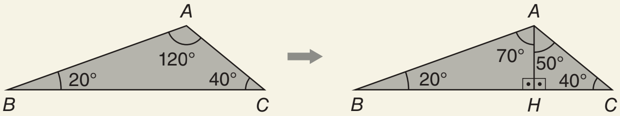
2. Razões trigonométricas no triângulo retângulo

Comente que a ideia de relacionar as medidas dos lados com as medidas dos ângulos internos de triângulos retângulos por meio de semelhança de triângulos levou alguns matemáticos a construir quadros com as razões entre as medidas dos lados de triângulos retângulos para diferentes medidas de ângulos agudos.

Medida do ângulo	**Razão entre as medidas dos lados do triângulo retângulo**		
	$\frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}}$	$\frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}}$	$\frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}}$
20°	0,34	0,94	0,36
30°	0,50	0,87	0,58
50°	0,77	0,64	1,19

Para distinguir essas razões de maneira simples, criou-se um nome para cada uma delas, em que sen α, cos α e tg α são abreviações das expressões: seno de α, cosseno de α e tangente de α, respectivamente.

No boxe **Reflexão**, da página 54, é necessário considerar que qualquer triângulo pode ser separado, por uma de suas alturas, em dois triângulos retângulos. Observe o exemplo a seguir.



MARIO MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

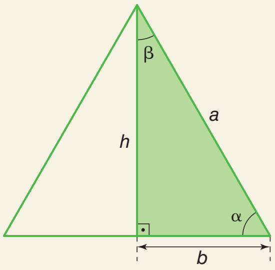
Assim, se conhecermos as relações entre as medidas dos ângulos internos e as medidas dos lados de um triângulo retângulo, conheceremos as relações entre as medidas dos ângulos internos e as medidas dos lados de um triângulo qualquer.

A situação apresentada no **exercício proposto 6** explora as normas técnicas para a construção de rampas de acessibilidade. Aproveite esse momento para conversar com os estudantes sobre essas regras e sobre a acessibilidade no espaço escolar e no município em que moram. Perguntem se identificam espaços adaptados e o que poderia ser modificado para esta finalidade. Aproveite para apresentar o **Vídeo: Acessibilidade nas construções** que traz mais informações sobre os cálculos que devem ser aplicados para a determinação de diferentes medidas nas construções. Ao explorar essa temática, favorecemos o trabalho com o **ODS10** e o **TCT Educação em Direitos Humanos**, além da **competência geral 10**.

No tópico **Relação entre o seno, o cosseno e a tangente de um ângulo agudo**, com a participação dos estudantes, demonstre que $\text{tg}\ \alpha = \frac{\text{sen}\ \alpha}{\cos \alpha}$, para qualquer ângulo agudo de medida α. É importante englobar o teorema de Pitágoras nesse estudo.

No boxe **Mentes brilhantes**, apresentamos um texto que traz as aplicações dos conceitos matemáticos no desenvolvimento da tecnologia. É possível que os estudantes não saibam sobre o uso de cabos submarinos de fibra óptica para a conexão da internet. Aproveite esse momento para apresentar o **Mapa clicável: Cabos submarinos de informática**, que traz informações sobre o uso desses cabos e a importância da Praia do Futuro, em Fortaleza, como ponto de interconexão desses cabos.

No tópico **Ângulos notáveis**, ao trabalhar os ângulos de 30° e de 60°, desenhe na lousa um triângulo equilátero de lado *a*, indicando por α a medida de um ângulo interno, por *h* a medida de uma altura, por β a medida de um ângulo agudo que essa altura forma com um lado e por *b* a medida do segmento de reta com extremos no pé da altura e em um vértice da base.



ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

Peça aos estudantes que calculem:

- a medida α, em grau; (60°)
- a medida β, em grau; (30°)
- a medida *b*, em função de *a*; $\left(\frac{a}{2}\right)$
- a medida *h*, em função de *a*; $\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$
- sen 30°, cos 30°, tg 30°, sen 60°, cos 60°, tg 60°.
  ($\text{sen}\ 30° = \frac{1}{2}$, $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\text{tg}\ 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\text{sen}\ 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 60° = \frac{1}{2}$, $\text{tg}\ 60° = \sqrt{3}$)

Sistematize esses valores e construa o quadro trigonométrico dos ângulos notáveis na lousa com a participação dos estudantes.

Matemática sem fronteiras

Nesta seção, exploramos textos sobre aplicações práticas do assunto desenvolvido no capítulo. O conteúdo apresentado tem dois objetivos: contextualizar a teoria matemática por meio de situações reais e despertar a curiosidade dos estudantes para aplicações mais elaboradas. Nesse caso, exploramos uma aplicação da Trigonometria no cálculo da distância da Terra à Lua.

O tema da seção proporciona a investigação de procedimentos para solucionar uma demanda marcante na evolução da Ciência, além de promover a avaliação de aplicações do conhecimento científico no desenvolvimento de cálculos e teorias, trabalhando aspectos da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias.

Vale destacar que a aplicação de conhecimentos de Trigonometria na Astronomia é uma prática antiga e que possibilitou um vasto acúmulo de conhecimento sobre os astros, antes mesmo da invenção de telescópios, sondas e satélites.

Sugerimos que o professor oriente os estudantes a ler o texto e a resolver, em grupos, as atividades propostas.

Se julgar oportuno, leia o texto **A tábua de cordas de Ptolomeu**, que mostra como Ptolomeu construiu uma tabela trigonométrica indo de 0,5° a 180° com acréscimos de 0,5°. Disponível em: https://www.ufrgs.br/espmat/disciplinas/geotri2014/modulo5/cordaptolomeu2.html. Acesso em: 24 set. 2024.

Referência suplementar

LOPES, M. M. Sequência didática para o ensino de trigonometria usando o *software* GeoGebra, **Bolema**, Rio Claro (SP), v. 27, n. 46, p. 631-644, ago. 2013.

Artigo com sugestões de atividades envolvendo a trigonometria e o uso de *software*.

CAPÍTULO 3

Circunferência trigonométrica: seno e cosseno

Objetivos

Ao final do capítulo, espera-se que o estudante esteja apto a:

- Definir grau e radiano e converter medidas de grau para radiano e vice-versa.
- Associar medidas em grau ou radiano a pontos da circunferência trigonométrica.
- Associar números reais a pontos da circunferência trigonométrica.
- Transitar pelas simetrias na circunferência trigonométrica.
- Definir seno e cosseno de um arco trigonométrico.
- Calcular senos e cossenos de arcos trigonométricos por meio da redução ao 1º quadrante.
- Aplicar a relação fundamental da Trigonometria.
- Resolver equações trigonométricas em um intervalo limitado e em $\mathbb{R}$.

Habilidades e competências específicas da BNCC

Ao resolver e elaborar problemas em contextos que envolvem fenômenos periódicos reais e ao ser explorada uma atividade que propõe a construção de um fluxograma, contribuímos para o desenvolvimento das habilidades **EM13MAT306** e **EM13MAT315** e da **competência específica 3**.

No boxe **Conectado**, apresentamos uma proposta de atividade que trabalha com conceitos iniciais de linguagem de programação na implementação de algoritmos, o que contribui para o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT405** e **competência específica 4**.

Sugestões de encaminhamento dos conteúdos

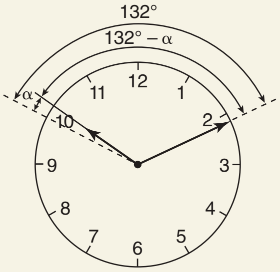
A **abertura** explora alguns problemas causados pelo crescente número de satélites em órbita terrestre e relaciona o plano de órbita circular de um satélite com um sistema cartesiano, o que permite integrar conceitos matemáticos e físicos. A imagem de um satélite em órbita serve como ponto de partida para discutir não apenas a matemática envolvida nas trajetórias orbitais, mas também o impacto tecnológico desses satélites no cotidiano, como em telecomunicações, meteorologia e navegação. Ao explorar esse assunto, favorecemos o desenvolvimento do **ODS 9** e do **TCT Ciência e Tecnologia**. Além disso, favorecemos o desenvolvimento da **competência geral 2**, ao analisar criticamente os impactos tecnológicos no cotidiano; da **competência geral 4**, ao discutir o papel dos satélites, explorando a influência das tecnologias digitais e de comunicação na vida moderna; da **competência geral 7**, ao construir argumentos com base em dados científicos sobre as órbitas dos satélites e seu impacto tecnológico; e da **competência geral 10**, ao refletir sobre o papel da ciência e da tecnologia na preservação de recursos naturais e na sustentabilidade.

O tema representa uma oportunidade para trabalhar com a área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias (componente curricular Física), aprofundando o estudo de órbitas geoestacionárias e sua importância para a manutenção de sistemas de comunicação e monitoramento global.

Uma sugestão para enriquecer o estudo dessa abertura é solicitar aos estudantes que discutam, em grupos, as questões propostas no boxe **Além da teoria**.

Aproveite para propor aos estudantes que acessem o **Vídeo: Satélites orbitando o planeta Terra**. Esse recurso aborda a história dos satélites artificiais, alguns dados atuais sobre eles e suas diversas funções.

1. O radiano, unidade de medida de arco e de ângulo



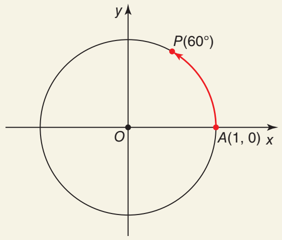
FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

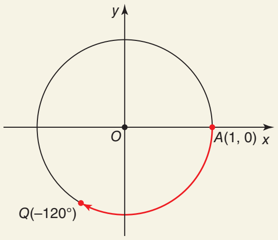
No tópico **Transformações de unidades**, pergunte: "Qual é a medida em grau de um arco de π rad? (180°)". A partir dessa equivalência, apresente as transformações de unidades. Um problema interessante pode ser proposto neste momento: Qual é a medida, em radiano, do ângulo formado pelos ponteiros das horas e dos minutos de um relógio às 10 h 12 min?

Resolvendo por meio de regra de três, obtemos $\alpha = 6°$ e, portanto, a medida do ângulo formado pelos ponteiros é $132° - 6°$, ou seja, 126°. Transformando 126° em radiano, obtemos $\frac{7\pi}{10}$ rad.

2. Circunferência trigonométrica

No tópico **Arcos trigonométricos**, ressalte que, ao nos referirmos a um arco trigonométrico, estamos nos referindo a um arco orientado cuja origem é o ponto $A(1, 0)$ da circunferência trigonométrica. Assim, os arcos trigonométricos de 60° e de $-120°$ são os arcos $\overset{\frown}{AP}$ e $\overset{\frown}{AQ}$ representados nas figuras a seguir.





ILUSTRAÇÕES: ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

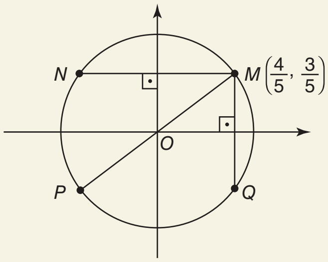
No tópico **Ângulos côngruos**, explique que a palavra "côngruos" não tem nada a ver com congruência de figuras geométricas, mas, sim, com congruência numérica. Dois arcos trigonométricos são côngruos quando a diferença entre suas medidas é da forma $k \cdot 2\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$.

4. Seno e cosseno de um arco trigonométrico

No boxe **Mentes brilhantes**, explore a importância histórica de Hiparco de Niceia no desenvolvimento da Trigonometria, destacando como ele utilizou conceitos babilônicos para dividir a circunferência em 360 graus, o que influenciou diretamente a cartografia moderna, especialmente na criação dos paralelos e meridianos. Incentive os estudantes a refletirem sobre como esses conhecimentos matemáticos antigos continuam a impactar diversas áreas, como Geografia e Astronomia. Além disso, comente que a construção das tabelas de cordas de Hiparco e Ptolomeu está relacionada ao estudo das razões trigonométricas que os estudantes aprendem atualmente, estabelecendo uma conexão entre a História da matemática e os conhecimentos de Matemática utilizados pelos estudantes.

5. Redução ao 1º quadrante: seno e cosseno

Pode-se iniciar o assunto desse tópico enfatizando que as reduções ao 1º quadrante recaem em problemas conforme o seguinte exemplo: Na circunferência trigonométrica a seguir, determine as coordenadas dos pontos *N*, *P* e *Q*.



Resposta: $N\left(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$, $P\left(-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right)$ e $Q\left(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right)$

Ressalte que os pontos simétricos em relação ao eixo das ordenadas têm abscissas opostas e ordenadas iguais; pontos simétricos em relação à origem do sistema têm abscissas opostas e ordenadas opostas; pontos simétricos em relação ao eixo das abscissas têm abscissas iguais e ordenadas opostas; o seno (ou cosseno) de um arco de medida α do 2º, 3º ou 4º quadrantes têm o mesmo valor absoluto que o seno (ou cosseno) do arco correspondente no 1º quadrante; logo, para calcular o sen α (ou cos α) tomamos o valor do seno (ou cosseno) do arco correspondente no 1º quadrante e atribuímos a esse valor um sinal (+ ou −), de acordo com o quadrante em que está o arco de medida α.

7. Equações trigonométricas

Se julgar necessário, revise o quadro trigonométrico dos arcos notáveis, as simetrias de pontos na circunferência trigonométrica (α, $\pi - \alpha$, $\pi + \alpha$, $2\pi - \alpha$) e as coordenadas dos pontos $A(1, 0)$, $B(0, 1)$, $A'(-1, 0)$ e $B'(0, -1)$, lembrando que a abscissa de cada ponto é o cosseno e a ordenada é o seno do arco trigonométrico que tem esse ponto como extremo.

O fato apresentado no boxe **Reflexão** da página 90, que também ocorre para o cosseno e a tangente, é explicado pelas funções trigonométricas inversas, que resumimos a seguir.

Restringindo as funções seno, cosseno e tangente aos domínios $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $[0, \pi]$, $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, respectivamente, obtemos as funções inversas do seno, do cosseno e da tangente restritas a esses domínios, chamadas de arco-seno, arco-cosseno e arco-tangente, respectivamente. Assim:

- arcsen $\left(\frac{1}{2}\right)$ é o arco cujo seno é $\frac{1}{2}$ no domínio $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, ou seja, arcsen $\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$ ou, em grau, arcsen $\left(\frac{1}{2}\right) = 30°$. Por isso, ao digitar em uma calculadora a tecla $\boxed{\text{sin}^{-1}}$, depois um número do intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ e, finalmente, a tecla $\boxed{=}$ surgirá no visor uma única medida de ângulo. Essa medida é o arcsen $\left(\frac{1}{2}\right)$.
- arccos $\left(-\frac{1}{2}\right)$ é o arco cujo cosseno é $-\frac{1}{2}$ no domínio $[0, \pi]$, ou seja, arccos $\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$ ou, em grau, arccos $\left(-\frac{1}{2}\right) = 120°$.
- arctg 1 é o arco cuja tangente é 1 no domínio $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, ou seja, arctg $1 = \frac{\pi}{4}$ ou, em grau, arctg $1 = 45°$.

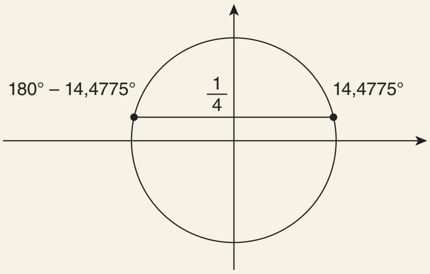
O conteúdo do boxe **Trabalho e juventudes** aborda a atuação de um engenheiro cartógrafo apresentando funções dessa profissão. Solicite aos estudantes que relatem o que sabem sobre a profissão de engenheiro cartógrafo. Incentive todos a participar e a argumentar para justificar suas opiniões. Pode-se aprofundar o assunto, propondo que citem algumas habilidades que precisam ser desenvolvidas para alguém se tornar engenheiro cartógrafo. Após a leitura e a discussão inicial, peça aos estudantes que pesquisem mais informações sobre essa profissão, façam um resumo da pesquisa e compartilhem-na com os demais colegas. Ao explorar esse tema, contribuímos para o desenvolvimento do **TCT Trabalho** e da **competência geral 6**, pois os estudantes podem se apropriar de procedimentos adotados no mundo do trabalho.

Em resposta à questão para o boxe **Reflexão** anterior, explicamos o que são as funções arco seno, arco cosseno e arco tangente. Aplicando esses conceitos, vamos resolver a questão desse boxe **Reflexão** da página 91 de duas maneiras:

(1) Usando a calculadora

Ao digitar em uma calculadora a tecla $\boxed{\text{sin}^{-1}}$, depois o número $\frac{1}{4}$ e, finalmente, a tecla $\boxed{=}$, surgirá no visor a medida 14,4775°, aproximadamente. Essa medida é o arcsen $\left(\frac{1}{4}\right)$, ou seja, é a medida do intervalo $[-90°, 90°]$ cujo seno é $\frac{1}{4}$. A outra medida da primeira volta positiva que tem o seno igual a $\frac{1}{4}$ é dada por $180° - 14{,}4775° = 165{,}5225°$.

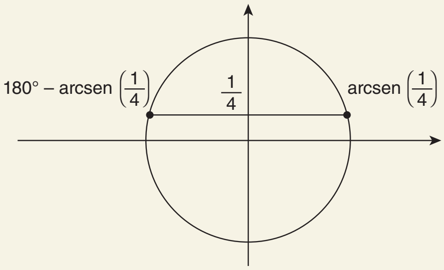
ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA



Concluímos, então, que o conjunto solução S, com valores aproximados, é dado por: $S = \{14{,}4775°, 165{,}5225°\}$

(2) Sem o uso da calculadora

Deixando indicado o arcsen $\left(\frac{1}{4}\right)$, temos:



ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

Concluímos, então, que o conjunto solução S é dado por: $S = \left\{\text{arcsen}\left(\frac{1}{4}\right), 180° - \text{arcsen}\left(\frac{1}{4}\right)\right\}$

Matemática sem fronteiras

Nessa seção, apresentamos uma aplicação da Trigonometria no cálculo de distâncias no Sistema Solar. O texto e as atividades favorecem o trabalho com a área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias ao promover a oportunidade de os estudantes utilizarem interpretações sobre a dinâmica do Cosmos e o cálculo de distâncias na construção de argumentos que permitam resolver as atividades. Esta pode ser mais uma oportunidade para demonstrar como os conhecimentos de Trigonometria foram essenciais para o avanço da Astronomia séculos antes da invenção das primeiras lunetas e telescópios. Essa contextualização reforça a importância histórica e atual da Trigonometria nas ciências espaciais, mostrando sua relevância para o entendimento do universo.

Referência suplementar

MOURA, V. **O que é um Satélite?** São Paulo: Editora XYZ, 2020.

A obra oferece uma visão detalhada sobre o funcionamento e a importância dos satélites, com foco em satélites geoestacionários, explicando suas órbitas, utilidades e impacto na vida moderna, desde telecomunicações até a previsão do tempo.

CAPÍTULO 4

Outras razões trigonométricas e adição de arcos

Objetivos

Ao final do capítulo, espera-se que os estudantes estejam aptos a:

- Discorrer sobre a definição da tangente de um arco, a variação do sinal e suas simetrias.
- Demonstrar que a tangente de um arco trigonométrico pode ser obtida como razão de seno pelo cosseno do arco.
- Calcular a tangente de arcos trigonométricos por meio da redução ao 1º quadrante.
- Aplicar as fórmulas de adição de arcos e de arco duplo na resolução de problemas.
- Resolver equações trigonométricas em um intervalo limitado e em $\mathbb{R}$.

Habilidades e competências específicas da BNCC

O estudo das funções trigonométricas também pode ser associado às noções de transformações isométricas como a translação, sendo possível desenvolver a habilidade **EM13MAT105** e a **competência específica 1**.

Ao realizar uma pesquisa acerca do discurso de ódio e organizar os dados em planilha eletrônica a fim de os analisar e compartilhar, os estudantes desenvolvem aspectos da habilidade **EM13MAT203** e da **competência específica 2**.

A partir do estudo da tangente de um arco, os estudantes irão mobilizar e aplicar conhecimentos a respeito de fenômenos periódicos e das relações métricas relacionadas ao seno e ao cosseno, auxiliando no desenvolvimento das habilidades **EM13MAT306** e **EM13MAT308** e da **competência específica 3**.

Em diferentes momentos, são propostas atividades que estimulam o pensamento computacional por meio da construção de algoritmos e fluxogramas, desenvolvendo, assim, as habilidades **EM13MAT315** e **EM13MAT405** e as **competências específicas 3** e **4**.

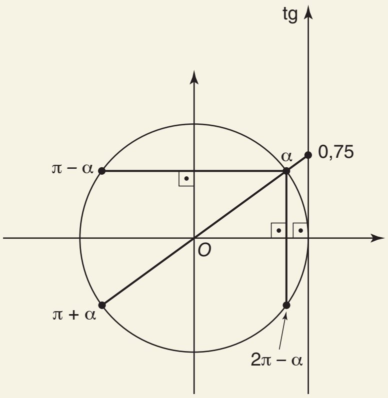
Sugestão de encaminhamento dos conteúdos

2. Redução ao 1º quadrante

Ressalte que o objetivo do estudo desse tópico é relacionar a tangente de um arco trigonométrico do 2º, do 3º ou do 4º quadrante com o seno e o cosseno do arco correspondente no 1º quadrante.

Pode-se iniciar o assunto com base no exercício a seguir, enfatizando que as reduções ao 1º quadrante recaem em problemas deste tipo:

Na circunferência trigonométrica a seguir, determine: tg α, tg$(\pi - \alpha)$, tg$(\pi + \alpha)$ e tg$(2\pi - \alpha)$.



(tg $\alpha = 0{,}75$, tg$(\pi - \alpha) = -0{,}75$, tg$(\pi + \alpha) = 0{,}75$ e tg$(2\pi - \alpha) = -0{,}75$)

Ressalte que:

- obedecidas as condições de existência, arcos trigonométricos com extremidades simétricas em relação à origem do sistema têm a mesma tangente, e arcos com extremidades simétricas em relação a um dos eixos coordenados têm tangentes opostas;
- a tangente de um arco de medida α do 2º, 3º ou 4º quadrante tem o mesmo valor absoluto que a tangente do arco correspondente no 1º quadrante; logo, para calcular a tg α, tomamos o valor da tangente do arco correspondente no 1º quadrante e atribuímos a esse valor um sinal (+ ou −), de acordo com o quadrante em que está o arco de medida α.

Revise a tangente dos arcos notáveis e as simetrias de pontos na circunferência trigonométrica.

4. Secante, cossecante e cotangente

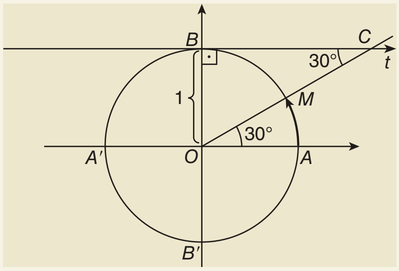
Se houver possibilidade, mostre as interpretações geométricas da cotangente, da secante e da cossecante. Isso pode ser feito por meio dos exercícios a seguir.

- O eixo real t, de origem B, tangencia a circunferência trigonométrica a seguir. Desenhe nessa figura o arco $\widehat{AM}$, de medida 30°, e trace a reta $\overleftrightarrow{OM}$ que intercepta t em C.

  a. Qual é a medida do ângulo $O\hat{C}B$?

  b. Mostre que: $BC = \text{cotg } 30°$

  Resolução



a. $m(O\hat{C}B) = 30°$

b. No triângulo BOC, temos:

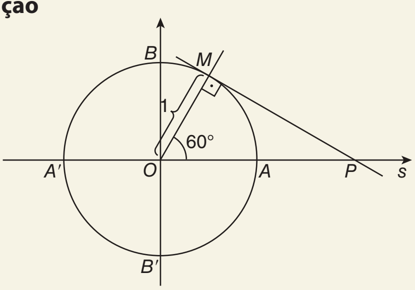
$$\text{tg } 30° = \frac{1}{BC} \Rightarrow BC = \frac{1}{\text{tg } 30°} \text{ e, portanto: } BC = \text{cotg } 30°$$

O eixo t é chamado de **eixo das cotangentes**. A cotangente de um arco $\widehat{AM}$, com $M \not\equiv A$ e $M \not\equiv A'$, é a abscissa do ponto C, intersecção do eixo t com a reta $\overleftrightarrow{OM}$.

- Em uma circunferência trigonométrica desenhe o arco $\widehat{AM}$, de medida 60°, e trace por M a reta r tangente à circunferência, indicando por P a intersecção de r com o eixo s das abscissas.

  Mostre que: $OP = \sec 60°$

  Resolução



No triângulo OMP, temos:

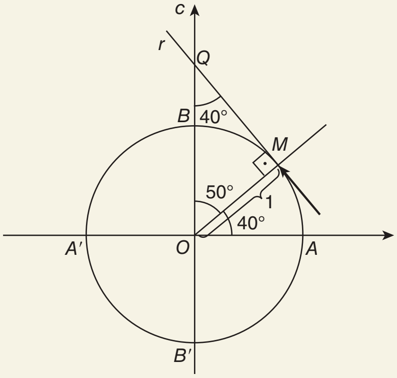
$$\cos 60° = \frac{1}{OP} \Rightarrow OP = \frac{1}{\cos 60°} \text{ e, portanto: } OP = \sec 60°$$

O eixo s é chamado de **eixo das secantes**. A secante de um arco $\widehat{AM}$, com $M \not\equiv B$ e $M \not\equiv B'$, é a abscissa do ponto P, intersecção do eixo s com a reta que tangencia a circunferência trigonométrica no ponto M.

- Em uma circunferência trigonométrica, desenhe o arco $\widehat{AM}$, de medida 40°, e trace por M a reta r tangente à circunferência, indicando por Q a intersecção de r com o eixo c das ordenadas.

  Mostre que: $OQ = \text{cossec } 40°$

  Resolução



ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

No triângulo OMQ, temos:

$$\text{sen } 40° = \frac{1}{OQ} \Rightarrow OQ = \frac{1}{\text{sen } 40°} \text{ e, portanto: } OQ = \text{cossec } 40°$$

O eixo c é chamado de **eixo das cossecantes**. A cossecante de um arco $\widehat{AM}$, com $M \not\equiv A$ e $M \not\equiv A'$, é a ordenada do ponto Q, intersecção do eixo c com a reta que tangencia a circunferência trigonométrica no ponto M.

5. Seno, cosseno e tangente da soma de arcos

Inicie o assunto por meio do texto introdutório deste item.

Pergunte:

- A sentença $\text{sen}(a + b) = \text{sen } a + \text{sen } b$ é verdadeira para quaisquer valores de a e b?
- Peça aos estudantes que atribuam valores a a e b.

Após a discussão, conclua que a sentença $\text{sen}(a + b) = \text{sen } a + \text{sen } b$ não é uma identidade, pois existem valores que, atribuídos a a e b, tornam falsa a sentença, por exemplo, $a = \pi$ e $b = \frac{\pi}{2}$.

6. Seno, cosseno e tangente do arco duplo

Inicie o assunto com o texto introdutório deste item. Pergunte:

- A sentença $\text{sen } 2x = 2 \cdot \text{sen } x$ é uma identidade em $\mathbb{R}$?
- A sentença $\cos 2x = 2 \cdot \cos x$ é uma identidade em $\mathbb{R}$?
- A sentença $\text{tg } 2x = 2 \cdot \text{tg } x$ torna-se verdadeira para qualquer valor de x que obedeça às condições de existência da tangente?

Peça aos estudantes que atribuam valores a x.

Após a discussão, conclua que a resposta é negativa a todas essas perguntas, por exemplo:

- para $x = 90°$, temos que $\text{sen}(2 \cdot 90°) \neq 2 \cdot \text{sen } 90°$ e $\cos(2 \cdot 90°) \neq 2 \cdot \cos 90°$;
- para $x = 30°$, temos que $\text{tg}(2 \cdot 30°) \neq 2 \cdot \text{tg } 30°$.

Assim como desenvolvemos o seno, o cosseno e a tangente do arco duplo, podemos desenvolver essas funções para arcos triplos, conforme proposto no boxe **Reflexão**. Por exemplo, para o arco triplo, temos:

1. $\text{sen } 3x = \text{sen } (x + 2x) =$

$= \text{sen } x \cdot \cos^2 x + \text{sen}^2 x \cdot \cos x =$

$= \text{sen } x \cdot (\cos^2 x - \text{sen}^2 x) + 2 \text{ sen } x \cdot \cos x \cdot \cos x =$

$= \text{sen } x \, (1 - \text{sen}^2 x - \text{sen}^2 x) + 2 \cdot \text{sen } x \cdot \cos^2 x =$

$= \text{sen } x \, (1 - 2 \text{ sen}^2 x) + 2 \text{ sen } x \, (1 - \text{sen}^2 x) =$

$= \text{sen } x - 2 \text{ sen}^3 x + 2 \text{ sen } x - 2 \text{ sen}^3 x$

$\therefore \text{sen } 3x = 3 \text{ sen } x - 4 \text{ sen}^3 x$

2. $$\cos 3x = \cos(x + 2x) = \cos x \cdot \cos 2x - \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} 2x =$$
$$= \cos x\,(\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x) - \operatorname{sen} x \cdot 2 \cdot \operatorname{sen} x \cdot \cos x =$$
$$= \cos x\,(\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x) - 2 \cdot \operatorname{sen}^2 x \cdot \cos x =$$
$$= \cos x\,[\cos^2 x - (1 - \cos^2 x)] - 2(1 - \cos^2 x)\cos x =$$
$$= \cos x\,[2\cos^2 x - 1] - 2\cos x\,(1 - \cos^2 x) =$$
$$= 2\cos^3 x - \cos x - 2\cos x + 2\cos^3 x =$$
$$= 4\cos^3 x - 3\cos x$$

3. $$\operatorname{tg} 3x = \operatorname{tg}(x + 2x) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x}{1 - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} 2x} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \operatorname{tg} 3x = \frac{\operatorname{tg} x + \dfrac{2\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}}{1 - \operatorname{tg} x \cdot \dfrac{2\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \operatorname{tg} 3x = \frac{3\operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^3 x}{1 - 3\operatorname{tg}^3 x}$$

Educação midiática

Nesta seção, os objetivos são desenvolver a competência leitora e discutir a liberdade de expressão, sua importância para a democracia, os limites que devem ser respeitados em seu exercício, os discursos de ódio e como enfrentá-los.

A discussão sobre o tema sempre esteve em pauta, associada à liberdade de imprensa, aos direitos individuais e ao exercício pleno da cidadania.

No entanto, após o crescimento das mídias sociais nos últimos anos, os riscos às sociedades democráticas pela difusão dos discursos de ódio, notícias falsas e ataques à reputação das pessoas fizeram com que o tema se destacasse em importância, o que justifica seu estudo.

Incentive os estudantes a refletir e a verificar a veracidade das informações antes de compartilhá-las em grupos de mensagens e mídias sociais. Conversar com eles sobre esse tema favorece o desenvolvimento dos **TCTs Vida Familiar e Social** e **Educação em Direitos Humanos**.

O tema abordado também pode envolver a discussão sobre o *bullying* virtual, ao qual cada vez mais pessoas estão sujeitas com a divulgação, nas redes sociais, de ofensas e mensagens de ódio, entre outras agressões que devem ser combatidas em prol do respeito à pessoa humana, sua dignidade e saúde mental. Para conversar sobre este assunto, organize a turma em uma roda de conversa e permita que todos possam compartilhar opiniões e relatos sobre o tema.

Referência suplementar

GODOY, E. V.; PEREIRA, S. A. Decolonialidade na educação matemática: uma revisão sistemática de literatura. **Amazônia: Revista de Educação em Ciências e Matemática,** v. 19, n. 42, 2023. Disponível em: https://periodicos.ufpa.br/index.php/revistaamazonia/article/view/13383. Acesso em: 25 set. 2024.

Neste artigo, as autoras identificam os conceitos decoloniais em consonância com a Educação Matemática.

CAPÍTULO 5

Funções trigonométricas e resolução de triângulos

Objetivos

Ao final do capítulo, espera-se que o estudante esteja apto a:

- Construir o gráfico das funções $f(x) = a + b\operatorname{sen}(mx + q)$ e $g(x) = a + b\cos(mx + q)$, com $\{a, b, m, q\} \subset \mathbb{R}$, $a \neq 0$ e $b \neq 0$.
- Calcular o período de funções do tipo $f(x) = a + b\operatorname{sen}(mx + q)$ e $g(x) = a + b\cos(mx + q)$, com $\{a, b, m, q\} \subset \mathbb{R}$, $a \neq 0$ e $b \neq 0$.
- Determinar a lei de formação $f(x) = a + b\operatorname{sen}(mx + q)$ e $g(x) = a + b\cos(mx + q)$, com $\{a, b, m, q\} \subset \mathbb{R}$, $a \neq 0$ e $b \neq 0$, a partir do gráfico da função correspondente.
- Equacionar movimentos periódicos.
- Aplicar a lei do seno e do cosseno no cálculo de distâncias e de medidas de ângulos.
- Calcular a área de um triângulo em função das medidas de dois lados e da medida do ângulo formado por eles.

Habilidades e competências específicas da BNCC

Neste capítulo, o estudo das funções trigonométricas pode ser associado a noções de transformações isométricas, como a translação. Também é possível utilizar contextos de diferentes áreas e aplicações para trabalhar as razões trigonométricas e aprofundar esse conhecimento para o estudo das funções trigonométricas como também interpretar situações relacionadas a fenômenos periódicos em contextos diversos. Assim, este capítulo possibilita o desenvolvimento das habilidades **EM13MAT101**, **EM13MAT105** e **EM13MAT306** e das **competências específicas 1** e **3**.

Sugestões de encaminhamento dos conteúdos

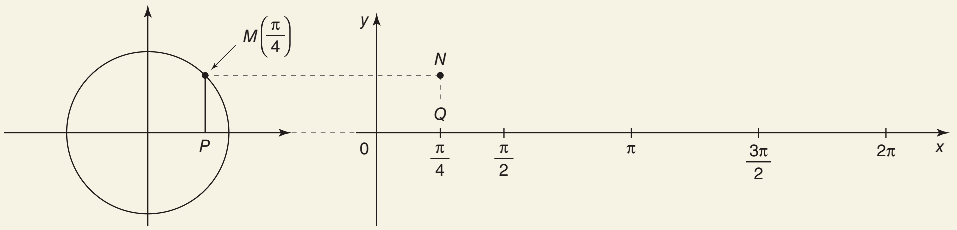
Aproveite o contexto da **abertura** e incentive os estudantes a comentarem a experiência que têm com música. Alguns deles podem conhecer a profissão de DJ ou reconhecer que, em algumas festas, as músicas são tocadas de maneira ininterrupta, como mencionado no texto. Outros podem tocar alguns instrumentos musicais e estarem familiarizados com as frequências sonoras para afinação de instrumentos de cordas, por exemplo. Aproveite para explorar as culturas juvenis dando espaço para que os estudantes compartilhem ou pesquisem conhecimentos acerca desse contexto.

2. Gráfico da função $f(x) = \operatorname{sen} x$

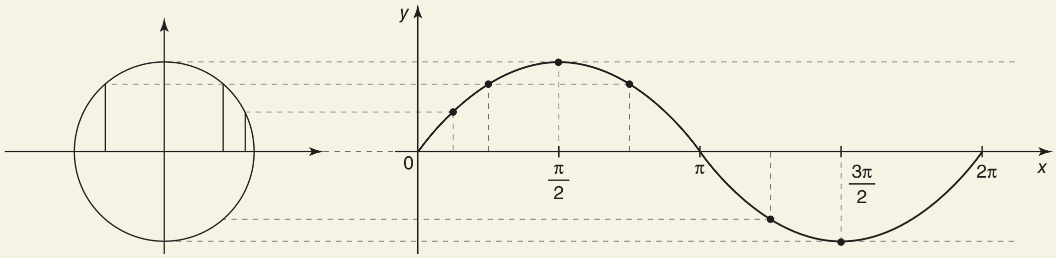
Peça aos estudantes que construam a circunferência trigonométrica e, ao lado dela, um sistema cartesiano de eixos ortogonais, de tal modo que o eixo das abscissas desse sistema esteja contido no prolongamento do eixo dos cossenos e que a unidade nos eixos desse sistema seja igual ao raio da circunferência trigonométrica.

Em seguida, marque no plano cartesiano pontos (x, y) tais que $y = \operatorname{sen} x$. Esses pontos podem ser obtidos geometricamente. Por exemplo, tomando como "valor" de x o ponto $M\left(\frac{\pi}{4}\right)$, tem-se $MP = \operatorname{sen} x$.

Transportando o segmento $\overline{MP}$ para a posição $\overline{NQ}$, conforme a figura a seguir, obtém-se N, que é um ponto do gráfico da função $y = \text{sen}\, x$.



Repita esse procedimento obtendo vários pontos do gráfico, conforme mostra a figura a seguir:



Desse modo, o estudante entende a curvatura do gráfico da função seno. Insista que a figura obtida é apenas um período do gráfico. Na verdade, essa função tem como domínio o conjunto $\mathbb{R}$.

ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

3. Gráfico da função $g(x) = \cos x$

No tópico **Período das funções seno e cosseno**, peça o período p da função $y = \text{sen}\, 4x$, explicando que p é o comprimento do intervalo dos valores de x para os quais o intervalo dos valores de $4x$ tenha comprimento 2π.

$$\left(\textit{Resposta: } p = \frac{2\pi}{4}\right)$$

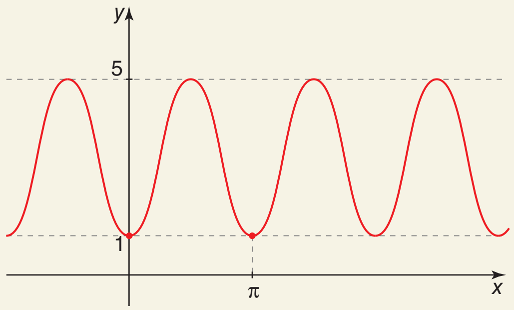
Peça o período p da função $y = \cos(-4x)$, explicando que p é o comprimento do intervalo dos valores de x para os quais o intervalo dos valores de $-4x$ tenha comprimento 2π.

$$\left(\textit{Resposta: } p = \frac{2\pi}{4}\right)$$

Após essa discussão, enfatize que o período da função $y = a + b\,\text{sen}(mx + q)$ ou da função $y = a + b\cos(mx + q)$, em que $\{a, b, m, q\} \subset \mathbb{R}$, com $b \neq 0$ e $m \neq 0$, é o comprimento do intervalo dos valores de x para os quais o intervalo dos valores de $mx + q$ tenha comprimento 2π. Consequentemente, temos: $p = \frac{2\pi}{|m|}$

Explore o conceito de período de uma função em questões envolvendo gráficos, conforme o exemplo a seguir.

- Determine as constantes reais a, b e m na função $f(x) = a + b\cos mx$, dado que o gráfico de f é:



(*Resposta:* $a = 3$, $b = -2$ e $m = \pm 2$)

ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

4. Movimentos periódicos

Ao comentar os exemplos, aproveite e mostre o **Infográfico clicável: Duração do dia: um fenômeno periódico natural** que aborda os ciclos astronômicos do dia e da noite.

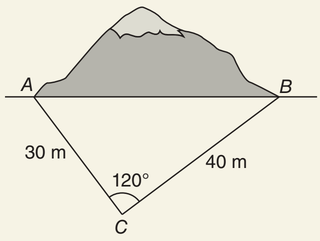
Sobre essa temática, sugerimos a leitura do artigo:

MENEGHELLI, J.; POSSAMAI, J. P. Função seno e cosseno: uma abordagem de ensino através da resolução de problemas. **Revista de Educação, Ciências e Matemática**, v. 11, n. 1, 2021. Disponível em: https://publicacoes.unigranrio.edu.br/recm/article/view/5296. Acesso em: 17 out. 2024.

5. Resolução de triângulos

No tópico **Lei dos cossenos**, motive o estudo da lei dos cossenos com a apresentação de situações práticas. Por exemplo, propor problemas como o indicado a seguir.

Para calcular o comprimento de um túnel que será construído ligando dois pontos, A e B, da base de uma montanha, um engenheiro posicionou-se em um ponto C tal que $m(A\hat{C}B) = 120°$, $AC = 30$ m e $BC = 50$ m, conforme a figura. Qual será o comprimento AB do túnel?



Uma resolução possível é:

$(AB)^2 = 30^2 + 50^2 - 2 \cdot 30 \cdot 50 \cdot \cos 120° \Rightarrow AB = 70$

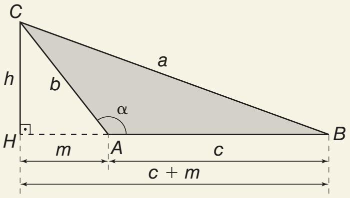
Logo, o túnel terá 70 metros de comprimento.

Demonstramos, no livro do estudante, a lei dos cossenos apenas no caso em que α < 90°. Se achar necessário, apresente a demonstração no caso em que α > 90° e α = 90°.

2º caso: α > 90°

Sejam:

- $\overline{CH}$ a altura relativa ao lado $\overline{AB}$, com $CH = h$;
- $\overline{AH}$ a projeção ortogonal do lado $\overline{AC}$ sobre a reta que contém o lado $\overline{AB}$, com $AH = m$;
- $\overline{BH}$ a projeção ortogonal do lado $\overline{BC}$ sobre a reta que contém o lado $\overline{AB}$, com $BH = c + m$.



ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

Aplicando o teorema de Pitágoras nos triângulos retângulos *HBC* e *HAC*, temos:

$h^2 + (c + m)^2 = a^2 \quad (1)$

$h^2 + m^2 = b^2 \quad (2)$

Subtraindo membro a membro as igualdades (1) e (2), obtemos:

$(c + m)^2 - m^2 = a^2 - b^2$

$\therefore c^2 + 2cm + m^2 - m^2 = a^2 - b^2$

$\therefore a^2 = b^2 + c^2 + 2cm \quad (3)$

No triângulo *HAC*, a medida do ângulo $H\widehat{A}C$ é $180° - α$; portanto:

$$\cos(180° - \alpha) = \frac{m}{b} \Rightarrow m = b \cdot \cos\left(180° - \alpha\right)$$

Como $\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$, a igualdade anterior é equivalente a:

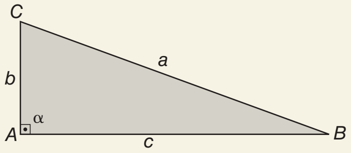
$m = -b \cdot \cos\alpha \quad (4)$

Substituindo (4) em (3), concluímos que:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2cb \cdot \cos\alpha$

3º caso: α = 90°

Observe que o teorema também vale para α = 90°:

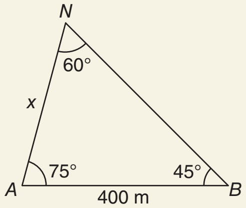


$a^2 = b^2 + c^2 - 2cb \cdot \cos 90°$

Como $\cos 90° = 0$, temos $a^2 = b^2 + c^2$, que é o teorema de Pitágoras.

No tópico **Lei dos senos**, motive o estudo da lei dos senos com a apresentação de uma situação prática. Por exemplo, propor o problema a seguir.

- De um navio *N* avistam-se dois faróis, *A* e *B*, por um ângulo de 60°. Do farol *A* avistam-se o navio e o farol *B* por um ângulo de 75°, conforme mostra a figura. Sabendo que a distância entre os dois faróis é 400 m, calcule a distância do navio ao farol *A*.



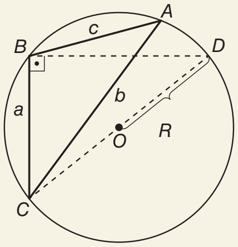
Uma resolução possível é:

$$\frac{x}{\text{sen } 45°} = \frac{400}{\text{sen } 60°} \Rightarrow x = \frac{400\sqrt{6}}{3}$$

Logo, a distância entre o navio e o farol *A* é $\frac{400\sqrt{6}}{3}$ m.

Demonstramos, no livro do estudante, a lei dos senos apenas para o caso em que o centro *O* da circunferência circunscrita é interior ao triângulo. Se achar necessário, apresente os outros dois casos, descritos a seguir.

2º caso: o centro *O* da circunferência circunscrita é um ponto exterior ao triângulo.



Se $\overline{CD}$ é um diâmetro dessa circunferência, o ângulo $C\widehat{B}D$ é reto, pois está inscrito numa semicircunferência. Assim, temos:

$$\text{sen } \widehat{D} = \frac{a}{2R}$$

Contudo, os ângulos $\widehat{A}$ e $\widehat{D}$ são congruentes, pois estão inscritos na circunferência e determinam o mesmo arco. Logo:

$$\text{sen } \widehat{D} = \text{sen } \widehat{A} = \frac{a}{2R} \Rightarrow 2R = \frac{a}{\text{sen } \widehat{A}}$$

Traçando por *A* um diâmetro $\overline{AD'}$, temos de maneira análoga:

$$2R = \frac{b}{\text{sen } \widehat{B}}$$

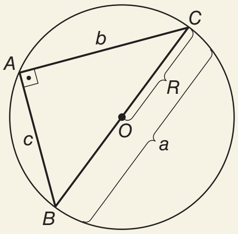
Traçando por *B* um diâmetro $\overline{BD}$, temos de maneira análoga:

$$2R = \frac{c}{\text{sen } \widehat{C}}$$

Concluímos, então:

$$2R = \frac{a}{\text{sen } \widehat{A}} = \frac{b}{\text{sen } \widehat{B}} = \frac{c}{\text{sen } \widehat{C}}$$

3º caso: o centro *O* da circunferência circunscrita pertence a um dos lados do triângulo.



Note que $a = 2R$ e que o ângulo $B\widehat{A}C$ é reto, pois está inscrito em uma semicircunferência. Assim, temos:

$$\text{sen } \widehat{B} = \frac{b}{2R} \Rightarrow 2R = \frac{b}{\text{sen } \widehat{B}} \quad \text{e} \quad \text{sen } \widehat{C} = \frac{c}{2R} \Rightarrow 2R = \frac{c}{\text{sen } \widehat{C}}$$

Como $a = 2R$, temos:

$$\frac{a}{2R} = 1 \text{ sen } 90° = \text{sen } \widehat{A} \Rightarrow 2R = \frac{a}{\text{sen } \widehat{A}}$$

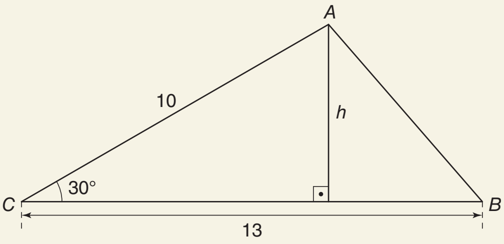
Concluímos, então:

$$2R = \frac{a}{\text{sen } \widehat{A}} = \frac{b}{\text{sen } \widehat{B}} = \frac{c}{\text{sen } \widehat{C}}$$

6. Cálculo da área de um triângulo

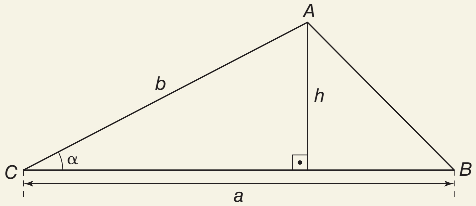
Inicie o assunto pedindo aos estudantes que calculem a medida *h* da altura relativa ao lado $\overline{BC}$ do triângulo:

ILUSTRAÇÕES: ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA



(*Resposta:* $h = 5$)

A seguir, calcule a medida h da altura relativa ao lado $\overline{BC}$ do triângulo:



(*Resposta:* $h = b \text{ sen } \alpha$)

A partir desse resultado, conclua que a área A desse triângulo é dada por: $A = \frac{1}{2}ab \text{ sen } \alpha$.

Referência suplementar

KESSER, A. L. F.; MATHIAS, C. V. Aplicações de funções trigonométricas no estudo de conceitos de Física por meio do Geogebra. *In*: **XII Encontro Nacional de Educação Matemática**; São Paulo: jul. 2016. Disponível em: https://www.sbembrasil.org.br/enem2016/anais/pdf/6001_3231_ID.pdf. Acesso em: 24 set. 2024.

O artigo apresenta uma proposta que pode orientar e incentivar atividades interdisciplinares com a área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias, associadas ao uso de *software* de Geometria dinâmica.

CAPÍTULO 6

Os princípios da Análise combinatória

Objetivos

Ao final do capítulo, espera-se que o estudante esteja apto a:

- Discorrer sobre o conceito de Análise combinatória.
- Aplicar o princípio fundamental da contagem na resolução de problemas.
- Aplicar o princípio aditivo da contagem na resolução de problemas.
- Calcular o fatorial de um número natural e representar, genericamente, o fatorial de um número natural n.
- Resolver equações envolvendo fatoriais de números naturais.

Habilidades e competências específicas da BNCC

Ao abordar os princípios da Análise combinatória apresentando diferentes situações do cotidiano, neste capítulo são trabalhados requisitos prévios para o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT106** e da **competência específica 1**. A partir da proposta de pesquisa acerca de alimentação saudável, é favorecido o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT203** e da **competência específica 2**.

Os conteúdos abordados se relacionam diretamente com o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT310** e da **competência específica 3**, pois são propostas aos estudantes a resolução e a elaboração de problemas de contagem.

Sugestões de encaminhamento dos conteúdos

Na **abertura**, para enriquecer o trabalho com a questão de segurança na rede, sugira aos estudantes que assistam ao filme *Firewall – Segurança em risco* (direção Richard Loncraine, 2006, 105 min).

Nele, o personagem interpretado por Harrison Ford é um especialista em segurança de computadores que construiu a carreira desenvolvendo os mais eficazes sistemas antifraude. O filme retrata os problemas da segurança digital e da espionagem pela internet.

Também é possível propor aos estudantes o acesso ao material **Cartilha de Segurança para Internet**, em que são explorados conceitos de segurança de computadores, temas relacionados a senhas, vulnerabilidade, criptografia, certificados digitais etc. Disponível em: http://cartilha.cert.br. Acesso em: 26 set. 2024.

1. O que é Análise combinatória?

Aproveite as perguntas propostas para que os estudantes possam refletir sobre os métodos eficazes de contagem. Após propor a pergunta 1, apresentada no livro, sugira aos estudantes que assistam ao **Vídeo: Placa de automóvel**, em que é aplicado o princípio multiplicativo para a determinação da quantidade de placas possíveis de ser confeccionadas.

2. O princípio fundamental da contagem

Enuncie o princípio fundamental da contagem.

Uma dúvida comum do estudante é: por que o enunciado do princípio fundamental de contagem explicita a ordem dos elementos? Um exemplo que ajuda a esclarecer essa dúvida é:

- Considere os conjuntos $E = \{1, 2, 3\}$ e $F = \{a, b\}$.
  - **a.** Quantos pares ordenados (x, y) podem ser formados de modo que x pertença a E e y pertença a F?

    Note que estabelecemos uma ordem: x deve pertencer a E, e y deve pertencer a F.

    Assim, a matriz das possibilidades é:

F *E*	*a*	*b*
1	$(1, a)$	$(1, b)$
2	$(2, a)$	$(2, b)$
3	$(3, a)$	$(3, b)$

Temos, então, 3×2 pares ordenados possíveis, ou seja, seis pares possíveis.

b. Quantos pares ordenados (x, y) podem ser formados de modo que x pertença a um dos conjuntos e y pertença ao outro?

Como não foi estabelecida uma ordem, temos duas possibilidades: x pertence a E, e y pertence a F; ou x pertence a F, e y pertence a E. Temos, então, duas matrizes de possibilidades:

E \ *F*	*a*	*b*
1	(1, *a*)	(1, *b*)
2	(2, *a*)	(2, *b*)
3	(3, *a*)	(3, *b*)

ou

F \ *E*	1	2	3
a	(*a*, 1)	(*a*, 2)	(*a*, 3)
b	(*b*, 1)	(*b*, 2)	(*b*, 3)

Logo, o número de pares ordenados que podem ser formados é $3 \times 2 + 2 \times 3$, ou seja, 12.

O **exercício resolvido 1** foi apresentado por meio de passos que podem ser associados aos passos do pensamento computacional. Proponha aos estudantes que leiam com atenção e que apliquem essas estratégias ao resolverem os exercícios propostos.

No boxe **Reflexão**, página 152, o cálculo do número de divisores naturais de um número natural não nulo pode ser feito pelo princípio fundamental da contagem. Por exemplo, para calcular o número de divisores naturais de 2.592, decompomos esse número em fatores primos, obtendo: $2^5 \cdot 3^4$. Logo, qualquer divisor natural desse número é da forma $2^m \cdot 3^p$, em que m e p são números naturais, com $0 \leqslant m \leqslant 5$ e $0 \leqslant p \leqslant 4$. Portanto, há 6 possibilidades para m e 5 possibilidades para p. Assim, pelo princípio fundamental da contagem, multiplicando esses números de possibilidades, $6 \cdot 5$, obtemos o número de divisores naturais de 2.592. Concluímos, então, que o número 2.592 tem 30 divisores naturais.

O **exercício complementar 5** apresenta uma situação envolvendo o sistema de escrita e leitura em Braile. Comente com os estudantes que o sistema Braile de escrita e leitura foi criado há cerca de 200 anos na França. No Brasil, chegou por meio de José Álvares de Azevedo, que aprendeu a técnica ainda criança e se dedicou a disseminá-la, com apoio do Imperial Instituto de Meninos Cegos, hoje Instituto Benjamin Constant (IBC), no Rio de Janeiro. Comente que é com essa combinação de sinais que muitas pessoas cegas conseguem se comunicar por meio da escrita e da leitura. Aproveitando a temática, proponha o ***Podcast*: Um olhar especial para o mundo**, em que apresentamos o relato de Lara Souto Santana, que teve retinopatia da prematuridade e, por esse motivo, tem baixa visão. Após ouvirem o relato, proponha uma roda de conversa sobre os meios disponíveis para acessibilidade que eles conhecem.

Como exemplo, destaque o arquivo de transcrição que acompanha esse *podcast* e é um instrumento de acessibilidade para pessoas surdas. Do mesmo modo, os vídeos disponíveis nesta coleção são acompanhados das audiodescrições das imagens e da janela de libras, que também são instrumentos de acessibilidade.

Referências suplementares

SILVEIRA, A. A.; ANDRADE, S. Ensino-Aprendizagem de Análise Combinatória via Exploração, Resolução e Proposição de Problemas no Ensino Médio. **Revista de Educação Matemática**, [*s. l.*], v. 17. Disponível em: https://www.revistasbemsp.com.br/index.php/REMat-SP/article/view/192. Acesso em: 10 out. 2024.

A pesquisa analisa como uma abordagem em sala de aula mediante Exploração, Resolução e Proposição de problemas pode potencializar o ensino-aprendizagem de Análise Combinatória.

BASNIAK, M.; DOMBROWSKI, A. F. Combinando: um material para ensino de Análise combinatória a estudantes cegos. **ACTIO: docência em ciências**, v. 8., n. 1., 2023. Disponível em: https://periodicos.utfpr.edu.br/actio/article/view/15346. Acesso em: 10 out. 2024.

Este trabalho objetivou desenvolver, na impressora 3D, um material que contribua para o ensino de Análise combinatória a estudantes cegos (especificamente o Princípio Fundamental da Contagem).

CAPÍTULO 7 Agrupamentos e métodos de contagem

Objetivos

Ao final do capítulo, espera-se que o estudante esteja apto a:

- Discorrer sobre os conceitos de arranjo e combinação, diferenciando esses dois tipos de agrupamento.
- Aplicando o princípio fundamental da contagem, calcular o número de: arranjos simples de n elementos tomados p a p; permutações simples de n elementos distintos; permutações com repetição; combinações simples de n elementos tomados p a p.
- Resolver com desembaraço problemas sobre arranjos, permutações e combinações.

Habilidades e competências específicas da BNCC

Ao resolver problemas envolvendo agrupamentos e métodos de contagem e ao ser explorada uma atividade que propõe a análise e a correção de um fluxograma, contribuímos para o desenvolvimento das habilidades **EM13MAT310** e **EM13MAT315** e da **competência específica 3**.

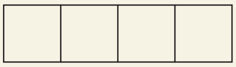
Sugestões de encaminhamento dos conteúdos

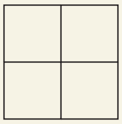
A **abertura** apresenta o famoso teorema das quatro cores. Ao apresentar a história desse teorema, desde a conjectura de Francis Guthrie, em 1852, até a comprovação por Kenneth Appel e Wolfgang Haken, em 1976, com o auxílio de computadores, é possível mostrar a importância da persistência em resolver problemas complexos e a contribuição da tecnologia para a Matemática. Essa abordagem favorece o desenvolvimento da **competência geral 1**, ao integrar conceitos matemáticos com o contexto histórico; e da **competência geral 2**, ao analisar e interpretar um problema complexo.

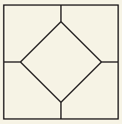
Uma sugestão para o desenvolvimento dessa abertura é pedir aos estudantes que leiam o texto e resolvam a questão proposta no boxe **Além da teoria**.

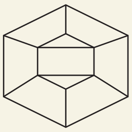
Acrescente novas questões relativas ao teorema das 4 cores. Por exemplo:

1. Proponha a pintura de cada um dos mapas apresentados a seguir, com o mínimo possível de cores, de modo que duas regiões quaisquer que tenham uma linha como fronteira comum não sejam pintadas da mesma cor.


Mapa 1


Mapa 2


Mapa 3


Mapa 4

ILUSTRAÇÕES: ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

Pergunte: “Qual é o menor número possível de cores para pintar o mapa 1? (2)”; “Qual é o menor número possível de cores para pintar o mapa 2? (2)”; “Qual é o menor número possível de cores para pintar o mapa 3? (3)”; “Qual é o menor número possível de cores para pintar o mapa 4? (4)”.

2. O fato de haver mapa que pode ser pintado com menos de 4 cores, nas condições enunciadas no teorema das 4 cores, invalida esse teorema? (Não, pois 4 é o número máximo de cores com que pode ser pintado o mapa, ou seja, dependendo do mapa, podem ser usadas menos cores.)

2. Arranjos

Refaça, na lousa, o exemplo introdutório desse tópico, enfatizando que dois arranjos se diferenciam pela ordem ou pela natureza dos elementos. Depois, defina formalmente arranjo simples.

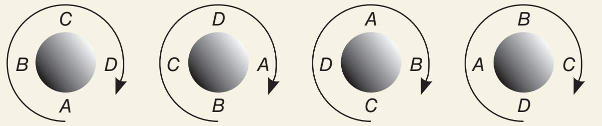
Comente no **exercício proposto 4** que a empregabilidade de pessoas de grupos minoritários é fundamental para promover a inclusão social e reduzir desigualdades no mercado de trabalho. Iniciativas como a que Matheus participa, colaborando com a inserção de grupos minoritários, são essenciais para garantir que mulheres, negros e pessoas LGBTQIA+ tenham acesso a oportunidades profissionais e possam desenvolver suas carreiras em ambientes de trabalho justos e igualitários. Além de combater a discriminação, esses projetos ajudam a promover a diversidade nas empresas, o que resulta em equipes mais criativas, produtivas e capazes de compreender melhor a diversidade da sociedade como um todo.

O boxe **Mentes brilhantes** apresenta algumas informações sobre o cubo mágico. Ao falar sobre o cubo mágico, é importante explorar suas aplicações no ensino de Matemática, especialmente no estudo de combinações, permutações e resolução de problemas. A complexidade dos arranjos possíveis do cubo, tanto no modelo $3 \times 3 \times 3$ quanto no $2 \times 2 \times 2$, oferece uma oportunidade para discutir conceitos como fatorial e probabilidades de forma prática. Se julgar pertinente, peça aos estudantes que pesquisem sobre a evolução da resolução do cubo ao longo dos anos, desde o seu inventor até recordistas atuais. Esse trabalho pode motivar os estudantes a desenvolverem habilidades de pensamento lógico, estratégia e paciência.

3. Permutações

Ao trabalhar o conceito de permutação, proponha aos estudantes que façam uma pesquisa sobre o que são permutações circulares e que escrevam um texto a respeito, ilustrando-o com um exemplo. A seguir apresentamos uma sugestão de resposta.

A permutação circular é basicamente uma permutação simples, pois também consiste em calcular quantos agrupamentos de *n* elementos podemos formar com os mesmos *n* elementos. A diferença é que a disposição, em vez de linear, é circular e, por isso, precisamos descontar os resultados repetidos. Por exemplo, na permutação circular de quatro elementos *A*, *B*, *C* e *D*, as sequências *ABCD*, *BCDA*, *CDAB* e *DABC* são consideradas o mesmo resultado. Observe o esquema:



FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

Note, por exemplo, que, nas quatro sequências, o elemento *B* tem *A* à sua direita e *C* à sua esquerda. Isso ocorre com os quatro elementos; portanto, as quatro sequências são consideradas uma única disposição. Assim, para calcular a permutação de 4 elementos dispostos em círculo, fazemos: $Pc_4 = \frac{4!}{4} = \frac{4 \cdot 3!}{4} = 3! = 6$

Logo, são 6 possibilidades para 4 elementos estarem dispostos de maneira circular.

Generalizando, a permutação circular de *n* elementos é dada por: $Pc_n = \frac{n!}{n} = (n - 1)!$

No tópico **Permutações com elementos repetidos**, comente que em vários problemas combinatórios temos de calcular o número de permutações de *n* elementos, nem todos distintos, por exemplo: Em uma prova de 10 questões do tipo verdadeiro (V) ou falso (F), cada candidato deve preencher a folha de respostas a seguir:

Questões									
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

De quantas maneiras diferentes a folha de respostas pode ser preenchida com 6 respostas V e 4 respostas F? (210)

Dê tempo para a discussão. É importante que os estudantes sintam a dificuldade e a necessidade de um método para a resolução. Apresente, então, um método.

Devemos calcular o número de permutações das letras: V V V V V V F F F F. Para isso, vamos indexar as letras iguais, considerando-as como elementos distintos: $V_1 V_2 V_3 V_4 V_5 V_6 F_1 F_2 F_3 F_4$.

Assim, o número de permutações desses 10 elementos “distintos” é 10!.

Depois de formadas essas 10! permutações, apagamos os índices. Com isso, várias permutações que eram consideradas distintas passam a ser iguais: por exemplo, as permutações $V_1 V_2 V_3 V_4 V_5 V_6 F_1 F_2 F_3 F_4$ e $V_2 V_1 V_4 V_6 V_5 V_3 F_4 F_2 F_3 F_1$, consideradas diferentes com os índices, passam a ser iguais sem os índices.

Pergunte: “Se, depois de apagar os índices, agruparmos as permutações que passam a ser iguais, quantas permutações terá cada grupo? ($6! \cdot 4!$)”; “Quantos desses grupos de permutações iguais serão formados? $\left(\frac{10!}{6! \cdot 4!}\right)$”. Como cada um desses grupos representa uma mesma permutação, conclua que o número de permutações distintas das letras *V V V V V V F F F F* é dado por: $\frac{10!}{6! \cdot 4!} = 210$

Matemática sem fronteiras

Essa seção aborda a mobilidade urbana. É essencial explorar a importância da Matemática no planejamento das cidades, especialmente por meio de ferramentas como a Análise combinatória. Essa abordagem permite que os estudantes compreendam como modelos matemáticos podem otimizar o fluxo de trânsito, reduzir o tempo de deslocamento e contribuir para soluções sustentáveis. Além disso, o estudo das normas do Código de Trânsito Brasileiro (CTB) pode ser integrado, relacionando a teoria com a prática em questões de mobilidade, segurança viária e planejamento urbano.

O tema trabalhado favorece o desenvolvimento do **TCT Educação para o Trânsito**. Ele também favorece o desenvolvimento da **competência geral 2**, ao incentivar o uso do pensamento crítico e criativo para identificar rotas mais eficientes e promover um ambiente urbano sustentável; da **competência geral 3**, ao permitir que os estudantes compreendam como diferentes áreas do conhecimento se inter-relacionam e contribuem para a resolução de desafios contemporâneos, integrando múltiplos repertórios culturais e científicos; da **competência geral 7**, ao aprenderem a construir argumentos baseados em fatos e evidências para apoiar decisões e soluções urbanas; e da **competência geral 9**, ao incentivar a criação de soluções de mobilidade sustentável, promovendo a compreensão de questões sociais e ambientais, a empatia e a cooperação entre os cidadãos, bem como o envolvimento em ações voltadas para o bem-estar coletivo.

Para orientar as pesquisas dos estudantes, sugerimos o texto a seguir, que traz resultados de estudos e pesquisas em desenvolvimento pelo Ipea com o objetivo de fomentar o debate e oferecer subsídios à formulação e à avaliação de políticas públicas para a mobilidade urbana no Brasil.

PEREIRA, R. H. M.; BAZZO, J. **Tendências e desigualdades da mobilidade urbana no Brasil III**: o uso da mobilidade ativa. Brasília, DF: Ipea, 2024. Disponível em: https://repositorio.ipea.gov.br/handle/11058/14341. Acesso em: 18 out. 2024.

4. Combinação simples

Acompanhe uma possível resposta para o boxe **Reflexão**.

Dados os n elementos distintos do conjunto $I = \left\{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\right\}$, chama-se **combinação completa** de p elementos de I qualquer agrupamento formado por p elementos, **não necessariamente distintos**, escolhidos entre $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_p$, de modo que os agrupamentos se diferenciam apenas pela natureza dos elementos, e não pela ordem. Considere um exemplo a seguir.

Um comerciante pretende adquirir quatro sacos de feijão. O vendedor lhe ofereceu três opções de escolha: feijão-carioquinha (*c*), feijão-jalo (*j*) e feijão-roxinho (*r*). As possíveis escolhas dos quatro sacos que o comerciante pode adquirir são as combinações dos três tipos de feijão tomados 4 a 4: *cccc*, *cccj*, *cccr*, *ccjr*, *cjjr*, *jjjj*, *rrrr* etc.

Indicando por $C'_{n,p}$ o número de combinações completas de n elementos tomados p a p, demonstra-se que: $C'_{n,p} = C_{n+p-1,p}$

Assim, nesse exemplo, temos: $C'_{3,4} = C_{3+4-1,4} = C_{6,4} = 15$

Se optar por explicar o porquê desse cálculo, sugerimos justificá-lo do seguinte modo: para calcular o número de combinações completas de 3 elementos *c*, *j*, *r* tomados 4 a 4, que se indica por $C'_{3,4}$, basta observar que esse número é igual ao número de soluções (α, β, θ) da equação $x + y + z = 4$, com $\{\alpha, \beta, \theta\} \subset \mathbb{N}$. Esse fato pode ser entendido associando-se cada combinação formada a uma sequência (α, β, θ) cujos elementos são, respectivamente, o número de letras "*c*", o número de letras "*j*" e o número de letras "*r*" que aparecem na combinação, por exemplo: à combinação *cjjr* associamos a sequência (1, 2, 1), pois a letra *c* aparece 1 vez na combinação, a letra *j* aparece 2 vezes e a letra *r* aparece 1 vez; à combinação *ccrr* associamos a sequência (2, 0, 2), pois a letra *c* aparece 2 vezes na combinação, a letra *j* aparece 0 vez e a letra *r* aparece 2 vezes; etc.

Como essa associação é biunívoca, concluímos que o número $C'_{3,4}$ é igual ao número de soluções naturais da equação $x + y + z = 4$, cuja resolução é apresentada a seguir.

Representando cada unidade pelo símbolo "|" e a adição de unidades pelo símbolo "+", temos: $| + || + | = 1 + 2 + 1$, que corresponde à solução (1, 2, 1); $|| + +|| = 2 + 0 + 2$, que corresponde à solução (2, 0, 2); etc.

Assim, o número de soluções naturais da equação é igual ao número de permutações dos 6 símbolos $|||| + +$, ou seja: $P_6^{(4,\,2)} = \dfrac{6!}{4! \cdot 2!} = 15$

Observando que o número pode ser representado por $C_{6,4}$, temos: $C'_{3,4} = C_{6,4} = 15$

Assim, no exemplo anterior, o comerciante pode escolher os quatro tipos de feijão de 15 maneiras diferentes. Generalizando o raciocínio utilizado nesse exemplo, obtemos: $C'_{n,p} = C_{n+p-1,\,p}$

Matemática sem fronteiras

Esta seção explora a história da criptografia e sua evolução ao longo dos séculos. O "Código de César", que desloca as letras do alfabeto, exemplifica o princípio básico de transformar informações para que permaneçam inacessíveis a quem não tem a chave para decifrá-las. Atualmente, a criptografia é essencial para proteger dados pessoais, além de seu uso militar. O estudo desse tema destaca a importância da segurança da informação em um mundo digital. Além disso, a Esteganografia, que se dedica a ocultar mensagens, como a marca-d'água nas cédulas, demonstra que a proteção de dados é uma preocupação abrangente.

O tema trabalhado favorece o desenvolvimento do **TCT Ciência e tecnologia**. Ele também favorece o desenvolvimento da **competência geral 4**, ao promover o uso de diferentes linguagens, para decifrar e codificar informações; da **competência geral 5**, ao discutir a importância da segurança da informação em um mundo digital, incentivando a reflexão crítica sobre os impactos sociais e éticos da tecnologia; e da **competência geral 9**, ao estimular a consciência sobre questões de privacidade e segurança, promovendo a empatia e a cooperação entre as pessoas na proteção de dados pessoais.

Nesta seção, foi apresentado o objeto digital **Carrossel de imagens: Criptografia**. Esse recurso traz algumas informações do uso da criptografia ao longo do tempo.

Educação Midiática

Os objetivos desta seção são desenvolver a competência leitora; compreender e analisar o que são conteúdos virais; identificar quais são os elementos que capturam a atenção do público e incentivam seu compartilhamento; e, por fim, observar que há conteúdos virais que podem ser prejudiciais ou desinformativos, mas que também é possível criar conteúdos virais benéficos, que podem ser produzidos para que sejam significativos e tenham valor positivo para quem os consome.

Aproveite a imagem apresentada para iniciar uma conversa com os estudantes e, para isso, organize-os em U e se posicione de frente para eles de modo a permitir uma conversa fluida sobre o tema. Questione-os sobre que tipos de conteúdo eles mais acessam na internet e como compartilham ou interagem com esse conteúdo. Verifique se eles reconhecem alguns dos ícones que aparecem na imagem e o que eles indicam. Incentive-os a compartilhar as informações a esse respeito, de modo que compreendam que os *emojis* são uma maneira comum de indicar a reação a conteúdos da internet.

Retome o fato de que toda reação, comentário ou compartilhamento em um conteúdo nas redes sociais favorece seu engajamento, isto é, que ele chegue a mais pessoas, principalmente àquelas do círculo social de quem reagiu. Dessa maneira, questione aos estudantes se eles consideram que quem reage a um conteúdo tem participação na sua promoção e o que isso significa quando o conteúdo viral tem informações que podem ser consideradas ruins, como a exposição da privacidade de uma pessoa ou a promoção do ódio e da violência contra um grupo de pessoas. Essa reflexão favorece a conversa a respeito da promoção positiva da imagem de diferentes grupos sociais e pessoas, o que é necessário para o convívio republicano e pacífico.

Ao compreender a dinâmica dos conteúdos virais e utilizar esse conhecimento para impactar positivamente a sociedade e o ambiente digital, o estudante pode desenvolver habilidades e competências que contribuam para sua formação cidadã. Promova uma conversa sobre conteúdos virais e desinformação, retomando o assunto das *fake news*.

A **atividade 6** pode ser realizada durante certo período, envolvendo a pesquisa de um tema de interesse dos estudantes e a pesquisa mais aprofundada sobre como produzir um *meme* que favoreça a produção do conteúdo. Essa atividade pode ser realizada de maneira interdisciplinar com a área de Linguagens e suas Tecnologias.

Referências suplementares

SOUSA, L. O Teorema das Quatro Cores. **Revista Millenium Online**, n. 24, out. 2001. Disponível em: https://repositorio.ipv.pt/bitstream/10400.19/647/1/O%20Teorema%20das%20Quatro%20Cores.pdf. Acesso em: 25 set. 2024.

O artigo mostra a evolução histórica do Teorema das Quatro Cores. Além disso, a autora discute a importância do teorema para a Matemática e suas aplicações em diversas áreas, como a cartografia, ressaltando como o estudo da teoria dos grafos e a utilização de algoritmos computacionais foram essenciais para a solução do problema.

MANDELLI, M. Os muitos lados de um viral. **Educamídia**. Disponível em: https://educamidia.org.br/os-muitos-lados-de-um-viral. Acesso em: 25 set. 2024.

O artigo apresenta diferentes perspectivas de conteúdos virais e como eles podem influenciar a vida das pessoas que os acessam ou que têm a imagem utilizada para produzi-los.

ROSSINI, V. S. Os manjadores entenderão: os conteúdos virais e a sociabilidade no ciberespaço. **Ponto Urbe**, 30 jul. 2014. Disponível em: http://journals.openedition.org/pontourbe/1628. Acesso em: 25 set. 2024.

O artigo traz uma discussão antropológica a respeito de conteúdos virais na construção de interações sociais.

CAPÍTULO 8 Geometria de posição e poliedros

Objetivos

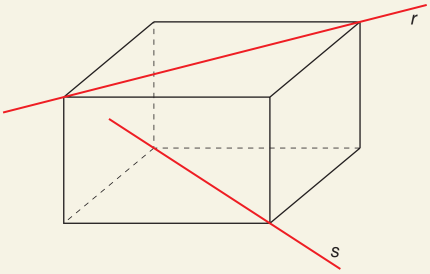
Ao final do capítulo, espera-se que o estudante esteja apto a:

- Recorrer ao paralelepípedo reto-retângulo como modelo para representar retas e planos no espaço tridimensional.
- Definir as posições relativas entre duas retas no espaço tridimensional.
- Identificar a determinação de um plano.
- Definir as posições relativas entre reta e plano e entre dois planos.
- Definir retas ortogonais e a projeção ortogonal de uma figura geométrica sobre um plano.
- Calcular a medida de um ângulo entre duas retas, entre uma reta e um plano e entre dois planos.
- Definir poliedro, poliedro convexo e poliedro regular.
- Nomear os poliedros de até 20 faces.
- Aplicar a relação de Euler.
- Converter unidades de medida de comprimento, área e volume.
- Explorar um *software* de Geometria dinâmica no estudo de retas e planos.
- Elaborar problemas, do cotidiano ou não, envolvendo um ou mais temas tratados no capítulo.

Sugestões de encaminhamento dos conteúdos

3. Posições relativas entre duas retas

No caso das retas reversas, as arestas reversas do paralelepípedo podem dar a falsa ideia de que retas reversas devem ser ortogonais, por isso é importante variar o exemplo, mostrando a figura a seguir, em que as retas *r* e *s* são reversas.

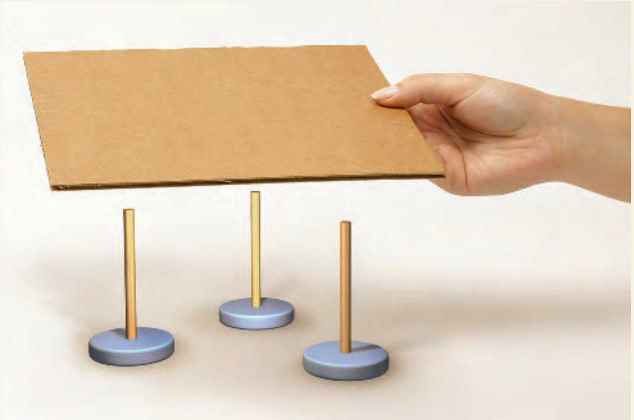


ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

4. Determinação de um plano

Explore o postulado **Três pontos não colineares determinam um plano** por meio do modelo a seguir.

Uma chapa plana pode ser sustentada por, no mínimo, três pinos que não estejam alinhados.



PAULO MANZI/ARQUIVO DA EDITORA

Reforce que, em Matemática, a palavra "determina" garante a existência e a unicidade. Assim, o postulado pode ser enunciado do seguinte modo: "Existe um único plano que passa por três pontos não colineares".

Explique que os teoremas apresentados são demonstrados a partir do postulado; por exemplo, observe a demonstração do teorema "Uma reta e um ponto que não pertence a ela determinam um plano".

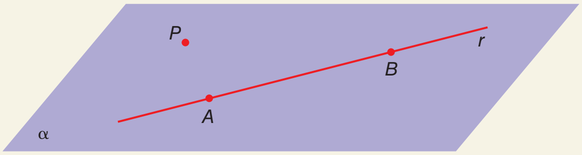
Demonstração

Ao dizer que uma reta e um ponto fora dela determinam um plano, estamos afirmando que existe e é único o plano que passa simultaneamente pela reta e pelo ponto. Por isso, devemos separar a demonstração em duas partes: existência e unicidade.

1ª parte: existência.

Sendo *A* e *B* dois pontos distintos de *r*, temos:

- Os pontos *A*, *B* e *P* não são colineares, pois $P \notin r$; portanto, esses três pontos determinam um plano α.
- $r \subset \alpha$, pois *A* e *B* são pontos distintos de *r* que pertencem a α. Logo, existe um plano α que passa por *r* e por *P*.



ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

2ª parte: unicidade.

Suponhamos que exista outro plano α′ que passe por *r* e *P* simultaneamente. Como *A*, *B* e *P* são pontos não colineares, existe um único plano que passa por eles, de acordo com o postulado “três pontos não colineares determinam um plano”. Logo: α ≡ α′

Matemática sem fronteiras

Essa seção aborda a importância da Geometria na Arquitetura, no *Design* e na Engenharia, destacando a utilização de sistemas de projeção para representar objetos tridimensionais em desenhos técnicos. Diga aos estudantes que o sistema mongeano, criado por Gaspard Monge, projeta ortogonalmente um objeto em dois planos perpendiculares, gerando as chamadas “vistas”. No entanto, devido à limitação de representar formas complexas com apenas dois planos, o matemático Gino Loria acrescentou um terceiro plano, criando o sistema Monge/Loria, que permite a visualização completa e precisa do formato e das dimensões do objeto.

Ao introduzir um sistema de três planos perpendiculares entre si, o método Monge/Loria possibilita a projeção ortogonal de objetos complexos, o que garante maior precisão nos desenhos técnicos. Mesmo com a criação de recursos digitais avançados, como *softwares* de modelagem 3D, o método tradicional continua sendo amplamente utilizado devido à sua precisão e à capacidade de padronização, facilitando a comunicação entre profissionais.

Esse tema favorece o desenvolvimento da **competência geral 2**, ao abordar a criação e a evolução dos sistemas de projeção, assim como o raciocínio lógico para a representação precisa de objetos tridimensionais; da **competência geral 3**, ao ampliar o conhecimento sobre a evolução das práticas na Arquitetura, *Design* e Engenharia, relacionando matemática e cultura técnica; e da **competência geral 10**, ao discutir técnicas de representação precisas e padronizadas, o que implica uma responsabilidade profissional que contribui para o bem-estar social e a sustentabilidade ao garantir que os projetos sejam bem executados e compreendidos.

9. Ângulos no espaço

O texto apresentado no boxe **Mentes brilhantes** sobre Geometrias não euclidianas explora como o conceito de Geometria vai além da Geometria euclidiana, abordando novas maneiras de representar o espaço. Em uma superfície esférica, por exemplo, o caminho mais curto entre dois pontos é um arco, e a soma dos ângulos internos de um triângulo supera 180°, diferentemente da geometria plana de Euclides. No século XIX, matemáticos como Gauss, Lobachevsky e Riemann desenvolveram outras geometrias ao perceberem que o postulado das paralelas de Euclides era independente dos outros postulados.

O conteúdo do boxe **Trabalho e juventudes** aborda o crescimento da aviação civil ao longo dos anos, destacando o aumento significativo de passageiros e a previsão de uma escassez de pilotos comerciais nos próximos anos. Estima-se que serão necessários cerca de 620 mil novos pilotos até 2036, com diversos países já enfrentando dificuldades para atender a essa demanda devido aos altos custos e à falta de qualificação dos profissionais. Além disso, muitos pilotos estão próximos da aposentadoria, o que agrava ainda mais essa escassez. Apesar desse cenário, a participação feminina na aviação ainda é limitada, representando apenas 5% dos postos globais e 3,2% no Brasil.

Contudo, apesar dos desafios, como o preconceito e as barreiras culturais que dificultam o ingresso das mulheres na profissão, a importância da presença feminina na aviação civil é crescente. Iniciativas como o programa “Asas para Todos”, lançado pela Agência Nacional de Aviação Civil (Anac), buscam combater a discriminação e promover um ambiente mais inclusivo e acolhedor para as mulheres. Programas como esse são essenciais para inspirar e aumentar a participação feminina no setor, abrindo novas oportunidades e desconstruindo preconceitos.

Peça aos estudantes que pesquisem mais informações sobre a profissão de piloto de avião, façam um resumo da pesquisa e compartilhem-na com os demais colegas. Ao explorar esse tema, contribuímos para o desenvolvimento do **TCT Trabalho** e da **competência geral 6**, pois os estudantes podem se apropriar de procedimentos adotados no mundo do trabalho. Além disso, ao refletirem sobre o combate à discriminação e sobre promover um ambiente mais inclusivo e acolhedor para as mulheres os estudantes irão conversar sobre questões relacionadas ao **ODS 5** e ao **ODS 8**.

10. Poliedros

Alguns modelos de poliedro podem ajudar significativamente o desenvolvimento deste e do próximo capítulo. Por isso sugerimos a seguinte atividade: Separe a turma em dez grupos organizados em estações de trabalho. Cada grupo deve desenhar em uma folha de cartolina a planificação de um poliedro, podendo ser: tetraedro retangular, hexaedro regular (cubo), octaedro regular, dodecaedro regular, icosaedro regular, prisma triangular regular, prisma quadrangular reto (paralelepípedo reto-retângulo), prisma hexagonal regular, pirâmide quadrangular regular ou pirâmide hexagonal regular. Depois, deve recortar, dobrar e colar, formando as superfícies poliédricas correspondentes. Para agilizar os trabalhos, é interessante entregar a cada grupo o modelo da planificação, para que os estudantes o copiem na cartolina. Isso evitará poliedros muito grandes ou muito pequenos.

Alerte para o fato de que as figuras montadas representam superfícies poliédricas, pois um poliedro é uma figura maciça, ou seja, é a reunião da superfície com seu interior. Usando os modelos que os estudantes construíram, explore os conceitos de polígono convexo, superfície poliédrica convexa e poliedro convexo, destacando seus elementos: faces, vértices, diagonais etc. Apresente um modelo de poliedro não convexo e os nomes dos principais poliedros. Mostrando o cubo que os próprios estudantes construíram, pergunte: “Quantas faces tem esse poliedro? (6)”; “Quantas arestas tem cada uma dessas faces? (4)”; “Se cada face tem quatro arestas e o poliedro tem seis faces, então o número de arestas do poliedro é $6 \cdot 4$? Por quê? (Não, porque no produto $6 \cdot 4$ cada aresta está sendo contada duas vezes, já que cada uma delas é aresta de duas faces simultaneamente; logo, o número de arestas do poliedro é $\frac{6 \cdot 4}{2}$, ou seja, 12.)”. Nesse momento, apresente o seguinte resultado: Se um poliedro tem F faces com n arestas por face, então o número A de arestas do poliedro é dado por: $A = \frac{F \cdot n}{2}$

Mostrando o prisma hexagonal que os próprios estudantes construíram, pergunte: “Quantos vértices tem esse poliedro? (12)”; “Quantas arestas concorrem em cada um desses vértices? (3)”; “Se de cada vértice “partem” 3 arestas e o poliedro tem 12 vértices, então o número de arestas do poliedro é $12 \cdot 3$? Por quê? (Não, porque no produto $12 \cdot 3$ cada aresta está sendo contada duas vezes, já que cada uma delas “parte” de dois vértices simultaneamente; logo, o número de arestas do poliedro é $\frac{12 \cdot 3}{2}$, ou seja, 18.)”. Nesse momento, apresente o seguinte resultado: Se um poliedro tem V vértices com m arestas por vértice, então o número A de arestas do poliedro é dado por: $A = \frac{V \cdot m}{2}$

No tópico **Relação de Euler**, peça aos estudantes que apresentem um exemplo de poliedro em que não valha a relação de Euler (que deve ser um poliedro não convexo). Caso não encontrem, mostre o poliedro representado a seguir.

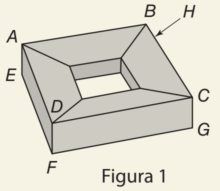


Figura 1

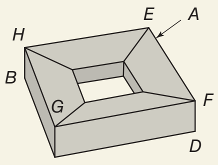


Figura 2

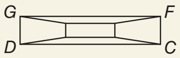


Figura 3

FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

As figuras 1 e 2 representam duas vistas diferentes do mesmo poliedro. Cada face trapezoidal superior ou inferior é inclinada em relação a cada face lateral adjacente. A figura 3 mostra uma vista lateral, a partir da face *GFCD*, de onde se observa a inclinação das faces superiores e inferiores. Nesse poliedro, temos $V = 16$, $A = 32$ e $F = 16$ e, portanto: $V - A + F = 16 - 32 + 16 = 0$. Logo, esse poliedro não é euleriano.

Verifique o que aprendeu no Capítulo 8

A seção pode ser utilizada como um instrumento de autoavaliação. Após resolverem as atividades propostas, possibilite aos estudantes compartilharem com os colegas as respostas.

A **atividade 5** favorece o desenvolvimento do **TCT Educação para valorização do multiculturalismo nas matrizes históricas e culturais Brasileiras**, pois promove o reconhecimento e a valorização de saberes tradicionais de comunidades locais e rurais, especialmente de origens indígena e africana. Ao abordar a técnica taipa de mão, muito utilizada no período colonial e nas zonas rurais, resgatamos uma parte importante da história e da diversidade cultural do Brasil, evidenciando práticas sustentáveis e acessíveis que não requerem materiais importados. A valorização de uma técnica construtiva local, que integra conhecimentos tradicionais e adaptações ao ambiente, reflete a pluralidade cultural brasileira e destaca a importância de preservar práticas que compõem as matrizes culturais do país. Ao ensinar sobre a taipa de mão, os estudantes podem refletir sobre como essas tradições contribuem para a identidade cultural nacional, além de promover um olhar inclusivo e respeitoso sobre a diversidade cultural e histórica do Brasil. Essa atividade também favorece o desenvolvimento da **competência geral 1**, ao explorar a técnica da taipa de mão e suas relações com o contexto social e econômico das zonas rurais e coloniais; da **competência geral 3**, ao abordar uma técnica antiga e suas origens históricas; e da **competência geral 10**, ao promover a consciência cidadã e o compromisso com a valorização da história e cultura nacionais.

Referências suplementares

MORAIS, E. **Geometria não euclidiana**: uma possibilidade para a educação básica. 2024. Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual do Piauí – UESPI, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT, Campus Poeta Torquato Neto, Teresina (PI), 2024.

Esse trabalho apresenta um estudo sobre a aplicação da Geometria não euclidiana na Educação Básica e traz propostas de atividades.

SILVA, D. C. N. **Sobre o ensino de Geometria para deficientes visuais**. 2015. Dissertação (Mestrado – Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade de Brasília, Brasília (DF), 2015.

Nessa dissertação, são apresentadas uma proposta para o trabalho com poliedros e a relação de Euler, além de outros conceitos da Geometria.

CAPÍTULO 9 Prismas e pirâmides

Objetivos

Ao final do capítulo, espera-se que o estudante esteja apto a:

- Definir prisma e calcular suas áreas.
- Definir paralelepípedo reto-retângulo e calcular a medida de sua diagonal, áreas e volume.
- Aplicar o princípio de Cavalieri no cálculo do volume de um prisma.
- Definir pirâmide e relacionar a altura, o apótema da base e o apótema de uma pirâmide regular.
- Calcular áreas e volume de uma pirâmide e de um tronco de pirâmide.
- Elaborar problemas envolvendo um ou mais temas tratados no capítulo.

Habilidades e competências da BNCC

Nesse capítulo, foram explorados o cálculo de área de figuras planas e o cálculo de volume e de capacidade de sólidos geométricos, contribuindo para o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT201** e da **competência específica 2**.

Ao resolver e elaborar problemas envolvendo cálculo de área e de volume de prismas e pirâmides e ao resolver problemas envolvendo densidade, contribuímos para o desenvolvimento das habilidades **EM13MAT309** e **EM13MAT314** e da **competência específica 3**.

Ao investigar processos de obtenção da medida do volume de prismas e pirâmides, incluindo o princípio de Cavalieri, para a obtenção das fórmulas de cálculo da medida do volume dessas figuras, contribuímos para o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT504** e da **competência específica 5**.

Sugestões de encaminhamento dos conteúdos

O texto de **abertura** propõe discussões sobre o envelhecimento populacional e suas implicações para os planejamentos urbano e social. Com o aumento de 57,4% no número de pessoas com 65 anos ou mais em 12 anos no Brasil, é importante destacar a necessidade de políticas públicas que garantam a valorização e o acolhimento dos idosos. Comparando com países como Japão e Dinamarca, que se preparam melhor para o envelhecimento, os estudantes podem refletir sobre a importância de infraestruturas inclusivas e Instituições de Longa Permanência para Idosos no Brasil. A arquitetura também desempenha um papel importante no bem-estar da população idosa, como no exemplo do complexo social em Portugal, que prioriza a segurança e a qualidade de vida das pessoas idosas. Em contraste, a prática de "arquitetura hostil", que afasta populações vulneráveis de espaços públicos, abre um debate sobre ética urbana. O estudo da Lei 14.489, que proíbe essas práticas no Brasil, pode ser utilizado para sensibilizar os estudantes sobre a importância de projetos urbanos mais humanizados e inclusivos, reforçando o direito de todos ao espaço público. Aproveite também para comentar com os estudantes que o direito à moradia é assegurado pela Constituição Federal de 1988, sendo uma competência comum da União, dos estados e dos municípios. A eles, conforme aponta o texto constitucional, cabe "promover programas de construção de moradias e a melhoria das condições habitacionais e de saneamento básico".

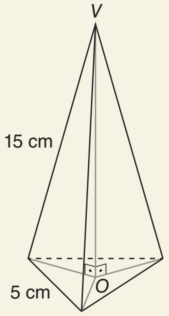
O tema abordado favorece o desenvolvimento do **TCT Processo de envelhecimento, respeito e valorização do Idoso** e do **TCT Educação em Direitos Humanos**. Além disso, contribui para o desenvolvimento da **competência geral 1**, ao conversar sobre questões sociais, demográficas e urbanísticas; da **competência geral 2**, ao refletir criticamente sobre os desafios urbanos e sociais e pensar em soluções criativas para problemas reais; da **competência geral 3**, ao reconhecer diferentes abordagens culturais e históricas sobre o envelhecimento e a ocupação dos espaços urbanos; e da **competência geral 10**, ao trabalhar a empatia e o respeito pelas diferentes condições de vida.

1. Prisma

Ressalte que um prisma tem duas bases congruentes e paralelas, assim como arestas laterais também congruentes e paralelas (essa caracterização é importante para que os estudantes identifiquem um prisma em qualquer posição). Peça exemplos de prisma no cotidiano: prédios, caixas de leite longa-vida, colunas de sustentação em construções civis etc. As imagens do prisma de cristal mostrando a decomposição da luz e as colunas de sustentação em construções representam oportunidades de um trabalho integrado com a área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias. Os temas podem ser explorados em parceria com o professor de Física. Da mesma maneira, a imagem de abelhas e seus favos promove integração com Biologia, explicitando o formato dos favos e sua relação com os prismas hexagonais. Explore a imagem com questões como: "Por que as abelhas constroem os favos em forma de prisma hexagonal?". Essa questão histórica intriga os cientistas há muito tempo. A resposta a ela passa por conjecturas matemáticas supostamente iniciadas por Pappus, demonstradas inicialmente em 1943 e complementadas em 1999. A abordagem explicita aspectos fundamentais de análise e interpretação de dinâmicas da vida.

5. Pirâmide

Para resolver o boxe **Reflexão** da página 246, é necessário lembrar que tetraedro regular é toda pirâmide triangular em que todas as faces são triângulos equiláteros, e pirâmide regular triangular é toda pirâmide cuja base é um triângulo equilátero e a projeção ortogonal do vértice da pirâmide sobre o plano da base coincide com o centro da base. Assim, nem toda pirâmide regular triangular é um tetraedro regular. Por exemplo, na pirâmide representada na figura, a base é um triângulo equilátero com 5 cm de lado, cada aresta lateral mede 15 cm e a projeção ortogonal do vértice *V* sobre o plano da base coincide com o centro *O* da base. Logo, essa pirâmide é regular, mas não é um tetraedro regular.



FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

O texto do boxe **Mentes brilhantes** apresenta o artista holandês Maurits Cornelis Escher, conhecido por suas obras que exploram ilusões de óptica e figuras geométricas espaciais. Seus desenhos desafiavam a lógica e a percepção, criando cenários em que o sentido de espaço e posição parece se inverter, como em imagens onde as pessoas sobem escadas para locais inferiores e descem para superiores. Ao explorar a obra de Escher, os estudantes têm a oportunidade de ampliar o repertório cultural, reconhecendo a importância de diferentes formas de expressão artística, contribuindo para o desenvolvimento da **competência geral 3**.

Se achar conveniente, incentive os estudantes a acessar museus virtuais para explorar mais obras de arte que apresentam figuras geométricas espaciais. A seguir, sugerimos dois museus com acervos digitais:

- MUSEU DE ARTE DE SÃO PAULO. Acervo MASP. Disponível em: https://masp.org.br/acervo/. Acesso em: 26 set. 2024.

O MASP, um dos principais museus de arte da América Latina, disponibiliza *on-line* parte de seu vasto acervo, incluindo obras icônicas de artistas brasileiros e internacionais. A visita virtual permite a exploração de diversos períodos artísticos e de estilos.

- MUSEU HISTÓRICO NACIONAL. Acervo digital. Disponível em: https://mhn.acervos.museus.gov.br/. Acesso em: 26 set. 2024.

O Museu Histórico Nacional disponibiliza parte de seu acervo digitalmente, oferecendo aos visitantes a chance de explorar objetos e documentos históricos que ajudam a contar a história do Brasil, desde o período colonial até os dias atuais.

O conteúdo do boxe **Trabalho e juventudes** aborda a atuação de um *designer* apresentando funções dessa profissão. Solicite aos estudantes que relatem o que sabem sobre essa profissão. Incentive todos a participar e a argumentar para justificar suas opiniões. Pode-se aprofundar o assunto, propondo aos estudantes que citem algumas habilidades que precisam ser desenvolvidas para alguém se tornar *design*. Após a leitura e a discussão inicial, peça aos estudantes que pesquisem mais informações sobre essa profissão, façam um resumo da pesquisa e compartilhem-no com os demais colegas. Ao explorar esse tema, contribuímos para o desenvolvimento do **TCT Trabalho** e da **competência geral 6**, pois os estudantes podem se apropriar de procedimentos adotados no mundo do trabalho.

Matemática sem fronteiras

O texto explora a evolução dos povos indígenas na Amazônia e questiona ideias antigas sobre a ocupação da região. Antes, arqueólogos acreditavam que a Amazônia era pouco povoada, mas pesquisas recentes mostram que os indígenas viveram lá por mais de 12 mil anos de forma organizada. A descoberta de grandes aldeias, estruturas complexas e práticas agrícolas, como a agrofloresta, destaca a sofisticação dessas culturas, que tinham uma economia baseada na diversidade agrícola.

O pesquisador Eduardo Góes Neves critica o uso do termo "pré-história" para descrever esses povos e propõe "história antiga" para reconhecer sua contribuição. Achados como as pirâmides na Amazônia boliviana mostram a importância de reavaliar o passado indígena e reconhecer sua cultura avançada.

O tema abordado favorece o desenvolvimento do **TCT Diversidade Cultural**, do **TCT Educação para valorização do multiculturalismo nas matrizes históricas e culturais Brasileiras** e do **TCT Educação Ambiental**. Além disso, contribui para o desenvolvimento da **competência geral 1**, ao explorar a arqueologia e a história indígena; da **competência geral 3**, ao ter contato com a diversidade cultural dos povos indígenas; da **competência geral 9**, ao trabalhar a empatia e o respeito pelas culturas e histórias diversas, promovendo uma sociedade mais inclusiva e cooperativa; e da **competência geral 10**, ao ressaltar a importância da sustentabilidade e das práticas indígenas de cuidado com a natureza.

Referência suplementar

FUNARI, P. P. A.; BEZERRA, M; TOLEDO, N. N. B. J. **Arqueologia e história indígena no Brasil**. São Paulo: Annablume, 2000.

Este livro oferece uma visão sobre a história dos povos indígenas do Brasil, a partir de uma perspectiva arqueológica. Os autores discutem a relevância das pesquisas arqueológicas para compreender as sociedades indígenas antes do contato com os europeus, destacando suas complexas organizações sociais, econômicas e culturais. Além disso, o texto contribui para a desmistificação da ideia de que as sociedades indígenas eram "primitivas" ou "simples", revelando a riqueza e a diversidade de suas culturas ao longo do tempo.

SOUZA, M. Espetos sob viadutos, grades, muros altos: o que é "arquitetura hostil"?. **ECOA UOL**, 2021. Disponível em: https://www.uol.com.br/ecoa/ultimas-noticias/2021/03/02/o-que-e-arquitetura-hostil.htm. Acesso em: 19 out. 2024.

O artigo apresenta a definição de arquitetura hostil e apresenta algumas consequências de uma cidade hostil.

ACADEMIA BRASILEIRA DE LETRAS. **Necropolítica**. Academia Brasileira de Letras, 2024. Disponível em: https://www.academia.org.br/nossa-lingua/nova-palavra/necropolitica. Acesso em: 19 out. 2024.

Definição do termo necropolítica segundo Achille Mbembe.

CAPÍTULO 10 Corpos redondos

Objetivos

Ao final do capítulo, espera-se que o estudante esteja apto a:

- Discorrer sobre o cilindro, o cone e seus elementos.
- Calcular a área lateral e a área total de um cilindro circular reto e de um cone circular reto.
- Resolver problemas envolvendo as medidas da altura, geratriz e raio da base de um cone circular reto.
- Definir esfera e superfície esférica.
- Deduzir a fórmula para o cálculo do volume do cilindro, do cone e da esfera através do princípio de Cavalieri.
- Resolver problemas que envolvam uma secção plana de uma esfera, a área de um fuso esférico e/ou o volume de uma cunha esférica.
- Calcular a área da superfície esférica.
- Usar um *software* de geometria dinâmica para a construção dos corpos redondos e suas secções.
- Elaborar problemas envolvendo um ou mais temas tratados no capítulo.

Habilidades e competências específicas da BNCC

Neste capítulo, os estudantes são mobilizados a utilizar um *software* de Geometria dinâmica, mapas virtuais ou aplicativos que comparam medidas de área. Além disso, eles poderão resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de áreas totais e de volumes de corpos redondos em situações reais, desenvolvendo, assim, as habilidades **EM13MAT203** e **EM13MAT309** e as **competências específicas 2** e **3**.

São propostas situações em que os estudantes precisam investigar processos de obtenção da medida do volume de corpos redondos, compreendendo e utilizando o cálculo da medida do volume dessas figuras. Além disso, os estudantes poderão investigar a deformação de ângulos e de áreas provocada pelas diferentes projeções usadas em cartografia, favorecendo o desenvolvimento das habilidades **EM13MAT504** e **EM13MAT509** e da **competência específica 5**.

Sugestões de encaminhamento dos conteúdos

3. Cone circular

No tópico **Tronco de cone circular de bases paralelas**, utilize objetos do cotidiano – rolha de garrafa, balde, copa de abajur etc. – e defina tronco de cone circular de bases paralelas.

Nomeie os elementos de um tronco circular de bases paralelas: bases, geratriz, altura etc.

Pergunte: "Se um plano α, paralelo à base de um cone circular *C*, separa-o em dois sólidos, um tronco de cone e um cone *C'*, como você calcularia o volume *V* do tronco?" (O volume do tronco é a diferença entre o volume do cone *C* e o volume do cone *C'*.)

O **exercício proposto 26** exige uma construção auxiliar. Por isso, os estudantes poderão ter dificuldades em resolvê-lo. Oriente-os, sugerindo o prolongamento das geratrizes do tronco de modo a obterem o cone que o contém. Desse modo, aplica-se o conceito de semelhança de triângulos para o cálculo da altura desse cone.

Aproveite a pergunta para definir cones semelhantes. Este é um momento oportuno para definir também figuras semelhantes. Uma definição geral de semelhança, intuitiva, é apresentada a seguir.

> Definição: Sejam *F* e *F'* figuras, do plano ou do espaço, e *r* um número real positivo.
>
> Diz-se que *F* e *F'* são semelhantes, com razão de semelhança r, quando existe uma correspondência biunívoca $\sigma: F \rightarrow F'$, entre os pontos de *F* e os pontos de *F'*, com a seguinte propriedade:
>
> se *X*, *Y* são pontos quaisquer de *F* e $X' = \sigma(X)$, $Y' = \sigma(Y)$ são seus correspondentes em *F'* então $\overline{X'Y'} = r \cdot \overline{XY}$.
>
> Fonte: LIMA, E. L. **Medida e forma em geometria***:*
> comprimento, área, volume e semelhança.
> Rio de Janeiro: Impa/Vitae, 1991.

Matemática sem fronteiras

Com base no contexto apresentado e no **infográfico clicável: A arte das casas pintadas de Tiébélé**, pode-se propor uma atividade interdisciplinar com a área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas e abordar o **TCT Educação para valorização do multiculturalismo nas matrizes históricas e culturais brasileiras**.

Os estudantes podem pesquisar acerca de matrizes históricas e culturais brasileiras, aspectos da arquitetura, arte de povos indígenas etc. e, assim, desenvolver a **competência geral 4**.

4. Esfera

No tópico **Posições relativas entre um plano e uma esfera**, para definir as posições relativas, sugerimos como modelo uma esfera maciça de isopor, seccionada por um plano que não passa pelo centro da esfera e, se a bola de isopor for oca, sugerimos colar um círculo de cartolina nas secções.

A partir desse modelo, defina plano secante a uma esfera e conclua que: $R^2 = d^2 + r^2$

Comente que, se o plano secante passar pelo centro da esfera, cada uma das duas partes determinadas é chamada de semiesfera ou hemisfério. Enfatize que a semiesfera (ou hemisfério) é maciça.

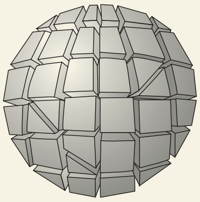
Para plano tangente a uma esfera, coloque sobre o tampo da mesa a esfera de isopor e pergunte: "Quantos pontos têm em comum a esfera e o tampo da mesa? (Um único ponto.) "Qual é a distância entre o centro *C* da esfera e o tampo da mesa? (É a medida do raio da esfera.)"

Após essa discussão, defina plano tangente a uma esfera e conclua que o raio da esfera é perpendicular ao plano tangente no ponto de tangência.

Aproveitando a situação anterior, levante um pouco a bola e pergunte: "Quantos pontos têm em comum a esfera e o tampo da mesa? (Nenhum.)"

A partir dessa resposta, defina plano exterior à esfera.

No tópico **Área da superfície esférica**, se julgar oportuno justificar a fórmula para o cálculo da área da superfície esférica, sugerimos a seguinte demonstração.

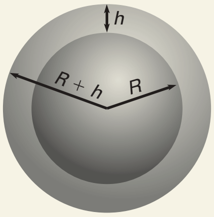


Suponha que sobre uma superfície esférica sejam construídos *n* pequenos prismas de mesma altura *h*, tais que cada aresta das bases tangentes à superfície esférica seja aresta de duas, e somente duas, bases desses prismas.

Sendo B_1, B_2, …, B_n as áreas das bases desses prismas, a soma V' de seus volumes é dada por:

$$V' = B_1h + B_2h + \ldots + B_nh \Rightarrow V' = (B_1 + B_2 + \ldots + B_n)h$$

A soma $B_1 + B_2 + \ldots + B_n$ das áreas das bases é aproximadamente a área *B* da superfície esférica. Assim, o volume V' é aproximadamente igual a $V'' = Bh$, ou seja, o volume V'' é o produto da área *B* da superfície esférica pela altura *h* desses prismas.



Raciocinando de maneira análoga, consideremos duas superfícies esféricas de mesmo centro e raios *R* e $R + h$, com $h > 0$.

Sendo *B* a área da superfície esférica de raio *R*, o volume *V* limitado pelas duas superfícies esféricas é aproximadamente igual a:

$$V'' = Bh \qquad (1)$$

Podemos calcular precisamente o volume *V* do seguinte modo:

$$V = \frac{4\pi(R+h)^3}{3} - \frac{4\pi R^3}{3} \Rightarrow V = \frac{4\pi\left(R^3 + 3R^2h + 3Rh^2 + h^3\right)}{3} - \frac{4\pi R^3}{3}$$

$$\therefore V = \frac{4\pi h}{3}\left(3R^2 + 3Rh + h^2\right) \quad (2)$$

Para *h* "tendendo" a zero, as expressões (1) e (2) "tendem" a se igualar, ou seja:

$$V = V' \Rightarrow \frac{4\pi h}{3}(3R^2 + 3Rh + h^2) = Bh$$

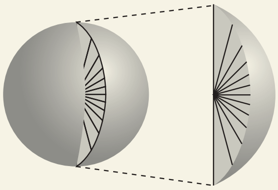
$$\therefore \frac{4\pi}{3}(3R^2 + 3Rh + h^2) = B$$

Como *h* "tende" a zero, a soma $3Rh + h^2$ também "tende" a zero e, portanto, a área *B* "tende" a:

$$B = \frac{4\pi}{3} \cdot 3R^2\text{, ou seja, } B = 4\pi R^2$$

Desse modo, provamos que:

A área *A* de uma superfície esférica de raio *R* é dada por: $A = 4\pi R^2$



No tópico **Fuso esférico e cunha esférica**, sugerimos como modelo uma bola de isopor recortada com uma cunha esférica. Se a bola de isopor for oca, sugerimos colar um círculo de cartolina nas secções.

A partir desse modelo, defina fuso esférico e cunha esférica, calculando a área do fuso e o volume da cunha.

Os **exercícios complementares 12** e **13** abordam a temática da sustentabilidade. Segundo o Ministério do Meio Ambiente, o Manejo Florestal Sustentável é a administração da floresta para a obtenção de benefícios econômicos, sociais e ambientais, respeitando-se os mecanismos de sustentação do ecossistema objeto do manejo e considerando-se, cumulativa ou alternativamente, a utilização de múltiplas espécies madeireiras, de múltiplos produtos e subprodutos não madeireiros, bem como a utilização de outros bens e serviços florestais.

Oriente os estudantes nas pesquisas propostas nessas atividades. Aproveite o momento para destacar que o trabalho em grupo deve ser organizado, respeitando as diferenças e a diversidade.

Matemática sem fronteiras

Nessa seção exploramos três tipos de projeção cartográfica, abordando a Ciência e seus processos que evoluem ao longo do tempo de maneira colaborativa e derivada da investigação.

Comente que a invenção do avião permitiu um significativo aprimoramento das técnicas de Cartografia, devido à utilização de fotografias aéreas para a confecção de mapas. O advento dos satélites facilitou ainda mais essas técnicas, pois eles captam fotografias de áreas continentais. Se possível, acesse um mapa virtual na internet para pesquisar vistas aéreas de regiões de interesse dos estudantes.

Aproveite para conversar sobre a dificuldade de representar a superfície terrestre. Há diferentes *sites* e aplicativos que possibilitam comparar a medida de área real de países em relação a certas projeções cartográficas, como o disponível em https://www.thetruesize.com (acesso em: 27 set. 2024). Se possível, oriente os estudantes a acessar e comparar a área de diferentes países e, depois, a produzir um relatório apresentando aspectos da deformação de ângulos e de áreas provocada pelas diferentes projeções usadas em cartografia.

Referência suplementar

HAESBAERT, R. **Território e descolonialidade**: sobre o giro (multi)territorial/de(s)colonial na América Latina. Ciudad Autónoma de Buenos Aires: CLACSO; Niterói: Programa de Pós-Graduação em Geografia; Universidade Federal Fluminense, 2021.

Esse trabalho questiona o chamado "giro territorial" e explora como o território pode ser uma ferramenta analítica, desenvolvida por geógrafos críticos, além de ser uma categoria de luta social, especialmente entre os povos originários do Brasil.

ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

Resoluções de exercícios

Neste suplemento para o professor, as respostas, de todos os exercícios, atividades e problemas, estão indicadas na reprodução do livro do estudante. Nesta seção, apresentaremos o encaminhamento das resoluções dos exercícios e das atividades que demandam cálculos e/ou orientações para sua resolução.

CAPÍTULO 1 Sequências

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. d. Dois termos, c_i e c_j, são equidistantes dos extremos se, e somente se, a quantidade de termos que precedem c_i é igual à quantidade de termos que sucedem c_j. A quantidade de termos que precedem c_k é igual a $k - 1$ e o total de termos que sucedem c_{k+7} é $22 - (k + 7)$, logo: $k - 1 = 22 - (k + 7) \Rightarrow k = 8$.

Concluímos, então, que o valor de k é 8.

2. a. $a_1 = 2 \cdot 1 + 5 = 7$ $\quad a_3 = 2 \cdot 3 + 5 = 11$

$a_2 = 2 \cdot 2 + 5 = 9$ $\quad a_4 = 2 \cdot 4 + 5 = 13$

Portanto, a sequência é (7, 9, 11, 13, ...).

b. $a_1 = 1^2 + 1 = 2$

$a_2 = 2^2 + 2 = 6$

$a_3 = 3^2 + 3 = 12$

$a_4 = 4^2 + 4 = 20$

Portanto, a sequência é (2, 6, 12, 20, ...).

c. $a_1 = \frac{1}{(1+1)} = \frac{1}{2}$

$a_2 = \frac{2}{(2+1)} = \frac{2}{3}$

$a_3 = \frac{3}{(3+1)} = \frac{3}{4}$

$a_4 = \frac{4}{(4+1)} = \frac{4}{5}$

Portanto, a sequência é $\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots\right)$.

d. $a_1 = 4$

$n = 1 \Rightarrow a_2 = 5 + a_1 = 5 + 4 = 9$

$n = 2 \Rightarrow a_3 = 5 + a_2 = 5 + 9 = 14$

$n = 3 \Rightarrow a_4 = 5 + a_3 = 5 + 14 = 19$

Portanto, a sequência é (4, 9, 14, 19, ...).

e. $a_1 = 3$ $\quad a_2 = 7$

$n = 1 \Rightarrow a_3 = a_2 - a_1 = 7 - 3 = 4$

$n = 2 \Rightarrow a_4 = a_3 - a_2 = 4 - 7 = -3$

Portanto, a sequência é (3, 7, 4, –3, ...).

3. a. $n = 10 \Rightarrow S_{10} = 10^2 + 10 = 110$

b. $n = 1 \Rightarrow S_1 = 1^2 + 1 = 2 \therefore a_1 = 2$

c. $a_5 = S_5 - S_4 = (5^2 + 5) - (4^2 + 4) \therefore a_5 = 10$

d. $a_n = S_n - S_{n-1} = n^2 + n - [(n-1)^2 + (n-1)] \therefore a_n = 2n$

4. a. Vamos chamar de extremos de uma mesa, ou de uma fileira de mesas, os lados menores do retângulo que podem ser formados com uma ou mais mesas. Assim, observamos que nos extremos temos 2 cadeiras e, além delas, temos mais 4 cadeiras em cada mesa. Logo, em uma fileira de 11 mesas, o número de cadeiras será $2 + 11 \cdot 4$, ou seja, 46 cadeiras.

b. De acordo com a observação do item **a**, em uma fileira de n mesas, o número de cadeiras será $4n + 2$.

c. $2 + 4n \geqslant 36 \Rightarrow n \geqslant 8{,}5 \therefore n = 9$

5. alternativa **a**

$A_1 = 1 = 1^2; A_2 = 4 = 2^2; A_3 = 9 = 3^2; A_{n-1} = (n-1)^2; A_n = n^2$

Assim: $A_n - A_{n-1} = n^2 - (n-1)^2 \Rightarrow A_n - A_{n-1} =$

$= n^2 - (n^2 - 2n + 1)$

$A_n - A_{n-1} = n^2 - n^2 + 2n - 1 \Rightarrow A_n - A_{n-1} = 2n - 1$

6. O resultado da divisão das 47 teclas por 7, temos resultado 6 com resto 5.

Assim, a sequência de 7 notas, lá, si, dó, ré, mi, fá, sol, aparece 6 vezes nas 47 teclas; e o resto informa que, além dessa repetição, aparecem mais 5 teclas correspondentes à sequência lá, si, dó, ré, mi. Assim, concluímos que a 47ª tecla emite a nota mi.

7. a. Tabelando os dados, temos:

Etapas	Número de horas trabalhadas
1ª	$\frac{t}{2} + \frac{1}{2} = \frac{t+1}{2}$
2ª	$\frac{t - \frac{t+1}{2}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{t+1}{4}$
3ª	$\frac{t - \left(\frac{t+1}{2} + \frac{t+1}{4}\right)}{2} + \frac{1}{2} = \frac{t+1}{8}$
4ª	$\frac{t - \left(\frac{t+1}{2} + \frac{t+1}{4} + \frac{t+1}{8}\right)}{2} + \frac{1}{2} = \frac{t+1}{16}$

b. $\frac{t+1}{2} + \frac{t+1}{4} + \frac{t+1}{8} + \frac{t+1}{16} = t \Rightarrow t = 15$

9. alternativa **d**

(33.000, 34.500, 36.000, …)

Trata-se de uma progressão aritmética de primeiro termo $a_1 = 33.000$ e razão $r = 1.500$. Assim:

$a_7 = a_1 + 6r = 33.000 + 6 \cdot 1.500 = 42.000$

Portanto, 42.000 passagens vendidas em julho.

10. a. Temos uma P.A. na qual $a_1 = 148$ e a razão é 20. Assim:

$a_1 = 148$

$a_2 = 148 + 1 \cdot 20 = 168$ $\quad a_4 = 148 + 3 \cdot 20 = 208$

$a_3 = 148 + 2 \cdot 20 = 188$ $\quad a_{35} = 148 + 34 \cdot 20 = 828$

Concluímos, então, que a sequência pedida é (148, 168, 188, 208, ..., 828).

11. a. (5, 2, –1, –4, …): P.A. decrescente

b. (–3, –3, –3, –3, …): P.A. constante

c. (10, 18, 26, 34, …): P.A. crescente

12. a. Como a vazão da torneira é constante, deduzimos que a sequência (600, 5x – y, 6x + 3y, 8x + 5y) é uma P.A.. Em toda P.A., a diferença entre um termo qualquer, a partir do segundo, e o termo anterior é constante, temos:

$$\begin{cases} 5x - y - 600 = 6x + 3y - (5x - y) \\ 6x + 3y - (5x - y) = 8x + 5y - (6x + 3y) \end{cases}$$

$\therefore x = 400$ e $y = 200$

A capacidade do tanque é dada por:
$8x + 5y = 8 \cdot 400 + 5 \cdot 200 = 4.200$

b. Para $x = 400$ e $y = 200$, temos a P.A. (600, 1.800, 3.000, 4.200).
Então, a vazão da torneira é de 1.200 litros por hora.

13. $a_1 = 2$ e $a_2 = 13$
$r = a_2 - a_1 = 13 - 2 = 11$
Aplicando a fórmula do termo geral $a_n = a_1 + (n - 1)r$, para $n = 40$, concluímos que: $a_{40} = 2 + (40 - 1)11 = 431$

14. $a_1 = 2$ e $a_2 = 8$
$r = a_2 - a_1 = 8 - 2 = 6$
Aplicando a fórmula do termo geral $a_n = a_1 + (n - 1)r$, concluímos que: $a_n = 2 + (n - 1)6 = 6n - 4$

15. Aplicando a fórmula do termo geral $a_n = a_1 + (n - 1)r$, para $n = 11$, temos:
$a_{11} = a_1 + 10r \Rightarrow 29k - 18 = a_1 + (11 - 1)(2 - k)$
$\therefore 29k - 18 = a_1 + 20 - 10k \therefore a_1 = 39k - 38$

16. $r = a_2 - a_1 = 7 - 3 = 4$
Aplicando a fórmula do termo geral $a_n = a_1 + (n - 1)r$, para $a_n = 99$, temos: $99 = 3 + (n - 1)4 \Rightarrow n = 25$

17. Queremos interpolar 6 meios aritméticos entre 2 e 10, nessa ordem. Então, teremos uma P.A. com oito termos, sendo $a_1 = 2$ e $a_8 = 10$.
$a_8 = a_1 + 7r \Rightarrow 10 = 2 + 7r \therefore r = \dfrac{8}{7}$
Assim, temos a P.A.: $\left(2, \dfrac{22}{7}, \dfrac{30}{7}, \dfrac{38}{7}, \dfrac{46}{7}, \dfrac{54}{7}, \dfrac{62}{7}, 10\right)$

18. Indicando por r a razão da P.A., temos:

$$\begin{cases} a_1 + a_3 = 66 \\ a_2 + a_4 = 72 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 + a_1 + 2r = 66 \\ a_1 + r + a_1 + 3r = 72 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} 2a_1 + 2r = 66 \\ 2a_1 + 4r = 72 \end{cases} \Rightarrow r = 3 \text{ e } a_1 = 30$$

Assim, deduzimos que a P.A. é (30, 33, 36, 39).

Concluímos, então, que as salas A, B, C e D do período matutino dessa escola têm, respectivamente, 30 estudantes, 33 estudantes, 36 estudantes e 39 estudantes.

19. Os múltiplos de 12 maiores que 2.000 e menores que 8.000 formam uma P.A. cujo primeiro termo é 2.004 e a razão é $r = 12$.

a. Aplicando a fórmula do termo geral
$a_n = a_1 + (n - 1)r$, para $n = 30$, concluímos que:
$a_{30} = 2.004 + (30 - 1) \cdot 12 = 2.352$

b. O último termo da P.A. é 7.992. Indicando por n o número de termos dessa P.A., temos:
$a_n = a_1 + (n - 1)r \Rightarrow 7.992 = 2.004 + (n - 1) \cdot 12$
$\therefore n = 500$

20. a. $1971 + 6 = 1977$

b. A sequência crescente dos anos em que ocorreram obras de conservação é a P.A.: 1977, 1983, 1990 etc.
Assim: $a_7 = 1977 + 6 \cdot 6 = 2013$

c. $a_n > 2050 \Rightarrow 1977 + (n - 1) > 2050 \therefore n > 13,1666...$
O menor número natural n que satisfaz essa desigualdade é 14. Logo: $a_{14} = 1977 + 13 \cdot 6 = 2055$

21. alternativa **c**
Em ordem crescente, as distâncias, em metro, dos postes à praça formam a progressão aritmética: (80, 100, 120, 140, ..., 1.380).
Calculando o número n de termos dessa P.A., temos:
$1.380 = 80 + (n - 1) \cdot 20 \Rightarrow n = 66$
Logo, serão colocados 66 postes ao longo dessa estrada.
A maior quantia, em real, é dada por:
$66 \cdot 8.000 = 528.000$

22. Queremos que a soma dos números das duas fichas seja 1.533, isto é: 1.000 + 533; 999 + 534; 998 + 535, ...
Assim, podemos formar uma progressão aritmética de primeiro termo $a_1 = 533$, $a_n = 1.000$ e razão $r = 1$:
(533, 534, 535, …, 1.000)
A quantidade de conjuntos diferentes de duas fichas cuja soma resulta em 1.533 é o número x, que corresponde à metade de elementos da P.A. indicada anteriormente.
Assim: $1.000 = 533 + (n - 1) \cdot 1 \Rightarrow n = 468$
Logo, $x = 468 : 2 = 234$. Ou seja, temos 234 conjuntos.

23. Sendo a_n o termo médio da P.A., temos:

$$\begin{cases} a_n = 4 \cdot a_1 \\ a_n = \dfrac{a_1 + 42}{2} \end{cases}$$

De onde obtemos: $a_1 = 6$

24. a. A sequência $(x + 3, 2x, 4x - 10)$ é uma P.A. se, e somente se, $2x = \dfrac{(x + 3 + 4x - 10)}{2}$, ou seja: $5x - 7 = 4x \Rightarrow x = 7$

b. A sequência $(y^2 - 2, y + 5, 4y + 4)$ é uma P.A. se, e somente se, $y + 5 = \dfrac{(y^2 - 2 + 4y + 4)}{2}$, ou seja:
$y^2 + 4y + 2 = 2y + 10 \Rightarrow y^2 + 2y - 8 = 0$
$\therefore y = 2$ ou $y = -4$
Para $y = 2$, temos a sequência (2, 7, 12), que é uma P.A. crescente.
Para $y = -4$, temos a sequência (14, 1, –12), que é uma P.A. decrescente.
A sequência $(y^2 - 2, y + 5, 4y + 4)$ é uma P.A. crescente apenas para $y = 2$.

c. A sequência $(t + 2, 5t + 1, 9t - 5)$ é uma P.A. se, e somente se, $5t + 1 = \dfrac{(t + 2 + 9t - 5)}{2}$, ou seja:
$10t + 2 = 10t - 3 \Rightarrow 0t = -5$
Como a equação $0t = -5$ é impossível, concluímos que não existe número real t para o qual a sequência $(t + 2, 5t + 1, 9t - 5)$ seja uma P.A..

25. A sequência das distâncias ao ponto O formam a P.A.: $(x + 20, 3x + 10, 4x + 30)$. Pela propriedade P2, temos:
$3x + 10 = \dfrac{x + 20 + 4x + 30}{2} \Rightarrow x = 30$
Logo, ao final dos três segundos, a distância, em metro, ao ponto O era: $4 \cdot (30) + 30 = 150$, ou seja, 150 m.

26. alternativa **a**
Conhecemos a soma dos três primeiros termos, então, é conveniente a representação P.A. $(x - r, x, x + r, ...)$

$$\begin{cases} x - r + x + x + r = 24 \\ (x - r) \cdot x \cdot (x + r) = 480 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 8 \\ (8 - r) \cdot 8 \cdot (8 + r) = 480 \end{cases}$$

$64 - r^2 = 60 \Rightarrow r^2 = 4$
$\therefore r = -2$, pois a P.A. é decrescente.
Temos, então, a P.A. (10, 8, 6, ...). Logo:
$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$
$a_{24} = 10 + (24 - 1) \cdot (-2) \Rightarrow a_{24} = -36$

27. Representando as distâncias entre as cidades A e B, B e C, C e D por uma P.A. do tipo $(x - r, x, x + r)$, temos:

$x - r + x + x + r = 300 \Rightarrow x = 100$

28. Representando a P.A. dos três ângulos internos desse triângulo por $(x, x + r, x + 2r)$, temos:

$$\begin{cases} (x + 2r) - x = 20 \\ x + (x + r) + (x + 2r) = 180 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r = 10 \\ x + r = 60 \end{cases}$$

De onde obtemos $x = 50$.

29. $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$

$a_{30} = -15 + (30 - 1) \cdot 4 = 101$

Aplicando $S_n = \dfrac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$ para $n = 30$, temos:

$$S_{30} = \frac{(-15 + 101) \cdot 30}{2} = 1.290$$

30. a. Os múltiplos positivos de 7 menores que 200, formam a P.A. de 28 termos (7, 17, 21, ..., 196)

$$S_{28} = \frac{(a_1 + a_{28}) \cdot 28}{2} = \frac{(7 + 196) \cdot 28}{2} = 2.842$$

b. Os números naturais múltiplos de 2 e 3, simultaneamente, são todos os números naturais múltiplos de 6. Esses múltiplos, compreendidos entre 200 e 800 formam a P.A. (204, 210, 216, ..., 798).

O número n de termos dessa P.A. pode ser calculado por $a_n = a_1 + (n - 1)r$:

$798 = 204 + (n - 1) \cdot 6 \Rightarrow n = 100$

$$S_{100} = \frac{(a_1 + a_{100}) \cdot 100}{2} = \frac{(204 + 798) \cdot 100}{2} = 50.100$$

31. a. $r = a_2 - a_1 = 7 - 2 = 5$

$a_n = 2 + (n - 1)5 \Rightarrow a_n = 5n - 3$

b. $S_n = \dfrac{(2 + a_n)\,n}{2} = \dfrac{(2 + 5n - 3)\,n}{2} = \dfrac{5n^2 - n}{2}$

32. a. Os n primeiros números naturais ímpares formam a P.A. $(1, 3, 5, ..., a_n)$.

$a_n = 1 + (n - 1) \cdot 2 \Rightarrow a_n = 2n - 1$

$S_n = \dfrac{(1 + 2n - 1) \cdot n}{2} = n^2$

b. Os n primeiros números naturais pares formam a P.A. $(0, 2, 4, ..., a_n)$.

$a_n = 0 + (n - 1) \cdot 2 = 2n - 2$

$S_n = \dfrac{(0 + 2n - 2) \cdot n}{2} = n^2 - n$

c. Os n primeiros números naturais pares não nulos formam a P.A. $(2, 4, 6, ..., a_n)$.

$a_n = 2 + (n - 1) \cdot 2 \Rightarrow a_n = 2n$

$S_n = \dfrac{(2 + 2n) \cdot n}{2} = n^2 + n$

33. a. Cada termo a_n da P.A. (1.800, 1.900, 2.000, ..., 3.700) representa o número de acessos a esse *site* no dia n de janeiro.

$a_n = a_1 + (\text{n} - 1)r$

$3.700 = 1.800 + (n - 1) \cdot 100 \Rightarrow n = 20$

b. $S_{20} = \dfrac{(a_1 + a_{20}) \cdot 20}{2} \Rightarrow S_{20} = \dfrac{(1.800 + 3.700) \cdot 20}{2}$

$\therefore S_{20} = 55.000$

34. alternativa **a**

Temos a seguinte sequência (i_n) de investimentos, mês a mês, em milhares de dólares, $(6, 4, 9, 8, 12, 12, 15, 16, ..., i_{20})$

Considerando apenas os termos de ordem ímpar dessa sequência, obtemos a P.A. (a_n) de razão 3: $(6, 9, 12, 15, ..., a_{10})$; e considerando apenas os termos de ordem par obtemos a P.A. (b_n) de razão 4: $(4, 8, 12, 16, ..., b_{10})$.

Assim, sendo S' a soma dos 10 termos da sequência (a_n) e sendo S'' a soma dos 10 termos da sequência (b_n), temos que a soma S dos 20 termos da sequência (i_n) é dada por: $S = S' + S''$.

$S' = \dfrac{(a_1 + a_{10})\,10}{2}$

$a_n = a_1 + (n - 1)r$

$a_{10} = 6 + (10 - 1) \cdot 3 \Rightarrow a_{10} = 33$

Logo: $S' = \dfrac{(6 + 33)\,10}{2} \Rightarrow S' = 195$

$S'' = \dfrac{(b_1 + b_{10})\,10}{2}$

$b_n = b_1 + (n - 1)r$

$b_{10} = 4 + (10 - 1) \cdot 4 \Rightarrow b_{10} = 40$

Logo: $S'' = \dfrac{(4 + 40)\,10}{2} \Rightarrow S'' = 220$

Assim: $S = S'' + S'' = 195 + 220 \Rightarrow S = 415$

35. Os números de poltronas das fileiras formam uma P.A. tal que o termo inicial é $a_1 = 20$, a razão é $r = 2$ e o número de termos é $n = 16$.

$a_n = a_1 + (n - 1)r \Rightarrow a_{16} = 20 + (16 - 1)2 \therefore a_{16} = 50$

$S_{16} = \dfrac{(20 + 50) \cdot 16}{2} = 560$

36. A instalação da máquina foi realizada em n fases, onde o tempo da n-ésima fase é dado por $a_n = 12 - 0{,}4(n - 1)$. A soma dos tempos das fases é igual a 144 horas, levando à equação $12n - 0{,}2(n^2 - n) = 144$. Multiplicando por 10 e resolvendo a equação quadrática $2n^2 - 122n + 1.440 = 0$, encontramos as raízes $n_1 = 16$ ou $n_2 = 45$ (não convém, pois teríamos $a_{45} = -5{,}6$, o que é absurdo). Assim, a instalação foi realizada em 16 fases.

37. $a_1 = 100$, $r = 20$ e $S_n = 3.600$.

$a_n = 100 + (n - 1) \cdot 20 = 80 + 20n$

$S_n = \dfrac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2} \Rightarrow 3.600 = \dfrac{(100 + 80 + 20n) \cdot n}{2}$

$\therefore n^2 + 9n - 360 = 0 \Rightarrow n = 15$ ou $n = -24$

Logo, há 15 resistores associados.

39. a. A taxa de juro mensal i é calculada pela fórmula:

$$i = \frac{Juro}{Capital} \cdot 100$$

A aplicação inicial foi de R$ 1.500,00. O montante após o primeiro mês é R$ 1.530,00. A diferença entre o montante no primeiro mês e a aplicação inicial é o Juro: 1.530 − 1.500 = 30. Assim:

$$i = \frac{30}{1500} \cdot 100 = 2\%$$

40. a. A sequência é uma P.G., pois $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = q = 2$, para qualquer n, com $n \in \mathbb{N}^*$ e $n \leqslant 6$.

b. Como a razão entre dois termos consecutivos quaisquer, $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$, não é constante, a sequência não é uma P.G.

c. Como a razão entre dois termos consecutivos quaisquer, $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$, é constante, a sequência é uma P.G.

d. A sequência é uma P.G., pois a razão entre dois termos consecutivos quaisquer é constante.

41. alternativa **c**

O número de visitantes é multiplicado por três (triplica) a cada dia, ou seja, temos uma P.G. de razão 3 cujo primeiro termo é 345.

42. a. Ao final de cada ano, o percentual de crescimento da população pode ser estimado em:

100% + 2% = 102% = 1,02

b. $q = \frac{a_{2030}}{a_{2029}} \Rightarrow a_{2029} = \frac{a_{2030}}{q} = \frac{477.360}{1,02} = 468.000$

c. $a_{2031} = a_{2030} \cdot q = 477.360 \cdot 1,02 \approx 486.907$

43. $q = \frac{768}{1.536} = \frac{1}{2}$

Aplicando a fórmula do termo geral, $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$:

$a_{14} = 1.536 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{13} = \frac{1.536}{8.192} = \frac{3}{16}$

44. $q = 2$

$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

$a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$

45. $a_{15} = a_1 \cdot q^{14} \Rightarrow 5 = a_1 \cdot 9 \therefore a_1 = \frac{5}{9}$

46. $a_6 = a_1 \cdot q^5$ e $a_4 = a_1 \cdot q^3$

$a_6 = a_1 \cdot a_4 \Rightarrow a_1 \cdot q^5 = a_1 \cdot a_1 \cdot q^3 \therefore a_1 = q^2$

Como $q = \frac{2}{3}$, temos: $a_1 = \frac{4}{9}$

Portanto, a P.G. é: $\left(\frac{4}{9}, \frac{8}{27}, \frac{16}{81}, \frac{32}{243}, ...\right)$

47. $q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{81}{243} = \frac{1}{3}$

$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

$\frac{1}{3^{10}} = 243 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \Rightarrow \frac{1}{3^{10}} = \frac{3^5}{3^{n-1}}$

$\therefore 3^{n-1} = 3^{15} \Rightarrow n - 1 = 15 \therefore n = 16$

48. a. Devemos formar a P.G. (a_n) de 6 termos:

$(1, \_\_, \_\_, \_\_, \_\_, 3)$.

$a_6 = a_1 \cdot q^{6-1}$

$3 = 1 \cdot q^5 \Rightarrow q = \sqrt[5]{3}$

Assim, temos a P.G. $\left(1, \sqrt[5]{3}, \sqrt[5]{9}, \sqrt[5]{27}, \sqrt[5]{81}, 3\right)$

b. Devemos formar a P.G. (a_n) de 5 termos:

$(4, \_\_, \_\_, \_\_, 324)$.

$a_5 = a_1 \cdot q^{5-1}$

$324 = 4q^4 \Rightarrow q^4 = \frac{324}{4} = 81$

$q = \pm\sqrt[4]{81} \Rightarrow q = 3$ (não convém) ou $q = -3$

Assim, para $q = -3$, a interpolação resulta na P.G. oscilante: (4, –12, 36, –108, 324).

Concluímos, então, que a soma S pedida é dada por:

$S = 4 + (-12) + 36 + (-108) + 324 \Rightarrow S = 244$

49. Temos: $a_1 + a_2 = 1$ e $a_3 + a_4 = 9$

$$\begin{cases} a_1 + a_2 = 1 \\ a_3 + a_4 = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 + a_1 \cdot q = 1 \\ a_1 \cdot q^2 + a_1 \cdot q^3 = 9 \end{cases} \therefore \begin{cases} a_1 \cdot (1 + q) = 1 \\ a_1 \cdot q^2(1 + q) = 9 \end{cases}$$

Dividindo, membro a membro, as duas igualdades anteriores, obtemos: $q = \pm 3$

Substituindo q por 3 em $a_1 \cdot (1 + q) = 1$, obtemos: $a_1 = \frac{1}{4}$

Substituindo q por –3 em $a_1 \cdot (1 + q) = 1$, obtemos: $a_1 = -\frac{1}{2}$

Como são 4 termos positivos, concluímos $q = 3$.

50. a. Cada termo a_n da P.G. (1, 8, 64, ...) representa o número de cubos que compõem a figura n. Assim:

$a_5 = 1 \cdot 8^4 = 4.096$

b. $a_n = 1 \cdot 8^{n-1} = 8^{n-1}$

51. a. Destacando os cinco primeiros termos da sequência crescente, temos: (300, 600, 1.200, 2.400, 4.800, ...).

Observamos que a sequência é uma P.G. de primeiro termo 300 e razão 2.

b. $a_7 = 300 \cdot 2^6 = 19.200$

c. Como k horas equivalem a $2k$ períodos de 30 minutos, temos que ao final desse tempo a população é dada pelo termo a_{2k+1} da P.G. do item **a**, isto é: $a_{2k+1} = 300 \cdot 2^{2k}$

52. a. No gráfico, os valores assinalados no eixo dos tempos até o 31º dia formam a P.A. (1, 6, 11, ..., 31), e os valores correspondentes assinalados no eixo dos números de árvores contaminadas formam a P.G. (100, 200, 400, ..., a_n), em que n é o número de termos da P.G. e da P.A.

Para determinar o número n de termos dessa P.A., aplicamos a fórmula do termo geral:

$31 = 1 + (n - 1) \cdot 5 \Rightarrow n = 7$

$a_7 = 100 \cdot 2^6 = 6.400$

b. $a_n = 100 \cdot 2^{n-1}$

$102.400 = 100 \cdot 2^{n-1} \Rightarrow 1.024 = 2^{n-1} \therefore n = 11$

$b_{11} = 1 + 10 \cdot 5 \Rightarrow b_{11} = 51$

54. A sequência de três termos tem o primeiro termo não nulo (–1). Logo, essa sequência é P.G. se, e somente se, $(x - 1)^2 = (-1)(4x - 1)$; ou seja:

$x^2 - 2x + 1 = -4x + 1 \Rightarrow x^2 + 2x = 0$

$\therefore x(x + 2) = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $x = -2$

Logo, para ser uma P.G. devemos ter: $x = 0$ ou $x = -2$

55. Considerando os três primeiros termos da P.G., temos:

$a^2 = 3 \cdot 12 \Rightarrow a^2 = 36$

$\therefore a = 6$ (não convém, pois a P.G. é oscilante) ou $a = -6$

Para $a = -6$, a razão q da P.G. é $q = -\frac{6}{3} = -2$, assim, temos a P.G. (3, –6, 12, –24, 48, –96)

56. $\begin{cases} 4 = \frac{a + c}{2} \\ 4^2 = a \cdot (c + 2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + c = 8 \\ ac + 2a = 16 \end{cases} \therefore a = 8$ ou $a = 2$

- Para $a = 8$, temos $c = 0$.
- Para $a = 2$, temos $c = 6$.

Logo: ($a = 8$ e $c = 0$) ou ($a = 2$ e $c = 6$). Como a e c devem ser números positivos, a resposta é $a = 2$ e $c = 6$.

57. A sequência crescente $(20, 2x + 10, 4x + 5)$ é uma P.G. Assim, temos:

$(2x + 10)^2 = 20(4x + 5) \therefore x = 0$ (não convém,pois a P.G.é crescente) ou $x = 10$

Assim, para $x = 10$, o terceiro termo da P.G. é calculado, em milhares de reais, por: $4 \cdot 10 + 5 = 45$

58. Se a substância tem decaimento percentual constante a cada ano, trata-se de uma P.G. decrescente.

a. $(2x + 10)^2 = (4x - 60)(x + 41) \Rightarrow x = 40$

Logo, em 2012, a massa dessa substância era:

$4x - 60 = 4 \cdot 40 - 60 = 100$

b. De acordo com o quadro e com o valor de *x* encontrado no item **a**, temos a sequência: (100, 90, 81)

$q = \frac{90}{100} = 0{,}9$

$a_{2015} = a_{2014} \cdot q = 81 \cdot 0{,}9 = 72{,}9$

59. As três dimensões do bloco estão em P.G., da qual conhecemos o produto dos termos; logo, é conveniente representar essa P.G. por: $\left(\frac{x}{q}, x, xq\right)$. Assim:

$$\begin{cases} \frac{x}{\cancel{q}} \cdot x \cdot x\cancel{q} = 216 \\ 4\left(\frac{x}{q} + x + xq\right) = 84 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^3 = 216 \\ \frac{x}{q} + x + xq = 21 \end{cases}$$

Assim, $x = 6$ e $q = \frac{1}{2}$ ou $q = 2$.

Para $q = \frac{1}{2}$ e $x = 6$, temos a P.G.: (12, 6, 3)

Para $q = 2$ e $x = 6$, temos a P.G.: (3, 6, 12)

60. Chamando de R_1, R_2 e R_3 a resistência desses três resistores e sabendo que a razão $q = 2$ e que $R_3 = R$, temos:

$R_3 = R \qquad R_2 = \frac{R}{2} \qquad R_3 = \frac{R}{4}$

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{\frac{R}{4}} + \frac{1}{\frac{R}{2}} + \frac{1}{R} = \frac{4}{R} + \frac{2}{R} + \frac{1}{R}$$

$$\therefore \frac{1}{R_{eq}} = \frac{7}{R} \Rightarrow R_{eq} = \frac{R}{7}$$

61. a. Sendo $a_1 = 3$ e a razão $q = 2$, temos:

$$S_{10} = \frac{3 \cdot (1 - 2^{10})}{1 - 2} = \frac{3 \cdot (1 - 1.024)}{-1} = 3.069$$

b. Sendo $a_1 = 4$ e a razão $q = \frac{1}{2}$, temos:

$$S_n = \frac{4 \cdot \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{11}\right]}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{4 \cdot \left[\frac{2.048}{2.048} - \frac{1}{2.048}\right]}{\left(\frac{1}{2}\right)} =$$

$$= \left(\frac{2.047}{512}\right) \cdot \frac{2}{1} = \frac{2.047}{256}$$

c. Sendo $a_1 = 5$ e a razão $q = -1$, temos:

$$S_{50} = \frac{5 \cdot [1 - (-1)^{50}]}{1 - (-1)} = \frac{5 \cdot (1 - 1)}{2} = \frac{5 \cdot 0}{2} = 0$$

d. Sendo $a_1 = 5$ e a razão $q = -1$, temos:

$$S_{51} = \frac{5 \cdot [1 - (-1)^{51}]}{1 - (-1)} = \frac{5 \cdot (1 + 1)}{2} = 5$$

62. Pela fórmula da soma dos *n* primeiros termos da P.G., $S_n = \frac{a_1 . (1 - q^n)}{1 - q}$, temos:

$$765 = \frac{a_1 \cdot (1 - 2^8)}{1 - 2} \Rightarrow -765 = a_1 \cdot (-255) \therefore a_1 = 3$$

63. alternativa **c**

Temos $a_1 = 5$ e $q = 2$.

$$S_n = \frac{5 \cdot (1 - 2^n)}{1 - 2} = -5 \cdot (1 - 2^n) = 5 \cdot (2^n - 1)$$

64. Aplicando a fórmula da soma dos *n* primeiros termos da P.G., temos: $12.285 = \frac{3 \cdot (1 - 2^n)}{1 - 2} \Rightarrow -4.095 = 1 - 2^n$

$\therefore 2^n = 4.096 \Rightarrow 2^n = 2^{12} \therefore n = 12$

65. a. Cada termo a_n da P.G. (2, 4, 8, ..., a_{20}) representa o número de ascendentes da geração *n*.

$a_{20} = 2 \cdot 2^{19} = 2^{20} \Rightarrow a_{20} = 1.048.576$

b. $S_{20} = \frac{a_1 \cdot (1 - q^{20})}{1 - q} \Rightarrow S_{20} = \frac{2 \cdot (1 - 2^{20})}{1 - 2}$

$\therefore S_{20} = 2^{21} - 2 \Rightarrow S_{20} = 2.097.150$

66. alternativa **e**

	1º dia	2º dia	3º dia	
nadando	25	50	100	P.G. de razão 2
correndo	1.500	1.800	2.000	P.A. de razão 300

Aplicando a fórmula $S_n = \frac{a_1 \cdot (1 - q^n)}{1 - q}$, temos que a distância percorrida a nado é:

$3.175 = \frac{25 \cdot (1 - 2^n)}{1 - 2} \Rightarrow 2^n - 1 = 127$

$2^n = 128 \Rightarrow 2^n = 2^7 \therefore n = 7$

Aplicando a fórmula $S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$, temos que a distância percorrida correndo é:

$S_7 = \frac{(a_1 + a_7) \cdot 7}{2}$, por meio da fórmula do termo geral,

$S_7 = \frac{(a_1 + a_1 + 6 \cdot r) \cdot 7}{2}$

$S_7 = \frac{(3.000 + 6 \cdot 300) \cdot 7}{2} \Rightarrow S_7 = \frac{4.800 \cdot 7}{2} \therefore S_7 = 16.800$

68. a. Temos: $a_1 = 25$ e $q = \frac{5}{25} = \frac{1}{5}$

$$S_\infty = \frac{25}{1 - \frac{1}{5}} \Rightarrow S_\infty = \frac{125}{4}$$

b. Temos: $a_1 = \frac{1}{2}$ e $q = -\frac{1}{4} : \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$

$$S_\infty = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} \Rightarrow S_\infty = \frac{1}{3}$$

c. Temos: $a_1 = 6$ e $q = 0{,}1$

$$S_\infty = \frac{25}{1 - 0{,}1} \Rightarrow S_\infty = \frac{20}{3}$$

d. Temos: $a_1 = k^5$ e $q = \frac{1}{k} = k^{-1}$

Como *k* é real positivo e maior que 1, deduzimos que a razão está variando no intervalo $-1 < q < 1$. Assim:

$$S_\infty = \frac{k^5}{1 - \frac{1}{k}} \Rightarrow S_\infty = \frac{k^6}{k - 1}$$

69. O primeiro membro da igualdade apresenta a soma dos infinitos termos de uma P.G. na qual $a_1 = \log x$ e $q = \frac{1}{2}$, assim:

$$\log x + \frac{\log x}{2} + \frac{\log x}{4} + \frac{\log x}{8} + ... = 4 \Rightarrow \frac{\log x}{1 - \frac{1}{2}} = 4$$

$\therefore 2 \log x = 4 \Rightarrow \log x = 2$

$\therefore x = 10^2 = 100$

70. Sendo (A_1, A_2, A_3, ...) a sequência tal que A_n é a área, em centímetro quadrado, da região sombreada da figura *n*, temos:

$A_1 = 4^2 = 16 \qquad A_2 = 8 \qquad A_3 = 4$

e assim sucessivamente.

Observando que a sequência (A_n) é uma P.G. (16, 8, 4, ...) em que $A_1 = 16$ e $q = \frac{1}{2}$, temos:

$$S_\infty = \frac{16}{1 - \frac{1}{2}} = 32$$

71. Os perímetros dos triângulos, em centímetro, formam a seguinte P.G. infinita: $\left(20, 10, 5, \frac{5}{2}, ...\right)$

Logo, a soma dos infinitos perímetros, em cm, é:

$$S_\infty = \frac{20}{1 - \frac{1}{2}} = 40$$

72. $D = 4 + \frac{0,8}{1 - 0,1} = \frac{44}{9}$

73. a. Para o empréstimo A, temos:

$a_2 = 1 + 1 \cdot 1 \cdot 1 = 2$ $\qquad a_4 = 1 + 1 \cdot 1 \cdot 3 = 4$

$a_3 = 1 + 1 \cdot 1 \cdot 2 = 3$

Assim, temos a P.A. (1, 2, 3, 4)

Para o empréstimo B, temos:

$b_2 = 1(1 + 1)^1 = 2$ $\qquad b_4 = 1(1 + 1)^3 = 8$

$b_3 = 1(1 + 1)^2 = 4$

Assim, temos a P.G. (1, 2, 4, 8).

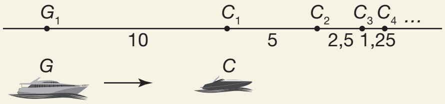
c. Na P.A. obtida no item **a**, o termo geral é representado por: $a_n = 1 + (n - 1) \cdot 1$, ou seja, $a_n = n$. Assim, $f(x) = x$.

Na P.G. obtida no item **a**, o termo geral é representado por: $b_n = 1 \cdot 2^{n-1}$, ou seja, $b_n = 2^{n-1}$. Assim, $g(x) = 2^{x-1}$.

Representando *f* e *g* no mesmo plano cartesiano, temos o gráfico apresentado nas respostas no final do livro do estudante.

74. a. A cada distância *d* percorrida pelo barco *G*, o barco de pesca *C* percorre a distância $\frac{d}{2}$.

Sejam G_1 e C_1 os pontos em que se encontram os barcos *G* e *C*, respectivamente, no instante em que a distância entre eles é 10 km. Quando o barco *G* atingir o ponto C_1, o barco *C* já terá percorrido 5 km, atingindo um ponto C_2; quando *G* chegar em C_2, *C* terá percorrido mais 2,5 km, atingindo o ponto C_3, e assim por diante.



ERICSON GUILHERME/LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

Assim, a distância, em quilômetro, percorrida pelo barco *G*, até alcançar o barco *C*, é a soma S_∞ dos infinitos termos da P.G. (10; 5; 2,5; 1,25; ...), que é dada por:

$$S_\infty = \frac{10}{1 - 0,5} \Rightarrow S_\infty = 20$$

Agora, acompanhe outra maneira de resolver.

A cada distância *d* percorrida pelo barco *G*, da guarda costeira, o barco *C* percorre a distância $\frac{d}{2}$.

Sejam: G_1 e C_1 os pontos em que se encontram os barcos *G* e *C*, respectivamente, no instante em que a distância entre eles é 10 km; e *v* a velocidade do barco *C*, logo, a velocidade do barco *G* é 2*v*.

Consideremos um sistema de abscissas associado à trajetória dos barcos, com a mesma orientação do movimento deles, tal que a origem *O* coincida com o ponto G_1. Assim, após um tempo *t*, a partir do instante em que *G* está em G_1, temos que os espaços d_1 e d_2 dos barcos *G* e *C*, respectivamente, são dados por:

$S_1 = 2vt$ e $S_2 = 10 + vt$

Quando o barco *G* alcançar *C*, os espaços S_1 e S_2 se igualam: $2vt = 10 + vt \Rightarrow vt = 10$

Substituindo *vt* por 10, em $S_1 = 2vt$ ou $S_2 = 10 + vt$, obtemos: $S_1 = S_2 = 20$

75. a. A taxa de juro anual do empréstimo de Benedito, calculada a partir do montante do primeiro ano (R$ 1.590,00), usando a fórmula dos juros compostos, resulta em $1 + i = \frac{1.590}{1.500} = 1,06$. Assim, a taxa de juro anual é 6%.

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

1. a. A sequência crescente, cujos termos são as quantidades de azulejos brancos nos mosaicos, é: $(1, 2^2, 3^2, 4^2, ...)$. Logo, o 15º termo dessa sequência é 15^2, ou seja, 225.

c. Os azulejos cinza do 20º mosaico circundam um quadrado formado por 20 × 20 azulejos brancos. Além dos 4 azulejos cinza situados nos vértices do quadrado branco, há 20 azulejos cinza em cada lado desse quadrado. Assim, o número de azulejos cinza no 20º mosaico é $4 + 4 \cdot 20$, ou seja, 84.

d. Os azulejos cinza do *n*-ésimo mosaico circundam um quadrado formado por $n \times n$ azulejos brancos. Além dos 4 azulejos cinza situados nos vértices do quadrado branco, há *n* azulejos cinza em cada lado desse quadrado. Assim, o número de azulejos cinza no *n*-ésimo mosaico é $4n + 4$.

2. a. $x_1 = 2$; $x_2 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$; $x_3 = \frac{2}{3} + 1 = \frac{5}{3}$; $x_4 = \frac{3}{5} + 1 = \frac{8}{5}$;

$x_5 = \frac{5}{8} + 1 = \frac{13}{8}$; $x_6 = \frac{8}{13} + 1 = \frac{21}{13}$

b. Para $x_3 = \frac{25}{13}$, temos a sequência: $\left(x_1, x_2, \frac{25}{13}, x_4, x_5, x_6\right)$.

Assim,

$$\frac{1}{x_2} + 1 = x_3 \Rightarrow \frac{1}{x_2} + 1 = \frac{25}{13} \therefore x_2 = \frac{13}{12}$$

$$\frac{1}{x_1} + 1 = x_2 \Rightarrow \frac{1}{x_1} + 1 = \frac{13}{12} \therefore x_1 = 12$$

$$\frac{1}{x_3} + 1 = x_4 \Rightarrow \frac{13}{25} + 1 = x_4 \therefore x_4 = \frac{38}{25}$$

$$\frac{1}{x_4} + 1 = x_5 \Rightarrow \frac{25}{38} + 1 = x_5 \therefore x_5 = \frac{63}{38}$$

$$\frac{1}{x_5} + 1 = x_6 \Rightarrow \frac{38}{63} + 1 = x_6 = \frac{101}{63}$$

c. Para $x_3 = x_1 + \frac{1}{2}$, temos a sequência: $(x_1, x_2, x_1 + \frac{1}{2}, x_4, x_5, x_6)$.

Assim:

- $\frac{1}{x_2} + 1 = x_3 \Rightarrow \frac{1}{x_2} + 1 = x_1 + \frac{1}{2} \therefore x_2 = \frac{2}{2x_1 - 1}$
- $\frac{1}{x_1} + 1 = x_2 \Rightarrow \frac{1}{x_1} + 1 = \frac{2}{2x_1 - 1}$

$\therefore 2x_1^{\,2} - x_1 - 1 = 0 \Rightarrow x_1 = 1$ ou $x_1 = -\frac{1}{2}$ (não convém)

3. Esquematizamos os passos conforme o algoritmo:

a. (1) → 16

(2) R → 4	(2) R → 4	(2) R → 4
(3) M → 2	(3) M → 2	(3) M → 2
(4) Q → 16	(4) Q → 16	(4) Q → 16

Logo, apresentando os dez primeiros termos da sequência, temos: (16, 4, 2, 16, 4, 2, 16, 4, 2, 16, ...)

b. Basta dividirmos 395 por 3, essa divisão revela que a sequência 16, 4, 2 é repetida 131 vezes, sendo que o resto 5 indica que aparecem mais dois termos depois dessas repetições. Logo, o último termo que será exibido no monitor será o número 4.

4. a. A sequência é uma progressão aritmética finita de razão 2.900, cujo primeiro e último termos são 3.204 e 38.004, respectivamente.

b. O número de períodos de 15 minutos de funcionamento das catracas é igual ao número *n* de termos da P.A., (a_n) do item **a** que é obtido por:

$a_n = a_1 + (n - 1) \times r \Rightarrow 38.004 = 3.204 + (n - 1) \times 2.900$

$\therefore n = 13$

Logo, as catracas estiveram em funcionamento durante $13 \cdot 15$ min, ou seja, 195 min.

5. **a.** Convertendo os tempos em minutos, temos:

$1.239 = 375 + 24r \Rightarrow r = 36$

b. O horário do 23º voo, em minuto, é o 23º termo, a_{23}, da P.A., em que $a_1 = 375$ e $r = 36$:

$a_{23} = 375 + 22 \cdot 36 = 1.167$

Logo, aos 1.167 minutos do dia, ou seja, às 19 h 27 min.

c. Sabemos que 16 horas equivalem a 960 minutos. Assim, o horário pedido é o primeiro termo a_n maior que 960 da P.A. do item **a**.

$a_{23} \cdot 960 \Rightarrow 375 + (n - 1) \cdot 36 \cdot 960 \therefore n \cdot 17,25$

O menor número natural que satisfaz essa desigualdade é 18. Como $a_{18} = 375 + 17 \cdot 36$, temos $a_{18} = 987$.

Logo, decola aos 987 minutos do dia, ou seja, às 16 h 27 min.

6. **a.** Sabemos que, em três termos consecutivos de uma P.A., o termo médio é a média aritmética dos outros dois.

$2x^2 - 1 = \dfrac{(x - 1) + (1 - 3x)}{2} \Rightarrow 2x^2 + x - 1 = 0$

$\therefore x = \dfrac{1}{2}$ ou $x = -1$

Para $x = \dfrac{1}{2}$, temos: $\left(-\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}\right)$

Para $x = -1$, temos: $(-2, 1, 4)$

Como a P.A. deve ser crescente, concluímos que $x = -1$.

b. $y + 8 = \dfrac{(4y + 7) + (9 - 2y)}{2} \Rightarrow 2y + 16 = 2y + 16$

$\therefore 0 = 0$ (verdadeiro)

c. $3z + 6 = \dfrac{(5z - 1) + (z + 9)}{2} \Rightarrow 6z + 12 = 6z + 8$

$\therefore 12 = 8$ (falso)

7. Como conhecemos a soma das medidas dos lados, convém representar a P.A. por: $(x - r, x, x + r)$, com $r \cdot 0$. Assim:

$$\begin{cases} x - r + x + x + r = 18 \\ (x + r)^2 = x^2 + (x - r)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 6 \\ (x + r)^2 = x^2 + (x - r)^2 \end{cases}$$

De onde obtemos $x = 6$ e $r = 1,5$

Deduzimos, assim, que as medidas dos lados do triângulo são: 4,5 dm, 6 dm e 7,5 dm. Logo:

$A = \dfrac{4,5 \cdot 6}{2}\ \text{dm}^2 \Rightarrow A = 13,5\ \text{dm}^2$

8. **a.** A sequência (a_n) em que a_n é o número de atendimentos no dia n, em que $n = 1$ representa o dia da inauguração, é a P.A. (430, 450, 470, ...). Assim, temos:

$a_{16} = 430 + 15 \cdot 20 = 730$

b. Esse número é a soma S_{16} dos 16 primeiros termos da P.A. do item **a**; ou seja:

$S_{16} = \dfrac{(430 + 730) \cdot 16}{2} = 9.280$

c. Esse número é a soma S_n dos n primeiros termos da P.A. do item **a**, ou seja:

$S_n = \dfrac{[430 + 430 + 20(n - 1)]n}{2} \Rightarrow S_n = 10n^2 + 420n$

9. alternativa **d**

Na sequência (a_n), a seguir, cada termo a_n representa a altura da pilha, em milímetro, na n colocação de folha(s) na formação da pilha. Assim, temos: $(0,1; 0, 2; 0,4; ... ; a_{33})$

Calculando $a_{33} = 0,1 \cdot 2^{32} = 0,1 \cdot 2^2 \cdot 2^{30}$

Sabendo que $2^{10} = 1.024 \approx 1.000 = 10^3$, temos:

$a_{33} = 0,1 \cdot 2^2 \cdot 2^3 \cdot 2^3 \cdot 2^3 = 4 \cdot 10^8 = 400.000.000$

10. alternativa **d**

Considerando a P.G. de razão q, $(100.000, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}, a_{11}, 110.000)$, temos:

$110.000 = 100.000 \cdot q^{11} \Rightarrow q^{11} = 1,1 \therefore q = \sqrt[11]{1,1}$

O termo a_7 dessa P.G. é o montante acumulado, em real, nessa aplicação no mês de julho; assim:

$a_7 = 100.000 \cdot \left(\sqrt[11]{1,1}\right)^6 \Rightarrow a_7 = 100.000 \cdot \sqrt[11]{(1,1)^6}$

11. A sequência de três termos tem o primeiro termo não nulo, pois $x \neq 2$. Logo, essa sequência é uma P.G. se, e somente se:

$5^2 = \left(\dfrac{25}{x - 2}\right) \cdot (x - 2) \Rightarrow 25 = 25$

12. alternativa **b**

Da P.G. $(3, x, y)$, tem-se $x^2 = 3y$

da P.A. $(x, y, 9)$, tem-se $y = \dfrac{x + 9}{2}$

Resolvendo esse sistema, obtemos $x = -3$ (não convém, pois $x \cdot 0$) ou $x = \dfrac{9}{2}$, e $y = \dfrac{27}{4}$

Assim: $x + y = \dfrac{9}{2} + \dfrac{27}{4} \Rightarrow x + y = \dfrac{45}{4}$

13. Cada termo da P.G. a seguir, a partir do segundo, é o número médio de pessoas contaminadas por aquela(s) representada(s) pelo(s) termo anterior.

$(1; 1,23; 1,23^2; 1,23^3; ...; 1,23^8)$

A soma S_9 dos nove termos dessa P.G. é $S_9 \approx 24$.

14. A P.G. decrescente formada pelas medidas dos intervalos de tempo, em segundo, entre duas gotas consecutivas é (30; 15; 7,5; ...).

A goteira se transformará em um fio contínuo de água no limite S_∞ da soma dos infinitos termos dessa P.G., aproximadamente: $S_\infty = \dfrac{30}{1 - \dfrac{1}{2}} = 60$

VERIFIQUE O QUE APRENDEU NO CAPÍTULO 1

1. **a.** Observamos que a altura do último piso, em relação ao nível da rua é dada por $(48 + 280 \times 10)$ cm, ou seja, 2.848 cm.

Assim, a sequência (a_n) que satisfaz as condições do enunciado é: (48, 58, 68, ..., 2.848).

2. alternativa **a**

Os números inteiros k, com $3 \leqslant k < 1.000$, que resultam da soma de três inteiros consecutivos, formam a progressão aritmética (3, 6, 9, ..., 999), assim:

$a_n = a_1 + (n - 1)r \Rightarrow 999 = 3 + (n - 1) \times 3 \Rightarrow n = 333$

3. alternativa **c**

Na última fileira temos 1 tijolo e cada uma das demais fileiras tem um tijolo a mais que a fileira superior. Assim, considerando as fileiras de cima para baixo, temos a P.A. $(1, 2, 3, ..., a_n)$, em que cada termo a_k indica o número de tijolos da fileira k. Devemos determinar o valor numérico de a_n, que pode ser expresso por $a_n = 1 + (n - 1) \times 1$, ou seja, $a_n = n$.

Pela fórmula da soma dos n primeiros termos de uma P.A., temos:

$S_n = \dfrac{(a_1 + a_n)n}{2} \Rightarrow 820 = \dfrac{(1 + n)n}{2}$

$\therefore n^2 + n - 1.640 = 0$

Logo, $n = 40$ ou $n = -41$ (não convém)

4. **a.** $a_1 = 10.000$ e $q = 1,002$. Assim, o termo a_{12} representa a quantidade de lixo, em tonelada, produzido no mês de dezembro, isto é:

$$a_{12} = a_1 \times q^{11} \Rightarrow a_{12} = 10.000 \times 1,002^{11} \Rightarrow a_{12} = 10.222$$

b. A quantidade de lixo, em tonelada, no ano considerado é a soma dos 12 termos da P.G. citada no item anterior, isto é:

$$S_{12} = \frac{10.000(1 - 1,002^{12})}{1 - 1,002}$$

Com o auxílio da calculadora, obtemos:

$$S_{12} \approx \frac{10.000(1 - 1,02427)}{1 - 1,002} \Rightarrow S_{12} \approx 121.329$$

CAPÍTULO 2 Trigonometria no triângulo retângulo

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. **a.** $\cos 28° = \frac{x}{4} \Rightarrow 0,88 = \frac{x}{4} \therefore x = 3,52$ cm

b. $\text{sen } 28° = \frac{x}{5} \Rightarrow 0,47 = \frac{x}{5} \therefore x = 2,35$ cm

c. $\text{tg } 28° = \frac{x}{10} \Rightarrow 0,53 = \frac{x}{10} \therefore x = 5,3$ dm

2. Indicando por x a distância percorrida pelo barco, temos:

$$\text{sen } 64° = \frac{108}{x} \Rightarrow 0,90 = \frac{108}{x} \therefore x = 120$$

3. **b.** $\text{sen } 32° = \frac{BC}{AB} \Rightarrow 0,53 = \frac{53}{AB} \therefore AB = 100$

4. Sabendo que todas as diagonais do pentágono regular têm a mesma medida. Indicando por d essa distância, em metro, cada ângulo interno do pentágono regular mede 108°.

Assim, temos que: $\text{sen } 54° = \dfrac{\frac{d}{2}}{40} \Rightarrow 0,81 = \frac{d}{80} \therefore d = 64,8$

5. Indicando por x a medida, em metro, do segmento $\widehat{BD}$, temos que a medida, em metro, do segmento $\widehat{CD}$ é $(84 - x)$.

Dos triângulos ABD e ACD, deduzimos que:

$$\begin{cases} \text{tg } \alpha = \dfrac{h}{x} \\ \text{tg } \beta = \dfrac{h}{84 - x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{tg } \alpha = \dfrac{h}{x} \\ \dfrac{3}{4} = \dfrac{h}{84 - x} \end{cases}$$

Como $\text{sen } \alpha = \frac{12}{13}$, deduzimos que existe um triângulo retângulo com um ângulo agudo de medida, α, tal que o cateto oposto a esse ângulo mede 12 unidades e a hipotenusa mede 13 unidades.

Assim, a medida a do cateto adjacente a α pode ser obtida pelo teorema de Pitágoras:

$$a^2 = 12^2 = 13^2 \Rightarrow a = 5 \text{ e tg } \alpha = \frac{12}{5}$$

Retornando ao sistema de equações, temos:

$$\begin{cases} \dfrac{12}{5} = \dfrac{h}{x} \\ \dfrac{3}{4} = \dfrac{h}{84 - x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h = \dfrac{12x}{5} \\ h = \dfrac{252 - 3x}{4} \end{cases}$$

$$\frac{12x}{5} = \frac{252 - 3x}{4} \Rightarrow 48x = 1.260 - 15x \Rightarrow x = 20$$

Substituindo x na equação $h = \frac{12x}{5}$, obtemos $h = 48$.

6. alternativa **e**

Indicando por x a medida, em metro, da altura máxima do desnível: $\text{sen } 7° = \frac{x}{14} \therefore x = 1,68$

8. Indicando por x a medida de $\widehat{AB}$, temos:

$$\text{tg } 73° = \frac{x}{20} \Rightarrow \frac{\text{sen } 73°}{\cos 73°} = \frac{x}{20} \Rightarrow 3,2 = \frac{x}{20} \therefore x = 64$$

9. $E = \cos 69° = \text{tg } 37° - 2 \text{ sen } 53° = 3 \text{ sen } 25°$

Note que: $21° = 69° = 90°$; $37° = 53° = 90°$ e $25° = 65° = = 90°$, assim:

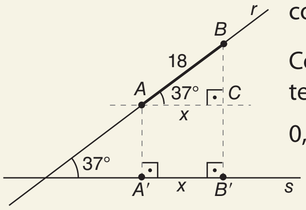
$$E = \text{sen } 21° = \text{tg } 37° - 2 \cos 37° = 3 \cos 65°$$

$$E = \text{sen } 21° = \frac{\text{sen } 37°}{\cos 37°} - 2 \cos 37° = 3 \cos 65° \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E = 0,36 = \frac{0,60}{0,80} - 2 \cdot 0,80 = 3 \cdot 0,42$$

$$\therefore E = 0,36 = 0,75 - 1,60 = 1,26 \Rightarrow E = 0,77$$

10.



FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

$$\cos 37° = \frac{x}{18}$$

Como $\cos 37° = \text{sen } 53° = 0,8$, temos:

$$0,8 = \frac{x}{18} \Rightarrow x = 14,4$$

11. Indicando por x a medida, em metro, do segmento $\overline{AC}$, e sabendo que a medida do ângulo $A\hat{C}B$ é $(90° - \alpha)$.

No triângulo ABC temos:

$$\text{tg } (90° - \alpha) = \frac{60}{x} \Rightarrow \frac{\text{sen } (90° - \alpha)}{\cos (90° - \alpha)} = \frac{60}{x} \therefore \frac{\cos \alpha}{\text{sen } \alpha} = \frac{60}{x}$$

Como $\text{sen } \alpha = \frac{5}{13}$, deduzimos que existe um triângulo retângulo com um ângulo agudo de medida α, tal que o cateto oposto a esse ângulo mede 5 unidades e a hipotenusa mede 13 unidades:

Assim, a medida a do cateto adjacente a α pode ser obtida pelo teorema de Pitágoras: $a^2 = 5^2 = 13^2 \Rightarrow a = 12$

e deduzimos: $\cos \alpha = \frac{12}{13}$

Pelo triângulo ABC, temos:

$$\text{tg } (90° - \alpha) = \frac{60}{x} \Rightarrow \frac{\cos \alpha}{\text{sen } \alpha} = \frac{60}{x} \therefore \frac{\frac{12}{13}}{\frac{5}{13}} = \frac{60}{x} \Rightarrow x = 25$$

12. Considerando a altura no triângulo de base $\overline{AB}$.

Como $\text{sen } 53° = \cos 37°$ e $\cos 53° = \text{sen } 37°$, então:

$$\text{tg } 53° = \frac{\text{sen } 53°}{\cos 53°} = \frac{0,8}{0,6} = \frac{4}{3}$$

$$\text{tg } 37° = \frac{\text{sen } 37°}{\cos 37°} = \frac{0,6}{0,8} = 0,75$$

Assim, temos:

$$\text{tg } 53° = \frac{x}{y} \Rightarrow y = \frac{3x}{4} \quad (1)$$

$$\text{tg } 37° = \frac{x}{200 - y} \Rightarrow 150 - 0,75y = x \quad (2)$$

Substituindo (1) em (2), obtemos:

$$x = 150 - 0,75 \cdot \frac{3x}{4} \Rightarrow x + \frac{9x}{16} = 150 \Rightarrow \frac{25x}{16} = 150 \therefore x = 96$$

13. $E = \dfrac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^4}{(\sqrt{3})^4} = \dfrac{\frac{2}{4} + \frac{1}{16}}{9} = \dfrac{1}{16}$

14. A altura relativa à base do triângulo isósceles coincide com a mediana e com a bissetriz, e os ângulos da base são congruentes entre si. Assim, a medida h dessa altura, em centímetro, é dada por:

$$\text{tg } 30° = \frac{h}{4} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{h}{4} \therefore h = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

15. alternativa **c**

Considerando x a altura de cada degrau, em metro:

$\text{sen } 30° = \frac{6x}{3} \Rightarrow \frac{1}{2} = 2x \therefore x = \frac{1}{4} = 0{,}25$

16. alternativa **d**

$i = \frac{0{,}42}{6} \cdot 100 = 7\%$

17. Indicando por h a altura, em metro, do mastro, temos que $CD = h$, pois o triângulo retângulo ACD é isósceles; logo, $CB = 12 - h$.

a. Do triângulo retângulo CBD, temos:

$\text{tg } 30° = \frac{12 - h}{h} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{12 - h}{h}$

$\therefore h = 6(3 - \sqrt{3}) \simeq 7{,}6$

b. Indicando por x a medida, em metro, do segmento $\overline{AD}$:

$\text{sen } 45° = \frac{6(3 - \sqrt{3})}{x} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{6(3 - \sqrt{3})}{x}$

$\therefore x = 6(3\sqrt{2} - \sqrt{6}) \simeq 10{,}76$

18. alternativa **b**

Temos que $\alpha = 30°$, então $2\alpha = 60°$; indicaremos por x a distância pedida, em metros.

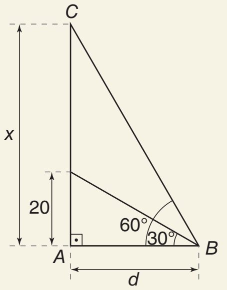
Como o ângulo de 60° formado entre $\overline{PB}$ e a trajetória do barco é externo ao triângulo ABP, temos:

$60° - 30° = m(B\hat{P}A) \Rightarrow m(B\hat{P}A) = 30°$

Logo, o triângulo ABP é isósceles e $BP = 2.000$ m.

$\text{sen } 60° = \frac{x}{2.000} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{x}{2.000} \therefore x = 1.000\sqrt{3}$

19. Indicando por d a medida do segmento $\overline{AB}$ e por x a medida do segmento $\overline{AC}$, ambos em metros, temos:



Logo:

$$\begin{cases} \text{tg } 30° = \frac{20}{d} \\ \text{tg } 60° = \frac{x}{d} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{20}{d} & (1) \\ \sqrt{3} = \frac{x}{d} & (2) \end{cases}$$

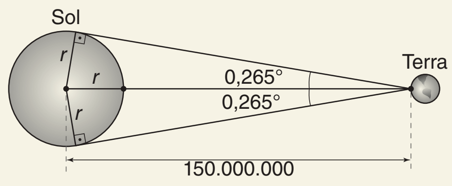
De (1), obtemos: $d = 20\sqrt{3}$

Substituindo d por $20\sqrt{3}$ em (2), obtemos:

$\sqrt{3} = \frac{x}{20\sqrt{3}} \Rightarrow x = 60$

MATEMÁTICA SEM FRONTEIRAS

1. Sendo r a medida do raio do Sol, em km, temos:



NEIDE TOYOTA/ARQUIVO DA EDITORA

$\text{sen } 0{,}265° = \frac{r}{r + 150.000.000} \Rightarrow$

$\Rightarrow 0{,}0046 = \frac{r}{r + 150.000.000} \therefore r \approx 693.000$

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

1. alternativa **d**

Indicando por α a medida variável do ângulo de visada; por d a distância variável entre P e o poste; e por k a constante que indica a altura do poste, temos que:

$$\text{tg } \alpha = \frac{k}{x} \Rightarrow x \cdot \text{tg } \alpha = k$$

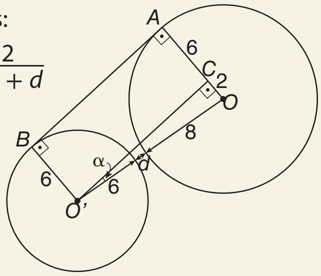
Logo, a tangente do ângulo de visada é inversamente proporcional à distância entre o ponto P e o poste.

2. Seja C o ponto de intersecção da reta $\overleftrightarrow{OA}$ com a reta que passa por O' e é paralela a $\overleftrightarrow{AB}$. Assim, indicando por d a distância, em centímetro, entre os círculos, esquematizamos:

Do triângulo COO', temos:

$\text{sen } \alpha = \frac{2}{14 + d} \Rightarrow \frac{1}{8} = \frac{2}{14 + d}$

$\therefore d = 2$

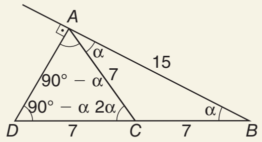


ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

3. Temos:

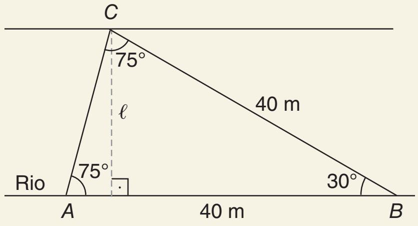
- $m(C\hat{A}D) = 90° - a$
- $CA = CD \Rightarrow m(C\hat{D}A) = m(C\hat{A}D) = 90° - a$
- $m(A\hat{C}D) + 90° - a + 90° - a = 180° \Rightarrow m(A\hat{C}D) = 2a$
- $A\hat{C}D$ é ângulo externo do triângulo $ABC \Rightarrow m(A\hat{B}C) = a$
- $m(A\hat{B}C) = m(B\hat{A}C) \Rightarrow CB = CA = 7$

Assim, esquematizamos:



Concluímos, assim, que $\cos\alpha = \frac{15}{14}$, o que é absurdo, pois o cosseno de um ângulo agudo é menor que 1, sempre. Essa contradição ocorreu porque não existe uma figura que satisfaça as condições do enunciado, que sugere um triângulo retângulo (ABD) com um cateto ($\overline{AB}$) maior que a hipotenusa ($\overline{BD}$). Logo, o problema não tem solução.

4. alternativa **b**



ILUSTRAÇÕES: MARIO MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

$\text{sen } 30° = \frac{\ell}{40} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{\ell}{40} \therefore \ell = 20$ m

5. Considerando, respectivamente, x e h as medidas de BC e CP, temos: $\begin{cases} \text{tg } \alpha = \frac{h}{56 + x} \\ \text{tg } \beta = \frac{h}{x} \end{cases}$

De $\text{sen } \alpha = \frac{3}{5}$, deduzimos que existe um triângulo com um ângulo agudo de medida a tal que o cateto oposto a esse ângulo mede 3 unidades e a hipotenusa mede 5 unidades. Indicando por y a medida do outro cateto, pelo teorema de Pitágoras, obtemos:

$5^2 = 3^2 + 4^2 \Rightarrow y = 4$. Logo, $\text{tg } \alpha = \frac{3}{4}$

Como α = β = 90°, temos que $\text{sen } \alpha = \cos \beta = \frac{3}{5}$ e $\cos \alpha = \text{sen } \beta = \frac{4}{5}$; logo, $\text{tg } \beta = \frac{4}{3}$.

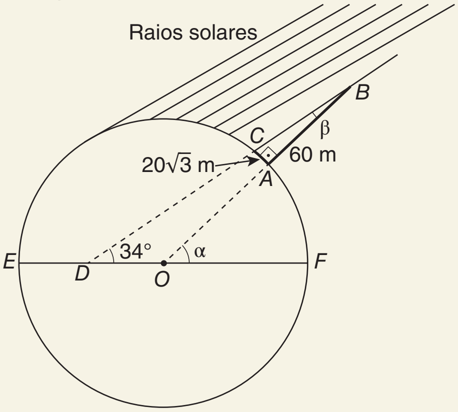
Assim, retornando ao sistema de equações, temos:

$$\begin{cases} \frac{3}{4} = \frac{h}{56 + x} \\ \frac{4}{3} = \frac{h}{x} \end{cases} \text{Resolvendo-o, obtemos: } h = 96$$

6. alternativa **e**

No esquema a seguir, temos:

- *O* representa o centro da Terra, em que $\overline{EF}$ é diâmetro do Equador;
- $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ representam o prédio e sua sombra, respectivamente, e $\overline{BD}$ é um raio solar que passa pelo topo do prédio;
- β é a medida, em grau, do ângulo $A\hat{B}C$;
- α é a medida, em grau, do ângulo central $A\hat{O}F$, que é a latitude do ponto *A*.



MARIO MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Assim, do triângulo *ABC*, temos:

$$\text{tg } \beta = \frac{20\sqrt{3}}{60} \Rightarrow \text{tg } \beta = \frac{\sqrt{3}}{3} \therefore \beta = 30°$$

Como $B\hat{O}F$ é ângulo externo do triângulo *BDO*, deduzimos que: $\alpha = 30° = 34° \Rightarrow \alpha = 64°$

7. Considerando por *h*, *x* e *y* as medidas, em metro, dos segmentos $\overline{CT}$, $\overline{CB}$ e $\overline{CA}$.

Assim, dos triângulos retângulos, *TCB*, *ACT* e *BCA*, obtemos:

$$\begin{cases} \text{tg } 45° = \frac{h}{x} \\ \text{tg } 30° = \frac{h}{y} \\ x^2 + y^2 = 100^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 = \frac{h}{x} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{h}{y} \\ x^2 + y^2 = 10.000 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} x = h & (1) \\ y = h\sqrt{3} & (2) \\ x^2 + y^2 = 10.000 & (3) \end{cases}$$

Substituindo (1) e (2) em (3), temos:

$$h^2 = (h\sqrt{3})^2 = 10.000 \Rightarrow 4h^2 = 10.000$$

$$h^2 = 2.500 \Rightarrow h = 50$$

Outro modo:

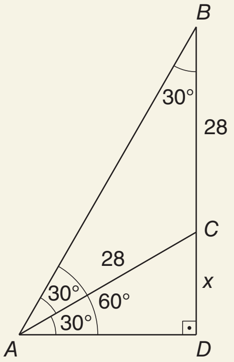
Como o triângulo *TCB* é isósceles de base $\overline{BT}$, temos que *CB* = *CT*.

Assim, deduzimos que os triângulos *ABC* e *ATC* são congruentes; logo, *AB* = *AT* = 100 m. Indicando por *h* a altura, em metro, do ponto *T* em relação ao terreno, obtemos do triângulo *ATC*: $\text{sen } 30° = \frac{h}{100} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{h}{100} \therefore h = 50$

VERIFIQUE O QUE APRENDEU NO CAPÍTULO 2

1. alternativa **d**

Indicando por *x* a distância, em metro, percorrida pela pedra no trajeto $\overline{CD}$, esquematizamos:



MARIO MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Observe que o triângulo ABC é isósceles, pois tem dois ângulos internos de mesma medida. Logo AC = BC = 28.

Assim, do triângulo ACD, temos:

$$\text{sen}30° = \frac{x}{28} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{x}{28}$$

$\therefore x = 14$

2. alternativa **b**

No triângulo retângulo destacado na figura, observamos que 20 m é a medida do cateto adjacente ao ângulo agudo de medida α e pretendemos calcular a medida *x* do cateto oposto a α; logo, a razão trigonométrica que relaciona essas medidas é a tangente. Precisamos, então, calcular tg α.

Como $\text{sen } \alpha = \frac{5}{13}$, deduzimos que existe um triângulo retângulo com um ângulo agudo de medida α, tal que o cateto oposto a esse ângulo mede 5 unidades e a hipotenusa mede 13 unidades.

Assim, a medida *a* do cateto adjacente a α pode ser obtida pelo teorema de Pitágoras:

$a^2 + 5^2 = 13^2 \Rightarrow a^2 = 144 \therefore a = 12$

Assim obtemos: $\text{tg } \alpha = \frac{5}{12}$

Retornando ao triângulo retângulo do enunciado do problema e indicando por *x* a profundidade do rio, em metro, temos:

$$\text{tg } \alpha = \frac{x}{20} \Rightarrow \frac{5}{12} = \frac{x}{20} \therefore x \approx 8,3 \text{ m}$$

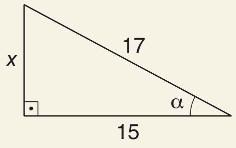
3. alternativa **c**

Como (90 – α) é o complemento de α, temos:

sen (90 – α) = cos α

$\therefore \text{sen } (90 - \alpha) = \cos \alpha = \frac{15}{17}$

Se $\cos \alpha = \frac{15}{17}$ e α é a medida de um ângulo agudo, existe um triângulo retângulo tal que:



ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

Pelo teorema de Pitágoras, temos:

$x^2 + 15^2 = 17^2 \Rightarrow x = 8$

Portanto: $\text{sen } \alpha = \frac{8}{17}$ e $\text{tg } \alpha = \frac{8}{15}$

4. alternativa **c**

Como $\text{tg } \alpha = \frac{8}{15}$, a distância *x* entre os olhos do espectador e a base da tela é dada por:

$$\text{tg } \alpha = \frac{3,2}{x} \Rightarrow \frac{8}{15} = \frac{3,2}{x} \therefore x = 6$$

5. alternativa **d**

Tomando *x* como a medida do cateto oposto ao ângulo de 60° e *y* a medida do cateto adjacente, ambos em metros, temos:

$\text{sen } 60° = \frac{x}{150}$

$x = 75\sqrt{3}$

$\cos 60° = \frac{y}{150}$

$y = 75$

Logo: $A = 75\sqrt{3} \cdot 75 = 5.625\sqrt{3}$

6. alternativa **a**

Indicando como x a medida $\overline{AB}$, temos que o triângulo ABC é retângulo, assim pelo teorema de Pitágoras:

$x^2 = 36^2 + 42^2 \Rightarrow x = \sqrt{3060} = 6\sqrt{85}$

Assim:

$\text{sen}\alpha - \cos\alpha = \frac{42}{x} - \frac{36}{x} = \frac{6}{6\sqrt{85}} = \frac{1}{\sqrt{85}}$

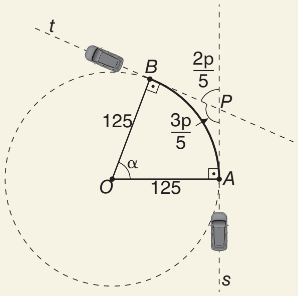
CAPÍTULO 3 Circunferência trigonométrica: seno e cosseno

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. A razão entre o comprimento do arco e a medida do raio, nessa ordem, é a medida x do arco em radiano, ou seja:

$x = \frac{10}{2,5} \cdot \text{rad} \Rightarrow x = 4 \text{ rad}$

2. Sendo s e t as retas tangentes ao arco $\overset{\frown}{AB}$, nos pontos A e B, respectivamente, temos que os raios $\overline{OA}$ e $\overline{OB}$ são perpendiculares a s e a t. Assim, indicando por P o ponto comum a s e t, e por α a medida, em radiano, do ângulo $B\hat{O}A$, esquematizamos:



ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

O ângulo $B\hat{P}A$ é suplementar do ângulo de medida $\frac{2\pi}{5}$ rad; logo, $B\hat{P}A$ mede $\frac{3\pi}{5}$ rad.

A soma das medidas dos ângulos internos de um quadrilátero convexo é 2α rad; logo, no quadrilátero $PAOB$, temos:

$$\alpha + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{5} = 2\alpha \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \alpha = \frac{2\pi}{5}$$

Sendo x o comprimento do arco $\overset{\frown}{AB}$, em metro, temos:

$$\frac{x}{125} = \frac{2\pi}{5} \Rightarrow x = 50\pi$$

3. a.
$$\begin{array}{ccc} \textbf{rad} & & \textbf{grau} \\ \pi & \text{———} & 180 \\ x & \text{———} & 30 \end{array} \Rightarrow x = \frac{30\pi}{180} = \frac{\pi}{6}$$

b.
$$\begin{array}{ccc} \textbf{rad} & & \textbf{grau} \\ \pi & \text{———} & 180 \\ x & \text{———} & 120 \end{array} \Rightarrow x = \frac{130\pi}{180} = \frac{2\pi}{3}$$

c.
$$\begin{array}{ccc} \textbf{rad} & & \textbf{grau} \\ \pi & \text{———} & 180 \\ x & \text{———} & 225 \end{array} \Rightarrow x = \frac{225\pi}{180} = \frac{5\pi}{4}$$

d.
$$\begin{array}{ccc} \textbf{rad} & & \textbf{grau} \\ \pi & \text{———} & 180 \\ x & \text{———} & 300 \end{array} \Rightarrow x = \frac{300\pi}{180} = \frac{5\pi}{3}$$

e.
$$\begin{array}{ccc} \textbf{rad} & & \textbf{grau} \\ \pi & \text{———} & 180 \\ x & \text{———} & 240 \end{array} \Rightarrow x = \frac{240\pi}{180} = \frac{4\pi}{3}$$

f.
$$\begin{array}{ccc} \textbf{rad} & & \textbf{grau} \\ \pi & \text{———} & 180 \\ x & \text{———} & 330 \end{array} \Rightarrow x = \frac{330\pi}{180} = \frac{11\pi}{6}$$

4. a.
$$\begin{array}{ccc} \textbf{rad} & & \textbf{grau} \\ \pi & \text{———} & 180° \\ \frac{\pi}{4} & \text{———} & x \end{array} \Rightarrow x = \frac{\frac{\pi}{4} \cdot 180°}{\pi} = 45°$$

b.
$$\begin{array}{ccc} \textbf{rad} & & \textbf{grau} \\ \pi & \text{———} & 180° \\ \frac{3\pi}{2} & \text{———} & x \end{array} \Rightarrow x = \frac{\frac{3\pi}{2} \cdot 180°}{\pi} = 270°$$

c.
$$\begin{array}{ccc} \textbf{rad} & & \textbf{grau} \\ \pi & \text{———} & 180° \\ \frac{7\pi}{6} & \text{———} & x \end{array} \Rightarrow x = \frac{\frac{7\pi}{6} \cdot 180°}{\pi} = 210°$$

d.
$$\begin{array}{ccc} \textbf{rad} & & \textbf{grau} \\ \pi & \text{———} & 180° \\ \frac{2\pi}{5} & \text{———} & x \end{array} \Rightarrow x = \frac{\frac{2\pi}{5} \cdot 180°}{\pi} = 72°$$

e.
$$\begin{array}{ccc} \textbf{rad} & & \textbf{grau} \\ \pi & \text{———} & 180° \\ \frac{5\pi}{3} & \text{———} & x \end{array} \Rightarrow x = \frac{\frac{5\pi}{3} \cdot 180°}{\pi} = 300°$$

5. 100 rotações equivalem a $2\pi \cdot 100 \text{ rad} = 200\pi$ rad. Então, o disco gira 200π radianos em 3 minutos.

$$\begin{array}{ccc} \textbf{Medida do ângulo (rad)} & & \textbf{Tempo (s)} \\ 200\pi & \text{———} & 3 \cdot 60 \\ x & \text{———} & 1 \end{array}$$

$\therefore x = \frac{200\pi}{180} = \frac{10\pi}{9} \approx 3,5$

Logo, a velocidade do disco é $\frac{10\pi}{9}$ rad/s $\approx 3,5$ rad/s.

6. a. Dividindo o comprimento do arco de uma circunferência pelo comprimento do raio, ambos na mesma unidade, obtém-se a medida do arco em radiano. Sendo x o comprimento do arco $\overset{\frown}{AB}$, em quilômetro, temos:

$\frac{x}{3.850} = \frac{\pi}{10} \Rightarrow x = 385\pi \Rightarrow x = 387 \cdot \pi \Rightarrow x = 1.208,9$

Colombo imaginava que o trecho $\overset{\frown}{AB}$ tivesse 1.208,9 km.

b. Em seus cálculos equivocados, Colombo obteve o comprimento da circunferência máxima da Terra 30% menor do que o real. Logo, cada paralelo terrestre foi calculado com 30% a menos do que o comprimento real. Sendo y o comprimento real, em quilômetro, do arco $\overset{\frown}{AB}$, temos: $0,7 \cdot y = 1.208,9 \Rightarrow y = 1.727$

Portanto, ao percorrer o arco $\overset{\frown}{AB}$, Colombo teria navegado efetivamente 1.727 km.

8. a. $x_1 = 50°, x_2 = 50° + 360° = 410°$ e $x_3 = 50° + 2 \cdot 360° = 770°$

As medidas são 50°, 410° e 770°.

b. $x_1 = 50° - 360° = -310°$ e $x_2 = 50° - 2 \cdot 360° = -670°$

As medidas são –310° e –670°.

9. a. $x_1 = \frac{6\pi}{7}, x_2 = \frac{6\pi}{7} + 2\pi = \frac{20\pi}{7},\ x_3 = \frac{6\pi}{7} + 2 \cdot 2\pi = \frac{34\pi}{7}$

As medidas procuradas são $\frac{6\pi}{7}$ rad, $\frac{20\pi}{7}$ rad e $\frac{34\pi}{7}$ rad.

b. $x_2 = \frac{6\pi}{7} - 2\pi = -\frac{8\pi}{7}, x_3 = \frac{6\pi}{7} - 2 \cdot 2\pi = -\frac{22\pi}{7}$

As medidas são $-\frac{8\pi}{7}$ rad e $-\frac{22\pi}{7}$ rad.

10. Utilizando as etapas para sintetizar uma estratégia, temos:

1. Compreender o problema

O problema apresenta algumas medidas, em grau e radiano, e pede para determinar cada medida no arco trigonométrico considerando a 1ª volta positiva.

2. Elaborar um plano de resolução

Precisamos pensar e registrar um possível plano para a resolução do problema. Para determinar a medida do arco pedido, desconsideremos todas as voltas completas e a medida restante será a medida pedida.

3. Executar o plano elaborado

Para executar o plano, consideramos:

- medida em grau, desconsideramos todas as voltas completas (360°). Para isso, é necessário saber quantas vezes 360° cabe dentro da medida do arco indicado e a medida que sobrou está associado a medida do arco na 1ª volta.
- medida em radiano, desconsideramos todas as voltas completas (2π). Para isso, é necessário saber quantas vezes 2π cabe dentro da medida do arco indicado e a medida que sobrou está associado a medida do arco na 1ª volta.

4. Verificar

Verifique se a resolução foi feita corretamente, analisando cada um dos passos executados.

a. $\begin{array}{r|l} 2.923° & 360° \\ \hline 43° & 8 \end{array}$

O arco trigonométrico procurado mede 43°.

b. $-40° + 360° = 320°$ (1ª volta positiva)

O arco trigonométrico procurado mede 320°.

c. $\frac{45\pi}{11}\text{ rad} = \left(\frac{44\pi}{11} + \frac{\pi}{11}\right)\text{ rad} = \left(4\pi + \frac{\pi}{11}\right)\text{ rad}$

O arco trigonométrico procurado mede $\frac{\pi}{11}$ rad.

d. $\frac{38\pi}{5}\text{ rad} = \left(\frac{35\pi}{5} + \frac{3\pi}{5}\right)\text{ rad} = \left(7\pi + \frac{3\pi}{5}\right)\text{ rad} =$

$= \left(6\pi + \pi + \frac{3\pi}{5}\right)\text{ rad} = \left(6\pi + \frac{8\pi}{5}\right)\text{ rad}$

O arco trigonométrico procurado mede $\frac{8\pi}{5}$ rad.

e. $-\frac{\pi}{13}\text{ rad} = \left(-\frac{\pi}{13} + 2\pi\right)\text{ rad} = \frac{25\pi}{13}\text{ rad}$

O arco trigonométrico procurado mede $\frac{25\pi}{13}$ rad.

11. a. $\begin{array}{r|l} 2.040° & 360° \\ \hline 240° & 5 \end{array}$ $\therefore x = 240°$

b. $x = 240° + 360° = 600°$

c. $x = 240° + 2 \cdot 360°\ x = 960°$

d. $x = 240° - 360° = -120°$

12. a. Os vértices do hexágono regular *ABCDEF* dividem a circunferência trigonométrica em arcos de medida:

$\frac{2\pi}{6}\text{ rad} = \frac{\pi}{3}\text{ rad}$

Então,

- $x_A = 0$
- $x_B = \frac{\pi}{3}$
- $x_C = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$
- $x_D = \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = \pi$
- $x_E = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$
- $x_F = \frac{4\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$

As medidas associadas aos vértices *A*, *B*, *C*, *D*, *E* e *F* do hexágono, em radiano, são, respectivamente: 0, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3}$, π, $\frac{4\pi}{3}$ e $\frac{5\pi}{3}$.

b. x_C na 2ª e na 3ª volta positiva:

$\frac{2\pi}{3} + 2\pi = \frac{8\pi}{3}$ (na 2ª volta positiva)

$\frac{2\pi}{3} + 2 \cdot 2\pi = \frac{14\pi}{3}$ (na 3ª volta positiva)

As medidas associadas ao vértice *C* são $\frac{8\pi}{3}$ rad e $\frac{14\pi}{3}$ rad.

c. x_F na 1ª e na 2ª volta negativa:

$\frac{5\pi}{3} - 2\pi = -\frac{\pi}{3}$ (na 1ª volta negativa)

$-\frac{\pi}{3} - 2 \cdot 2\pi = -\frac{13\pi}{3}$ (na 2ª volta negativa)

As medidas associadas ao vértice *F* são $-\frac{\pi}{3}$ rad e $-\frac{7\pi}{3}$ rad.

13. a. Os infinitos números reais associados ao ponto *A'* são: $\dots, -\pi, \pi, 3\pi, 5\pi, \dots$

A diferença entre dois termos consecutivos quaisquer dessa sequência é 2π; logo: $x = \pi + k \cdot 2\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$

b. Os infinitos números reais associados ao ponto *B* são: $\dots, -\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{9\pi}{2}, \dots$

A diferença entre dois termos consecutivos quaisquer dessa sequência é 2π; logo: $x = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$

c. Os infinitos números reais associados aos pontos *B* ou *B'* são: $\dots, -\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{9\pi}{2}, \dots$

A diferença entre dois termos consecutivos quaisquer dessa sequência é π; logo: $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$

d. Os infinitos números reais associados aos pontos *A*, *B*, *A'* e *B'* são: $\dots, -\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, 2\pi, \dots$

A diferença entre dois termos consecutivos quaisquer dessa sequência é $\frac{\pi}{2}$; logo: $x = k \cdot \frac{\pi}{2}$, com $k \in \mathbb{Z}$

14. a. Os vértices do hexágono dividem a circunferência trigonométrica em arcos de medida: $\frac{2\pi}{6}\text{ rad} = \frac{\pi}{3}\text{ rad}$

Como o vértice *A* coincide com a origem da circunferência trigonométrica, os infinitos números reais associados aos vértices do hexágono são:

$\dots\ 0, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = \pi, \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3} \dots$

Representamos esses números por $k \cdot \frac{\pi}{3}$, com $k \in \mathbb{Z}$.

b. Os vértices do triângulo dividem a circunferência trigonométrica em arcos de medida: $\frac{2\pi}{3}$ rad

Como o vértice *N* está associado ao número π, os infinitos números reais associados aos vértices do triângulo são:

$\dots, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} = \pi, \pi + \frac{2\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}, \dots$

Representamos esses números por $\frac{\pi}{3} + k \cdot \frac{2\pi}{3}$, com $k \in \mathbb{Z}$.

15. alternativa **c**

Como 30 minutos equivalem a 0,5 hora, e que 15 minutos equivalem a 0,25 hora, temos que a sequência crescente dos horários dos voos é: (0,25; 0,75; 1,25; 1,75; ....; a_n)

Cada termo dessa sequência, a partir do segundo, é igual à soma do termo anterior com 0,5. Assim, todos os termos dessa sequência são da forma $x = 0{,}25 + k \cdot 0{,}5$, com $k \in \mathbb{Z}$ e $0 \leqslant 0{,}25 + k \cdot 0{,}5 < 24$, ou seja, $-0{,}5 \leqslant k < 48$.

Como *k* só assume valores inteiros, concluímos que todos os horários *x*, em hora, dos voos que partem de *A* com destino a *B*, em cada dia, podem ser representados por: $x = 0{,}25 + k \cdot 0{,}5$, com $k \in \mathbb{Z}$ e $0 \leqslant k < 48$.

17. a. Medidas, em grau, da primeira volta positiva associadas aos pontos *N*, *P* e *Q*, respectivamente: $180° - 59°$, $180° + 59°$ e $360° - 59°$. Logo: *N*(121°), *P*(239°) e *Q*(301°)

b. Medidas, em radiano, da primeira volta positiva associadas aos pontos N, P e Q, respectivamente: $\pi - \frac{2\pi}{9}$, $\pi + \frac{2\pi}{9}$ e $2\pi - \frac{2\pi}{9}$. Logo: $N\left(\frac{7\pi}{9}\right)$, $P\left(\frac{11\pi}{9}\right)$ e $Q\left(\frac{16\pi}{9}\right)$

c. Medidas, em grau, da primeira volta positiva associadas aos pontos P, Q e N, respectivamente: $180° + 64°$, $360° - 116°$, $180° + 116°$ e $180° - 116°$. Logo: $P(244°)$, $Q(296°)$ e $N(64°)$

18. alternativa **c**

$8\alpha + 90° = 180° + 3\alpha + 10° \Rightarrow \alpha = 20°$

$3\alpha + 10° = 3 \cdot 20° + 10° = 70°$

Medidas, em grau, da primeira volta positiva associadas aos pontos N e Q, respectivamente: $180° - 70°$ e $360° - 70°$. Logo: $N(110°)$ e $Q(290°)$

19. **a.** M: $180° - 120° = 60°$; P: $180° + 60° = 240°$; Q: $360° - 60° = 300°$

b. M: $210° - 180° = 30°$; N: $180° - 30° = 150°$; Q: $360° - 30° = 330°$

c. M: $360° - 310° = 50°$; N: $180° - 50° = 130°$; P: $180° + 50° = 230°$

20. **a.** M: $\pi - \frac{5\pi}{7} = \frac{2\pi}{7}$; P: $\pi + \frac{2\pi}{7} = \frac{9\pi}{7}$; Q: $2\pi - \frac{2\pi}{7} = \frac{12\pi}{7}$

b. M: $\frac{4\pi}{3} - \pi = \frac{\pi}{3}$; N: $\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$; Q: $2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$

c. M: $2\pi - \frac{11\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$; N: $\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$; P: $\pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$

21. **a.** $\cos 0 = 1$ e $\text{sen } 0 = 0$

b. $\cos \frac{\pi}{2} = 0$ e $\text{sen } \frac{\pi}{2} = 1$

c. $\cos \pi = -1$ e $\text{sen } \pi = 0$

d. $\cos \frac{3\pi}{2} = 0$ e $\text{sen } \frac{3\pi}{2} = -1$

e. $\cos 2\pi = 1$ e $\text{sen } 2\pi = 0$

22. alternativa **e**

$E = 5 \cos 180° + \cos (2 \cdot 180°) - \text{sen } \frac{3 \cdot 180°}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow E = 5 \cos 180° + \cos 360° - \text{sen } 270° \Rightarrow E = -3$

23. **a.** $2 + 3 \text{ sen } x = 8 \Rightarrow 3 \text{ sen } x = 6 \therefore \text{sen } x = 2$ (Absurdo!)

Como o máximo valor que sen x pode assumir é 1, não é possível a igualdade $2 + 3 \text{ sen } x = 8$.

b. $2 + 3 \text{ sen } x = m \Rightarrow \text{sen } x = \frac{m - 2}{3}$

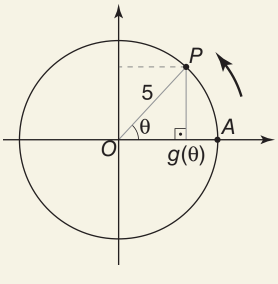
Como $-1 \leqslant \text{sen } x \leqslant 1$, temos: $-1 \leqslant \frac{m - 2}{3} \leqslant 1$

Multiplicando por 3 e, depois, adicionando 2 aos membros dessa desigualdade, concluímos que: $-1 \leqslant m \leqslant 5$

Assim, a igualdade $2 + 3 \text{ sen } x = m$ só é possível para os valores reais de m tal que: $-1 \leqslant m \leqslant 5$

24. alternativa **b**

Sendo P a posição da partícula em dado instante e θ a medida do arco $\widehat{AP}$ com $A(5, 0)$, esquematizamos:



A função g que expressa a abscissa de P para cada medida θ é $g(\theta) = 5 \cos \theta$. A medida θ, em radiano, pode ser obtida em função do tempo t, em segundo, pela regra de três:

Deslocamento angular da partícula (radiano)	**Tempo (segundo)**
2π	3
θ	t

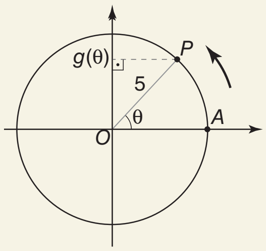
$\therefore \theta = \frac{2\pi t}{3}$ rad

Substituindo θ em $g(\theta)$, obtemos: $g\left(\frac{2\pi t}{3}\right) = 5 \cos \left(\frac{2\pi t}{3}\right)$

Indicando essa função por $f(t)$, temos: $f(t) = 5 \cos \left(\frac{2\pi t}{3}\right)$

25. alternativa **d**

Sendo P a posição da partícula em dado instante e θ a medida do arco $\widehat{AP}$ com $A(5, 0)$, esquematizamos:



A função g que expressa a ordenada de P para cada medida θ é $g(\theta) = 5 \text{ sen } \theta$. A medida θ, em radiano, pode ser obtida em função do tempo t, em segundo, pela regra de três:

Deslocamento angular da partícula (radiano)	**Tempo (segundo)**
2π	3
θ	t

$\therefore \theta = \frac{2\pi t}{3}$ rad

Substituindo θ em $g(\theta)$, obtemos: $g\left(\frac{2\pi t}{3}\right) = 5 \text{ sen } \left(\frac{2\pi t}{3}\right)$

26. **a.** $\text{sen } 120° = \text{sen } (180° - 60°) = \text{sen } 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

b. $\cos 120° = \cos (180° - 60°) = -\cos 60° = -\frac{1}{2}$

c. $\text{sen } 210° = \text{sen } (180° + 30°) = -\text{sen } 30° = -\frac{1}{2}$

d. $\cos 120° = \cos (180° + 30°) = -\cos 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

e. $\text{sen } 300° = \text{sen } (360° - 60°) = -\text{sen } 60° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

f. $\text{sen } 300° = \cos (360° - 60°) = \cos 60° = \frac{1}{2}$

28. **a.** $E = \text{sen } \frac{7\pi}{6} + \cos \frac{5\pi}{3} + \text{sen } \frac{11\pi}{6}$

Consultando o item **a** do exercício anterior observamos que os arcos de medida $\frac{7\pi}{6}$ e $\frac{11\pi}{6}$ têm extremidades nos pontos P e Q, respectivamente, e possuem a mesma ordenada $-\frac{1}{2}$; logo, $\text{sen } \frac{7\pi}{6} = \text{sen } \frac{11\pi}{6} = -\frac{1}{2}$.

Consultando o item **c** do exercício anterior observamos que o arco de medida $\frac{5\pi}{3}$ tem extremidade no ponto Q, cuja abscissa é $\frac{1}{2}$; logo, $\cos \frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2}$.

Portanto: $E = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$

b. $E = \text{sen } \frac{2\pi}{3} + \cos \frac{3\pi}{4} - \text{sen } \frac{7\pi}{4}$

Consultando o item **c** do exercício anterior observamos que o arco de medida $\frac{2\pi}{3}$ tem extremidade no ponto N, cuja ordenada é $\frac{\sqrt{3}}{2}$; logo, $\text{sen } \frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Consultando o item **b** do exercício anterior observamos que os arcos de medida $\frac{3\pi}{4}$ e $\frac{7\pi}{4}$ têm extremidades nos pontos N e Q, respectivamente. A abscissa de N é $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ e a ordenada de Q é $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; logo, $\cos \frac{3\pi}{4} = \text{sen } \frac{7\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Portanto: $E = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

ILUSTRAÇÕES: MARIO MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

29. **a.** Verdadeira, pois: sen (180° – α) = sen α
b. Falsa, pois: sen (180° – α) = sen α
c. Falsa, pois: sen (180° + α) = –sen α
d. Verdadeira, pois: sen (180° + α) = –sen α
e. Falsa, pois: sen (360° – α) = –sen α
f. Verdadeira, pois: sen (360° – α) = –sen α
g. Falsa, pois: cos (180° – α) = –cos α
h. Verdadeira, pois: cos (180° – α) = –cos α
i. Falsa, pois: cos (180° + α) = –cos α
j. Verdadeira, pois: cos (180° + α) = –cos α
k. Verdadeira, pois: cos (360° – α) = cos α
l. Falsa, pois: cos (360° – α) = cos α

30. **a.** $\cos(-30°) = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

b. $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

c. $\text{sen}(-60°) = -\text{sen}\ 60° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

d. $\text{sen}\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = -\text{sen}\frac{2\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

31. alternativa **a**

Como α, β e θ são medidas dos ângulos internos de um triângulo, temos: $\alpha + \beta + \theta = 180° \Rightarrow \alpha + \beta = 180° - \theta$

$E = \text{sen}(180° - \theta) + \cos(180° - \theta) + \cos(180° - \theta° - 180°)$

$E = \text{sen}\ \theta + (-\cos\theta) + \cos(-\theta) = \text{sen}\ \theta$

32. **a.** $f(1{,}5) = 300\cos\left(\frac{4 \cdot \pi \cdot 1{,}5}{3}\right) = 300\cos 2\pi = 300$

Portanto, a abscissa, quando $t = 1{,}5$, é 300 km.

b. A função do eixo das ordenadas é dada por:

$g(t) = 300\ \text{sen}\left(\frac{4\pi t}{3}\right)$

Para $t = 2{,}5$ temos: $g(2{,}5) = 300\ \text{sen}\left(4 \cdot \pi \cdot \frac{2{,}5}{3}\right) =$

$= 300\ \text{sen}\left(10 \cdot \frac{\pi}{3}\right) = 300\ \text{sen}\left(4 \cdot \frac{\pi}{3}\right) = -150\sqrt{3}$

Portanto, a ordenada, quando $t = 2{,}5$, é $-150\sqrt{3}$ km.

c. $r^2 = \left[300\ \text{sen}\left(\frac{4\pi t}{3}\right)\right]^2 + \left[300\ \cos\left(\frac{4\pi t}{3}\right)\right]^2$

$r^2 = 300^2\left[\text{sen}^2\left(\frac{4\pi t}{3}\right)\right] + \left[\cos^2\left(\frac{4\pi t}{3}\right)\right]$

$r^2 = 300^2 \Rightarrow r = 300$

Portanto, o raio da órbita mede 300 km.

d. $\frac{4\pi t}{3} = 2\pi \Rightarrow t = \frac{3}{2} = 1{,}5$

Portanto, o satélite dá uma volta ao redor da Terra a cada 1,5 hora.

33. $\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \left(\frac{4}{5}\right)^2 + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{9}{25} \therefore \cos\alpha = \pm\frac{3}{5}$

Como $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, temos: $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$

34. $\text{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{8}{9} \therefore \text{sen}\ x = \pm\frac{2\sqrt{2}}{3}$

Como $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$, temos: $\text{sen}\ x = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$

35. $\begin{cases} \text{sen}^2\beta + \cos^2\beta = 1 & (1) \\ \text{sen}\ \beta = 2\cos\beta & (2) \end{cases}$

Substituindo (2) em (1), obtemos:

$(2\cos\beta)^2 + \cos^2\beta = 1$ e, portanto: $5\cos^2\beta = 1$

$\therefore \cos^2\beta = \frac{1}{5} \Rightarrow \cos\beta = \pm\frac{\sqrt{5}}{5}$

Como $\pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$, temos: $\cos\beta = -\frac{\sqrt{5}}{5}$

Substituindo cos β por $-\frac{\sqrt{5}}{5}$ em (2), obtemos:

$\text{sen}\ \beta = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$

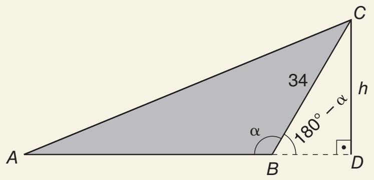
36. $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \left(\frac{m}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{m+1}}{2}\right)^2 = 1$

$\therefore \frac{m^2}{16} + \frac{m+1}{4} = 1 \Rightarrow \frac{m^2 + 4m + 4}{16} = \frac{16}{16}$

$\therefore m^2 + 4m - 12 = 0 \Rightarrow m = 2$ ou $m = -6$ (não convém)

Logo, $m = 2$.

37. **b.** O ângulo $C\hat{B}D$ é suplementar do ângulo $C\hat{B}A$; logo, $m(C\hat{B}D) = 180° - \alpha$.



FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

Do triângulo retângulo *CBD*, temos:

$\text{sen}(180° - \alpha) = \frac{h}{34} \Rightarrow \text{sen}\ \alpha = \frac{h}{34}$ (1)

Como $\cos\alpha = -\frac{8}{17}$, temos:

$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \text{sen}^2\alpha + \left(-\frac{8}{17}\right)^2 = 1$

$\therefore \text{sen}^2\alpha = \frac{225}{289} \Rightarrow \text{sen}\ \alpha = \pm\frac{15}{17}$

Como α é medida de um ângulo agudo, temos:

$\text{sen}\ \alpha = \frac{15}{17}$ (2)

De (1) e (2), deduzimos que: $\frac{15}{17} = \frac{h}{34} \Rightarrow h = 30$

Logo, a altura relativa ao lado $\overline{AB}$ mede 30 cm.

38. Na variável *x* a equação é polinomial do 2º grau. Assim:

$\Delta = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4\cos^2\alpha \Rightarrow \Delta = 16 - 16\cos^2\alpha$

$\therefore \Delta = 16(1 - \cos^2\alpha) \Rightarrow \Delta = 16\ \text{sen}^2\alpha$

$\therefore x = \frac{-4 \pm \sqrt{16\ \text{sen}^2\alpha}}{2 \cdot 1} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = -2 + 2\ \text{sen}\ \alpha$ ou $x = -2 - 2\ \text{sen}\ \alpha$

Logo, $S = \{-2 + \text{sen}\ \alpha, -2 - \text{sen}\ \alpha\}$.

39. Fazendo a mudança de variável sen $x = y$, obtemos a equação do 2º grau $3y^2 - 4y + 1 = 0$ com $\Delta = 4$.

$y = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{6} \Rightarrow y = \frac{1}{3}$ ou $y = 1$

Logo: $\text{sen}\ x = \frac{1}{3}$ ou $\text{sen}\ x = 1$ (não convém, pois $0 < x < \pi$)

Calculando o valor de cos *x*:

$\begin{cases} \text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \\ \text{sen}\ x = \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \cos^2 x = 1$

$\therefore \cos x = \pm\frac{2\sqrt{2}}{3}$

x é um arco do 1º quadrante; então: $\cos x = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

40. Substituindo $\cos^2 x$ por $1 - \text{sen}^2 x$, podemos escrever:

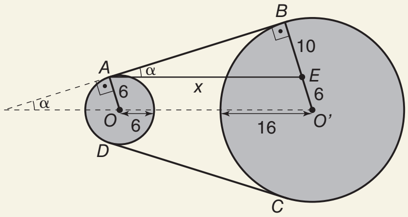
$4(1 - \text{sen}^2 x) + 5\ \text{sen}\ x - 5 = 0 \Rightarrow 4\ \text{sen}^2 x - 5\ \text{sen}\ x + 1 = 0$

Fazendo a mudança de variável sen $x = y$, podemos escrever: $4y^2 - 5y + 1 = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{4}$ ou $y = 1$

Assim: $\text{sen}\ x = \frac{1}{4}$ ou $\text{sen}\ x = 1$

$\left(\text{sen}\ x = 1 \text{não convém, pois } \frac{\pi}{2} < x < \pi\right)$

41. Os raios $\overline{OA}$ e $\overline{O'B}$ são perpendiculares à reta tangente $\overleftrightarrow{AB}$ nos pontos A e B, respectivamente. Sendo $\overline{AE} \,//\, \overline{OO'}$, com $E \in \overleftrightarrow{O'B}$, e sendo x a distância entre os centros O e O', esquematizamos:



FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

Do triângulo retângulo ABE, obtemos: $\text{sen}\ \alpha = \dfrac{10}{x}$ (1)

Como $\cos \alpha = \dfrac{12}{13}$, calculamos sen α:

$\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \text{sen}^2 \alpha + \left(\dfrac{12}{13}\right)^2 = 1$

$\therefore \text{sen}^2 \alpha + \dfrac{144}{169} = 1 \Rightarrow \ \text{sen}\ \alpha = \pm\dfrac{5}{13}$

α é medida de um ângulo agudo; então: $\text{sen}\ \alpha = \dfrac{5}{13}$ (2)

De (1) e (2), deduzimos que: $\dfrac{5}{13} = \dfrac{10}{x} \Rightarrow x = 26$

Assim, a distância entre os centros O e O' é 26 cm.

43. a. Os valores de x, com $0 \leqslant x < 2\pi$, para os quais $\text{sen}\ x = \dfrac{2\sqrt{2}}{2}$ são $x = \dfrac{\pi}{4}$ ou $x = \pi - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{3\pi}{4}$.

Logo: $S = \left\{\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4}\right\}$

b. Os valores de x, com $0 \leqslant x < 2\pi$, para os quais $\cos x = -\dfrac{2\sqrt{2}}{2}$ são $x = \pi - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{3\pi}{4}$ ou $x = \pi + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{5\pi}{4}$.

Logo: $S = \left\{\dfrac{3\pi}{4}, \dfrac{5\pi}{4}\right\}$

c. Os valores de x, com $0 \leqslant x < 2\pi$, para os quais $\cos x = \dfrac{1}{2}$ são $x = \dfrac{\pi}{3}$ ou $x = 2\pi - \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{5\pi}{3}$.

Logo: $S = \left\{\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{5\pi}{3}\right\}$

d. Os valores de x, com $0 \leqslant x < 2\pi$, para os quais $\text{sen}\ x = -\dfrac{1}{2}$ são $x = \pi + \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{7\pi}{6}$ ou $x = 2\pi - \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{11\pi}{6}$

Logo: $S = \left\{\dfrac{7\pi}{6}, \dfrac{11\pi}{6}\right\}$

e. O valor de x, com $0 \leqslant x < 2\pi$, para o qual $\cos x = 1$ é $x = 0$. Logo: $S = \{0\}$

f. Os valores de x, com $0 \leqslant x < 2\pi$, para os quais $\text{sen}\ x = 0$ são $x = 0$ ou $x = \pi$. Logo: $S = \{0, \pi\}$

g. Não existe x tal que $\text{sen}\ x = 3$. Logo: $S = \varnothing$

h. Não existe x tal que $\cos x = -2$. Logo: $S = \varnothing$

44. a. $\cos (60°) = \cos (360° - 60°) = \cos (300°) = \dfrac{1}{2}$

Logo: $S = \{60°, 300°\}$

b. $\text{sen}\ (180° + 60°) = \text{sen}\ (240°) = \text{sen}\ (360° - 60°) =$ $= \text{sen}\ (300°) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Logo: $S = \{240°, 300°\}$

c. $\cos (0°) = 1$

Logo: $S = \{0°\}$

d. $\text{sen}^2\, x = \dfrac{1}{4} \Rightarrow \text{sen}\ x = \dfrac{1}{2}$ ou $\text{sen}\ x = -\dfrac{1}{2}$

$\text{sen}\ (30°) = \text{sen}\ (150°) = \dfrac{1}{2}$

$\text{sen}\ (210°) = \text{sen}\ (330°) = -\dfrac{1}{2}$

Logo: $S = \{30°, 150°, 210°, 330°\}$

45. a. $\text{sen}\ x \cdot \cos x = 0 \Rightarrow \text{sen}\ x = 0$ ou $\cos x = 0$

Para $\text{sen}\ x = 0$, temos: $x = 0$ ou $x = \pi$

Para $\cos x = 0$, temos: $x = \dfrac{\pi}{2}$ ou $x = \dfrac{3\pi}{2}$

Logo: $S = \left\{0, \dfrac{\pi}{2}, \pi, \dfrac{3\pi}{2}\right\}$

b. Pela propriedade do produto nulo, temos:

$2\ \text{sen}\ x - 1 = 0$ ou $2 \cos x + \sqrt{3} = 0$; portanto:

$\text{sen}\ x = \dfrac{1}{2}$ ou $\cos x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Logo: $S = \left\{\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{5\pi}{6}, \dfrac{7\pi}{6}\right\}$

c. Fatorando o primeiro membro, obtemos:

$\text{sen}\ x\ (2 \cos x + 1) = 0$

Pela propriedade do produto nulo, temos:

$\text{sen}\ x = 0$ ou $2 \cos x + 1 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \text{sen}\ x = 0$ ou $\cos x = -\dfrac{1}{2}$

$\therefore x = 0$ ou $x = \pi$ ou $x = \dfrac{2\pi}{3}$ ou $x = \dfrac{4\pi}{3}$

Logo: $S = \left\{0, \dfrac{2\pi}{3}, \pi, \dfrac{4\pi}{3}\right\}$

46. alternativa **b**

$\text{sen}^4\, x = \text{sen}^2\, x \Rightarrow \text{sen}^4\, x - \text{sen}^2\, x = 0 \Rightarrow \text{sen}^2\, x(\text{sen}^2\, x - 1) =$ $= 0 \Rightarrow \text{sen}^2\, x = 0$ ou $\text{sen}^2\, x - 1 = 0$

$\therefore \text{sen}\ x = 0$ ou $\text{sen}\ x = \pm 1$

Para $\text{sen}\ x = 0$, temos: $x = 0$ ou $x = \pi$

Para $\text{sen}\ x = \pm 1$, temos: $x = \dfrac{\pi}{2}$ ou $x = \dfrac{3\pi}{2}$

Logo, $S = \left\{0, \dfrac{\pi}{2}, \pi, \dfrac{3\pi}{2}\right\}$

Portanto, soma pedida: $0 + \dfrac{\pi}{2} + \pi + \dfrac{3\pi}{2} = 3\pi$

47. a. Fazendo $\text{sen}\ x = y$, obtemos

$2y^2 - y - 1 = 0 \therefore \Delta = 9$

$y = \dfrac{1 \pm \sqrt{9}}{4} \Rightarrow y = 1$ ou $y = -\dfrac{1}{2}$

Assim, $\text{sen}\ x = 1$ ou $\text{sen}\ x = -\dfrac{1}{2}$

Para $\text{sen}\ x = 1$, temos: $x = \dfrac{\pi}{2}$

Para $\text{sen}\ x = -\dfrac{1}{2}$, temos: $x = \dfrac{7\pi}{6}$ ou $x = \dfrac{11\pi}{6}$

Logo: $S = \left\{\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{7\pi}{6}, \dfrac{11\pi}{6}\right\}$

b. Fazendo $\cos x = y$, obtemos:

$y^2 - 4y + 3 = 0 \Rightarrow y = 1$ ou $y = 3$

Retornando à variável original, temos:

$\cos x = 1$ ou $\cos x = 3$ (não convém) $\Rightarrow x = 0$

Logo: $S = \{0\}$

c. Como $\text{sen}^2\, x = 1 - \cos^2 x$, temos:

$2(1 - \cos^2 x) + 3 \cos x - 3 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow -2 \cos^2 x + 3 \cos + x - 1 = 0$

Fazendo a mudança de variável $\cos x = y$, temos:

$-2y^2 + 3y - 1 = 0 \Rightarrow y = 1$ ou $y = \dfrac{1}{2}$

Então: $\cos x = 1 \Rightarrow x = 0$ ou $\cos x = \dfrac{1}{2} \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{3}$ ou $x = \dfrac{5\pi}{3}$

Logo: $S = \left\{0, \dfrac{\pi}{3}, \dfrac{5\pi}{3}\right\}$

48. Sendo α a medida do ângulo agudo entre o plano da rampa e o plano horizontal e considerando que o comprimento da rampa será de 100 m, temos:

$\text{sen}\ \alpha = \dfrac{50}{100} \Rightarrow \text{sen}\ \alpha = \dfrac{1}{2} \ \therefore \alpha = 30°$

49. a. Na primeira volta do sentido positivo, temos:

$\cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{4}$ ou $x = \dfrac{7\pi}{4}$

Assim, no universo $\mathbb{R}$, o conjunto solução S da equação é:

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \dfrac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi \text{ ou } x = \dfrac{7\pi}{4} + k \cdot 2\pi,\right.$ $\left.\text{com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

b. Na primeira volta do sentido positivo, temos:
$\text{sen } x = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $x = \pi$
Assim, no universo $\mathbb{R}$, o conjunto solução S da equação é:
$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = 0 + k \cdot \pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\}$

c. $\text{sen } x - \cos^2 x = 1$
Substituindo $\cos^2 x$ por $1 - \text{sen}^2 x$, temos:
$\text{sen}^2 x + \text{sen } x - 2 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \text{sen } x = 1$ ou $\text{sen } x = -2$ (não convém)
Na primeira volta do sentido positivo, temos:
$\text{sen } x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$
Assim, no universo $\mathbb{R}$, o conjunto solução S da equação é: $S = \left\{x \in \mathbb{R} | x = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

d. $\text{sen}^2 x = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{sen } x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$
Na primeira volta do sentido positivo, temos:
$\text{sen } x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$ ou $x = \frac{3\pi}{4}$
$\text{sen } x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = \frac{5\pi}{4}$ ou $x = \frac{7\pi}{4}$
Assim, no universo $\mathbb{R}$, o conjunto solução S da equação é:
$S = \left\{x \in \mathbb{R} | x = \frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{2}, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

50. O método proposto pelo francês Georges-Louis Leclerc de Buffon para o cálculo do π, também conhecido como *Agulha de Buffon*, relaciona a Probabilidade à Geometria. O método consiste em lançar uma agulha, de comprimento ℓ, ao acaso, em uma superfície formada por faixas de largura a, e calcular a probabilidade da agulha cair em uma das linhas divisórias das faixas. Demonstra-se que a probabilidade de que a agulha toque alguma linha em apenas 1 lançamento é $P = \frac{2\ell}{a\pi}$. Assim, se n for o número total de lançamentos e h for o número de lançamentos nos quais a agulha toca alguma linha nos n lançamentos, então $\frac{2\ell}{a\pi} \approx \frac{h}{n}$. Com uma agulha de comprimento igual à metade da distância entre as faixas $\left(\ell = \frac{a}{2}\right)$, temos: $\frac{2\frac{a}{2}}{a\pi} \approx \frac{h}{n} \Rightarrow \frac{1}{\pi} \approx \frac{h}{n} \Rightarrow \pi \approx \frac{n}{h}$, ou seja, para uma aproximação do valor de π, basta anotar n e h no decorrer dos lançamentos. Quanto maior o número de lançamentos, o resultado será mais próximo de π.

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

1. alternativa **b**

Aplicando a regra de três, obtemos:

$$\begin{matrix} 1° & \text{———} & 60' \\ x & \text{———} & 3' \end{matrix} \quad \therefore x = \frac{1 \cdot 3}{60} = 0{,}05°$$

Logo, a representação angular 124°3′0″ equivale a 124,05°.

2. alternativa **e**

A medida x, em quilômetro, do arco percorrido pela Lua em 1 dia é dada por: $\frac{x}{384.000} = \frac{\pi}{15} \Rightarrow x = 25.600\pi$

Logo, a velocidade v da Lua é:

$v = \frac{25.600\pi}{24}$ km/h $\Rightarrow v = \frac{3.200\pi}{3}$ km/h

3. **a.** A velocidade angular ω_M da polia maior é:

$\omega_M = \frac{1.000 \cdot 180°}{60 \text{ s}} \Rightarrow \omega_M = 3.000°/\text{s}$

b. As velocidades angulares das polias são inversamente proporcionais aos respectivos raios. Note que a velocidade angular da polia maior é $\frac{50\pi}{3}$ rad/s, e indicando por ω_m a velocidade angular da polia menor, em rad/s, temos: $\frac{50\pi}{3} \cdot 18 = \omega_m \cdot 12 \Rightarrow \omega_m = 25\pi$
Logo, a velocidade da polia menor é de 25π rad/s.

c. As medidas angulares dos giros das polias são inversamente proporcionais aos respectivos raios. Assim, indicando por x a medida, em radiano, do giro da polia maior, temos: $3.000\pi \cdot 12 = x \cdot 18 \Rightarrow x = 2.000\pi$
Portanto, a polia maior gira 2.000π rad quando a menor gira 3.000π rad.

d. As medidas angulares dos giros das polias são inversamente proporcionais aos respectivos raios. Observando que 36.000° equivalem a 200π rad, e indicando por y a medida, em radiano, do giro da polia menor, temos: $200\pi \cdot 18 = y \cdot 12 \Rightarrow y = 300\pi$
Logo, a polia menor gira 300π rad quando a menor gira 36.000°.

4. Considerando, por aproximação, que a trajetória do Sol seja a circunferência que contém sua trajetória aparente no ocaso, temos que veremos o Sol no mesmo ponto do espaço a cada 24 horas. Assim, a regra de três a seguir nos dá uma aproximação pedida, para o tempo t em hora:
$\frac{t}{32'} = \frac{12}{10.800'} \Rightarrow t = \frac{8}{225}$
Logo, o pôr do Sol demora $\frac{8}{225}$ h ou 2 min 8 s.

5. **a.** Os vértices do pentágono dividem a circunferência trigonométrica em 5 arcos congruentes entre si. A medida, em radiano, de cada um desses arcos é $\frac{2\pi}{5}$. Assim, a medida do arco trigonométrico da primeira volta positiva com extremo no vértice M é dada por $\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{5} = \frac{\pi}{10}$. Logo, a medida α, em radiano, com $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, associada ao vértice M é $\frac{\pi}{10}$.

b. O intervalo $0 < \beta < 6\pi$ representa as primeiras três voltas no sentido positivo. Na primeira volta positiva, a medida do arco trigonométrico com extremo em Q é:
$\frac{\pi}{10} + 3 \cdot \frac{\pi}{5} = \frac{7\pi}{10}$; na segunda volta, $\frac{7\pi}{10} + 2\pi = \frac{27\pi}{10}$; e na terceira, $\frac{27\pi}{10} + 2\pi = \frac{47\pi}{10}$.
Logo, as medidas β são: $\frac{7\pi}{10}$, $\frac{27\pi}{10}$ e $\frac{47\pi}{10}$.

c. A medida α, em radiano, com $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, associada ao ponto M é $\frac{\pi}{10}$. Assim, a medida associada ao ponto R na primeira volta negativa é $-\left(\frac{2\pi}{5} - \frac{\pi}{10}\right) = -\frac{3\pi}{10}$;
na segunda volta negativa é $-\frac{3\pi}{10} - 2\pi = -\frac{23\pi}{10}$;
na terceira volta negativa é $-\frac{23\pi}{10} - 2\pi = -\frac{43\pi}{10}$.
Logo, as medidas θ, em radiano, com $-6\pi < \theta < 0$, são: $-\frac{3\pi}{10}$, $-\frac{23\pi}{10}$ e $-\frac{43\pi}{10}$.

6. alternativa **d**

Atribuindo valores inteiros a k de modo a obter os números reais x de uma volta completa da circunferência trigonométrica, conseguimos identificar o polígono.

$k = 0 \Rightarrow x = \pi + 0 \cdot \frac{\pi}{4} = \pi; k = 1 \Rightarrow x = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4};$

$k = 2 \Rightarrow x = \pi + 2 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{2}; k = 3 \Rightarrow x = \pi + 3 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4};$

$k = 4 \Rightarrow x = \pi + 4 \cdot \frac{\pi}{4} = 2\pi; k = 5 \Rightarrow x = \pi + 5 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{9\pi}{4};$

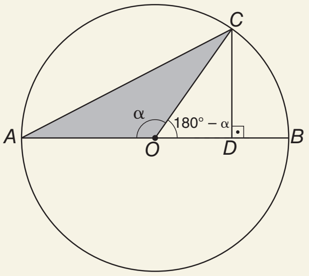
$k = 6 \Rightarrow x = \pi + 6 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{2}; k = 7 \Rightarrow x = \pi + 7 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{11\pi}{4};$

$k = 8 \Rightarrow x = \pi + 8 \cdot \frac{\pi}{4} = 3\pi$ (Note que aqui completamos uma volta, pois os números π e 3π estão associados ao mesmo ponto.) Assim, o polígono é o octógono regular.

7. **a.** $\text{sen } 150° = \text{sen } 30° = \frac{1}{2}$ **c.** $\cos 300° = \cos 60° = \frac{1}{2}$

b. $\text{sen}\frac{4\pi}{3} = -\text{sen}\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ **d.** $\cos\frac{7\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

8. A projeção ortogonal do segmento $\overline{AC}$ sobre o diâmetro $\overline{AB}$ é o segmento $\overline{AD}$ na figura.



Sendo x a medida, em centímetro, do segmento $\overline{OD}$, temos, do triângulo retângulo ODC:

$\cos(180° - \alpha) = \frac{OD}{OC} \Rightarrow -\cos\alpha = \frac{x}{12}$

Calculando $\cos\alpha$:

$\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow (0{,}8)^2 + \cos^2\alpha = 1 \therefore \cos = \pm 0{,}6$

Como α é a medida de um ângulo obtuso, deduzimos que $\cos\alpha = -0{,}6$.

Assim: $-\cos\alpha = \frac{x}{12} \Rightarrow 0{,}6 = \frac{x}{12} \therefore x = 7{,}2$

Logo: $AD = 12 + 7{,}2 = 19{,}2$

Portanto, a projeção ortogonal do segmento $\overline{AC}$ sobre o diâmetro $\overline{AB}$ mede 19,2 cm.

9. alternativa **d**

$A = \frac{\cos(\pi + x) + \cos(-x) + \cos(\pi - x)}{\text{sen}(-x) + \text{sen}(\pi - x) + \cos x}$

$A = \frac{-\cos x + \cos x - \cos x}{-\text{sen } x + \text{sen } x + \cos x} \therefore A = -1$

10. Sendo h a altura da pirâmide, temos:

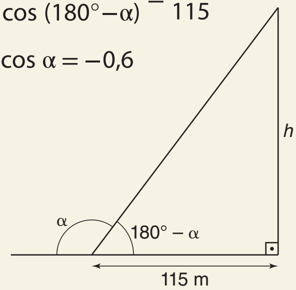
$$\begin{cases} \text{tg}(180° - \alpha) = \frac{h}{115} \\ \cos\alpha = -0{,}6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\text{sen}(180° - \alpha)}{\cos(180° - \alpha)} = \frac{h}{115} \\ \cos\alpha = -0{,}6 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} \frac{\text{sen}\,\alpha}{-\cos\alpha} = \frac{h}{115} \\ \cos\alpha = -0{,}6 \end{cases}$$

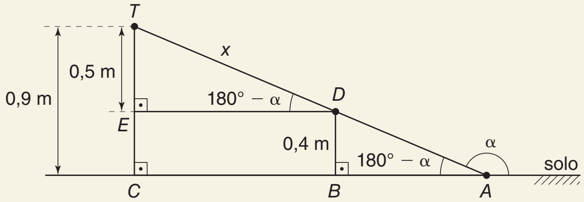
Como $\cos\alpha = -0{,}6$ e $90° < \alpha < 180°$, temos:

$\text{sen}\,\alpha = 0{,}8$

Logo: $\frac{0{,}8}{-(-0{,}6)} = \frac{h}{115} \therefore h \approx 153$ m



11. Indicando por x a distância TD, em metro, temos:



$\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha = \frac{2\sqrt{6}}{5}$

$\text{sen}(180° - \alpha) = \text{sen}\,\alpha = \sqrt{1 - \left(-\frac{2\sqrt{6}}{5}\right)^2} = \frac{1}{5}$

Do triângulo TDE, temos: $\text{sen}(180° - \alpha) = \frac{0{,}5}{x} \Rightarrow \frac{1}{5} = \frac{0{,}5}{x}$

$\therefore x = 2{,}5$

12. **a.** $\text{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \text{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Logo, $S = \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right\}$.

b. $\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

Logo, $S = \left\{\frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right\}$.

c. $\text{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1$

Logo, $S = \left\{\frac{3\pi}{2}\right\}$.

d. $\cos^2 x = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ou $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Logo, $S = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right\}$.

e. Substituindo $\text{sen}^2\,x$ por $1 - \cos^2 x$, obtemos:

$2(1 - \cos^2 x) + 7\cos x - 5 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2\cos^2 x - 7\cos x + 3 = 0$

Sendo $\cos x = y$, temos: $2y^2 - 7y + 3 = 0$

Assim: $\Delta = 25 \therefore y = 3$ ou $y = \frac{1}{2}$

Então: $\cos x = 3$ (não convém) ou $\cos x = \frac{1}{2}$

Como $0 \leqslant x < 2\pi$, obtemos: $x = \frac{\pi}{3}$ ou $x = \frac{5\pi}{3}$

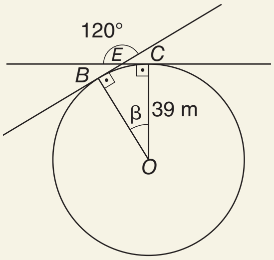
Portanto: $S = \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\}$

13. **a.** $\cos\alpha - \cos(180° - \alpha) = -1 \Rightarrow \cos\alpha + \cos\alpha = -1$

$\therefore 2\cos\alpha = -1 \Rightarrow \cos\alpha = -\frac{1}{2}$

Como α é medida de um ângulo obtuso, deduzimos que $\alpha = 120°$. Assim, esquematizamos:

Visto que a soma dos ângulos internos de um quadrilátero é 360°, concluímos que a medida β é dada por:



$90° + 90° + 120° + \beta = 360° \Rightarrow \beta = 60°$

b. Como o comprimento de um arco de circunferência é diretamente proporcional à medida do ângulo central correspondente, calculamos o comprimento x do arco $\widehat{BC}$, em metro, por meio da regra de três:

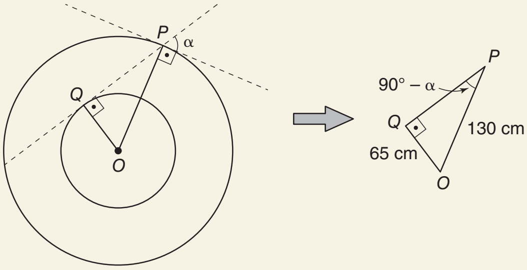
ILUSTRAÇÕES: ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

Medida do ângulo central (em grau)	Comprimento do arco (em metro)
360	$2\pi \cdot 39$
60	x

$\therefore x = 13\pi$

Logo, o comprimento do arco $\widehat{BC}$ é 13π m ou $\approx 40{,}82$ m.

14. Quando a bicicleta, em movimento, está na posição vertical, as projeções ortogonais das rodas sobre o piso plano e horizontal são tangentes às circunferências descritas. Essas duas circunferências têm o mesmo centro *O*, pois as cordas da circunferência maior, tangentes à menor, têm todas o mesmo comprimento. Assim, sendo *P* o ponto de contato da roda maior com o piso, e *Q* o ponto de contato da roda menor com o piso, esquematizamos:



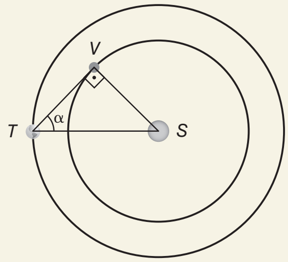
FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

Do Δ *OPQ*, temos: $\text{sen}\,(90° - \alpha) = \dfrac{65}{130} \Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{1}{2}$

Como α é a medida de um ângulo agudo, temos $\alpha = 60°$.

MATEMÁTICA SEM FRONTEIRAS

1. Indicando por α a medida do ângulo $V\hat{T}S$, temos:



$\text{sen}\,\alpha = \dfrac{VS}{TS} \Rightarrow \text{sen}\,\alpha = \dfrac{108.204.000}{150.000.000}$

$\text{sen}\,\alpha = 0{,}72136$

Em uma calculadora científica, obtemos $\alpha \approx 46{,}17°$.

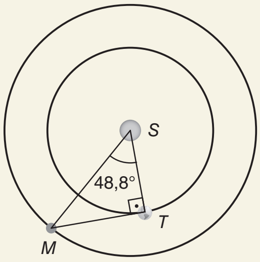
3. $\cos 48{,}8° = \dfrac{ST}{SM}$

Em uma calculadora científica, obtemos:

$0{,}6587 \approx \dfrac{150.000.000}{SM} \Rightarrow$

$\Rightarrow SM \approx 227.721.000$

Logo, a distância entre o Sol e o planeta Marte é, aproximadamente, 227.721.000 km.



VERIFIQUE O QUE APRENDEU NO CAPÍTULO 3

1. a. Em 8 minutos o ponto material percorre um arco com 16 cm de comprimento. Dividindo o comprimento do arco pela medida do raio, obtém-se a medida α do arco em radiano: $\alpha = \dfrac{16}{8}$ rad $= 2$ rad

b. Indicando por *x* o comprimento, em cm, do arco percorrido, montamos uma regra de três:

comprimento do arco percorrido (cm)	tempo (min)
16	8
x	62,8

$\therefore 125{,}6$ cm

O comprimento da circunferência descrita em cada volta, em cm, é $2 \cdot 3{,}14 \cdot 4 = 25{,}12$; o número *n* de voltas descritas pelo ponto material é: $n = \dfrac{125{,}6}{25{,}12} = 5$

Em 62,8 min o ponto material gira 5 voltas completas.

2. $1.140° = 3 \cdot 360° + 60°$

Assim, o arco trigonométrico de 1.140° tem três voltas completas e mais 60°. Logo, desconsiderando as voltas completas, obtemos a medida *x* do arco trigonométrico côngruo ao arco de 1.140° na 1ª volta positiva: $x = 60°$

4. $\begin{cases} \text{sen}\alpha = -4\cos\alpha & (1) \\ \text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 & (2) \end{cases}$

Substituindo (1) em (2):

$(-4\cos\alpha)^2 + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow 17\cos^2\alpha = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos^2\alpha = \dfrac{1}{17} \Rightarrow \cos\alpha = \pm\dfrac{\sqrt{17}}{17}$

Como α tem a extremidade no segundo quadrante, deduzimos que cos α é negativo; logo: $\cos\alpha = -\dfrac{\sqrt{17}}{17}$

Logo: $\text{sen}\,\alpha = \dfrac{4\sqrt{17}}{17}$

CAPÍTULO 4 Outras razões trigonométricas e adição de arcos

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

2. $\text{tg}\,\alpha = -2 \Rightarrow \dfrac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} = -2$

$\begin{cases} \text{sen}\,\alpha = -2\cos\alpha \\ \text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \end{cases} \Rightarrow \cos^2\alpha = \dfrac{1}{5} \Rightarrow \cos\alpha = \pm\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

$\therefore \cos\alpha = -\dfrac{\sqrt{5}}{5}$, para $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$

Assim:

$\text{sen}\,\alpha = -2\cos\alpha = -2\left(-\dfrac{\sqrt{5}}{5}\right) = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

Logo: $\text{sen}\,\alpha = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$ e $\cos\alpha = -\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

3. Pela relação fundamental da Trigonometria, temos:

$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \text{sen}^2\alpha + \left(-\dfrac{1}{3}\right)^2 = 1$

$\therefore \text{sen}\,\alpha = \pm\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

Do enunciado, α é um arco do 2º quadrante; então, $\text{sen}\,\alpha > 0$.

Assim: $\text{tg}\,\alpha = \dfrac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{\frac{2\sqrt{2}}{3}}{-\frac{1}{3}} \therefore \text{tg}\,\alpha = -2\sqrt{2}$

4. a. A ordenada do ponto *M* é sen α e a ordenada de *P* é tg α. Assim, devemos calcular tg α, sabendo que $\text{sen}\,\alpha = \dfrac{3}{5}$ e que α é a medida de um arco trigonométrico do 1º quadrante.

Pela relação fundamental da Trigonometria, temos:

$\left(\dfrac{3}{5}\right)^2 + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \cos\alpha = +\dfrac{4}{5}$

$\therefore \text{tg}\,\alpha = \dfrac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} \Rightarrow \text{tg}\,\alpha = \dfrac{3}{4}$

ILUSTRAÇÕES: ERICSON GUILHERME LUCIANO ARQUIVO DA EDITORA

b. O ângulo inscrito $A\hat{A'}M$ tem como correspondente o ângulo central $A\hat{O}M$ de medida α.

Concluímos, assim, que a medida do ângulo $A\hat{A'}M$ é $\frac{\alpha}{2}$.

c. Seja a projeção ortogonal do segmento $\overline{OM}$ sobre o eixo dos cossenos $\overline{OM'}$, cuja medida é cos α, ou seja, $\frac{4}{5}$.

Temos, também, que $MM' = \text{sen}\ \alpha = \frac{3}{5}$.

Do triângulo *AMM'*, concluímos:

$$\text{tg}\ \frac{\alpha}{2} = \frac{MM'}{A'O + OM'} \Rightarrow \text{tg}\ \frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{3}{5}}{1 + \frac{4}{5}}\ \therefore\ \text{tg}\ \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{3}$$

5. Sendo *h* a medida da altura do paredão, em metro, temos:

$$\text{tg}\ \alpha = \frac{h}{40} \quad (1)$$

Pela relação fundamental da Trigonometria:

$$\text{sen}^2\ \alpha + \cos^2\ \alpha = 1 \Rightarrow \left(\frac{15}{17}\right)^2 + \cos^2\ \alpha = 1$$

$$\therefore \cos\ \alpha = +\frac{8}{17} \text{ (pois α é um ângulo agudo)}$$

$$\text{Assim: tg}\ \alpha = \frac{\text{sen}\ \alpha}{\cos\ \alpha} \Rightarrow \text{tg}\ \alpha = \frac{\frac{15}{17}}{\frac{8}{17}} = \frac{15}{8} \quad (2)$$

Substituindo (2) em (1), concluímos que:

$$\frac{15}{8} = \frac{h}{40} \Rightarrow h = 75$$

Logo, a medida da altura do paredão é 75 m.

7. a. 135° é um arco do 2º quadrante e é simétrico a 45°; então: $\text{tg}\ 135° = -\text{tg}\ 45° = -1$

b. $\frac{5\pi}{6}$ é um arco do 2º quadrante e é simétrico a $\frac{\pi}{6}$; então:

$$\text{tg}\ \frac{5\pi}{6} = -\text{tg}\ \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

c. 225° é um arco do 3º quadrante e é simétrico a 45°; então: $\text{tg}\ 225° = \text{tg}\ 45° = 1$

d. $\frac{4\pi}{3}$ é um arco do 3º quadrante e é simétrico a $\frac{\pi}{3}$; então:

$$\text{tg}\ \frac{4\pi}{3} = \text{tg}\ \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

e. 315° é um arco do 4º quadrante e é simétrico a 45°; então: $\text{tg}\ 315° = -\text{tg}\ 45° = -1$

f. $\frac{11\pi}{6}$ é um arco do 4º quadrante e é simétrico a $\frac{\pi}{6}$; então:

$$\text{tg}\ \frac{11\pi}{6} = -\text{tg}\ \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

9. $$E = \frac{\text{tg}\ (180°+x) - \text{tg}\ (180°-x) + \text{tg}\ (360°-x)}{\text{tg}\ (360°+x)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E = \frac{\text{tg}\ x - (-\text{tg}\ x) + (-\text{tg}\ x)}{\text{tg}\ x}\ \therefore\ E = \frac{\text{tg}\ x}{\text{tg}\ x} = 1$$

10. alternativa **d**

Lembrando que $\text{tg}\ (180° - \alpha) = -\text{tg}\ \alpha$; $\text{tg}\ (180° + \alpha) = \text{tg}\ \alpha$ e $\text{tg}\ (360° - \alpha) = -\text{tg}\ \alpha$ e admitindo $\alpha = 88°$, temos:

$\text{tg}\ (180° - 88°) = -\text{tg}\ 88° \Rightarrow \text{tg}\ 92° = -\text{tg}\ 88°$,

$\text{tg}\ (180° + 88°) = \text{tg}\ 88° \Rightarrow \text{tg}\ 268° = \text{tg}\ 88°$,

$\text{tg}\ (360° - 88°) = -\text{tg}\ 88° \Rightarrow \text{tg}\ 272° = -\text{tg}\ 88°$.

12. a. $\text{tg}\ \left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\text{tg}\ \frac{\pi}{4} = -1$

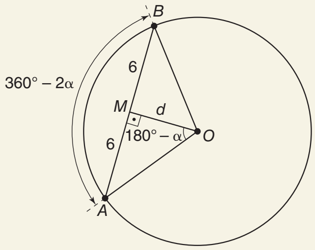
b. $\text{tg}\ (-120°) = -\text{tg}\ 120° = -\left(-\sqrt{3}\right) = \sqrt{3}$

c. $\text{tg}\ (-330°) = -\text{tg}\ 330° = -(-\text{tg}\ 30°) = \text{tg}\ 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$

13. $$E = \frac{\text{tg}\ (\pi + \alpha) - \text{tg}\ (2\pi - \alpha)}{\text{tg}\ (\pi - \alpha) + \text{tg}\ (-\alpha)} = \frac{\text{tg}\ \alpha - (-\text{tg}\ \alpha)}{-\text{tg}\ \alpha + (-\text{tg}\ \alpha)} =$$

$$= \frac{2\ \text{tg}\ \alpha}{-2\ \text{tg}\ \alpha} = -1$$

14. O menor arco determinado pelos pontos *A* e *B* na circunferência tem medida 360° – 2α. O triângulo *OAB* é isósceles de base $\overline{AB}$, assim, sendo *M* o ponto médio da corda $\overline{AB}$, temos que $\overline{OM}$ é mediana, altura e bissetriz, relativas ao vértice *O*. A medida *OM* é a distância procurada. Indicando por *d* essa distância, esquematizamos:



ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

Assim, do triângulo *MOA*, temos:

$$\text{tg}\ (180° - \alpha) = \frac{6}{d} \Rightarrow -\text{tg}\ \alpha = \frac{6}{d}\ \therefore\ 1{,}2 = \frac{6}{d} \Rightarrow d = 5$$

15. a. Ângulos consecutivos de um paralelogramo são suplementares; logo, $\alpha + \beta = 180°$ ou, ainda, $\beta = 180° - \alpha$.

$\text{tg}\ \beta = \text{tg}\ (180° - \alpha) \Rightarrow \text{tg}\ \beta = -\text{tg}\ \alpha\ \therefore\ \text{tg}\ \beta = 2{,}4$

b. $\text{tg}\ (\alpha + \beta) = \text{tg}\ 180° = 0$

c. $\text{tg}\ (2\alpha + \beta) = \text{tg}\ (\alpha + \alpha + \beta) = \text{tg}\ (\alpha + 180°) = \text{tg}\ \alpha = 2{,}4$

d. A altura do paralelogramo é a medida *AE*. Como a área do paralelogramo mede 33.600 m² e *AB* = *DC*, a altura *AE*, em metro, é dada por:

$280 \cdot AE = 33.600 \Rightarrow AE = 120$

Indicando por *x* a distância, em metro, entre o posto de informações turísticas e o turista parado no ponto *D*, temos o triângulo retângulo *ADE*. Assim:

Do triângulo retângulo *ADE*, concluímos que:

$$\text{tg}\ \beta = \frac{120}{x} \Rightarrow 2{,}4 = \frac{120}{x}\ \therefore\ x = 50$$

16. a. $\text{tg}\ x = \sqrt{3} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3}$ ou $x = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}\ \therefore\ S = \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right\}$

b. $\text{tg}\ x = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}$ ou $x = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}\ \therefore\ S = \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right\}$

c. $\text{tg}\ x = -\sqrt{3} \Rightarrow x = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$ ou $x = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$

$\therefore S = \left\{\frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\}$

d. $\text{tg}\ x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow x = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$ ou $x = 2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$

$\therefore\ S = \left\{\frac{5\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right\}$

17. Para item **b**, na primeira volta do sentido positivo, temos:

$\text{tg}\ x = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}$ ou $x = \frac{7\pi}{6}$

Assim, no universo ℝ, o conjunto *S* da equação é:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{6} + k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Para item **c**, na primeira volta do sentido positivo, temos:

$\text{tg}\ x = -\sqrt{3} \Rightarrow x = \frac{2\pi}{3}$ ou $x = \frac{5\pi}{3}$

Assim, no universo ℝ, o conjunto *S* da equação é:

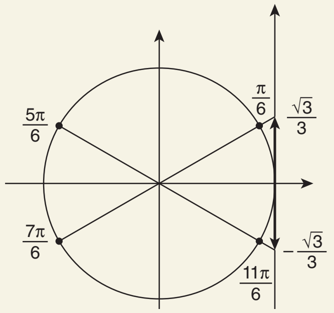
$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{2\pi}{3} + k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$$

18. Podemos dividir ambos os membros da igualdade por cos *x*, pois este é, certamente, diferente de zero. Se cos *x* fosse igual a zero teríamos sen *x* = 0, o que é um absurdo, visto que o seno e o cosseno de um mesmo arco não podem ser, simultaneamente, iguais a zero. Assim:

$$\text{sen}\ x = \sqrt{3} \cos x \Rightarrow \frac{\text{sen}\ x}{\cos x} = \sqrt{3}\ \therefore\ \text{tg}\ x = \sqrt{3}$$

Resolvendo essa equação para $0 \leqslant x < 2\pi$, concluímos que o conjunto solução S é $S = \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right\}$.

19. a. $\text{tg}^2\, x = \frac{1}{3} \Rightarrow \text{tg}\, x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ou $\text{tg}\, x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$



NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

$S = \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right\}$

b. $(\text{tg}^2\, x - 3)(\text{tg}^4\, x - 1) = 0 \Rightarrow \text{tg}^2\, x - 3 = 0$ ou $\text{tg}^4\, x - 1 = 0$

Utilizando o mesmo raciocínio da resolução do item **a**, construa a circunferência trigonométrica e marque os pontos associados aos resultados das equações a seguir.

- $\text{tg}^2\, x - 3 = 0 \Rightarrow \text{tg}\, x = \sqrt{3}$ ou $\text{tg}\, x = -\sqrt{3}$
- $\text{tg}^4\, x - 1 = 0 \Rightarrow \text{tg}\, x = 1$ ou $\text{tg}\, x = -1$

$S = \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right\}$

c. $\text{tg}^2\, x - \text{tg}\, x = 0 \Rightarrow \text{tg}\, x\, (\text{tg}\, x - 1) = 0$

$\therefore \text{tg}\, x = 0$ ou $\text{tg}\, x = 1$

Resolvendo cada uma dessas equações, obtemos:

- $\text{tg}\, x = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $x = \pi$
- $\text{tg}\, x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$ ou $x = \frac{5\pi}{4}$

Assim, o conjunto solução S é: $S = \left\{0, \pi, \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right\}$

20. a. Multiplicando por 4 ambos os membros da igualdade, obtemos:

$1 + \text{tg}\, x = 4\, \text{tg}\, x - 2 \Rightarrow \text{tg}\, x = 1$

Construa a circunferência trigonométrica e marque os pontos associados a $\text{tg}\, x = 1$. Na primeira volta positiva, temos como valores de x: $\frac{\pi}{4}$ e $\frac{5\pi}{4}$

Logo, em $\mathbb{R}$, o conjunto solução S é dado por:

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{4} + k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

b. Condição de existência: $\text{tg}\, x \neq 0$

Multiplicando por tg x ambos os membros da igualdade, obtemos: $3 + \text{tg}\, x - \text{tg}\, x = \text{tg}^2\, x \Rightarrow \text{tg}^2\, x = 3$

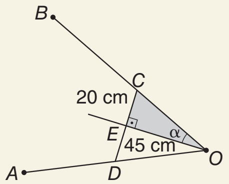
$\therefore \text{tg}\, x = \sqrt{3}$ ou $\text{tg}\, x = -\sqrt{3}$

Construa a circunferência trigonométrica e marque os pontos associados a $\text{tg}\, x = \sqrt{3}$ e $\text{tg}\, x = -\sqrt{3}$. Na primeira volta positiva, temos como valores de x: $\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$ e $\frac{5\pi}{3}$

Logo, em $\mathbb{R}$, o conjunto solução S é dado por:

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{3} + k\pi, \text{ ou } x = \frac{2\pi}{3} + k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

21. a. Esquematizando a situação, temos que α é metade da distância angular entre as estrelas A e B, pois o triângulo OCD é isósceles de base $\overline{DC}$.



ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

b. Do triângulo retângulo OCE obtém-se:

$\text{tg}\, \alpha = \frac{20}{45} \Rightarrow \text{tg}\, \alpha = \frac{4}{9}$

Usando uma calculadora eletrônica, obtemos $\alpha \approx 24°$, portanto, a distância angular entre as estrelas C e D é, aproximadamente, 48°.

23. Calculando separadamente, temos:

$\sec 60° = \frac{1}{\cos 60°} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2; \ \text{cossec}\, 30° = \frac{1}{\text{sen}\, 30°} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$

$\text{cotg}^2\, 30° = \text{cotg}\, 30° \cdot \text{cotg}\, 30° = \frac{1}{\text{tg}\, 30°} \cdot \frac{1}{\text{tg}\, 30°} =$

$= \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{3}} \cdot \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = 3$

$\sec 0° = \frac{1}{\cos 0°} = \frac{1}{1} = 1$

$\text{tg}\, 45° = 1$

Assim:

$E = \frac{\sec 60° + \text{cossec}\, 30° - \text{cotg}^2\, 30°}{\sec 0° + \text{tg}\, 45°} = \frac{2 + 2 - 3}{1 + 1} = \frac{1}{2}$

24. a. $f(3\pi) = 4\, \text{cossec}\, \frac{3\pi}{2} - \sec\, (2 \cdot 3\pi) \Rightarrow$

$\Rightarrow f(3\pi) = 4 \cdot \frac{1}{\text{sen}\, \frac{3\pi}{2}} - \frac{1}{\cos\, (6\pi)} \therefore f(3\pi) = -5$

b. (1) $f(\pi) = 4\, \text{cossec}\, \frac{\pi}{2} - \sec\, (2\pi) \Rightarrow$

$\Rightarrow f(\pi) = 4 \cdot \frac{1}{\text{sen}\, \frac{\pi}{2}} - \frac{1}{\cos\, (2\pi)} \therefore f(\pi) = 3$

(2) $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 4\, \text{cossec}\, \frac{\frac{\pi}{3}}{2} - \sec\left(2 \cdot \frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 4 \cdot \frac{1}{\text{sen}\, \frac{\pi}{6}} - \frac{1}{\cos\, \frac{2\pi}{3}} \therefore f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 10$

De (1) e (2), temos que: $f(\pi) + f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 3 + 10 = 13$

25. $\text{cossec}\, x = \sqrt{2} \Rightarrow \frac{1}{\text{sen}\, x} = \sqrt{2}$, ou seja, $\text{sen}\, x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

$\therefore x = \frac{\pi}{4}$ ou $x = \frac{3\pi}{4}$; logo: $S = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right\}$

26. $3\, \text{tg}\, x + 2\cos x = 3\sec x \Rightarrow$

$\Rightarrow 3 \cdot \frac{\text{sen}\, x}{\cos x} + 2 \cdot \cos x = 3 \cdot \frac{1}{\cos x}$

$\therefore 3 \cdot \frac{\text{sen}\, x}{\cos x} + 2 \cdot \cos x - 3 \cdot \frac{1}{\cos x} = 0$

Como $\cos x \neq 0$ no intervalo dado, podemos multiplicar a equação por cos x, assim: $3\, \text{sen}\, x + 2\cos^2 x - 3 = 0$

Sabendo que $\text{sen}^2\, x + \cos^2 x = 1$, temos:

$3\, \text{sen}\, x + 2(1 - \text{sen}^2\, x) - 3 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow -2\, \text{sen}^2\, x + 3\, \text{sen}\, x - 1 = 0$

Chamando $\text{sen}\, x = y$, temos:

$-2y^2 + 3y - 1 = 0 \Rightarrow 2y^2 - 3y + 1 = 0$

$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 9 - 8 = 1$

$y = \frac{-(-3) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 2} = \frac{3 \pm 1}{4} \Rightarrow y = 1$ ou $y = \frac{1}{2}$

Para $y = 1$, temos $y = \text{sen}\, x = 1$ não convém, pois, para $\text{sen}\, x = 1$, tem-se $\cos x = 0$, que não satisfaz a condição de existência.

Para $y = \frac{1}{2}$, temos $y = \text{sen}\, x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}$ ou $x = \frac{5\pi}{6}$

Os valores de x que satisfazem a equação são $\frac{\pi}{6}$ e $\frac{5\pi}{6}$.

27. $\text{cotg } x = 3 \Rightarrow \dfrac{\cos x}{\text{sen } x} = 3 \therefore \cos x = 3 \text{ sen } x$

Aplicando a relação fundamental da Trigonometria, temos:

$$\text{sen}^2 x + (3 \text{ sen } x)^2 = 1 \Rightarrow \text{sen } x = \pm\frac{1}{\sqrt{10}}$$

Como $\pi < x < \dfrac{3\pi}{2}$, deduzimos que $\text{sen } x = -\dfrac{1}{\sqrt{10}}$

Assim: $\text{cossec } x = \dfrac{1}{\text{sen } x} = \dfrac{1}{\left(-\dfrac{1}{\sqrt{10}}\right)} \Rightarrow \text{cossec } x = -\sqrt{10}$

28. alternativa **c**

$\sec \alpha = -1{,}25 \Rightarrow \dfrac{1}{\cos \alpha} = -\dfrac{125}{100} \therefore \cos \alpha = -0{,}8$

Aplicando a relação fundamental da Trigonometria:

$\text{sen}^2 \alpha + (-0{,}8)^2 = 1 \Rightarrow \text{sen } \alpha = \pm 0{,}6$

Como α é a medida de um arco do segundo quadrante, deduzimos que sen α = 0,6. Assim, temos:

$$\text{tg } x = \frac{\text{sen } x}{\cos x} = \frac{0,6}{(-0,8)} \Rightarrow \text{tg } x = -0{,}75.$$

29. Observando que 16,4 km = 16.400 m, e indicando por x o desnível pedido, temos:

$$\text{cossec } \alpha = \frac{16.400}{x} \Rightarrow 1.640 = \frac{16.400}{x} \therefore x = 10$$

30. **a.** $\cos 75° = \cos (45° + 30°) =$

$= \cos 45° \cdot \cos 30° - \text{sen } 45° \cdot \text{sen } 30° =$

$= \dfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{\sqrt{6}}{4} - \dfrac{\sqrt{2}}{4}$

Logo: $\cos 75° = \dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

b. $\text{sen } 15° = \text{sen } (45° - 30°) = \dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

c. Como $\text{tg } \dfrac{5\pi}{12}$ equivale a tg 75°, temos:

$\text{tg } 75° = \text{tg } (45° + 30°) = 2 + \sqrt{3}$

31. **a.** $\text{sen } 10° \cdot \cos 20° + \text{sen } 20° \cdot \cos 10° =$

$= \text{sen } (10° + 20°) = \text{sen } 30° = \dfrac{1}{2}$

b. $\cos 5° \cdot \cos 55° - \text{sen } 5° \cdot \text{sen } 55° =$

$= \cos (5° + 55°) = \cos 60° = \dfrac{1}{2}$

c. $\dfrac{\text{tg } \dfrac{\pi}{3} - \text{tg } \dfrac{\pi}{12}}{1 + \text{tg } \dfrac{\pi}{3} \cdot \text{tg } \dfrac{\pi}{12}} = \text{tg}\left(\dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{12}\right) =$

$= \text{tg } \left(\dfrac{3\pi}{12}\right) = \text{tg } \left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 1$

32. $\text{sen } \left(\dfrac{\pi}{4} + a\right) = \text{sen } \dfrac{\pi}{4} \cdot \cos a + \text{sen } a \cdot \cos \dfrac{\pi}{4}$

Aplicando a relação fundamental da Trigonometria:

$\text{sen}^2 a + \left(\dfrac{\sqrt{5}}{5}\right)^2 = 1 \Rightarrow \text{sen}^2 a + \dfrac{5}{25} = 1 \therefore \text{sen } a = \pm\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

Como $\dfrac{3\pi}{2} < a < 2\pi$, deduzimos que: $\text{sen } a = -\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

$\text{sen } \left(\dfrac{\pi}{4} + a\right) = \text{sen } \dfrac{\pi}{4} \cdot \cos a + \text{sen } a \cdot \cos \dfrac{\pi}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow \text{sen } \left(\dfrac{\pi}{4} + a\right) = -\dfrac{\sqrt{10}}{10}$

33. alternativa **c**

$\text{sen } \left(\theta + \dfrac{\pi}{6}\right) + \cos \left(\theta + \dfrac{\pi}{3}\right) = \text{sen } \theta \cos \dfrac{\pi}{6} +$

$+ \text{ sen } \dfrac{\pi}{6} \cos \theta + \cos \theta \cos \dfrac{\pi}{3} - \text{sen } \theta \text{ sen } \dfrac{\pi}{3} = \cos \theta$

34. **a.** $\text{sen } \left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$ e $\cos (\pi - x) = -\cos x$

Assim: $\text{sen } \left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) - \cos (\pi - x) = 1 \Rightarrow \cos x = \dfrac{1}{2}$

Para $0 \leqslant x < 2\pi$, o conjunto solução S é $S = \left\{\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{5\pi}{3}\right\}$

b. Em $\mathbb{R}$, o conjunto solução S da equação é dado por:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{3} + k \cdot 2\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$$

35. **a.** $\text{tg } (x + 60°) = \dfrac{\text{tg } x + \text{tg } 60°}{1 - \text{tg } x \cdot \text{tg } 60°} \Rightarrow \text{tg } (x + 60°) = -\dfrac{3\sqrt{3}}{5}$

b. $\text{tg } (x - 60°) = \dfrac{\text{tg } x - \text{tg } 60°}{1 + \text{tg } x \cdot \text{tg } 60°} \Rightarrow \text{tg } (x - 60°) = \dfrac{\sqrt{3}}{7}$

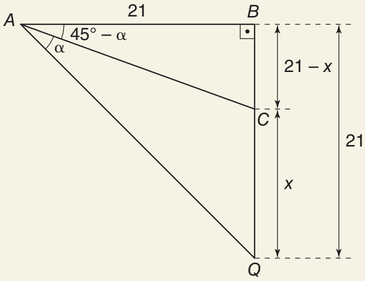
36. $\text{tg}(45° + \alpha) = \dfrac{2.000 + x}{2.000} \Rightarrow \dfrac{\text{tg } 45° + \text{tg } \alpha}{1 - \text{tg } 45° \cdot \text{tg } \alpha} = \dfrac{2.000 + x}{2.000}$

$\therefore \dfrac{1 + 0,2}{1 - 1 \cdot 0,2} = \dfrac{2.000 + x}{2.000} \Rightarrow x = 1.000$

37. $\text{tg } (\alpha + \beta) = \dfrac{\text{tg } \alpha + \text{tg } \beta}{1 - \text{tg } \alpha \cdot \text{tg } \beta} = \dfrac{\dfrac{3}{9} + \dfrac{3}{6}}{1 - \dfrac{3}{9} \cdot \dfrac{3}{6}} \Rightarrow \text{tg } (\alpha + \beta) = 1$

Como 0 < α + β < 180°, concluímos que: α + β = 45°.

38. Sendo x a distância CQ, em metro, esquematizamos:

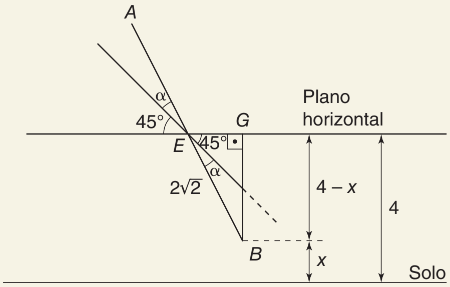


Do triângulo ABC, temos:

$\text{tg } (45° - \alpha) = \dfrac{21 - x}{21} \Rightarrow x = 12$

Concluímos, então, que a bola percorreu 12 m.

39. Indicando por x a distância, em metro, do ponto B ao solo, esquematizamos:



Do triângulo EBG, temos: $\text{sen } (45° + \alpha) = \dfrac{4 - x}{2}$

Logo, $\text{sen } 45° \cdot \cos \alpha + \text{sen } \alpha \cdot \cos 45° = \dfrac{4 - x}{2\sqrt{2}}$ (1)

É dado que sen α = 0,6. Assim:

$\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow (0{,}6)^2 + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \cos \alpha = \pm 0{,}8$

α é medida de um ângulo agudo, então, cos α = 0,8.

Retornando à equação (1), temos:

$\text{sen } 45° \cdot \cos \alpha + \text{sen } \alpha \cdot \cos 45° = \dfrac{4 - x}{2\sqrt{2}} \Rightarrow x = 1{,}2$

41. $\begin{cases} \text{sen } x = -\dfrac{5}{13} \\ \text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \end{cases} \Rightarrow \cos x = \pm\dfrac{12}{13}$

Como x pertence ao 3º quadrante, temos: $\cos x = -\dfrac{12}{13}$

Assim, concluímos que:

$\text{sen } 2x = 2 \cdot \text{sen } x \cdot \cos x = 2 \cdot \left(-\dfrac{5}{13}\right) \cdot \left(-\dfrac{12}{13}\right) = \dfrac{120}{169}$

$\cos 2x = \cos^2 x - \text{sen}^2 x = \left(-\dfrac{12}{13}\right)^2 - \left(-\dfrac{5}{13}\right)^2 = \dfrac{119}{169}$

ILUSTRAÇÕES: ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

42. $\text{tg } 2x = \dfrac{2 \text{ tg } x}{1 - \text{tg}^2 x} = \dfrac{2 \cdot 3}{1 - 3^2} = -\dfrac{6}{8} = -\dfrac{3}{4}$

43. $\text{tg } 2\alpha = \dfrac{x}{140} \Rightarrow \dfrac{2 \text{ tg } \alpha}{1 - \text{tg}^2 \alpha} = \dfrac{x}{140} \therefore x = 480$

44. alternativa **c**

$(\text{tg}10° + \text{cotg}10°) \cdot \text{sen } 20° =$

$= \left(\dfrac{\text{sen}10°}{\cos 10°} + \dfrac{\cos 10°}{\text{sen}10°}\right) \cdot \text{sen}20° =$

$= \left(\dfrac{\text{sen}^2 10° + \cos^2 10°}{\text{sen}10° \cdot \cos 10°}\right) \cdot 2 \cdot \text{sen}10° \cos 10° =$

$= \dfrac{1}{\text{sen}10° \cdot \cos 10°} \cdot 2 \cdot \text{sen}10° \cos 10 = 2$

45. $\cos x = \cos\left(2 \cdot \dfrac{x}{2}\right) = \cos^2 \dfrac{x}{2} - \text{sen}^2 \dfrac{x}{2} =$

$= \cos^2 \dfrac{x}{2} - \left(1 - \cos^2 \dfrac{x}{2}\right) = 2 \cos^2 \dfrac{x}{2} - 1 =$

$= 2 \cdot \left(\dfrac{3}{5}\right)^2 - 1 = -\dfrac{7}{25}$

46. $\cos x = \cos\left(2 \cdot \dfrac{x}{2}\right) = \cos^2 \dfrac{x}{2} - \text{sen}^2 \dfrac{x}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos x = \cos^2 \dfrac{x}{2} - \left(1 - \cos^2 \dfrac{x}{2}\right) \therefore \cos x = 2 \cos^2 \dfrac{x}{2} - 1$

Assim:

$\dfrac{1}{8} = 2 \cos^2 \dfrac{x}{2} - 1 \Rightarrow \cos^2 \dfrac{x}{2} = \dfrac{9}{16} \therefore \cos \dfrac{x}{2} = \pm\dfrac{3}{4}$

Como $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$, temos que, $0 < \dfrac{x}{2} < \dfrac{\pi}{4}$ e, portanto, $\cos \dfrac{x}{2}$ é positivo. Concluímos que $\cos \dfrac{x}{2} = \dfrac{3}{4}$.

47. **a.** $\text{sen } 2x = \cos x$

$2 \cdot \text{sen } x \cdot \cos x = \cos x \Rightarrow \cos x\,(2 \text{ sen } x - 1) = 0$

$\therefore \cos x = 0$ ou $2 \text{ sen } x - 1 = 0$

Resolvendo cada uma dessas equações no intervalo $[0, 2\pi[$, obtemos:

$\cos x = 0 \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{2}$ ou $x = \dfrac{3\pi}{2}$

$2 \text{ sen } x - 1 = 0 \Rightarrow \text{sen } x = \dfrac{1}{2} \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{6}$ ou $x = \dfrac{5\pi}{6}$

Logo: $S = \left\{\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{5\pi}{6}, \dfrac{3\pi}{2}\right\}$

b. $\cos 2x = \text{sen } x$

$1 - 2 \text{ sen}^2 x = \text{sen } x \Rightarrow 2 \text{ sen}^2 x + \text{sen } x - 1 = 0$

Fazendo a mudança de variável $\text{sen } x = y$, temos:

$2y^2 + y - 1 = 0$

$y = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 2 \cdot (-1)}}{2 \cdot 2} \therefore y = \dfrac{1}{2}$ ou $y = -1$

Assim: $\text{sen } x = \dfrac{1}{2}$ ou $\text{sen } x = -1$

Para determinar os de x, construa a circunferência trigonométrica e marque os pontos associados aos resultados das equações a seguir.

- Para $\text{sen } x = \dfrac{1}{2}$, temos $\pi - \dfrac{\pi}{6}$ e $\dfrac{\pi}{6}$.
- Para $\text{sen } x = -1$, temos $\dfrac{3\pi}{2}$.

Portanto: $x = \dfrac{\pi}{6}$ ou $x = \pi - \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{5\pi}{6}$ ou $x = \dfrac{3\pi}{2}$

Logo: $S = \left\{\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{5\pi}{6}, \dfrac{3\pi}{2}\right\}$

c. $\text{tg } 2x = -\text{tg } x$

Condição de existência: $|\text{tg } x \neq 1|$ e $\cos x \neq 0$

$\dfrac{2 \text{ tg } x}{1 - \text{tg}^2 x} = -\text{tg } x \Rightarrow \dfrac{2 \text{ tg } x + \text{tg } x - \text{tg}^3 x}{1 - \text{tg}^2 x} = 0$

$\therefore 2 \text{ tg } x + \text{tg } x - \text{tg}^3 x = 0 \Rightarrow 3 \text{ tg } x - \text{tg}^3 x = 0$

$\therefore \text{tg } x\,(3 - \text{tg}^2 x) = 0 \Rightarrow \text{tg } x = 0$ ou $3 - \text{tg}^2 x = 0$

Resolvendo cada uma dessas equações no intervalo $[0, 2\pi[$, obtemos:

$\text{tg } x = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $x = \pi$

$3 - \text{tg}^2 x = 0 \Rightarrow \text{tg}^2 x = 3 \Rightarrow \text{tg } x = \pm\sqrt{3}$

$\text{tg } x = \sqrt{3} \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{3}$ ou $x = \dfrac{4\pi}{3}$

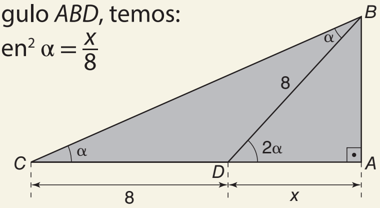
$\text{tg } x = -\sqrt{3} \Rightarrow x = \dfrac{2\pi}{3}$ ou $x = \dfrac{5\pi}{3}$

Logo: $S = \left\{0, \dfrac{\pi}{3}, \dfrac{2\pi}{3}, \pi, \dfrac{4\pi}{3}, \dfrac{5\pi}{3}\right\}$

48. O triângulo *BCD* é isósceles de base $\overline{CB}$; logo $CD = DB = 8$. Como o ângulo $B\hat{D}A$ é externo do triângulo *BCD*, temos que $m(B\hat{D}A) = \alpha + \alpha = 2\alpha$. Assim, sendo *x* a medida *DA*, do triângulo *ABD*, temos:

$\cos 2\alpha = \dfrac{x}{8} \Rightarrow 1 - 2 \text{ sen}^2 \alpha = \dfrac{x}{8}$

$\therefore x = 5$



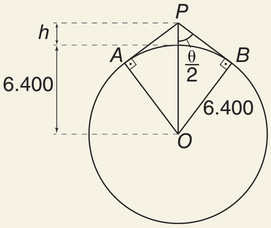
49. Sendo *h* a altura pedida, em metro, temos:

$$\begin{cases} \text{tg } \alpha = \dfrac{21}{28} \\ \text{tg } 2\alpha = \dfrac{h}{28} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{tg } \alpha = \dfrac{3}{4} \\ \dfrac{2 \text{ tg } \alpha}{1 - tg^2 \alpha} = \dfrac{h}{28} \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, obtemos: $h = 96$

50. alternativa **e**

Seja *h* a distância, em quilômetro, do ponto *P* à superfície da Terra. Como os triângulos *PAO* e *PBO* são congruentes, temos:



$$\begin{cases} \cos \theta = -0{,}62 & (1) \\ \text{sen } \dfrac{\theta}{2} = \dfrac{6.400}{h + 6.400} & (2) \end{cases}$$

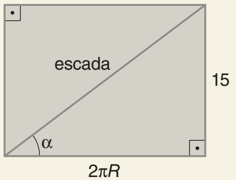
De (1), obtemos:

$\cos\left(2 \cdot \dfrac{\theta}{2}\right) = -0{,}62 \Rightarrow \text{sen } \dfrac{\theta}{2} = \pm 0{,}9$

Como $\dfrac{\theta}{2}$ é medida de um ângulo interno de um triângulo, deduzimos que $\text{sen } \dfrac{\theta}{2} = 0{,}9$. Substituindo $\text{sen } \dfrac{\theta}{2}$ por 0,9 em (2), obtemos: $0{,}9 = \dfrac{6.400}{h + 6.400} \Rightarrow h \approx 711$

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

1. Planificando a superfície lateral do reservatório, obtemos um retângulo cuja altura mede 15 m e base $2\pi R$, em que *R* é a medida do raio da base do cilindro.



$\text{tg } \alpha = \dfrac{15}{2\pi R} \qquad (1)$

Calculando tg α, temos:

$$\begin{cases} \text{sen } \alpha = \dfrac{3}{5} \\ \text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \end{cases} \Rightarrow \cos \alpha = \dfrac{4}{5}, \text{ para } 0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$$

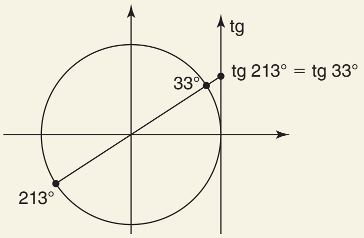
Assim: $\text{tg } \alpha = \dfrac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha} = \dfrac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \dfrac{3}{4} \qquad (2)$

Substituindo (2) em (1), obtemos: $\dfrac{3}{4} = \dfrac{15}{2\pi R} \Rightarrow R = \dfrac{10}{\pi}$

O raio da base do cilindro mede $\dfrac{10}{\pi}$ m ou $\approx 3{,}18$ m.

ILUSTRAÇÕES: ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

2. Os arcos trigonométricos de 33° e 213° têm extremidades simétricas em relação ao centro da circunferência e, portanto, os prolongamentos dos raios que passam por essas extremidades interceptam o eixo das tangentes no mesmo ponto. Logo: tg 213° = tg 33°

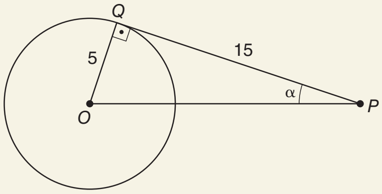


3. A medida do ângulo agudo $Q\hat{P}O$ é máxima quando $\overline{PQ}$ for tangente à circunferência. Assim, indicando por α essa medida máxima do triângulo retângulo *OPQ*, temos:

$$\text{tg}\ \alpha = \frac{5}{15} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{tg}\ \alpha = \frac{1}{3}$$

Como α é medida de um ângulo agudo, obtemos $\alpha \approx 18{,}435°$.



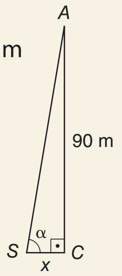
4. $\text{cotg}\ \alpha = \frac{1}{6} \Rightarrow \text{tg}\ \alpha = 6$; $\sec \beta = \frac{13}{12} \Rightarrow \cos \beta = \frac{12}{13}$

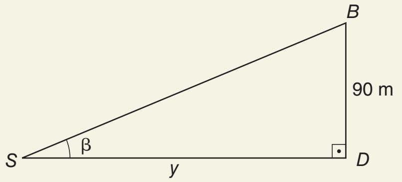
$$\begin{cases} \cos \beta = \frac{12}{13} \\ \text{sen}^2\ \beta + \cos^2\ \beta = 1 \end{cases} \Rightarrow \text{sen}\ \beta = \frac{5}{13}, \text{ para } 0° < \beta < 90°$$

Assim, temos: $\text{tg}\ \alpha = \frac{90}{x} \Rightarrow 6 = \frac{90}{x} \therefore x = 15$ m

$$\text{tg}\ \beta = \frac{90}{y} \Rightarrow \frac{\text{sen}\ \beta}{\cos \beta} = \frac{90}{y} \therefore \frac{5}{12} = \frac{90}{y} \Rightarrow y = 216 \text{ m}$$

Concluímos, então, que a distância *d* entre os navios é dada por: $d = y - x \Rightarrow d = 201$ m





5. Sabendo que $\sec \alpha = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adjacente a } \alpha}$ é chamado cateto adjacente de *LT*, temos:

$$390{,}625 = \frac{1{,}5 \cdot 10^8}{LT} \Rightarrow LT = 384.000$$

Portanto, a distância da Terra à Lua é 384.000 km.

6. a. Pela relação fundamental da Trigonometria, temos:

$$\left(\frac{12}{13}\right)^2 + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \cos x = \pm\sqrt{\frac{25}{169}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos x = -\frac{5}{13} \text{ ou } \cos x = \frac{5}{13} \text{ (não convém)}$$

Como $x + y = \frac{\pi}{4}$, então $y = \frac{\pi}{4} - x$; logo:

$$\cos y = \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \frac{7\sqrt{2}}{26}$$

b. Pela relação fundamental da Trigonometria, temos:

$$\text{sen}^2\ \alpha + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = 1 \Rightarrow \text{sen}\ \alpha = \pm\sqrt{\frac{6}{9}}$$

$$\text{sen}\ \alpha = \frac{\sqrt{6}}{3} \text{ ou } \text{sen}\ \alpha = -\frac{\sqrt{6}}{3} \text{ (não convém)}$$

Como $\alpha - \beta = \frac{\pi}{3}$, então $\beta = \alpha - \frac{\pi}{3}$; logo:

$$\text{sen}\ \beta = \text{sen}\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{6} - 3}{6}$$

c. Como $a - b = \frac{\pi}{6}$, então $b = \frac{\pi}{6} - a$; logo: $\text{tg}\ b = \text{tg}\left(\frac{\pi}{6} - a\right)$

$$\text{tg}\ b = \frac{\text{tg}\ \frac{\pi}{6} - \text{tg}\ a}{1 + \text{tg}\ \frac{\pi}{6} \cdot \text{tg}\ a} = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

7. alternativa **b**.

$$\frac{m}{n} = \frac{\text{sen}\ (\alpha + \beta) + \text{sen}\ (\alpha - \beta)}{\cos\ (\alpha + \beta) - \cos\ (\alpha - \beta)} \Rightarrow \frac{m}{n} =$$

$$= \frac{\text{sen}\ \alpha\ \cos \beta + \boxed{\text{sen}\ \beta\ \cos \alpha} + \text{sen}\ \alpha\ \cos \beta \boxed{-\ \text{sen}\ \beta\ \cos \alpha}}{\cos \alpha\ \cos \beta - \text{sen}\ \alpha\ \text{sen}\ \beta - (\cos \alpha\ \cos \beta + \text{sen}\ \alpha\ \text{sen}\ \beta)}$$

$$\frac{m}{n} = \frac{2\ \text{sen}\ \alpha\ \cos \beta}{\boxed{\cos \alpha\ \cos \beta} - \text{sen}\ \alpha\ \text{sen}\ \beta \boxed{-\cos \alpha\ \cos \beta} - \text{sen}\ \alpha\ \text{sen}\ \beta} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{m}{n} = \frac{\boxed{2}\ \boxed{\text{sen}\ \alpha} \cos \beta}{-\boxed{2}\ \boxed{\text{sen}\ \alpha}\ \text{sen}\ \beta} \therefore \frac{m}{n} = -\text{cotg}\ \beta$$

8. Os triângulos *ABC* e *ABD* são retângulos em *C* e *D*, respectivamente, por estarem inscritos em uma semicircunferência de diâmetro $\overline{AB}$. Como *AC* = *BC*, temos que o triângulo retângulo *ABC* é isósceles de base $\overline{AB}$; portanto, cada um dos ângulos $C\hat{A}B$ e $C\hat{B}A$ mede 45°. Assim, do triângulo *ABD*, temos:

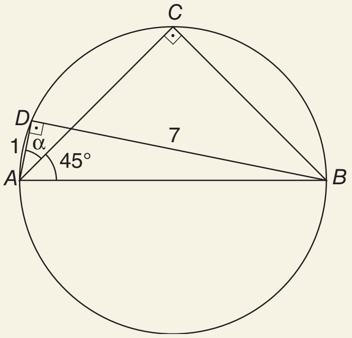
$$\text{tg}\ (\alpha + 45°) = \frac{7}{1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\text{tg}\ \alpha + \text{tg}\ 45°}{1 - \text{tg}\ \alpha \cdot \text{tg}\ 45°} = 7$$

$$\therefore \frac{\text{tg}\ \alpha + 1}{1 - \text{tg}\ \alpha} = 7 \Rightarrow \text{tg}\ \alpha =$$

$$= \frac{3}{4} = 0{,}75$$

Com o auxílio da calculadora, concluímos que: $\alpha \approx 36{,}87°$

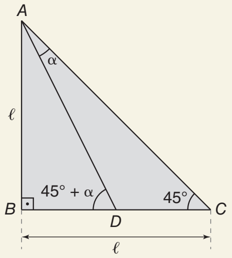


FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

9. Sejam ℓ a medida de cada cateto do triângulo *ABC* e α a medida do menor ângulo interno do triângulo *ADC*. Cada ângulo agudo do triângulo retângulo isósceles *ABC* mede 45°; logo, o ângulo $A\hat{D}B$ mede 45° + α, pois é externo do triângulo *ADC*.

Como os triângulos *ABD* e *ADC* têm a mesma área e *BC* = ℓ, temos:

$$\begin{cases} \frac{BD \cdot \ell}{2} = \frac{DC \cdot \ell}{2} \\ BD + DC = \ell \end{cases} \Rightarrow BD = DC = \frac{\ell}{2}$$



Assim:

$$\text{tg}\ (45° + \alpha) = \frac{\ell}{\frac{\ell}{2}} \Rightarrow \frac{\text{tg}\ 45° + \text{tg}\ \alpha}{1 - \text{tg}\ 45° \cdot \text{tg}\ \alpha} = 2 \therefore \text{tg}\ \alpha = \frac{1}{3}$$

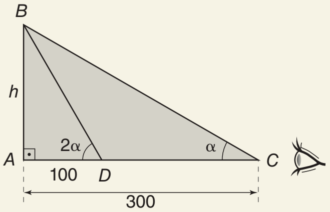
Logo, a tangente do menor ângulo interno do triângulo *ADC* é $\frac{1}{3}$.

10. Sendo *h* a distância entre o topo da torre e o plano que contém o ponto *C* no qual se localiza o olho da pessoa, temos:

a. $\begin{cases} \text{tg}\ \alpha = \frac{h}{300} \\ \text{tg}\ 2\alpha = \frac{h}{100} \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \text{tg}\ 2\alpha = 3\ \text{tg}\ \alpha$$

$$\therefore \frac{2\ \text{tg}\ \alpha}{1 - \text{tg}^2\ \alpha} = 3\ \text{tg}\ \alpha$$



ILUSTRAÇÕES: ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

Como tg α ≠ 0, podemos dividir ambos os membros por tg α, obtendo:

$$\frac{2}{1-\text{tg}^2\ \alpha}=3 \Rightarrow \text{tg}\ \alpha=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

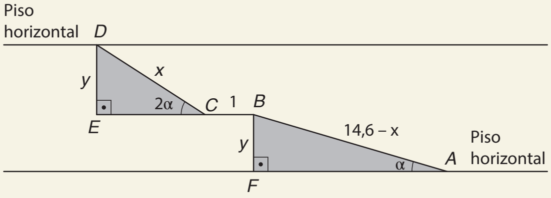
Como α é medida de um ângulo agudo, concluímos que:

$$\text{tg}\ \alpha=\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \alpha=30°$$

b. $\text{tg}\ 30°=\frac{h}{300} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{h}{300}\ \therefore h=100\sqrt{3}$

A altura da torre é $\left(100\sqrt{3}+1,6\right)$ m ou ≈ 174,8 m.

11. Indicando por x a medida, em metro, do comprimento CD e por y a altura, em metro, do patamar $\overline{BC}$ em relação ao piso inferior, esquematizamos:



Dos triângulos CDE e ABF, temos:

$$\begin{cases}\text{sen}\ 2\alpha=\frac{y}{x}\\ \text{sen}\ \alpha=\frac{y}{14,6-x}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}y=x\ \text{sen}\ 2\alpha\\ y=(14,6-x)\ \text{sen}\ \alpha\end{cases}$$

Assim, x sen 2α = (14,6 – x) sen α ⇒

⇒ $x \cdot 2\ \text{sen}\ \alpha\ \cos\alpha=(14,6-x)\ \text{sen}\ \alpha$

Observando que sen α ≠ 0, pois α é medida de um ângulo agudo, podemos dividir ambos os membros da igualdade anterior por sen α, obtendo:

$$x\cdot 2\cos\alpha=14,6-x \Rightarrow \cos\alpha=\frac{14,6-x}{2x}$$

Como cos α = 0,96, temos:

$$0,96=\frac{14,6-x}{2x} \Rightarrow 1,92x=14,6-x$$

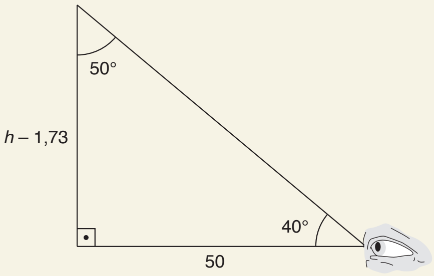
$\therefore 2,92x=14,6 \Rightarrow x=5$

Concluímos, então, que as rampas $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ medem, respectivamente, 9,6 m e 5 m.

MATEMÁTICA SEM FRONTEIRAS

1. Sejam A o ponto de intersecção das retas r e s, suportes da linha de prumo da linha de fé, respectivamente, e B e C os pontos em que essas retas interceptam o terreno. Pelo teorema da soma dos ângulos internos, concluímos que o ângulo agudo $A\hat{C}B$ mede 40°.

2. Esquematizando a situação, temos:



Assim, obtemos: $\text{tg}\ 40°=\frac{h-1,73}{50}$

Com o auxílio de uma calculadora, concluímos que:

$$\text{tg}\ 40°=\frac{h-1,73}{50} \Rightarrow 0,84 \approx \frac{h-1,73}{50}\ \therefore h \approx 43,73$$

Logo, a altura do edifício é, aproximadamente, 43,73 m.

ILUSTRAÇÕES: NEIDE TOYOTA/ARQUIVO DA EDITORA

VERIFIQUE O QUE APRENDEU NO CAPÍTULO 4

1. alternativa **a**

$$E=\frac{\text{tg}\ 60°+\text{tg}\ 150°-\text{tg}\ 180°}{\text{tg}\ 210°-\text{tg}\ 300°}=\frac{1}{2}$$

2. alternativa **c**

$$\text{tg}\ \alpha=\frac{3}{4} \Rightarrow \text{sen}\ \alpha=\frac{3\cos\alpha}{4}$$

$$\begin{cases}\text{sen}\ \alpha=\frac{3\cos\alpha}{4}\\ \text{sen}^2\ \alpha+\cos^2\alpha=1\end{cases} \Rightarrow \cos\alpha=\frac{4}{5},\ \text{para}\ 0<\alpha<\frac{\pi}{2}$$

Assim: $\text{sen}\ \alpha=\frac{3\cos\alpha}{4}=\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}=\frac{3}{5}$

Logo, $\text{sen}\ \alpha=\frac{3}{5}$ e $\cos\alpha=\frac{4}{5}$.

3. alternativa **e**

$$\begin{cases}\text{cotg}x=2\\ \text{sen}^2x+\cos^2x=1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\frac{\cos x}{\text{sen}x}=2\\ \text{sen}^2x+\cos^2x=1\end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases}\cos x=2\text{sen}x\\ \text{sen}^2\ x+\cos^2\ x=1\end{cases}$$

Resolvendo o sistema, obtemos $\text{sen}x=\pm\frac{\sqrt{5}}{5}$.

Como a extemidade do arco de medida x pertence ao terceiro quadrante, deduzimos que sen$x$ é negativo.

Substituindo: sen$x$ por $-\frac{\sqrt{5}}{5}$, temos que $\cos x=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$

Como $\sec x=\frac{1}{\cos x}$, concluímos que: $\sec x=-\frac{\sqrt{5}}{2}$

4. alternativa **d**

$(AC)^2+3^2=5^2 \Rightarrow AC=4$

Sendo x a distância procurada, temos:

$$\text{sen}\ 2\alpha=\frac{x}{5} \Rightarrow 2\cdot\text{sen}\ \alpha\cdot\cos\alpha=\frac{x}{5} \Rightarrow 2\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{5}=\frac{x}{5}$$

$\therefore x=4,8$ cm

CAPÍTULO 5 Funções trigonométricas e resolução de triângulos

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

2. a. Verdadeira, conforme justificativa a seguir.

$f(0)=4+2\ \text{sen}\ 0$, portanto $f(0)=4$.

b. Falsa, conforme justificativa a seguir.

$f(-x)=4+2\ \text{sen}\ (-x)=4-2\ \text{sen}\ x$, portanto, $f(x)\neq f(-x)$.

c. Verdadeira, conforme justificativa a seguir.

Para todo número real x, temos: $-1\leqslant \text{sen}\ x\leqslant 1$.

Dessa desigualdade, deduzimos:

$-1\leqslant \text{sen}\ x\leqslant 1 \Rightarrow -2\leqslant 2\ \text{sen}\ x\leqslant 2$

$$\therefore 2\leqslant \underbrace{4+2\ \text{sen}\ x}_{f(x)}\leqslant 6 \Rightarrow 2\leqslant f(x)\leqslant 6$$

Logo, o valor máximo da função f é 6.

d. Falsa, pois, pelo item **c**, temos que o valor mínimo de f é 2.

Logo, os valores de x para que f assuma seu valor mínimo são as raízes da equação $f(x)=2$. Assim:

$4+2\ \text{sen}\ x=2 \Rightarrow \text{sen}\ x=-1$

$\therefore x=\frac{3\pi}{2}+k\cdot 2\pi$, com $k\in Z$.

e. Falsa, pois a equação $f(x)=0$ não possui raiz real, pois o valor mínimo de f é 2, como se pode constatar na resolução do item **c**.

3. a. Sabemos que $-1 \leqslant \text{sen } 5x \leqslant 1$. Adicionando k a ambos os membros dessa desigualdade, chegamos a:

$-1 + k \leqslant f(x) \leqslant 1 + k$

Assim, deduzimos que o valor mínimo e o valor máximo da função f são $-1 + k$ e $1 + k$, respectivamente. Como o valor mínimo é -3, concluímos que $k = -2$.

b. No item **a**, deduzimos que o valor mínimo e o valor máximo da função f são $-1 + k$ e $1 + k$, respectivamente, e que $k = -2$. Assim, o valor máximo de f é dado por $1 + (-2) = -1$.

4. a. Como $-1 \leqslant \text{sen } x \leqslant 1$, a igualdade existe se, e somente se:

$-1 \leqslant 6m - 5 \leqslant 1 \Rightarrow \frac{2}{3} \leqslant m \leqslant 1$

b. Para qualquer valor real de x, temos que $-1 \leqslant \text{sen } x \leqslant 1$. Assim, a equação $\text{sen } x = 5 - 2k$, na variável x, não admite solução se, e somente se: $5 - 2k > 1$ ou $5 - 2k < -1$, ou seja, $k < 2$ ou $k > 3$.

c. Para qualquer valor real de x, temos que $0 \leqslant |\text{sen } x| \leqslant 1$. Assim, a equação $|\text{sen } x| = \frac{2p + 1}{3}$, na variável x, admite solução se, e somente se: $0 \leqslant \frac{2p + 1}{3} \leqslant 1$. Resolvendo essa inequação, temos:

$0 \leqslant \frac{2p + 1}{3} \leqslant 1 \Rightarrow -\frac{1}{2} \leqslant p \leqslant 1$

5. a. Para $t = 6$, temos:

$S(6) = 100 + 50 \text{ sen } \left(\frac{\pi \cdot 6}{6}\right) \Rightarrow S(6) = 100$

b. O valor máximo, S_M, da função S é atingido quando $\text{sen } \left(\frac{\pi t}{6}\right) = 1$.

$S_M = 100 + 50 \cdot 1 \Rightarrow S_M = 150$

c. $\text{sen } \left(\frac{\pi t}{6}\right) = 1 \Rightarrow \frac{\pi t}{6} = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$

$\therefore t = 3 + 12k$; Para $k = 0$, temos $t = 3$. Logo, a vegetação atinge a maior área no mês de março.

d. O valor mínimo, S_M, da função S é atingido quando $\text{sen } \left(\frac{\pi t}{6}\right) = -1$.

$S_M = 100 + 50 \cdot (-1) \Rightarrow S_M = 50$

e. $\text{sen } \left(\frac{\pi t}{6}\right) = -1 \Rightarrow \frac{\pi t}{6} = \frac{3\pi}{2} + k \cdot 2s$, com $k \in \mathbb{Z}$

$\therefore t = 9 + 12k$; Para $k = 0$, temos $t = 9$. Logo, a vegetação atinge a menor área em setembro.

f. $125 = 100 + 50 \text{ sen } = \frac{\pi t}{6} \Rightarrow \text{sen } \frac{\pi t}{6} = \frac{1}{2}$

$\therefore \frac{\pi t}{6} = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi$ ou $\frac{\pi t}{6} = \frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$

$\therefore t = 1 + 12k$ ou $t = 5 + 12k$, com $k \in \mathbb{Z}$

Para $k = 0$, obtemos $t = 1$ ou $t = 5$. Assim, concluímos que a vegetação atinge 125 km^2 em janeiro e maio.

6. f. Como a função envolve módulo, inicialmente construímos o gráfico da função $q(x) = \cos 2x$. Conservando os pontos de ordenadas não negativas do gráfico da função g, e transformando os pontos de ordenadas negativas em seus simétricos em relação ao eixo Ox, obtemos o gráfico da função $t(x) = |\cos 2x|$:

g. O gráfico da função $v(x) = -|\cos 2x|$ é obtido pela reflexão, em relação ao eixo Ox, do gráfico do item **f**. O gráfico da função r é obtido por uma translação vertical de 2 unidades para cima do gráfico da função v do item anterior.

7. a. Para qualquer valor real de x, temos que $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$. Dessa desigualdade, deduzimos:

$-1 \leqslant \cos x \leqslant 1 \Rightarrow 3 \leq -3 \cos x \geqslant -3$

$\therefore 5 \geqslant 2 - 3 \cos x \geqslant -1 \Rightarrow 5 \geqslant f(x) \geqslant -1$

Concluímos, então, que o máximo valor de f é 5.

b. Para qualquer valor real de x, temos que $-1 \leqslant \cos 2x \leqslant 1$. Dessa desigualdade, deduzimos:

$-1 \leqslant \cos 2x \leqslant 1 \Rightarrow -5 \leqslant 5 \cos 2x \leqslant 5$

$\therefore -8 \leqslant -3 + 5 \cos 2x \leqslant 2 \Rightarrow -8 \leqslant g(x) \leqslant 2$

Assim, o valor mínimo de g é -8.

Devemos determinar o menor valor real positivo de x tal que $g(x) = -8$. Temos:

$g(x) = -8 \Rightarrow -3 + 5 \cos 2x = -8$

$\therefore \cos 2x = -1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$

Para $k = 0$, obtemos o menor valor real positivo x.

Concluímos, então, que o menor valor real positivo de x para que a função g assuma seu valor mínimo é $\frac{\pi}{2}$.

c. Para qualquer valor real de x, temos que $0 \leqslant \cos^2 x \leqslant 1$.

Dessa desigualdade, deduzimos:

$0 \leqslant \cos^2 x \leqslant 1 \Rightarrow 0 \leqslant 2k - 6 \leqslant 1$

$\therefore 6 \leqslant 2k \leqslant 7 \Rightarrow 3 \leqslant k \leqslant \frac{7}{2}$

8. alternativa **c**

Construindo os gráficos das funções $y = \cos x$ e $y = |x|$, no mesmo plano cartesiano, constatamos que eles têm exatamente dois pontos distintos em comum. Assim, concluímos que a equação $\cos x = |x|$ possui apenas duas raízes reais e distintas.

9. a. Para qualquer valor de t, temos que:

$-1 \leqslant \cos \left(\frac{8\pi t}{3}\right) \leqslant 1$. Dessa desigualdade, deduzimos:

$-1 \leqslant \cos \left(\frac{8\pi t}{3}\right) \leqslant 1 \Rightarrow 20 \geqslant -20 \cos \left(\frac{8\pi t}{3}\right) \geqslant -20$

$\therefore 120 \geqslant 100 - 20 \cos \left(\frac{8\pi t}{3}\right) \geqslant 80 \Rightarrow 120 \geqslant P(t) \geqslant 80$

Concluímos, então, que a pressão sistólica (máxima) foi de 120 mmHg e a diastólica (mínima) foi de 80 mmHg.

b. Devemos determinar o menor valor positivo t de modo que $P(t) = 120$. Temos:

$P(t) = 120 \Rightarrow 100 - 20 \cos \left(\frac{8\pi t}{3}\right) = 120$

$\therefore \cos \left(\frac{8\pi t}{3}\right) = -1 \Rightarrow \frac{8\pi t}{3} = \pi + k \cdot 2\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$

$\therefore t = \frac{3 + 6k}{8}$, com $k \in \mathbb{Z}$

O menor valor positivo de t é obtido para $k = 0$, ou seja:

$t = \frac{3 + 6 \cdot 0}{8} \Rightarrow t = 0{,}375$

10. O ponto (0, 4) pertence ao gráfico de f; assim:

$f(0) = 4 \Rightarrow 4 = a + 2 \text{ sen } (m \cdot 0) \therefore a = 4$

Pelo gráfico, observamos que o período da função f é 4π; assim: $\frac{2\pi}{|m|} = 4\pi \Rightarrow |m| = \frac{1}{2} \therefore m = \pm\frac{1}{2}$

(1) Para $m = \frac{1}{2}$, temos $f(x) = 4 + 2 \text{ sen } \frac{x}{2}$

(2) Para $m = -\frac{1}{2}$, temos $f(x) = 4 - 2 \text{ sen } \frac{x}{2}$

Como o ponto $(\pi, 2)$ pertence ao gráfico de f, temos:

De (1): $2 = 4 + 2 \text{ sen } \frac{\pi}{2}$, que é uma sentença falsa; logo, m não pode ser $\frac{1}{2}$. De (2): $2 = 4 - 2 \text{ sen } \frac{\pi}{2}$, que é uma sentença verdadeira; logo, $m = -\frac{1}{2}$. Concluímos, então, que $a = 4$ e $m = -\frac{1}{2}$

11. A distância d é o período da função $f(x) = 5\cos\frac{x}{2}$, ou seja:

$$d = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}}\text{ cm} = 4\pi\text{ cm}$$

A altura h é o comprimento do intervalo $[-5, 5]$ ou seja: $h = 10$ cm

12. Primeiro, calculamos o valor m:

O período de f é 364; logo: $\frac{2\pi}{|m|} = 364 \Rightarrow m = \pm\frac{\pi}{182}$

Como m deve ser positivo, segundo o enunciado, deduzimos que $m = \frac{\pi}{182}$. Assim: $f(x) = a + \cos\left(\frac{\pi x}{182} + q\right)$

Em seguida, vamos calcular os valores a e b.

Sabemos que: $-1 \leqslant \cos\left(\frac{\pi x}{182} + q\right) \leqslant 1$

Multiplicando os membros dessa desigualdade pela constante positiva b e adicionando a também aos membros dessa desigualdade, obtemos:

$a - b \leqslant a + b\cos\left(\frac{\pi x}{182} + q\right) \leqslant a + b$, ou seja,

$a - b \leqslant f(x) \leqslant a + b$

Logo, os valores mínimo e máximo de f são $a - b$ e $a + b$, respectivamente. Assim, temos:

$$\begin{cases} a - b = 30.000 \\ a + b = 90.000 \end{cases} \Rightarrow a = 60.000 \text{ e } b = 30.000$$

Calculando o valor q.

O gráfico passa pelo ponto (183, 90.000); logo:

$$f(183) = 90.000 \Rightarrow 60.000 + 30.000\cos\left(\frac{183\pi}{182} + q\right) = 90.000$$

$$\therefore \cos\left(\frac{183\pi}{182} + q\right) = 1 \Rightarrow \frac{183\pi}{182} + q = k \cdot 2\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}$$

Ou seja: $q = -\frac{183\pi}{182} + k \cdot 2\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$

Como q deve ser o menor número positivo possível, obtemos q para $k = 1$:

$q = -\frac{183\pi}{182} + 2\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$

$q = \frac{181\pi}{182}$, obtido quando $k = 1$

Concluímos, então, que: $a = 60.000$, $b = 30.000$,

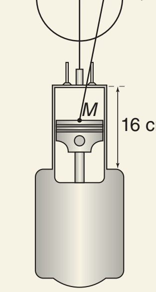
$m = \frac{\pi}{182}$ e $q = \frac{181\pi}{182}$

13. alternativa **c**

O veículo completa 10 voltas por hora, ou seja, 20π rad por hora. Indicando por α a medida em radiano de um arco percorrido em um tempo t, em hora, por meio de uma regra de três obtemos que $\alpha = 20\pi t$; logo:

$x(t) = 1{,}6\cos(20\pi t)$ e $y(t) = 1{,}6\,\text{sen}\,(20\pi t)$

14. alternativa **d**



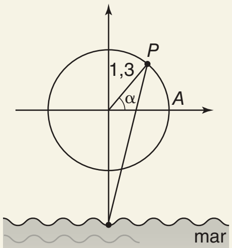
Vamos imaginar uma circunferência de diâmetro 16 cm com o centro na origem de um sistema cartesiano tal que, quando um ponto P gira no sentido anti-horário na circunferência, uma haste rígida MP acompanha o movimento do pistão, conforme mostra a figura.

A medida α, em radiano, é dada em função do tempo t, em minuto, e, por meio de uma regra de três obtemos $\alpha = 120\pi t$

Como a altura da tampa do pistão, em relação à base, é dada pela ordenada do ponto P, a função procurada é: $f(t) = 8\,\text{sen}\,120\pi t$

ILUSTRAÇÕES: NEIDE TOYOTA/ARQUIVO DA EDITORA

15. Imaginemos, em um plano vertical, uma circunferência de raio 1,3 m, acima do nível do mar, e uma haste rígida ligando um ponto P da circunferência a um ponto do nível do mar, no prolongamento do eixo Oy, conforme mostra a figura.



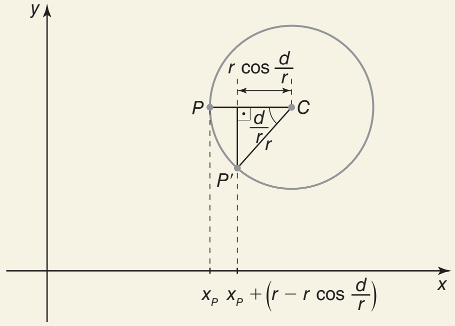
O subir e descer da maré, como um imenso pistão, provoca um movimento circular do ponto P. Supondo esse movimento circular com velocidade constante e no sentido anti-horário, calculamos, por meio de uma regra de três, a medida α do arco $\widehat{AP}$, em função do horário t, em hora, com $0 \leqslant t \leqslant 24$, em que $t = 2$ corresponda a um instante em que P passou pelo ponto $A(1{,}3; 0)$. Assim:

$$\alpha = \frac{\pi(t-2)}{6}$$

Logo, a ordenada do ponto P no instante t, em hora, é dada pela função: $f(t) = 1{,}3\,\text{sen}\,\frac{\pi(t-2)}{6}$

16. alternativa **b**

Sendo C o centro da circunferência e P' a posição final do ponto P, o ângulo central $P\hat{C}P'$ mede $\frac{d}{r}$ rad. Sendo x_P a abscissa do ponto P em sua posição inicial, a abscissa de P' é $x_P + \left(r - r\cos\frac{d}{r}\right)$, conforme mostra o esquema:



MARIO MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Logo, a distância percorrida pelo ponto Q é dada por:

$$x_P + \left(r - r\cos\frac{d}{r}\right) - x_P = r - r\cos\frac{d}{r} = r\left(1 - \cos\frac{d}{r}\right)$$

18. **a.** $x^2 = 5^2 + 8^2 - 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \cos 60° \Rightarrow x = 7$

b. $x^2 = 6^2 + 10^2 - 2 \cdot 6 \cdot 10 \cdot \cos 120° \Rightarrow x = 14$

c. $(10\sqrt{5})^2 = x^2 + (10\sqrt{2})^2 - 2 \cdot x \cdot 10\sqrt{2} \cdot \cos 135° \Rightarrow$

$\Rightarrow 500 = x^2 + 200 + 20x \Rightarrow x^2 + 20x - 300 = 0$

$\therefore x = 10$ ou $x = -30$ (não convém)

19. Observe que a resultante $\vec{F}$ dessas forças é representada pela diagonal $\overline{PL}$ do paralelogramo $PQLM$ (figura 1).

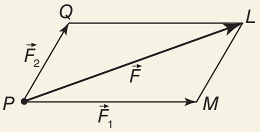


Figura 1

Como dois ângulos consecutivos quaisquer de um paralelogramo são suplementares e $Q\hat{P}M$ mede 60°, deduzimos que $P\hat{Q}L$ mede 120° (figura 2).

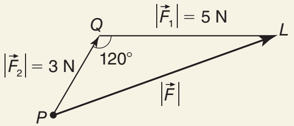


Figura 2

FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

Pela lei dos cossenos, temos:

$$|\vec{F}|^2 = |\vec{F}_1|^2 + |\vec{F}_2|^2 - 2|\vec{F}_1||\vec{F}_2|\cos 120° \Rightarrow$$

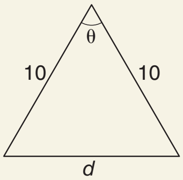
$$\Rightarrow |\vec{F}_1|^2 = 5^2 + 3^2 - 2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot \cos 120° \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\vec{F}_1|^2 = 25 + 9 - 30 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow |\vec{F}_1|^2 = 49 \Rightarrow |\vec{F}| = 7$$

ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

20. a. O maior ângulo opõe-se ao maior lado. Indicando por α a medida desse ângulo, temos:
$7^2 = 4^2 + 5^2 - 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = -\frac{1}{5}$

21. a. Para a medida θ do ângulo de abertura, esquematizamos:



Assim, pela lei dos cossenos, temos:
$d^2 = 10^2 + 10^2 - 2 \cdot 10 \cdot 10 \cdot \cos\theta \Rightarrow$
$\Rightarrow d^2 = 200 - 200\cos\theta$
$\therefore d = 10\sqrt{2(1-\cos\theta)}$

b. Fazendo $\theta = 60°$ na função d obtida no item **a**, temos:
$d = 10\sqrt{2(1-\cos 60°)} \Rightarrow d = 10\sqrt{1} \Rightarrow d = 10$

c. A distância máxima entre as pontas do compasso é obtida com a abertura máxima entre as hastes. Assim, fazendo $\theta = 120°$ na função d obtida no item **a**, temos:
$d = 10\sqrt{2(1-\cos 120°)} \Rightarrow d = 10\sqrt{3}$

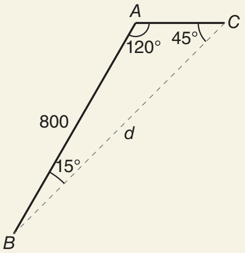
d. O raio da circunferência é a distância d entre as hastes do compasso. A medida d, em centímetro, é dada por:
$2\pi \cdot d = 20\pi \Rightarrow d = 10$
Assim, pelo item **b**, concluímos que a medida θ da abertura entre as hastes deve ser de 60°.

23. Como soma das medidas dos ângulos interno de um triângulo é 180°, é possível determinar que o ângulo oposto a x mede 30° e pela lei dos senos, temos:
$\frac{x}{\text{sen } 30°} = \frac{6}{\text{sen } 45°} \Rightarrow x = 3\sqrt{2}$

24. alternativa **d**

Aplicando a lei dos senos, temos:
$\frac{3}{\text{sen } 30°} = \frac{4}{\text{sen } \alpha} \Rightarrow \text{sen } \alpha = \frac{2}{3}$
Pela relação fundamental da Trigonometria, temos:
$\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \cos\alpha = \pm\sqrt{\frac{5}{9}}$
Como o ângulo é obtuso, ele está no segundo quadrante; logo: $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}$

25. Pelo teorema da soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo, $m(A\hat{C}B) = 45°$.



Sendo d a medida pedida, temos, pela lei dos senos:
$\frac{d}{\text{sen } 120°} = \frac{800}{\text{sen } 45°} \Rightarrow$
$\Rightarrow d = 400\sqrt{6} \approx 980$

26. O ângulo inscrito $A\hat{C}B$ mede 60° e $AB = 12$ cm, logo, pela lei dos senos, temos: $\frac{AB}{\text{sen } 60°} = 2r \therefore r = 4\sqrt{3}$

28. a. $A = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 5\sqrt{3} \cdot \text{sen } 60° \Rightarrow A = 15$

b. $A = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 4 \cdot \text{sen } 150° \Rightarrow A = 5$

29. Sendo α a medida do ângulo $B\hat{A}C$, temos:
$\frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 10 \cdot \text{sen } \alpha = 20 \Rightarrow \text{sen } \alpha = \frac{1}{2}$
$\therefore \alpha = 30°$ ou $\alpha = 150°$

30. Calculando a área A_s do setor circular AOB:

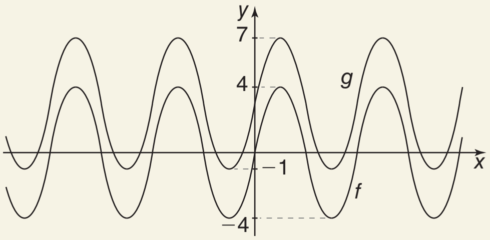
Medida do ângulo central (grau)	**Área (cm²)**
360	$\pi \cdot 6^2$
120	A_s

$\Rightarrow A_s = 12\pi$

Calculando a área A_t do triângulo AOB:
$A_t = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot \text{sen } 120° \Rightarrow A_t = 9\sqrt{3}$
Portanto, a área A pedida é dada por:
$A = A_s - A_t = (12\pi - 9\sqrt{3}) = 3(4\pi - 3\sqrt{3})$
Logo, a área da região pedida é $3(4\pi - 3\sqrt{3})$ cm².

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

1. Construindo os gráficos de f e g, temos:



Portanto, a largura h, em metro, da calçada é dada por:
$h = 7 - (-4) = 11$; Logo, a largura da calçada é 11 m.

2. alternativa **d**

No mês de produção máxima, o preço assume seu valor mínimo. Como a função P assume seu valor mínimo quando $\cos\left(\frac{\pi x - \pi}{6}\right) = -1$, temos:
$\frac{\pi x - \pi}{6} = \pi + k \cdot 2\pi$ com $k \in \mathbb{Z}$, ou seja,
$x = 7 + 12k$, com $k \in \mathbb{Z}$
Como x é um número natural, com $1 \leqslant x \leqslant 12$, o único valor possível de k é 0, para o qual temos $x = 7$.
Concluímos, então, que o mês de produção máxima desse produto é julho.

3. alternativa **d.**

O gráfico pode ser aproximado por uma função do tipo $f(t) = |\text{sen } (mt)|$.
Pelo item **b** do exercício anterior, o período da função é $\frac{1}{2}$; logo:
$\frac{\pi}{|m|} = \frac{1}{2} \Rightarrow m = \pm 2\pi$
Uma aproximação possível é $f(t) = |\text{sen } (2st)|$.

4. a. Como ocorrem 10 batidas a cada 5 segundos, então há 120 batidas a cada 60 segundos, ou seja, 120 bpm.

b. O gráfico se repete a cada $\frac{1}{2}$ segundo; logo, o período da função é $\frac{1}{2}$.

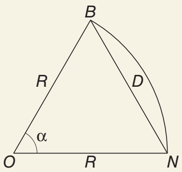
5. a. Pelo enunciado, temos que o período é 0,2 m. A velocidade de propagação é equivalente ao espaço de um ciclo dividido por seu tempo, logo:
$v = \frac{0{,}2}{2{,}5 - 0{,}5} = \frac{0{,}2}{2} = 0{,}1$

b. A velocidade da rolha é nula quando ela alcança a crista (ponto mais alto) ou o vale (ponto mais baixo) da onda, assim, os instantes em que a velocidade da rolha é nula são: t = 0,5, t = 1,5, t = 2,5 e t = 3,5.

6. a. Indicando por c o comprimento do arco $\overset{\frown}{NB}$, em quilômetro, temos: $1{,}09 = \frac{c}{6.378} \Rightarrow c = 6.952{,}02$

b. Indicando por D a medida, em quilômetro, do segmento de reta $\overset{\frown}{NB}$, temos, pelo teorema dos cossenos e substituindo R por 6.378 e α por 1,09:

ILUSTRAÇÕES: NEIDE TOYOTA/ARQUIVO DA EDITORA



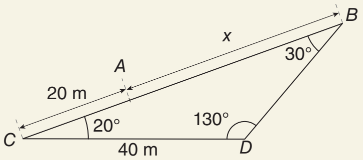
$D^2 = R^2 + R^2 - 2 \cdot R \cdot R \cdot \cos \alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow D \approx 6.613$

7. $\dfrac{20 + x}{\text{sen } 130°} = \dfrac{40}{\text{sen } 30°} \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{20 + x}{0{,}76} = \dfrac{40}{0{,}5}$

$\therefore x = 40{,}8$



8. Indicando por S_1 e S_2 as áreas dos triângulos *ABC* e *ACD*, respectivamente, a área *S* do terreno, em metro quadrado, é dada por: $S = S_1 + S_2$

$S = \dfrac{1}{2} \cdot 860 \cdot 900 \cdot \text{sen } 38° + \dfrac{1}{2} \cdot 900 \cdot 980 \cdot \text{sen } 65°$

Com o auxílio de uma calculadora científica, obtemos os valores aproximados: sen 38° = 0,61566 e sen 65° = 0,90631

Assim, concluímos que:

$S = \dfrac{1}{2} \cdot 860 \cdot 900 \cdot 0{,}61566 + \dfrac{1}{2} \cdot 900 \cdot 980 \cdot 0{,}90631$

$\therefore S = 637.943{,}13$

9. A área A_{seg} do segmento circular é a soma da área A_t do triângulo *OAB* com a área A_{set} do setor circular *OAMB*.

- Cálculo da área, em centímetro quadrado, do triângulo *OAB*:

  $A_t = \dfrac{1}{2} \cdot 8 \cdot 8 \cdot \text{sen } 150° \Rightarrow \therefore A_t = 16$

- Cálculo da área, em centímetro quadrado, do setor *OAMB*:

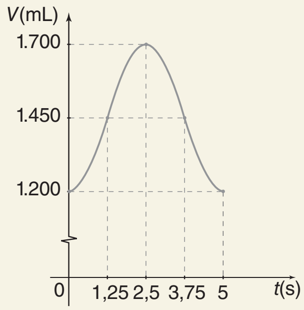
Ângulo (grau)	**Área (centímetro quadrado)**
360	$\pi \cdot 8^2$
210	A_{set}

$\therefore A_{set} = \dfrac{112\pi}{3}$

$\therefore A_{seg} = 16 + \dfrac{112\pi}{3}\ \text{cm}^2$

MATEMÁTICA SEM FRONTEIRAS

1. Esquematizando um período da função $V(t) = a + b \cos (mt + q)$, temos:



Como o período é 5 s, calculamos os possíveis valores de *m*, sendo:

$\dfrac{2\pi}{|m|} = 5 \Rightarrow m = \pm\dfrac{2\pi}{5}$

Portanto, uma possível função é da forma:

$V(t) = a + b \cos \left(\dfrac{2\pi t}{5} + q\right)$

Atribuindo valores a *t*, conforme os dados, obtemos:

$t = 0 \Rightarrow 1.200 = a + b \cos q$

$t = 2{,}5 \Rightarrow 1.700 = a + b \cos (\pi + q) = a - b \cos q$

$\therefore \begin{cases} 1.200 = a + b \cos q \\ 1.700 = a - b \cos q \end{cases}$

Adicionamos membro a membro, obtemos $a = 1.450$

Portanto, uma possível função é da forma:

$V(t) = 1.450 + b \cos \left(\dfrac{2\pi t}{5} + q\right)$

Substituindo $t = 1{,}25$ e, portanto, $V(1{,}25) = 1.450$, chegamos a:

$1.450 = 1.450 + b \cos \left(\dfrac{\pi}{2} + q\right) \Rightarrow \cos \left(\dfrac{\pi}{2} + q\right) = 0$

Assim, um possível valor de *q* é zero; portanto, uma possível função é da forma: $V(t) = 1.450 + b \cos \left(\dfrac{2\pi t}{5}\right)$

Substituindo $t = 2{,}5$ e, portanto, $V(2{,}5) = 1.700$, chegamos a:

$1.700 = 1.450 + b \cos \pi \Rightarrow 1.700 = 1.450 - b \Rightarrow b = -250$

Concluímos, então, que uma função possível é:

$V(t) = 1.450 - 250 \cos \left(\dfrac{2\pi t}{5}\right)$

2. Para $t = \dfrac{5}{6}$, temos $V\left(\dfrac{5}{6}\right) = 1.325$

VERIFIQUE O QUE APRENDEU NO CAPÍTULO 5

1. a. $4 + 5 \cos x = 2 \Rightarrow \cos x = -\dfrac{2}{5}$

Como $-1 < -\dfrac{2}{5} < 1$, então 2 pertence ao conjunto imagem de *f*.

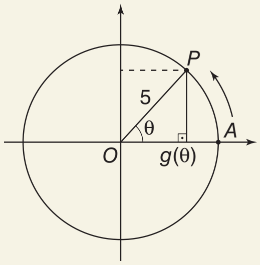
b. $4 + 5 \cos x = 10 \Rightarrow \cos x = \dfrac{6}{5}$

Como $\dfrac{6}{5} > 1$, então 10 não pertence ao conjunto imagem de *f*.

c. A imagem da função $y = \cos x$ é $[-1; 1]$; logo a imagem de $y = 5 \cos x$ é $[-5; 5]$. Portanto, a imagem da função $y = 4 + 5 \cos x$ é:

$Im(f) = [-5 + 4; 5 + 4] = [-1; 9]$

2. a. Sendo *P* a posição da partícula em dado instante e θ a medida do arco $\widehat{AP}$, com *A*(5, 0), esquematizamos:



A função *g* que expressa a abscissa de *P* par cada medida θ é: $|P(\theta) = 5 \cos \theta|$

A medida θ, em radiano, pode ser obtida em função do tempo *t*, em segundo, por uma regra de três de onde obtemos $\theta = \dfrac{2\pi t}{3}$ rad. Assim:

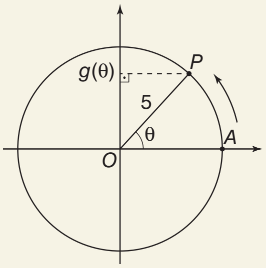
$g\left(\dfrac{2\pi t}{3}\right) = 5\cos \dfrac{2\pi t}{3}$

Indicando essa função por f(t), temos:

$f(t) = 5\cos \dfrac{2\pi t}{3}$

Assim, a função *f* expressa a posição da partícula.

b. Sendo *P* a posição da partícula em dado instante e θ a medida do arco $\widehat{AP}$, com *A*(5, 0), esquematizamos:



A função *g* que expressa a ordenada de *P* para cada medida θ é: $g(\theta) = 5 \text{ sen } \theta$

A medida θ, em radiano, pode ser obtida em função do tempo *t*, em segundo, por uma regra de três de onde obtemos $\theta = \dfrac{2\pi t}{3}$ rad.

Assim:

$g\left(\dfrac{2\pi t}{3}\right) = 5 \text{ sen } \dfrac{2\pi t}{3}$

Indicando essa função por *f*(*t*), concluímos.

$f(t) = 5 \text{ sen } \dfrac{2\pi t}{3}$

Assim, a função *f* não expressa a posição da partícula.

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

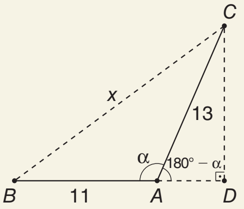
ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

3. Indicando por x a distância procurada e por D a projeção ortogonal do ponto C sobre a reta $\overleftrightarrow{AB}$, esquematizamos:

Assim, temos:

$$\begin{cases} \cos(180° - \alpha) = \dfrac{AD}{13} \\ \cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha = \dfrac{5}{13} \end{cases}$$

Logo, $\frac{AD}{13} = \frac{5}{13} \Rightarrow AD = 5$



Aplicando o teorema de Pitágoras aos triângulos ACD e BCD, obtemos $CD = 12$ e $x = 20$.

Portanto, a distância entre as estrelas B e C é igual a 20 anos-luz.

Outro modo para resolver é por meio da Lei dos cossenos.

Indicando por x a distância procurada, esquematizamos:

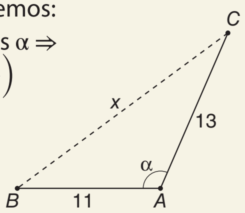
Assim, pela lei dos cossenos, temos:

$x^2 = 11^2 + 13^2 - 2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot \cos\alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 = 121 + 169 - 286 \cdot \left(-\frac{5}{13}\right)$

$x^2 = 400 \Rightarrow x = 20$

Portanto, a distância entre as estrelas B e C é igual a 20 anos-luz.



CAPÍTULO 6 Os princípios da Análise combinatória

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. a. Para calcular a quantidade de poltronas no cinema, multiplicamos o número de fileiras pelo número de poltronas por fileira: $16 \cdot 20 = 320$

b. Sabendo que o número de ingressos vendidos é igual ao número total de poltronas do cinema, basta multiplicar por 2 o número de poltronas: $320 \cdot 2 = 640$

2.

cor	letra	número
4	26	45

$4 \cdot 26 \cdot 45 = 4.680 \therefore$ 4.680 cadeiras

3. a.

milhar	centena	dezena	unidade
6	6	6	6

$6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 1.296 \therefore$ 1.296 números

b.

milhar	centena	dezena	unidade
6	5	4	3

$6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360 \therefore$ 360 números

4. a.

milhares	centenas	dezenas	unidades
4	5	5	5

$4 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 500 \therefore$ 500 números

b.

milhares	centenas	dezenas	unidades
4	4	3	2

$4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 96 \therefore$ 96 números

5. a. Para que o número seja par, a casa das unidades deve ser ocupada pelo algarismo 4; portanto, essa casa tem apenas uma possibilidade de preenchimento. Fixando o algarismo 4 como algarismo das unidades, temos:

milhar	centena	dezena	unidade
6	6	6	1

$6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 1 = 216 \therefore$ 216 números

b. Para que o número seja par, a casa das unidades deve ser ocupada pelo algarismo 4; portanto, essa casa tem apenas uma possibilidade de preenchimento. Fixando o algarismo 4 como algarismo das unidades, temos:

milhar	centena	dezena	unidade
5	4	3	1

$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 1 = 60 \therefore$ 60 números

6. No diagrama a seguir, indicamos as duas pessoas idosas I e as próximas pessoas P_3, P_4, P_5, P_6, P_7 e P_8 a escolherem seus lugares.

I	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓

Número de possibilidades → $8 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5.760$

Logo, 5.760 maneiras diferentes.

7. alternativa **e**

Cálculo do número de possibilidades para cada opção:

Opção I: L D D D D D

↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓

$26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 2.600.000$

Opção II: D D D D D D

↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓

$10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 1.000.000$

Opção III: L L D D D D

↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓

$26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 6.760.000$

Opção IV: D D D D D

↓ ↓ ↓ ↓ ↓

$26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 100.000$

Opção V: L L L D D

↓ ↓ ↓ ↓ ↓

$26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 = 1.757.600$

Logo, a opção V é a que mais se adéqua às condições da empresa.

8. alternativa **e**

1º bit	2º bit	3º bit	4º bit	5º bit	6º bit	7º bit	8º bit
2	2	2	2	2	2	2	2

$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^8 = 256$

9.

1º teste	2º teste	3º teste

3 · 3 · 2 = 18

Portanto, 18 maneiras diferentes.

10. alternativa **c**

Sendo *n* o total de senhas possíveis, temos:

1º alg.	2º alg.	3º alg.	4º alg.	5º alg.
9	8	7	6	5

$n = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 15.120$

O tempo máximo *t*, necessário para que o arquivo seja aberto, é:

$t = 15.120 \cdot 0{,}5\ \text{s} = 7.560\ \text{s} = 2\ \text{h}\ 6\ \text{min}$

11. a. Calculando o número de possibilidades, temos:

Let.	Let.	Let.	Alg.	Let.	Alg.	Alg.

26 · 26 · 26 · 10 · 26 · 10 · 10 = 456.976.000

b. Calculando o número de possibilidades sem repetir letra nem algarismo, temos:

Alg.	Let.	Let.	Alg.	Let.	Alg.	Alg.

26 · 25 · 24 · 10 · 23 · 9 · 8 = 258.336.000

c. Esse total é a diferença entre o resultado do item **a** e o do item **b**, nessa ordem, isto é:

456.976.000 − 258.336.000 = 198.640.000

d. Calculando o número de possibilidades para algarismo diferentes entre si, temos:

Let.	Let.	Let.	Alg.	Let.	Alg.	Alg.

26 · 26 · 26 · 10 · 26 · 9 · 8 = 329.022.720

e. Calculando o número de possibilidades sem repetir letra, temos:

Let.	Let.	Let.	Alg.	Let.	Alg.	Alg.

26 · 25 · 24 · 10 · 23 · 10 · 10 = 358.800.000

14. a. $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \Rightarrow$

$\Rightarrow n(A \cup B) = 18 + 15 - 6 \therefore n(A \cup B) = 27$

b. $n(C \cup D) = n(C) + n(D) - n(C \cap D) \Rightarrow$

$\Rightarrow 28 = 17 + 20 - n(C \cap D) \therefore n(C \cap D) = 9$

15. O número máximo de aparelhos que pode ter esse lote é igual ao número de sequências distintas que podem ser formadas nas condições do enunciado. Vamos dividir a resolução em dois casos:

1º caso – Cálculo do número de possibilidades para as sequências formadas por quatro algarismos distintos seguidos de duas letras distintas.

$$\overbrace{\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}}^{\text{Algarismos}}\overbrace{\boxed{}\boxed{}}^{\text{letras}}$$

6 · 5 · 4 · 3 · 4 · 3 = 4.320

2º caso – Cálculo do número de possibilidades para as sequências formadas por cinco algarismos distintos seguidos de duas letras distintas.

$$\overbrace{\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}}^{\text{Algarismos}}\overbrace{\boxed{}\boxed{}}^{\text{letras}}$$

6 · 5 · 4 · 3 · 2 · 4 · 3 = 8.640

Como o conjunto *A* das sequências formadas no primeiro caso e o conjunto *B* das sequências formadas no segundo caso são disjuntos, a conjunção "ou" do enunciado indica a soma dos números de elementos de *A* e *B*: 4.320 + 8.640 = 12.960

16. Sendo *A* o conjunto das pessoas da amostra que dormem menos de quatro horas por noite e *B* o conjunto das pessoas da amostra que dormem mais de duas horas por noite, temos:

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \Rightarrow$

$\Rightarrow 80 = 56 + 28 - n(A \cap B) \therefore n(A \cap B) = 4$

17.

3, 5, 7 ou 8		
4	5	4

Calculando a quantidade de números de três algarismos nas condições enunciadas, temos: 4 · 5 · 4 = 80

1 ou 2			
2	5	4	3

Calculando a quantidade de números de quatro algarismos nas condições enunciadas, temos: 2 · 5 · 4 · 3 = 120

O total de números é: 80 + 120 = 200

18.

4			
1	3	4	3

Para o algarismo 4 na primeira casa da esquerda (unidade de milhar), sendo que a casa da centena só pode ter os algarismos 5, 6 ou 7, temos: 1 · 3 · 4 · 3 = 36

5, 6 ou 7			
3	5	4	3

Para os algarismos 5, 6 ou 7 na primeira casa da esquerda, temos: 3 · 5 · 4 · 3 = 180

Como esses conjuntos de 36 e 180 números são disjuntos, o total de números nas condições enunciadas é: 36 + 180 = 216

19.

			0
6	5	4	1

Para o algarismo zero na última casa (unidades), temos:

$6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 1 = 120$

			2 ou 4
5	5	4	2

Para os algarismos 2 ou 4 na última casa, temos:

$5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 2 = 200$

Como esses conjuntos de 120 e 200 números são disjuntos, o total de números nas condições enunciadas é:

$120 + 200 = 320$

20. a. Cada retângulo do diagrama a seguir representa uma vaga a ser preenchida na diretoria. Indicando por R e G um rapaz e uma garota, respectivamente, temos as seguintes possibilidades para uma diretoria com 1 rapaz e 2 garotas:

1ª série	2ª série	3ª série
R	G	G

Número de possibilidades → $3 \cdot 2 \cdot 3 = 18$

1ª série	2ª série	3ª série
G	R	G

Número de possibilidades → $4 \cdot 4 \cdot 3 = 48$

1ª série	2ª série	3ª série
G	G	R

Número de possibilidades → $4 \cdot 2 \cdot 4 = 32$

O número total de possibilidade é: $18 + 48 + 32 = 98$

b. Calculamos o número de diretorias possíveis com: 1 rapaz e 2 garotas, 2 rapazes e 1 garota, e 3 rapazes; obtendo, respectivamente: 98 escolhas possíveis, 124 escolhas possíveis e 48 escolhas possíveis.

A soma desses três resultados é o número de escolhas possíveis da diretoria: $98 + 124 + 48 = 270$

c. Vamos resolver esse item de dois modos diferentes.

1º modo: calculamos o número de diretorias possíveis com: 3 garotas; 1 rapaz e 2 garotas; e 2 rapazes e 1 garota, obtendo, respectivamente: 24 escolhas possíveis, 98 escolhas possíveis e 124 escolhas possíveis.

Pelo princípio aditivo da contagem, temos que a soma desses três resultados é o número de escolhas possíveis da diretoria: $24 + 98 + 124 = 246$

Assim, concluímos que o número de diretorias que podem ser escolhidas, com no máximo dois rapazes em cada uma, é 246.

2º modo: calculamos o número total de diretorias que podem ser escolhidas com um estudante de cada ano e subtraímos do resultado o número de diretorias formadas por 3 rapazes.

Calculando o total de diretorias de três estudantes, um de cada ano:

1ª série	2ª série	3ª série

Número de possibilidades → $7 \cdot 6 \cdot 7 = 294$

Calculando o total de diretorias de três rapazes, um de cada ano:

1ª série	2ª série	3ª série
R	R	R

Número de possibilidades → $3 \cdot 4 \cdot 4 = 48$

Como $294 - 48 = 246$, concluímos que o número de diretorias que podem ser escolhidas, com no máximo dois rapazes em cada uma, é 246.

24. a. $\frac{6!}{3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{3!} = 120$

b. $\frac{5! \cdot 8!}{4! \cdot 7!} = \frac{5 \cdot 4! \cdot 8 \cdot 7!}{4! \cdot 7!} = 40$

c. $\frac{5! + 7!}{6! - 5!} = \frac{5! + 7 \cdot 6 \cdot 5!}{6 \cdot 5! - 5!} = \frac{\cancel{5!}(1 + 42)}{\cancel{5!}(6 - 1)} = \frac{43}{5}$

d. $\frac{n!}{(n-1)!} = \frac{n(n-1)!}{(n-1)!} = n$

e. $\frac{n!}{(n+2)!} = \frac{n!}{(n+2)(n+1)n!} = \frac{1}{n^2 + 3n + 2}$

25. a. $\frac{(n+2)(n+1)n!}{n!} = 12 \Rightarrow n^2 + 3n - 10 = 0$

$\therefore n = 2$ ou $n = -5$ (não convém); Logo: $S = \{2\}$

b. $\frac{(n-2)!}{(n-1)(n-2)!} = \frac{1}{5} \Rightarrow n - 1 = 5 \ \therefore n = 6$; Logo: $S = \{6\}$

c. Simplificando a fração do 1º membro, temos:

$$\frac{(n+1)! + n!}{(n+2)!} = \frac{(n+1)n! + n!}{(n+2)(n+1)n!} =$$

$$= \frac{n!(n+1+1)}{(n+2)(n+1)n!} = \frac{n!(n+2)}{(n+2)(n+1)n!} = \frac{1}{(n+1)}$$

Logo, a equação proposta é equivalente a:

$\frac{1}{(n+1)} = \frac{1}{28} \Rightarrow (n+1) = 28 \therefore n = 27$

Observando que esse valor de n satisfaz a condição de existência dos fatoriais, concluímos que o conjunto solução S da equação é: $S = \{27\}$

26. Acrescentando o fator 1 ao segundo membro da igualdade, temos:

$n! = 1 \cdot 2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7$

$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2^2 \cdot 5 \cdot (2 \cdot 3) \cdot 7 \cdot 2^3 \cdot 3^2 \cdot (5 \cdot 2) =$

$= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 = n! = 10! \therefore n = 10$

27. a.

1ª mala	2ª mala	3ª mala	4ª mala	...	30ª mala

Número de possibilidades → $30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27 \cdot ... \cdot 1 = 30!$

b. Fixada a mala de João como última, temos:

1ª mala	2ª mala	3ª mala	4ª mala	...	29ª mala	Mala de João

Número de possibilidades → $29 \cdot 28 \cdot 27 \cdot 26 \cdot ... \cdot 1 = 29!$

c. Fixadas as malas de Pedro e de João como primeira e segunda, respectivamente, temos:

Mala de Pedro	Mala de João	3ª mala	4ª mala	5ª mala	...	30ª mala

Número de possibilidades → $28 \cdot 27 \cdot 26 \; ... \; 1 = 28!$

d. Podemos ter a mala de Pedro como primeira e a de João como segunda ou a de João como primeira e a de Pedro como segunda. Assim, concluímos que o número de sequências é o dobro do resultado do item anterior, isto é, $2 \cdot 28!$

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

1. Indicando por 1, 2 e 3 os candidatos, e por A, B e C os atributos, temos:

1 - A	1 - B	1 - C	2 - A	2 - B	2 - C	3 - A	3 - B	3 - C

$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^9 = 512$

Número de possibilidades

2. a. Dígitos:

5, 6, 7, 8 ou 9

1º	2º	3º	4º	5º	6º	7º	8º

$5 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10$

Logo, o número máximo possível de linhas antes do acréscimo do nono dígito seria:

$5 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 5 \cdot 10^7 = 50.000.000$

b. Dígito: 9

1º	2º	3º	4º	5º	6º	7º	8º	9º

$1 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10$

Logo, o número máximo possível de linhas antes do acréscimo do nono dígito seria:

$1 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^8 = 100.000.000$

3.

1ª retirada	2ª retirada	3ª retirada	4ª retirada

$5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 300$

4. alternativa **a**

Para o início da senha há 10 possibilidades (5 vogais maiúsculas e 5 minúsculas), e para o final de senha temos, também, 10 possibilidades (5 vogais maiúsculas e 5 minúsculas). Assim, pelo princípio fundamental da contagem, o número de novas senhas será igual ao número de senhas anterior multiplicado por $10 \cdot 10$, ou seja, multiplicado por 100.

5. Um dos pontos de cada célula deve ter, obrigatoriamente, alto-relevo e os demais pontos podem ter ou não alto-relevo.

Para a simplificação do cálculo, vamos contar, também, uma célula que não apresente nenhum dos pontos em alto-relevo. Assim, o número de possibilidades para a confecção de uma célula seria:

1º ponto	2º ponto	3º ponto	4º ponto	5º ponto	6º ponto

$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 =$

$= 64$

Porém, devemos excluir uma dessas células, porque não existe célula sem ponto em alto-relevo. Logo, o número máximo de caracteres que o sistema braile pode representar é 63.

6. a. Usando 68 caracteres distintos:

$68 \cdot 67 \cdot 66 \cdot 65 \cdot 64 \cdot 63 = 78.806.407.680$

b. Usando letras e algarismos (36 caracteres):

$36 \cdot 36 \cdot 36 \cdot 36 \cdot 36 \cdot 36 = 2.176.782.336$

c. Usando apenas letras e números (sem repetição):

$36 \cdot 35 \cdot 34 \cdot 33 \cdot 32 \cdot 31 = 1.402.410.240$

A quantidade de senhas "mais forte" é dada por:

$78.806.407.680 - 1.402.410.240 = 77.403.997.440$

7. a. Para que o número $2^k \cdot 3^x \cdot 5^y \cdot 7^z$ seja divisor natural de $2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \cdot 7$, os expoentes k, x, y e z devem ser números naturais, com $0 \leqslant k \leqslant 4$, $0 \leqslant x \leqslant 2$, $0 \leqslant y \leqslant 3$ e $0 \leqslant z \leqslant 1$.

b. Pelo item **a**, observamos que k, x, y e z podem assumir, respectivamente, 5 valores distintos, 3 valores distintos, 4 valores distintos e 2 valores distintos:

$$\begin{tikzcd} 2^k \arrow[d] & \cdot & 3^X \arrow[d] & \cdot & 5^y \arrow[d] & \cdot & 7^z \arrow[d] \\ 5 & & 3 & & 4 & & 2 \end{tikzcd}$$

Número de possibilidades →

Logo, pelo princípio fundamental da contagem, o número de divisores naturais de 126.000 é dado por:

$5 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 2 = 120$

8. alternativa **d**

O número de homens é uma unidade maior que o número de mulheres. Assim, para que homens e mulheres ocupem posições alternadas, os extremos devem ser ocupados por homens.

No diagrama a seguir, cada "casa" com a letra H representa uma posição que deve ser ocupada por um homem e cada "casa" com a letra M, uma posição que deve ser ocupada por uma mulher.

Logo, a primeira, a terceira, a quinta e a sexta posição podem ser ocupadas de 4, 3, 2 e 1 maneiras diferentes, enquanto a segunda, a quarta e a sexta posição podem ser ocupadas de 3, 2 e 1 maneiras diferentes.

H	M	H	M	H	M	H
4	3	3	2	2	1	1

Pelo princípio fundamental da contagem, concluímos que o número de disposições diferentes é dado por:

$4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 144$

9. Temos que as metades de uma peça qualquer apresentam números diferentes de pontos ou apresentam o mesmo número de pontos. Assim, vamos calcular o número de peças para cada caso e, depois, adicionar os resultados.

1º caso: As metades de cada peça apresentam números diferentes de pontos.

$$\frac{9 \cdot 8}{2} = \frac{72}{2} = 36$$

Observe que dividimos por 2 o produto 9 · 8, porque esse produto é o dobro do número de peças, já que, por exemplo, a peça 2 | 3 é a mesma peça 3 | 2.

2º caso: As metades de cada peça apresentam o mesmo número de pontos.

Existem exatamente 9 peças nessas condições: 0|0, 1|1, 2|2, 3|3, 4|4, 5|5, 6|6, 7|7 e 8|8

Logo, o número de peças desse dominó é: $36 + 9 = 45$

10. alternativa **e**

Para que o primeiro seja o triplo do segundo, são 3 possibilidades para os algarismos iniciais do número: 3 e 1, 6 e 2 ou 9 e 3. Assim, temos:

3	1		
1	1	8	7

$1 \cdot 1 \cdot 8 \cdot 7 = 56$ ou

6	2		
1	1	8	7

$1 \cdot 1 \cdot 8 \cdot 7 = 56$ ou

9	3		
1	1	8	7

$1 \cdot 1 \cdot 8 \cdot 7 = 56$

Logo, o total de números é 56 + 56 + 56, ou seja, 168.

11. $$\frac{x! + (x-1)! + (x-2)!}{(x+1)!} = \frac{3}{8} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x(x-1)(x-2)! + (x-1)(x-2)! + (x-2)!}{(x+1)\,x\,(x-1)(x-2)!} = \frac{3}{8} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\cancel{(x-2)!}[x(x-1) + x \cancel{-1} \cancel{+1}]}{(x+1)\,x(x-1)\cancel{(x-2)!}} = \frac{3}{8} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x^2 \cancel{-x} \cancel{+x}}{(x+1)\,x(x-1)} = \frac{3}{8} \Rightarrow \frac{x}{x^2-1} = \frac{3}{8} \Rightarrow 3x^2 - 3 = 8x$$

$3x^2 - 8x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$ ou $x = -\frac{1}{3}$ (não convém)

Para $x = 3$, temos:

$$\frac{3! + (3-1)! + (3-2)!}{(3+1)!} = \frac{3}{8} \Rightarrow \frac{3! + 2! + 1!}{4!} = \frac{3}{8}$$

Como todos os fatoriais existem, 3 é raiz da equação.

12. $(n+1)n! - n! = 6n \Rightarrow n!(n+1-1) = 6n \Rightarrow n!n - 6n = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow n(n! - 6) = 0 \Rightarrow n = 0$ ou $n! - 6 = 0 \Rightarrow n! = 6 \therefore n = 3$

Logo, $S = \{0, 3\}$.

13. alternativa **a**

Cálculo do total de números que podem ser lidos no hodômetro, podendo haver repetição de algarismos:

10	10	10	10	10	10	10	10

$10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^8$

Cálculo do total de números que podem ser lidos no hodômetro, sem repetição de algarismos:

10	9	8	7	6	5	4	3

$10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = \frac{10!}{2}$

Logo, a diferença $10^8 - \frac{10!}{2}$ é o resultado procurado.

MATEMÁTICA SEM FRONTEIRAS

2. No diagrama a seguir, cada informação representa uma ligação entre duas bases, e o número abaixo da informação indica o total de possibilidades de escolha.

1ª ligação	2ª ligação	3ª ligação	4ª ligação	5ª ligação	6ª ligação	7ª ligação	8ª ligação
4	3	3	3	3	3	3	3

Logo, o número de fragmentos que podem ser obtidos é: $4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 8.748$

VERIFIQUE O QUE APRENDEU NO CAPÍTULO 6

1. alternativa **d**

1ª colocada	2ª colocada	3ª colocada
12	11	10

$12 \cdot 11 \cdot 10 = 1.320$

2. alternativa **c**

1º termo	2º termo	3º termo	4º termo	5º termo	6º termo	7º termo	8º termo
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
2	2	2	2	2	2	2	2

$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^8 = 256$

Número de possibilidades

3. alternativa **c**

0	0	0	0	5º termo	6º termo	7º termo	8º termo
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
1	1	1	1	1	2	2	2

$1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ ou

Número de possibilidades

1º termo	0	0	0	0	6º termo	7º termo	8º termo
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
1	1	1	1	1	1	2	2

$1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 2 = 4$ ou

Número de possibilidades

1º termo	2º termo	0	0	0	0	7º termo	8º termo
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
2	1	1	1	1	1	1	2

$2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2 = 4$ ou

Número de possibilidades

1º termo	2º termo	3º termo	0	0	0	0	8º termo
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
2	2	1	1	1	1	1	1

$2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 4$ ou

Número de possibilidades

1º termo	2º termo	3º termo	4º termo	0	0	0	0
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
2	2	2	1	1	1	1	1

$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 8$

Número de possibilidades

O número de sequências é: $n = 8 + 4 + 4 + 4 + 8 = 28$

4. Condição de existência: $n \in \mathbb{N}^*$

$$\frac{(n+1)! + n!}{(n+2)!} = \frac{1}{2n} \Rightarrow \frac{(n+1)n! + n!}{(n+2)(n+1)n!} = \frac{1}{2n}$$

$$\therefore \frac{n!(n+1+1)}{(n+2)(n+1)n!} = \frac{1}{2n} \Rightarrow \frac{\cancel{n!(n+2)}}{\cancel{(n+2)}(n+1)\cancel{n!}} = \frac{1}{2n}$$

$$\therefore \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2n} \Rightarrow n = 1$$

Como $n = 1$ satisfaz a condição de existência, o conjunto solução S da equação é: $S = \{ 1 \}$.

CAPÍTULO 7 Agrupamentos e métodos de contagem

ALÉM DA TEORIA

a. Observando que, entre as regiões A, B e C, que compõem a figura 1, duas quaisquer têm como fronteira uma linha, temos que:
Existem 4 escolhas possíveis para colorir A.
Depois de colorida A, existem 3 possibilidades para colorir B.
Depois de coloridas A e B, existem 2 possibilidades para colorir C.
Assim, concluímos que o número de maneiras distintas para colorir a figura 1 nas condições enunciadas é dado por: $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$

b. Observando que, entre as regiões D, E, F e G, que compõem a figura 2, D e G não têm como fronteira uma linha, o mesmo acontecendo com E e F, vamos raciocinar do seguinte modo: ou D e G terão cores iguais ou D e G terão cores distintas. Analisando cada caso:

1º caso

Para que as regiões D e G fiquem com cores iguais, temos que:
Existem 4 escolhas possíveis para colorir D.
Depois de colorida D, há apenas uma possibilidade para colorir G.
Depois de coloridas D e G, sobram 3 escolhas possíveis para colorir E.
Depois de coloridas D, G e E, sobram 3 escolhas possíveis para colorir F.
Assim, concluímos que o número de maneiras diferentes para colorir a figura 2 de modo que D e G tenham cores iguais é dado por: $4 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 3 = 36$.

2º caso

Para que as regiões D e G fiquem com cores distintas, temos que:
Existem 4 escolhas possíveis para colorir D.
Depois de colorida D, sobram 3 escolhas possíveis para colorir G.
Depois de coloridas D e G, sobram 2 escolhas possíveis para colorir F.
Depois de coloridas D, G e F, sobram 2 escolhas possíveis para colorir E.
Assim, concluímos que o número de maneiras distintas de colorir a figura 2 de modo que D e G tenham cores distintas é calculado por: $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = 48$.
Pela análise dos dois casos, concluímos que o número de maneiras distintas para colorir a figura nas condições enunciadas é dado por: $36 + 48 = 84$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

2. **a.** $A_{6,\,3} = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$
b. $A_{10,\,2} = 10 \cdot 9 = 90$
c. $A_{7,\,7} = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5.040$

3. $E = \frac{7!}{(7-3)} + \frac{6!}{(6-4)} + \frac{9!}{(9-1)} \Rightarrow E = \frac{7!}{4!} + \frac{6!}{2!} + \frac{9!}{8!}$

$$\therefore E = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot \cancel{4!}}{\cancel{4!}} + \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \cancel{2!}}{\cancel{2!}} + \frac{9 \cdot \cancel{8!}}{\cancel{8!}}$$

$\therefore E = 210 + 360 + 9 = 579$

4. alternativa **d**

O número de maneiras diferentes de distribuir as dez pessoas nas vinte empresas é igual ao número de sequências de dez elementos distintos que podem ser formadas com vinte elementos distintos, ou seja: $A_{20,\,10}$

5. alternativa **a**

Duas escolhas, além de se diferenciarem pela natureza dos lugares (lugares distintos representam escolhas distintas), diferenciam-se também pela ordem dos lugares escolhidos pelas pessoas. Logo, cada escolha é um arranjo simples de 7 elementos escolhidos entre 9 elementos; portanto, o número de formas distintas de se acomodar a família é dado por:

$$A_{9,\,7} = \frac{9!}{(9-7)!} = \frac{9!}{2!}$$

6. **a.** Condição de existência: $n \in \mathbb{N}$ e $n \geqslant 2$

$$A_{n,\,2} = 20 \Rightarrow \frac{n!}{(n-2)} = 20$$

$$\therefore \frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!} = 20 \Rightarrow n(n-1) = 20$$

$\therefore n^2 - n - 20 = 0 \Rightarrow n = 5$ ou $n = -4$

Apenas o número 5 satisfaz a condição de existência; logo, $S = \{5\}$.

b. Condição de existência: $n \in \mathbb{N}$ e $n \geqslant 4$

$$A_{n,\,2} = 14 + A_{n-2,\,2} \Rightarrow \frac{n!}{(n-2)!} = 14 + \frac{(n-2)!}{(n-4)!}$$

$$\therefore \frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!} = 14 + \frac{(n-2)(n-3)(n-4)!}{(n-4)!} \Rightarrow$$

$\Rightarrow n(n-1) = 14 + (n-2)(n-3)$

$\therefore n^2 - n = 14 + n^2 - 5n + 6 \Rightarrow 4n = 20 \Rightarrow n = 5$

Como o número 5 satisfaz a condição de existência, concluímos que $S = \{5\}$.

c. Condição de existência: $n \in \mathbb{N}$ e $n \geqslant 3$

$$A_{n,\,3} = 3(n-1) \Rightarrow \frac{n!}{(n-3)!} = 3(n-1)$$

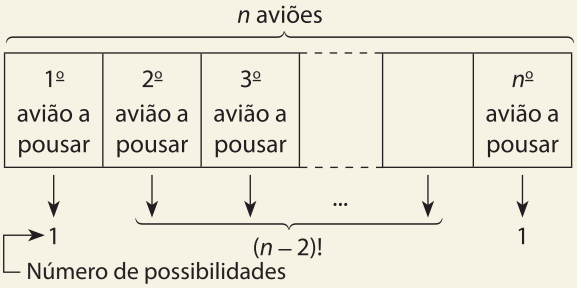
$$\therefore \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)!}{(n-3)!} = 3(n-1) \Rightarrow$$

$\Rightarrow n(n-1)(n-2) = 3(n-1)$
$\therefore n(n-1)(n-2) - 3(n-1) = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow (n-1)[n(n-2) - 3] = 0$
$\therefore (n-1)(n^2 - 2n - 3) = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow n - 1 = 0$ ou $n^2 - 2n - 3 = 0$
$\therefore n = 1$ ou $n = -1$ ou $n = 3$
Apenas o número 3 satisfaz a condição de existência; logo, $S = \{3\}$.

7. alternativa **b**
Temos que:
1. O total possível de classificação das n equipes nas três primeiras posições é dado por: $A_{n,3}$
2. O total possível de classificação das $n - 3$ equipes estrangeiras nas três primeiras posições é: $A_{n-3,3}$
A diferença entre os resultados obtidos em 1 e 2, nessa ordem, é o número de maneiras distintas possíveis de pelo menos uma equipe brasileira conquistar medalha: $A_{n,3} - A_{n-3,3}$

9. $P_5 = 5! = 120$

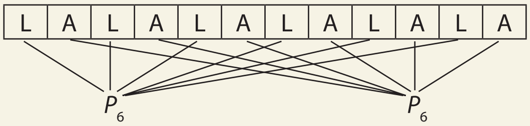
10. Indicando cada avião por uma quadrícula do diagrama a seguir, temos:



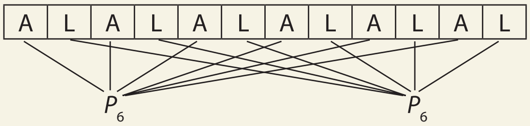
Assim, pelo princípio fundamental da contagem, temos que o número de sequências possíveis é $P_{(n-2)} = (n-2)!$
Logo, $(n-2)! = 720 \Rightarrow (n-2)! = 6!$
$\therefore n - 2 = 6 \Rightarrow n = 8$

11. **a.** $P_7 = 7! = 5.040$
b. Fixando a letra E na primeira posição, sobram 6 letras para serem distribuídas nas seis posições posteriores: $P_6 = 6! = 720$
c. Fixando a letra E na primeira posição e a letra T na última, sobram 5 letras para serem distribuídas nas cinco posições intermediárias: $P_5 = 5! = 120$
d. Há três possibilidades para o preenchimento da primeira casa: U, E ou O. Para cada vogal fixada na primeira posição, sobram seis letras para serem distribuídas nas demais: $3 \cdot P_6 = 3 \cdot 6! = 3 \cdot 720 = 2.160$
e. Há quatro possibilidades para o preenchimento da última (sétima) casa: F, T, B ou L. Para cada consoante fixada na última posição, sobram seis letras para serem distribuídas nas posições anteriores: $P_6 \cdot 4 = 6! \cdot 4 = 720 \cdot 4 = 2.880$
f. Há 3 possibilidades para o preenchimento da primeira posição e 4 possibilidades para o da última (sétima). Fixadas uma vogal na primeira posição e uma consoante na última, sobram cinco letras para distribuir nas posições intermediárias: $3 \cdot P_5 \cdot 4 = 3 \cdot 5! \cdot 4 = 3 \cdot 120 \cdot 4 = 1.440$
g. Considerando o bloco EOU um único elemento a ser permutado com os demais, o número de permutações dos cinco elementos EOU, F, T, B e L é dado por: $P_5 = 5! = 120$
h. Nesse caso, um bloco composto de E, O, U pode ter $P_3 = 3! = 6$ formas diferentes: EOU, EUO, OEU, OUE, UEO e UOE. Para cada um desses seis blocos, podemos formar $P_5 = 5! = 120$ anagramas, conforme o item **g.** Logo, com os seis blocos podemos formar $6 \cdot 120 = 720$ anagramas, ou seja, o número de anagramas diferentes que podem ser formados, nas condições enunciadas, é dado por: $P_3 \cdot P_5 = 3! \cdot 5! = 6 \cdot 120 = 720$
i. $P_7 - P_3 \cdot P_5 = 5.040 - 720 = 4.320$

12. alternativa **e**
Indicando por A e L um algarismo e uma letra quaisquer, respectivamente, temos:



ou

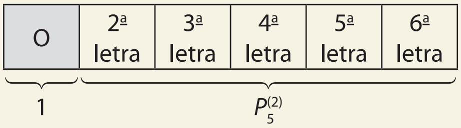


Logo, o número n possível de chaves de instalação é dado por:
$n = P_6 \cdot P_6 + P_6 \cdot P_6 = 2(P_6)^2 = 2 \cdot (6!)^2$

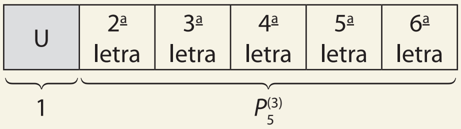
13. alternativa **d**
Como são exatamente três filmes brasileiros exibidos nos três primeiros dias e os outros quatro filmes nos dias seguintes, temos: $3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3! \cdot 4!$

15. **a.** $P_6^{(2)} = \frac{6!}{2!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \cancel{2!}}{\cancel{2!}} \Rightarrow P_6^{(2)} = 360$
b. $P_7^{(3)} = \frac{7!}{3!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot \cancel{3!}}{\cancel{3!}} \Rightarrow P_7^{(3)} = 840$
c. $P_7^{(3,2)} = \frac{7!}{3! \cdot 2!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot \cancel{3!}}{\cancel{3!} \cdot 2 \cdot 1} \Rightarrow P_7^{(3)} = 420$
d. $P_8^{(2,3,2)} = \frac{8!}{2! \cdot 3! \cdot 2!} = 1.680$

16. **a.** Como a palavra apresenta um total de 6 letras com três letras O, temos:
$P_6^{(3)} = \frac{6!}{3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot \cancel{3!}}{\cancel{3!}} \Rightarrow P_6^{(3)} = 120$
b. Fixando uma letra O no início da palavra, sobram 5 letras com 2 letras O entre elas. Logo:
$1 \cdot P_5^{(2)} = P_5^{(2)} = \frac{5!}{2!} = 60$
c. Temos duas possibilidades para a primeira letra:



ou



Assim, temos:
$1 \cdot P_5^{(2)} + 1 \cdot P_5^{(3)} = P_5^{(2)} + P_5^{(3)} = \frac{5!}{2!} + \frac{5!}{3!} = 80$

d. Temos duas possibilidades para a primeira letra: T ou N. Fixada uma delas, sobram 5 letras com 3 letras O entre elas. Assim, temos:

$2 \cdot P_5^{(3)} = 2 \cdot \frac{5!}{3!} = 2 \cdot 20 = 40$

e. Temos duas possibilidades para a primeira letra e duas para a última. Podemos separar em dois casos:

$$\underbrace{\boxed{\text{O}}}_{1}\underbrace{\boxed{\begin{matrix}2^{\underline{a}}\\\text{letra}\end{matrix}}\boxed{\begin{matrix}3^{\underline{a}}\\\text{letra}\end{matrix}}\boxed{\begin{matrix}4^{\underline{a}}\\\text{letra}\end{matrix}}\boxed{\begin{matrix}5^{\underline{a}}\\\text{letra}\end{matrix}}}_{P_4^{(2)}}\underbrace{\boxed{\text{T ou N}}}_{2}$$

ou

$$\underbrace{\boxed{\text{U}}}_{1}\underbrace{\boxed{\begin{matrix}2^{\underline{a}}\\\text{letra}\end{matrix}}\boxed{\begin{matrix}3^{\underline{a}}\\\text{letra}\end{matrix}}\boxed{\begin{matrix}4^{\underline{a}}\\\text{letra}\end{matrix}}\boxed{\begin{matrix}5^{\underline{a}}\\\text{letra}\end{matrix}}}_{P_4^{(3)}}\underbrace{\boxed{\text{T ou N}}}_{2}$$

Assim, temos:

$2 \cdot P_4^{(2)} + 2 \cdot P_4^{(3)} = 2 \cdot \frac{4!}{2!} + 2 \cdot \frac{4!}{3!} = 24 + 8 = 32$

f. Considerando o “bloco” NT como um único elemento, devemos calcular o número de permutações dos 5 elementos: NT, O, O, O, U. Assim, temos: $P_5^{(3)} = \frac{5!}{3!} = 20$

g. $P_2 \cdot P_5^{(3)} = 2! \cdot \frac{5!}{3!} = 40$

17. a. O número n de sequências, nas condições estabelecidas, é o número de permutações dos elementos C, C, C, K e K, ou seja: $n = P_5^{(3,\,2)} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = 10$

b. Interessam sequências:

- com três caras e duas coroas, cujo total já foi calculado no item **a**;
- com quatro caras e uma coroa, cujo total é dado por: $P_5^{(4)} = \frac{5!}{4!} = 5$;
- com 5 caras, para a qual existe uma única possibilidade.

Assim, o total de sequências nas condições dadas é: $P_5^{(3,\,2)} + P_5^{(4)} + 1 = 10 + 5 + 1 = 16$

c. Vamos calcular, inicialmente, o número p de resultados possíveis do experimento:

Logo: $p = 2^5 = 32$

Desses 32 resultados possíveis, apenas o resultado KKKKK não apresenta a face C; logo, em 31 resultados possíveis há a face C.

18. Indicando por N e L cada lado de uma quadrícula percorrido pelo caminhão para o norte e para o leste, respectivamente, temos que o caminho mais curto de *A* até *B* é representado por qualquer sequência das letras NNNLLL, e um caminho mais curto de *B* até *C* é representado por qualquer sequência das letras NNLLLL. Assim, o número de caminhos diferentes que o motorista pode fazer esse trajeto de modo a percorrer a menor distância possível é dado por:

$P_6^{(3,\,3)} \cdot P_6^{(2,4)} = \frac{6!}{3! \cdot 3!} \cdot \frac{6!}{2! \cdot 4!} = \ \ 20 \cdot 15 = 300$

19. a. A ordem dos dois pontos escolhidos não altera a reta determinada; por exemplo, $\overleftrightarrow{AB} = \overleftrightarrow{BA}$. Logo, o número de retas que podem ser determinadas é dado por: $C_{7,\,2} = 21$

b. Um triângulo fica determinado por três pontos (vértices) não colineares. Como não existem três pontos colineares entre os pontos *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F* e *G*, qualquer agrupamento de três pontos distintos determina um triângulo.

A ordem dos três pontos escolhidos não altera o triângulo formado e, portanto, o número de triângulos com vértices em três pontos do conjunto $\{A, B, C, D, E, F, G\}$ é dado por: $C_{7,\,3} = 35$.

c. Raciocinando de modo análogo ao do item **b**, concluímos que o número de quadriláteros convexos com vértices em quatro pontos do conjunto $\{A, B, C, D, E, F, G\}$ é dado por: $C_{7,\,4} = 35$

d. Raciocinando de modo análogo ao do item **b**, concluímos que o número de pentágonos convexos com vértices em cinco pontos do conjunto $\{A, B, C, D, E, F, G\}$ é dado por: $C_{7,\,5} = 21$

e. Fixado o ponto *A* como um dos vértices, os demais devem ser escolhidos entre os seis pontos restantes. Logo, o número de pentágonos convexos que têm *A* como um dos vértices é dado por: $C_{6,\,4} = 15$

f) Fixado o lado $\overline{AB}$, estarão fixados os vértices *A* e *B*; logo, falta escolher três vértices entre os pontos *C*, *D*, *E*, *F* e *G*. Portanto, o número de pentágonos convexos que têm $\overline{AB}$ como um dos lados é dado por: $C_{5,\,3} = 10$

20. a. O cálculo do número de retas distintas pode ser feito subtraindo de todas as combinações de dez pontos, dois a dois, as combinações dos pontos colineares, dois a dois, e adicionando 2, que são as próprias retas *r* e *s*, isto é:

$$C_{10,\,2} - \underbrace{C_{6,\,2}}_{\substack{\text{combinações}\\ \text{de pontos}\\ \text{de } r}} - \underbrace{C_{4,\,2}}_{\substack{\text{combinações}\\ \text{de pontos}\\ \text{de } s}} + \underbrace{2}_{\substack{\text{retas}\\ r \text{ e } s}} =$$

$= 45 - 15 - 6 + 2 = 26$

b. O número de triângulos é a diferença entre o número de combinações dos dez pontos três a três e o total de combinações dos pontos colineares três a três, isto é:

$$C_{10,\,3} - \underbrace{C_{6,\,3}}_{\substack{\text{combinações}\\ \text{dos pontos}\\ \text{em } r}} - \underbrace{C_{4,\,3}}_{\substack{\text{combinações}\\ \text{dos pontos}\\ \text{em } s}} =$$

$= 120 - 20 - 4 = 96$

c. Um triângulo com vértice *H* pode ter os outros dois vértices em *r* ou um vértice em *r* e o outro em *s*. Assim, o número de triângulos com vértice *H* é dado por:

$C_{6,\,2} + C_{6,\,1} \cdot C_{3,\,1} = 15 + 6 \cdot 3 = 33$

d. $C_{6,\,2} \cdot C_{4,\,1} = 15 \cdot 4 = 60$

e. Um quadrilátero convexo fica determinado por dois pontos escolhidos em *r* e dois pontos em *s*. Assim, o número de quadriláteros convexos é dado por:

$C_{6,\,2} \cdot C_{4,\,2} = 15 \cdot 6 = 90$

21. a. $C_{12,2} = \frac{12!}{2! \cdot 10!} \Rightarrow C_{12,2} = 66$

b. Indicando por n o número de jogadores dessa fase do torneio, temos:

$C_{n,\,2} = 45 \Rightarrow \frac{n!}{2! \cdot (n-2)!} = 45$

$\therefore \frac{n \cdot (n-1) \cdot \cancel{(n-2)!}}{2 \cdot 1 \cdot \cancel{(n-2)!}} = 45 \Rightarrow n^2 - n - 90 = 0$

$\therefore n = 10$ ou $n = -9$ (não convém)

Concluímos, então, que 10 jogadores participarão dessa fase do torneio.

22. **a.** A ordem dos dois pontos escolhidos não altera o segmento formado; por exemplo, $AB = BA$. Logo, o número de segmentos que podem ser formados é dado por:

$$C_{7,2} = \frac{7!}{2!\cdot 5!} = \frac{7\cdot 6}{2} = 21$$

b. O número d de diagonais pode ser calculado subtraindo-se o número de lados do resultado obtido no item **a**, isto é:

$$d = C_{7,2} - 7 = 21 - 7 = 14$$

23. Em um polígono de 10 vértices, o número de segmentos que podem ser formados com extremidades nesses vértices é dado por: $C_{10,2} = \frac{10!}{2!\cdot 8!} = \frac{10\cdot 9}{2} = 45$

Assim, o número d de diagonais desse polígono pode ser obtido subtraindo, do número total de segmentos possíveis, o número de lados: $d = C_{10,2} - 10 = 45 - 10 = 35$

24. $C_{5,2}\cdot C_{6,3} = 10\cdot 20 = 200$

25. Para o setor técnico, devem ser escolhidos 5 candidatos entre 8; para o setor administrativo, 2 entre 5; e para o setor financeiro, 3 entre 4. Logo, o número de maneiras distintas de preencher as vagas é dado por:

$$C_{8,5}\cdot C_{5,2}\cdot C_{4,3} = \frac{8!}{5!\cdot 3!}\cdot\frac{5!}{2!\cdot 3!}\cdot\frac{4!}{3!\cdot 1!} = 2.240$$

26. **a.** $n = C_{8,5} = 56$

b. $k = C_{8,7} = 8$

c. $m = C_{8,6} = 28$

27. **a.** Entre os 18 atletas, há exatamente 11 que não são campeões olímpicos. $C_{11,3} = \frac{11!}{3!\cdot(11-3)!} \Rightarrow C_{11,3} = 165$

b. No trio escolhido, devemos ter: (1 campeão olímpico e 2 não) ou (2 campeões olímpicos e 1 não) ou (3 campeões olímpicos). Como na equipe há exatamente 7 campeões olímpicos e 11 não, concluímos que o número de escolhas possíveis do trio é dado por:

$$C_{7,1}\cdot C_{11,2} + C_{7,2}\cdot C_{11,1} + C_{7,3} = 651$$

28. Se quaisquer seis substâncias pudessem ser misturadas, $C_{10,6}$ seria o número de misturas possíveis. Porém, desse total, há $C_{8,4}$ misturas que não podem ser feitas; logo, o número de misturas possíveis (não explosivas) é dado por: $C_{10,6} - C_{8,4} = 210 - 70 = 140$

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

1. alternativa **c**

Devemos contar o número de agrupamentos das 15 pessoas tomadas duas a duas, sendo que importa a ordem dos elementos no agrupamento. Assim, esses agrupamentos são arranjos simples: $A_{15,2}$

2. alternativa **a**

O total n de sequências que podem ser formadas nas condições estabelecidas é dado por:

$$\underbrace{\boxed{\text{vog.}}\boxed{\text{vog.}}\boxed{\text{vog.}}}_{A_{5,3}}\underbrace{\boxed{\text{cons.}}\boxed{\text{cons.}}\boxed{\text{cons.}}\boxed{\text{cons.}}}_{A_{6,4}}$$

$$\underbrace{\boxed{\text{cons.}}\boxed{\text{cons.}}\boxed{\text{cons.}}\boxed{\text{cons.}}}_{A_{6,4}}\underbrace{\boxed{\text{vog.}}\boxed{\text{vog.}}\boxed{\text{vog.}}}_{A_{5,3}}$$

$$n = A_{5,3}\cdot A_{6,4} + A_{5,3}\cdot A_{6,4} = 2\cdot A_{5,3}\cdot A_{6,4}$$

3. alternativa **e**

Há 4 opções de escolha para a primeira música e 3 para a última. Fixadas a primeira e a última, as demais podem ser apresentadas em qualquer ordem. Assim, o número n de possibildidades é: $n = 4\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1\cdot 3 = 1.440$

4. **a.** $P_8 = 8! = 40.320$

b. Para que os livros de História (H) e Geografia (G) fiquem nos extremos, são duas possibilidades:

$$\boxed{\text{H}}\underbrace{\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}}_{P_6}\boxed{\text{G}}$$

ou

$$\boxed{\text{G}}\underbrace{\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}}_{P_6}\boxed{\text{H}}$$

Logo, $n = P_6 + P_6 = 6! + 6! = 1.440$

c. Considerando o bloco MFQ um único elemento a ser permutado com os demais, o número de permutações dos seis elementos MFQ, H, G, B, P e I é dado por:

$$P_6 = 6! = 720$$

d. Nesse caso, um bloco composto de M, F e Q pode ter $P_3 = 3! = 6$ formas diferentes: MFQ, MQF, FMQ, FQM, QFM e QMF. Para cada um desses seis blocos, podemos formar $P_6 = 6! = 720$ sequências diferentes de livros, conforme o item **c**. Logo, o número de sequências diferentes de livros que podem ser formadas, nas condições enunciadas, é: $P_3\cdot P_6 = 3!\cdot 6! = 6\cdot 720 = 4.320$

e. Esse número é a diferença entre o total de sequências possíveis e o número de sequências em que MFQ estão juntos: $P_8 - P_3\cdot P_6 = 40.320 - 4.320 = 36.000$

5. alternativa **a**

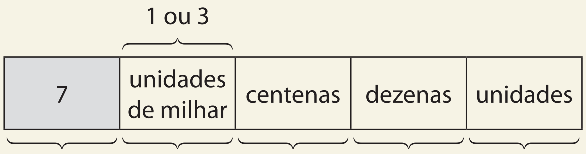
O número n de maneiras de distribuir as 30 vagas é o produto do número de permutações das 10 vagas mais próximas dos elevadores pelo número de permutações das 20 vagas mais distantes:

$$n = P_{10}\cdot P_{20} = 10!\cdot 20!$$

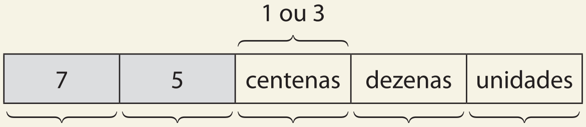
6. alternativa **e**

Os números naturais de cinco algarismos distintos e menores que 75.913, que podem ser formados com os algarismos 1, 3, 5, 7 e 9, são aqueles que começam por 1 ou 3 ou 5 ou 71 ou 73 ou 751 ou 753. O próximo número, na sequência crescente, é 75.913. Assim, pelo princípio fundamental da contagem, temos:

$$\underbrace{\overbrace{\boxed{\begin{matrix}\text{dezenas}\\\text{de milhar}\end{matrix}}}^{1,\,3\text{ ou }5}}_{3}\cdot\underbrace{\boxed{\begin{matrix}\text{unidades}\\\text{de milhar}\end{matrix}}}_{4}\cdot\underbrace{\boxed{\text{centenas}}}_{3}\cdot\underbrace{\boxed{\text{dezenas}}}_{2}\cdot\underbrace{\boxed{\text{unidades}}}_{1} = 72$$



$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 12$$



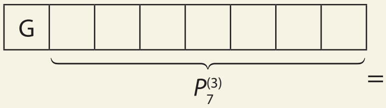
$$1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 = 4$$

Logo, o total de números menores que 75.913 que podemos formar, nas condições enunciadas, é 72 + 12 + 4, ou seja, 88.

Assim, o número 75.913 ocupa a 89ª posição.

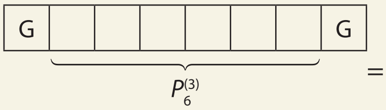
7. **a.** $P_8^{(2,\,3)} = \frac{8!}{3! \cdot 2!} = 3.360$

b.



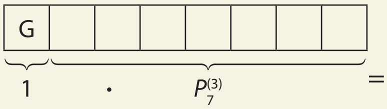
$= \frac{7!}{3!} = 840$

c.



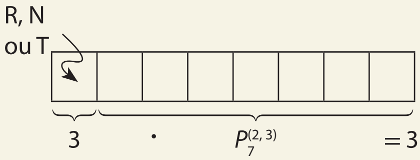
$= \frac{6!}{3!} = 120$

d.



$1 \cdot P_7^{(3)} = \frac{7!}{3!} = 840$

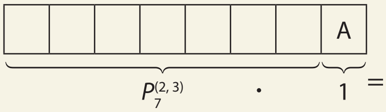
ou



$3 \cdot P_7^{(2,\,3)} = 3 \cdot \frac{7!}{2! \cdot 3!} = 1.260$

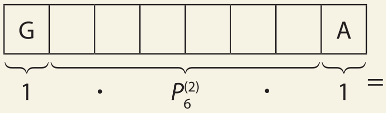
Logo, 1.260 + 840 = 2.100 anagramas terminam por vogal.

e.



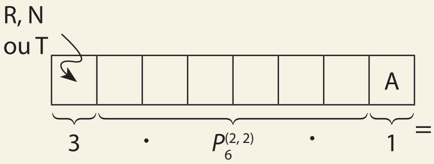
$P_7^{(2,\,3)} \cdot 1 = \frac{7!}{2! \cdot 2!} = 1.260$

f.



$1 \cdot P_6^{(2)} \cdot 1 = \frac{6!}{2!} = 360$

ou



$3 \cdot P_6^{(2,\,2)} \cdot 1 = 3 \cdot \frac{6!}{2! \cdot 2!} = 540$

Logo, há 360 + 540 = 900 anagramas que começam por consoante e terminam por vogal.

8. alternativa **a**.

Primeiro, determinamos o número de permutações da palavra AMIGA (60) e, depois, o de permutações onde AA aparecem juntos (24). Logo, 60 – 24 = 36 é o número de permutações nas condições do exercício.

9. Vamos indicar por A, B e C as barras de 1,5 mm, 0,5 mm e 0,25 mm de largura, respectivamente. Assim, o número máximo de equipamentos que podem ser identificados por esse sistema de códigos é o número de permutações distintas das dez letras: $A, A, A, A, A, B, B, B, C, C$, isto é:

$P_{10}^{(5,\,3,\,2)} = \frac{10!}{5! \cdot 3! \cdot 2!} = 2.520$

10. Para ir do ponto A ao ponto B, o cursor deve deslocar-se 11 unidades para a direita e 4 unidades para cima. Assim, o número n de sequências diferentes de digitações das teclas → e ↑ que levam o cursor de A a B é o número de permutações dos 15 elementos:

→, →, →, →, →, →, →, →, →, →, →, ↑, ↑, ↑, e ↑

ou seja:

$P_{15}^{(11,\,4)} = \frac{15!}{11! \cdot 4!} = 1.365$

11. alternativa **a**

O total de maneiras de escolher 2 entre os 10 jogadores é $C_{10,\,2} = \frac{10!}{8! \cdot 2!}$; o total de maneiras de escolher 2 entre os 4 jogadores canhotos é: $C_{4,\,2} = \frac{4!}{2! \cdot 2!}$

Como os dois jogadores escolhidos não podem ser canhotos, o número de possibilidades de escolha é dado por:

$C_{10,\,2} - C_{4,\,2} = \frac{10!}{2! \cdot 8!} - \frac{4!}{2! \cdot 2!}$

12. alternativa **c**

O número possível de trios de deputados que podem ser indicados pelo partido A é $C_{40,\,3}$, e o pelo partido B, $C_{15,\,1}$. Assim, pelo princípio fundamental da contagem, o número de possibilidades diferentes para a composição dos membros desses dois partidos nessa CPI é:

$$C_{40,\,3} \cdot C_{15,\,1} = \frac{40!}{37! \cdot 3!} \cdot 15$$

13. $C_{n+2,2} = 21 + C_{n,\,2} \Rightarrow \frac{(n+2)!}{2! \cdot n!} = 21 + \frac{n!}{2! \cdot (n-2)!}$

$\therefore \frac{(n+2)(n+1)n!}{2 \cdot 1 \cdot n!} = 21 + \frac{n(n-1)(n-2)!}{2 \cdot 1(n-2)!} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{(n+2)(n+1)}{2} = 21 + \frac{n(n-1)}{2}$

Multiplicando por 2 os dois membros, temos:

$n^2 + 3n + 2 = 42 + n^2 + n \Rightarrow 4n = 40 \therefore n = 10$

14. **a.** $C_{5,\,2} = 10$

b. $C_{5,\,2} + C_{5,\,3} + C_{5,\,4} + C_{5,\,5} = 10 + 10 + 5 + 1 = 26$

15. $C_{4,\,1} \cdot C_{8,\,4} = \frac{4!}{1!\,(4-1)!} \cdot \frac{8!}{4!\,(8-4)!} = 280$

VERIFIQUE O QUE APRENDEU NO CAPÍTULO 7

1. alternativa **e**

O total de sequências de 6 termos que podem ser formadas com os elementos de A é $A_{n,\,6}$. Subtraindo desse total o número de sequências de 6 números pares formadas com os elementos de A, obtemos: $A_{n,\,6} - A_{n-5,\,6}$, que é o resultado pedido.

2. alternativa **b**

O número de filas indianas formadas pelas n pessoas é o número de permutações de n elementos distintos; portanto: $n! = 720$

Decompondo em fatores primos o número 720, obtemos:

720	2
360	2
180	2
90	2
45	3
15	3
5	5
1	

Acrescentando o fator 1 aos fatores obtidos e agrupando-os de modo a formarem uma sequência de números naturais consecutivos, chegamos a:

$720 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot (2 \cdot 2) \cdot 5 \cdot (2 \cdot 3) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 6!$

Assim, $n! = 6! \Rightarrow n = 6$

3. alternativa **d**

$P_n^{(3, n-3)} = 2n \Rightarrow \dfrac{n!}{3!(n-3)!} = 2n$

Para n natural e $n \geqslant 3$:

$\dfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)!}{6(n-3)!} = 2n \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{(n-1)(n-2)}{6} = 2 \Rightarrow n = 5$ ou $n = -2$

4. alternativa **a**

Como as questões sobre logaritmo e função quadrática devem fazer parte da prova, o professor deve escolher as outras três questões entre as seis questões disponíveis. O número de escolhas possíveis é dado por:

$C_{6,\,3} = \dfrac{6!}{3! \cdot (6-3)!} = \dfrac{6!}{3! \cdot 3!} = 20$

MATEMÁTICA SEM FRONTEIRAS

1.

D	Y	D	Q	F	H	P	F	R	Q	W	U	D	R	V	J	D	X	O	H	V	H	V
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
A	V	A	N	C	E	M	C	O	N	T	R	A	O	S	G	A	U	L	E	S	E	S

2. O número n de *bytes*, nas condições estabelecidas, é o total de permutações dos oito elementos 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, ou seja:

$$P_8^{(3,\,5)} = \frac{8!}{3! \cdot 5!} = 56$$

CAPÍTULO 8 Geometria de posição e poliedros

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. a. Verdadeira, pois: $P \in (\overline{AC} \cup \overline{CD}) \Leftrightarrow P \in \overline{AD}$

b. Falsa, pois: $P \in (\overline{AC} \cap \overline{BD}) \Leftrightarrow P \in \overline{BC}$

c. Verdadeira, pois $\overline{AB}$ é definido como a união do conjunto $\{A, B\}$ com o conjunto dos pontos entre A e B.

d. Falsa, pela mesma justificativa do item **c**.

e. Verdadeira, pois todo ponto de $\overrightarrow{BA} \cup \overrightarrow{BD}$ pertence a r e todo ponto de r pertence a $\overrightarrow{BA} \in \overrightarrow{BD}$.

f. Verdadeira, pois todo ponto de $\overrightarrow{BD} \cap \overrightarrow{CA}$ pertence a $\overline{BC}$ e todo ponto de $\overline{BC}$ pertence a $\overrightarrow{BD} \cap \overrightarrow{CA}$.

g. Falsa, pois $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD}$ e $D \in \overrightarrow{AD}$; portanto, $D \in \overrightarrow{AB}$.

10. alternativa **c**

(1) Verdadeira, pois α e β são os planos paralelos distintos e r é uma reta contida em α. Como $\alpha \cap \beta = \varnothing$ e $r \subset \alpha$, temos que $r \cap \beta = \varnothing$. Logo, $r \,//\, \beta$.

(2) Falsa, pois a reta pode estar contida no outro plano.

(3) Verdadeira, pois, se $\alpha \,//\, \beta$ e γ é secante a α, então γ é secante a β. Assim:

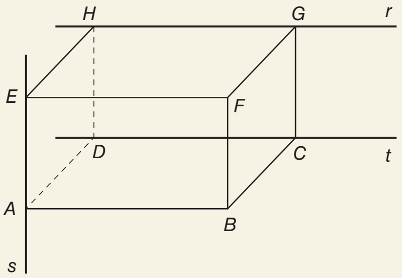
- Se $\alpha \equiv \beta$, a justificativa é imediata.
- Se $\alpha \not\equiv \beta$, sejam r a reta comum a γ e α, e s a reta comum a γ e β.

Como $r \subset \alpha$ e $\alpha \cap \beta = \varnothing$, deduzimos que $r \cap \beta = \varnothing$; logo, $r \cap s = \varnothing$.

Além do fato $r \cap s = \varnothing$, temos que r e s são coplanares, pois ambas estão contidas em γ; logo, $r \,//\, s$.

(4) Falsa, pois, no paralelepípedo representado a seguir, sejam:

$\alpha \equiv \text{pl}(FGH)$, $\beta \equiv \text{pl}(BFE)$ e $\gamma \equiv \text{pl}(ABG)$.



ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

Assim, temos que γ é secante aos planos distintos α e β tal que as intersecções $\gamma \cap \alpha$ e $\gamma \cap \beta$ são as retas paralelas $\overleftrightarrow{HG}$ e $\overleftrightarrow{AB}$, respectivamente; no entanto α não é paralelo a β.

Pela análise das quatro afirmações, concluímos que apenas 1 e 3 são verdadeiras.

13. a. Verdadeira. Como cada face do cubo é um quadrado, o ângulo $B\hat{C}D$ é reto. Logo, a reta $\overleftrightarrow{CB}$ é perpendicular à reta $\overleftrightarrow{CD}$.

b. Falsa. Como o segmento $\overline{BF}$ é diagonal do quadrado $BCFG$, o ângulo $C\hat{B}F$ mede 45°; logo, a reta $\overleftrightarrow{CB}$ não é perpendicular à reta $\overleftrightarrow{BF}$.

c. Falsa. Traçando por C a reta paralela a $\overleftrightarrow{DH}$, obtemos a reta $\overleftrightarrow{CG}$, que contém a diagonal $\overline{CG}$ do quadrado $BCFG$. Logo, a medida do ângulo $B\hat{C}G$ é 45°. Portanto, a reta $\overleftrightarrow{CB}$ não é ortogonal à reta $\overleftrightarrow{DH}$.

d. Verdadeira. A reta $\overleftrightarrow{CG}$ concorre com $\overleftrightarrow{BF}$ e é paralela à reta $\overleftrightarrow{DH}$. Como as diagonais de um quadrado são perpendiculares entre si, deduzimos que $\overleftrightarrow{CG}$ é perpendicular a $\overleftrightarrow{BF}$. Portanto, a reta $\overleftrightarrow{BF}$ é ortogonal à reta $\overleftrightarrow{DH}$.

e. Verdadeira. Duas retas formam ângulo reto quando são perpendiculares ou ortogonais. Como a reta $\overleftrightarrow{BF}$ é ortogonal à reta $\overleftrightarrow{DH}$, conforme a justificativa do item **d**, concluímos que $\overleftrightarrow{BF}$ forma ângulo reto com $\overleftrightarrow{DH}$.

f. Verdadeira. Como cada face do cubo é um quadrado, os ângulos $B\hat{C}D$ e $B\hat{C}F$ são retos, de onde deduzimos que a reta $\overleftrightarrow{CB}$ é perpendicular a duas retas concorrentes do plano pl(CDE). Logo, a reta $\overleftrightarrow{CB}$ é perpendicular ao plano pl(CDE).

g. Falsa. A reta $\overleftrightarrow{CG}$ é secante ao plano pl(FGH) no ponto G. A reta $\overleftrightarrow{FG}$ está contida no plano pl(FGH) e o ângulo $C\hat{G}F$ mede 45°, pois $\overline{CG}$ é diagonal do quadrado $BCFG$. Logo, a reta $\overleftrightarrow{CG}$ não é perpendicular ao plano pl(FGH), pois existe uma reta desse plano que concorre com $\overleftrightarrow{CG}$ e não é perpendicular a $\overleftrightarrow{CG}$.

16. a. Verdadeira, pois o plano pl(*TCH*) contém a reta $\overleftrightarrow{CH}$, que é perpendicular ao plano pl(*EHG*).

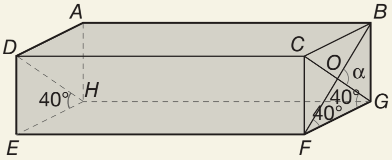
b. Verdadeira, pois o plano pl(*TDE*) contém a reta $\overleftrightarrow{DE}$, que é perpendicular ao plano pl(*ABC*).

c. Falsa, pois o plano pl(*TCB*) coincide com o plano pl(*ABC*), que é paralelo ao plano pl(*EHG*).

d. Verdadeira, pois o plano pl(*TCB*) contém a reta $\overleftrightarrow{CB}$, que é perpendicular ao plano pl(*ABG*).

e. Falsa, pois a medida de um ângulo formado pelos planos pl(*TBG*) e pl(*TCH*) é a medida do ângulo $B\widehat{T}C$, que é menor do que 90º por ser um ângulo agudo de um triângulo retângulo.

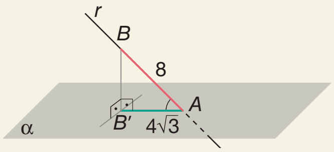
19. a. Como $\overleftrightarrow{DH}$ // $\overleftrightarrow{CG}$, as medidas dos ângulos formados por $\overleftrightarrow{DH}$ e $\overleftrightarrow{BF}$ são iguais às medidas dos ângulos formados por $\overleftrightarrow{CG}$ e $\overleftrightarrow{BF}$.



MARIO MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

O ângulo $B\widehat{O}G$ é externo do triângulo *FOG*; logo: $\alpha = 80°$.

20. Esquematizando a situação, temos:



O ângulo $B\widehat{A}B'$ é um ângulo agudo formado pela reta *r* e por sua projeção ortogonal $\overline{AB'}$ sobre α; logo, esse ângulo é um ângulo agudo formado por *r* e α. Sendo *x* a medida desse ângulo, temos:

$$\cos x = \frac{AB'}{AB} = \frac{4\sqrt{3}}{8} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x = 30°$$

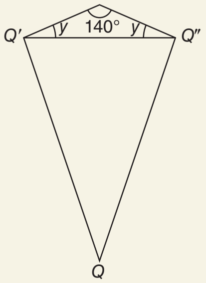
21. a. Observando que $\overleftrightarrow{EF} \perp$ pl($QQ'Q''$) e sendo $\{P\} = \overleftrightarrow{EF} \cap$ pl($QQ'Q''$), temos que $Q'\widehat{P}Q'$ é um ângulo formado por α e β.

A soma das medidas dos ângulos internos de um quadrilátero é 360°. Assim, indicando por *x* a medida do ângulo $Q'\widehat{P}Q''$, temos do quadrilátero $PQ'QQ''$:

$x + 90° + 40° + 90° = 360° \Rightarrow x = 140°$

Concluímos, então, que a medida de um ângulo obtuso formado pelos planos α e β é 140°.

b. Os triângulos PQQ' e PQQ'' são congruentes (semelhantes com razão de semelhança igual a 1); logo, os segmentos $\overline{PQ'}$ e $\overline{PQ''}$ são congruentes, com o que concluímos que o segmento $\overline{Q'Q''}$ é a projeção ortogonal da união dos segmentos $\overline{PQ'}$ e $\overline{PQ''}$ sobre um plano horizontal.

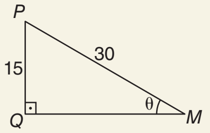


Assim, a inclinação do telhado em relação ao plano horizontal é a medida *y* do ângulo $P\widehat{Q'}Q''$. Como o triângulo $PQ'Q''$ é isósceles de base $\overline{Q'Q''}$, obtemos:

$y + y + 140° = 180° \Rightarrow y = 20°$

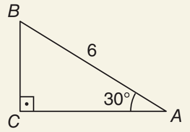
Concluímos, então, que a inclinação de cada face do telhado é de 20° em relação a um plano horizontal; logo, o telhado não obedece aos padrões estabelecidos pela ABTN.

22. Sendo $\overleftrightarrow{PQ} \perp \alpha$, com $Q \in \alpha$, $P\widehat{M}Q$ é um ângulo agudo que a reta $\overleftrightarrow{PM}$ forma com o plano α.



Assim, $\operatorname{sen} \theta = \dfrac{15}{30}$ e, portanto, o ângulo θ é 30°.

23. Sendo *C* a projeção ortogonal de *B* sobre α, temos:
$AC = 3\sqrt{3}$ e $BC = 3$.

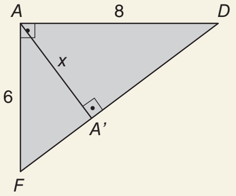


ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

a. A projeção ortogonal de $\overline{AB}$ sobre α mede $3\sqrt{3}$ cm.

b. A distância do ponto *B* ao plano α é 3 cm.

24. Sendo *A′* a projeção ortogonal de *A* sobre a reta $\overleftrightarrow{FD}$, temos que $\overline{AA'}$ é perpendicular a $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{FD}$, simultaneamente. Então, a medida *AA′* é a distância entre as retas reversas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{FD}$ e indicamos por *x*, em decímetro.



Pelo teorema de Pitágoras, calculamos a medida *FD*, obtendo 10 dm.

Por uma das relações métricas do triângulo retângulo, temos:

$FD \cdot AA' = AF \cdot AD \Rightarrow$

$\Rightarrow 10 \cdot x = 6 \cdot 8 \therefore x = 4{,}8$

Concluímos, então, que a distância entre as retas reversas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{FD}$ é 4,8 dm.

25. $A = \dfrac{12 \cdot 5}{2} = 30$

Logo, o dodecaedro tem 30 arestas.

26. $A = \dfrac{3 \cdot 3 + 5 \cdot 4 + 7 \cdot 5}{2} = 32$

Logo, o poliedro tem 32 arestas.

27. $A = \dfrac{12 \cdot 3}{2} = 18$

Logo, o poliedro tem 18 arestas.

28. O número *A* de arestas é dado por:

$$A = \frac{4 \cdot 3 + 6 \cdot 4 + 4 \cdot 5}{2} = 28$$

Logo, o poliedro é constituído por 28 arestas.

29. alternativa **e**

Sejam *A* e *F* os números de arestas e de faces do poliedro, respectivamente. Inicialmente, obtemos o valor de *x*:

$$\begin{cases} A = 4x + 2 \\ A = \dfrac{4 \cdot 6 + x \cdot 3}{2} \end{cases} \Rightarrow 4x + 2 = \frac{4 \cdot 6 + x \cdot 3}{2} \Rightarrow x = 4$$

Como $F = 4 + x$, concluímos que $F = 8$.

30. Aplicando a relação de Euler, sendo $V = 16$ e $A = 24$, temos:
$16 - 24 + F = 2 \Rightarrow F = 10$
Logo, o poliedro tem 10 faces.

31. alternativa **d**
Como o poliedro é convexo, vale a relação de Euler.
$V - A + F = 2 \Rightarrow 8 - A + 6 = 2 \therefore A = 12$

32. a. Para todo poliedro convexo vale a relação de Euler: $V - A + F = 2$. Substituindo V, A e F por 8, 12 e 5, respectivamente, temos:
$V - A + F = 2 \Rightarrow 8 - 12 + 5 = 2$ (Falso!)
Como a relação de Euler não é satisfeita para esses valores, concluímos que não existe poliedro convexo constituído por 8 vértices, 12 arestas e 5 faces.

b. Para todo poliedro convexo vale a relação de Euler: $V - A + F = 2$. Substituindo, respectivamente, V, A e F pelos números ímpares $2m + 1$, $2n + 1$ e $2p + 1$, com $\{m, n, p\} \subset \mathbb{N}$ e $m \geqslant 4$, $n \geqslant 6$ e $p \geqslant 4$, temos:
$V - A + F = 2 \Rightarrow 2m + 1 - (2n + 1) + 2p + 1 = 2$
$\therefore 2m - 2n + 2p + 1 = 2 \Rightarrow 2(m - n + p) + 1 = 2$ (Falso!)
Observe que essa igualdade é falsa, porque o primeiro membro é um número ímpar e o segundo membro é um número par.
Como a relação de Euler não é satisfeita para esses valores, concluímos que não existe poliedro convexo em que V, A e F são todos números ímpares.

33. a. Como cada face da superfície tem 4 arestas, temos que o número A de arestas de toda a superfície é dado por:

$$A = \frac{840 \cdot 4}{2} = 1.680$$

b. Como cada ângulo poliédrico da superfície tem 4 arestas, temos que o número V de vértices de toda a superfície é dado por:

$$\frac{V \cdot 4}{2} = 1.680 \Rightarrow V = 840$$

34. a. Indicando por x e y os números de ângulos triédricos e tetraédricos do poliedro, respectivamente, temos:

$$\frac{(x \cdot 3 + y \cdot 4)}{2} = 30 \Rightarrow 3x + 4y = 60 \therefore y = \frac{60 - 3x}{4}$$

Como y deve ser o maior número possível, devemos determinar o menor número inteiro positivo x para que $60 - 3x$ seja divisível por 4. Isso ocorre para $x = 4$, com o que concluímos que $y = 12$. Logo, a estrutura é composta de 4 ângulos triédricos e 12 ângulos tetraédricos.

b. Pela relação de Euler, o número F de faces do poliedro é dado por: $16 - 30 + F = 2 \Rightarrow F = 16$

35. alternativa **d**
Sendo V, A e F o número de vértices, arestas e faces do poliedro convexo, respectivamente, temos, pela relação de Euler: $V - A + F = 2$
O número de faces é 15 e o número A de arestas é:

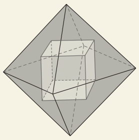
$$A = \frac{2 \cdot 5 + 4 \cdot 4 + (V - 6) \cdot 3}{2} \Rightarrow A = \frac{8 + 3V}{2}$$

Assim: $V - A + F = 2 \Rightarrow V - \frac{8 + 3V}{2} + 15 = 2$

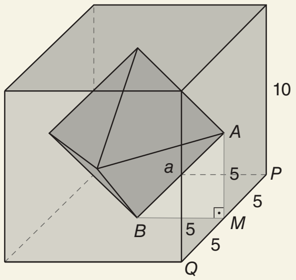
$2V - 8 - 3V + 30 = 4 \Rightarrow V = 18$

Logo: $A = \frac{8 + 3 \cdot 18}{2} \Rightarrow A = 31$

36. Os centros das faces de um octaedro regular são vértices de um hexaedro regular (cubo).



37. Sendo a a medida da aresta do octaedro, temos:

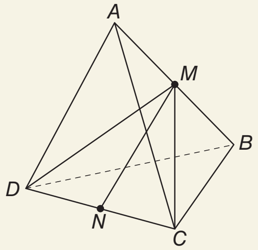


$(AB)^2 = (AM)^2 + (BM)^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow a^2 = 5^2 + 5^2$
$\therefore a = 5\sqrt{2}$ cm

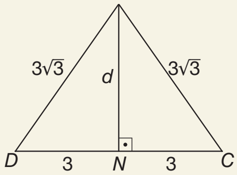
38. A área A_f de cada face é a área de um triângulo equilátero de lado 6 cm; logo: $A_f = \frac{6^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$ cm² $= 9\sqrt{3}$ cm²
Como o icosaedro regular é constituído de 20 faces congruentes, a área A de sua superfície é dada por:
$A = 20 \cdot 9\sqrt{3}$ cm² $= 180\sqrt{3}$ cm²

39. a. O triângulo ANB é isósceles de base $\overline{AB}$, e $\overline{NM}$ é mediana relativa a essa base.
Como a mediana relativa à base de um triângulo isósceles também é altura, concluímos que $\alpha = 90°$.

b. Repetindo para o triângulo CDM, da figura a seguir, o mesmo raciocínio adotado no item **a**, concluímos que o ângulo $M\widehat{N}C$ mede 90°.
Essa dedução, junto com a do item **a**, nos permite concluir que o segmento $\overline{NM}$ é perpendicular comum às retas reversas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{DC}$.



Portanto, a medida MN é a distância entre as retas reversas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{DC}$.
Temos que $DC = 6$ dm e que CM e DM são medidas das alturas de triângulos equiláteros com 6 dm de lado.
Logo: $CM = DM = \frac{6\sqrt{3}}{2}$ dm $\Rightarrow CM = DM = 3\sqrt{3}$ dm
Assim, indicando por d a medida MN, em decímetro, esquematizamos:
Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo MNC, temos:
$d^2 + 3^2 = (3\sqrt{3})^2 \Rightarrow d = 3\sqrt{2}$

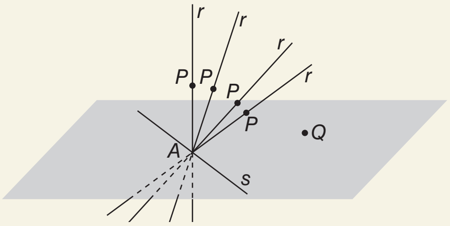


A distância entre as retas reversas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{DC}$ é $3\sqrt{2}$ dm.

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

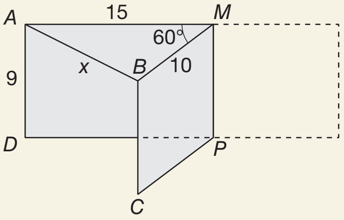
2. O enunciado garante que a reta r é perpendicular à reta s. Isso não garante que r seja perpendicular a α. Assim existem infinitas retas que poderiam representar a reta r. Observe algumas delas:

ILUSTRAÇÕES: ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA



Concluímos, então, que a distância entre *P* e *Q* não pode ser determinada apenas com os dados do enunciado.

3. a. Indicando por *x* a medida, em centímetro, do segmento $\overline{AB}$, esquematizamos:



Aplicando a lei dos cossenos no triângulo *AMB*, obtemos a medida *x*:

$x^2 = 15^2 + 10^2 - 2 \cdot 15 \cdot 10 \cdot \cos 60°$

$\therefore x^2 = 175 \Rightarrow x = 5\sqrt{7}$ ou $x = -5\sqrt{7}$ (não convém)

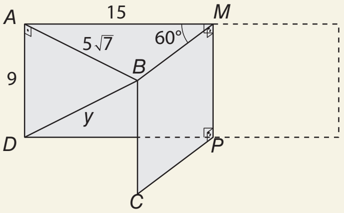
Logo, a distância entre os pontos *A* e *B* é $5\sqrt{7}$ cm.

b. Como a folha, antes da dobra, é um retângulo, temos que os ângulos internos $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ e $\hat{D}$ são retos. Como $\overline{MP}$ é paralelo a $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$, temos que os ângulos $A\hat{M}P$, $M\hat{P}D$, $B\hat{M}P$ e $C\hat{P}M$ também são retos. Assim, o segmento $\overline{MP}$ divide o retângulo *ABCD* em dois retângulos: *AMPD* e *BMPC*.

Portanto, na folha dobrada, temos que a reta $\overleftrightarrow{MP}$ é perpendicular aos planos pl(*AMP*) e pl(*DPC*).

Como a reta $\overleftrightarrow{AD}$ é paralela a $\overleftrightarrow{MP}$, e esta é perpendicular ao plano pl(*AMB*), deduzimos que $\overleftrightarrow{AD}$ também é perpendicular ao plano pl(*AMB*). Logo, qualquer reta que pertença ao plano pl(*AMB*) e passe por *A* é perpendicular a $\overleftrightarrow{AD}$. Com isso, concluímos que o ângulo $B\hat{A}D$ é reto, ou seja, sua medida é 90°.

c. Indicando por *y* a medida, em centímetro, do segmento $\overline{BD}$, esquematizamos:



Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo *ABD*, temos:

$y^2 = (5\sqrt{7})^2 + 9^2 \Rightarrow y^2 = 256$

$\therefore y = \sqrt{256}$ ou $y = -\sqrt{256}$ (não convém)

$\therefore y = 16$

Logo, a distância entre os pontos *B* e *D* é 16 cm.

4 a. Verdadeira, conforme a justificativa a seguir.

A reta $\overleftrightarrow{AC}$ é perpendicular ao plano pl(*BAD*), pois $\overline{AB}$ e $\overline{AD}$ representam o mesmo lado do esquadro, em direções concorrentes. Logo, toda reta contida no plano pl(*BAD*) e concorrente com $\overleftrightarrow{AC}$ é perpendicular a $\overleftrightarrow{AC}$. Assim, $\overleftrightarrow{AD}$ é perpendicular a $\overleftrightarrow{AC}$, ou seja, $C\hat{A}D'$ é ângulo reto.

b. Verdadeira, conforme a justificativa a seguir.

(1) $AD = AB$, pois $\overline{AD}$ e $\overline{AB}$ representam o mesmo lado do esquadro.

(2) No triângulo *ABC*, temos: $\text{tg } 30° = \dfrac{AB}{AC}$

(3) No item **a**, mostramos que o ângulo $C\hat{A}D'$ é reto. Assim, sendo α a medida do ângulo agudo $A\hat{C}D'$, temos: $\text{tg } \alpha = \dfrac{AD'}{AC}$

(4) Como $\overline{AD}$ é oblíquo ao plano do tampo da mesa, deduzimos que sua projeção ortogonal $\overline{AD'}$ sobre esse tampo tem medida menor que *AD*.

De (1), (2), (3) e (4), temos:

$$\begin{cases} \text{tg } 30° = \dfrac{AB}{AC} \\ \text{tg } \alpha = \dfrac{AD'}{AC} \\ 0° < \alpha < 90° \\ AD' < AB \end{cases} \Rightarrow \text{tg } \alpha < \text{tg } 30°$$

Logo: $\alpha < 30°$

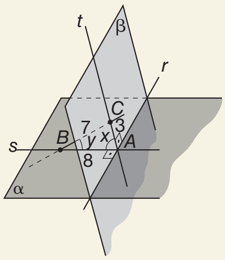
c. Falsa, conforme a justificativa a seguir.

Nos itens **a** e **b**, provamos que o triângulo *CAD'* é retângulo em *A* e que a medida do ângulo $A\hat{C}D'$ é menor que 30°. Logo, a medida do ângulo $A\hat{D'}C$ é maior que 60°.

d. Falsa, conforme a justificativa a seguir.

No item **a**, provamos que o triângulo *CAD'* é retângulo em *A*; logo, a medida do ângulo $A\hat{D'}C$ deve ser menor que 90°.

5. Considere *x* e *y* as medidas, em grau, dos ângulos $B\hat{A}C$ e $A\hat{B}C$, respectivamente.



a. Aplicando a lei dos cossenos no triângulo *ABC*, temos:

$7^2 = 3^2 + 8^2 - 2 \cdot 3 \cdot 8 \cdot \cos x \Rightarrow \cos x = \dfrac{1}{2}$

Como *x* é uma medida de um ângulo interno de um triângulo, portanto, $0° < x < 180°$ e $x = 60°$.

Concluímos, então, que a medida de um ângulo agudo formado pelos planos α e β é 60°.

b. Aplicando novamente a lei dos cossenos no triângulo *ABC*, temos:

$3^2 = 7^2 + 8^2 - 2 \cdot 7 \cdot 8 \cdot \cos y \Rightarrow \cos y = \dfrac{13}{14}$

Como cos *y* é positivo e *y* é uma medida de um ângulo interno de um triângulo, portanto, $0° < y < 180°$, deduzimos que $A\hat{B}C$ é um ângulo agudo.

Concluímos, então, que o cosseno de um ângulo agudo formado pela reta $\overleftrightarrow{BC}$ e o plano α é $\dfrac{13}{14}$.

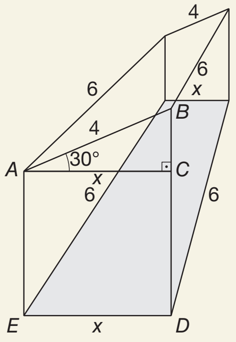
c. Pelo item **b**, temos que um ângulo agudo formado pela reta $\overleftrightarrow{BC}$ e o plano α tem medida *y* tal que $\cos y = \dfrac{13}{14}$.

ILUSTRAÇÕES: ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

Assim, com o auxílio de uma calculadora eletrônica, obtemos a aproximação: $y \approx 21{,}8°$.

Concluímos, então, que a medida de um ângulo obtuso formado pela reta $\overleftrightarrow{BC}$ e o plano α tem medida aproximada de 158,2°.

6. Como os lados maiores da cobertura são paralelos ao piso plano e horizontal, suas medidas são iguais às medidas de suas projeções ortogonais sobre o piso. Indicamos por x a medida, em metro, de cada um dos lados menores da sombra retangular.



No triângulo ABC, temos:

$$\cos 30° = \frac{x}{4} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{x}{4}$$

$$\therefore x = 2\sqrt{3}$$

Logo, a área S da sombra é dada por:

$$S = (2\sqrt{3} \cdot 6)\ \text{m}^2 \Rightarrow S = 12\sqrt{3}\ \text{m}^2$$

7. Aplicando a lei dos cossenos no triângulo DEF, calculamos a medida FD, em metro:

$(FD)^2 = 3^2 + 5^2 - 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cos 120° \Rightarrow FD = 7$

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo CDF, calculamos a medida FC, em metro:

$(FC)^2 = 7^2 + 4^2 \Rightarrow FC = \sqrt{65}$

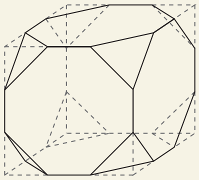
Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo BEF, calculamos a medida FB, em metro: $(FB)^2 = 3^2 + 4^2 \Rightarrow FB = 5$

Aplicando a lei dos cossenos no triângulo CBF, calculamos o cosseno de α, em que α é a medida do ângulo $F\hat{B}C$:

$(\sqrt{65})^2 = 5^2 + 5^2 - 2 \cdot 5 \cdot 5 \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = -\dfrac{3}{10}$

Com o auxílio de uma calculadora científica, concluímos que: $\alpha \approx 107{,}46°$

8. alternativa **c**



Um cubo tem 6 faces e 8 vértices. Como o corte realizado em cada vértice gera uma nova face, concluímos que o número de faces do poliedro P é dado por $6 + 8 = 14$.

9. Sendo n o número de arestas de cada face, temos:

$$\begin{cases} A = 20 \\ A = \dfrac{nF}{2} \end{cases} \Rightarrow nF = 40$$

Como n e F são números naturais, com $n \geqslant 3$ e $F \geqslant 4$, o maior valor de F possível é obtido quando se atribui a n o menor valor possível. Assim, obtemos $n = 4$ e $F = 10$.

Aplicando a relação de Euler, temos:

$V - A + F = 2 \Rightarrow V - 20 + 10 = 2\ \therefore V = 12$

Logo, a pedra deve ter o formato de um poliedro convexo com 20 arestas, 10 faces e 12 vértices.

10. O número A de arestas desse poliedro é dado por:

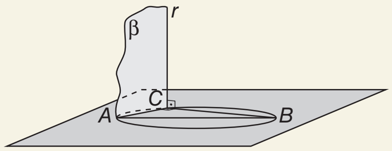
$$A = \frac{20 \cdot 6 + 12 \cdot 5}{2} = 90$$

Como todas essas arestas são congruentes, o total t de linha necessária para costurar a bola é dado por:

$t = (90 \cdot 15)\ \text{cm} = 1.350\ \text{cm} = 13{,}5\ \text{m}$

VERIFIQUE O QUE APRENDEU NO CAPÍTULO 8

3. b. O triângulo ABC está inscrito em uma semicircunferência de diâmetro $\overline{AB}$; logo, esse triângulo é retângulo em C. Assim temos que a reta $\overleftrightarrow{BC}$ é perpendicular às retas concorrentes r e $\overleftrightarrow{AC}$, com o que concluímos que $\overleftrightarrow{BC}$ é perpendicular ao plano β determinado por r e A.



4. a. Determinando o número A de arestas obtemos $A = 36$. Assim, pela relação de Euler, concluímos que o número V de vértices do tetradecaedro é dado por:

$V - 36 + 14 = 2 \Rightarrow V = 24$

b. O número de segmentos de reta com extremos em dois vértices distintos desse poliedro é dado por: $C_{24,\,2} = 276$. Subtraindo desse resultado o número de arestas e o número de diagonais das faces, obtém-se o número n de diagonais do poliedro, isto é:

$$n = 276 - 36 - \frac{6 \cdot 8 \cdot 5}{2} = 120$$

CAPÍTULO 9 Prismas e pirâmides

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

4. a. $A_f = (8 \cdot 12)\ \text{dm}^2 = 96\ \text{dm}^2$

b. $B = \left(6 \cdot \dfrac{8 \cdot 4\sqrt{3}}{2}\right) \text{dm}^2 = 96\sqrt{3}\ \text{dm}^2$

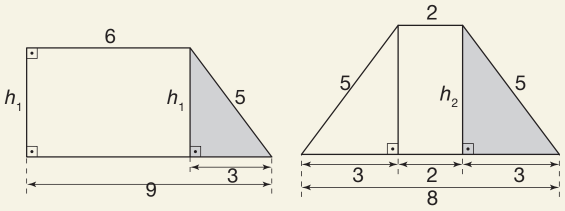
c. $A_\ell = (6 \cdot 12 \cdot 8)\ \text{dm}^2 = 576\ \text{dm}^2$

d. $A_T = A_\ell + 2B \Rightarrow A_T = (576 + 2 \cdot 96\sqrt{3})\ \text{dm}^2$

$\therefore A_T = 192(3 + \sqrt{3})\ \text{dm}^2$

5. alternativa **d**

Inicialmente, calculamos as medidas, em decímetro, das alturas h_1 e h_2 dos trapézios das bases de P_1 e P_2, respectivamente, aplicando o teorema de Pitágoras nos triângulos sombreados. Assim, $h_1 = 4$ e $h_2 = 4$..



Assim, indicando por $A_{1(L)}$ e $A_{1(T)}$ as áreas lateral e total do prisma P_1, respectivamente, e por $A_{2(L)}$ e $A_{2(T)}$ as áreas lateral e total do prisma P_2, respectivamente, temos:

$A_{1(L)} = (5 \cdot 8 + 6 \cdot 8 + 4 \cdot 8 + 9 \cdot 8)\ \text{dm}^2 \Rightarrow A_{1(L)} = 192\ \text{dm}^2$

$A_{1(T)} = \left[192 + 2 \cdot \dfrac{(6 + 9) \cdot 4}{2}\right] \text{dm}^2 \Rightarrow A_{1(T)} = 252\ \text{dm}^2$

$A_{2(L)} = (5 \cdot 6 + 5 \cdot 6 + 2 \cdot 6 + 8 \cdot 6)\ \text{dm}^2 \Rightarrow A_{2(L)} = 120\ \text{dm}^2$

$A_{2(T)} = \left[120 + 2 \cdot \dfrac{(2 + 8) \cdot 4}{2}\right] \text{dm}^2 \Rightarrow A_{2(T)} = 160\ \text{dm}^2$

Analisando as alternativas, concluímos que **d** é a correta, pois: $\dfrac{A_{1(L)} - A_{2(T)}}{A_{2(T)}} = \dfrac{192 - 160}{160} = \dfrac{32}{160} = 0{,}2 = 20\%$

ILUSTRAÇÕES: ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

6. alternativa **b**

O teto e a parte das paredes a serem pintados têm área A dada por:

$A = (5 \cdot 6 + 2 \cdot 6 \cdot 3 + 2 \cdot 5 \cdot 3 - 2 \cdot 1{,}3 \cdot 2 - 2{,}5 \cdot 1{,}8)\ \text{m}^2$

$A = 86{,}3\ \text{m}^2$

Como serão necessárias duas demãos de tinta, a área a ser pintada é $2A$, ou seja, $172{,}6\ \text{m}^2$.

Logo, segundo a estimativa do pintor, o percentual da tinta da lata a ser usado na pintura é dado por $\frac{172{,}6}{250} =$

$= 0{,}6904$, que equivale a 69,04%.

7. alternativa **e**

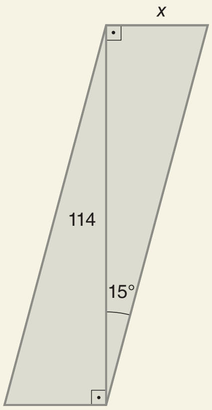
Indicando por x a medida, em metro, do lado do quadrado da base da torre, esquematizamos:

$\text{tg } 15° = \frac{x}{114} \Rightarrow 0{,}26 = \frac{x}{114}$

$\therefore x = 29{,}64$

Logo, a área A da base da torre é dada por:

$A = (29{,}64)^2\ \text{m}^2 = 878{,}5296\ \text{m}^2$.



MARIO MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

8. **a.** O volume V, que é dado por:

$V = (6 \cdot 3 \cdot 2)\ \text{dm}^3 \Rightarrow V = 36\ \text{dm}^3$

b. A área total A_T, que é dada por:

$A_T = 2 \cdot (6 \cdot 3 + 6 \cdot 2 + 3 \cdot 2)\ \text{dm}^2 \Rightarrow A_T = 72\ \text{dm}^2$

c. A medida D de uma de suas diagonais, que é dada por:

$D = \sqrt{6^2 + 3^2 + 2^2}\ \text{dm} \Rightarrow D = 7\ \text{dm}$

9. **a.** O volume V do paralelepípedo, em metro cúbico, é calculado por: $V = 6x \cdot x \cdot 3x \Rightarrow V = 18x^3$

Assim: $V = 144 \Rightarrow 18x^3 = 144 \Rightarrow x = 2$

Logo, o comprimento, a largura e a altura do paralelepípedo medem 12 m, 2 m e 6 m, respectivamente; portanto, a área total A_T, em metro quadrado, é:

$A_T = 2 \cdot (12 \cdot 2 + 12 \cdot 6 + 2 \cdot 6) \Rightarrow A_T = 216$

b. Desse paralelepípedo foram retirados dois cubos com medida de 2 m de aresta. Pelo item **a**, sabemos que o volume inicial é 144 m³, assim, o volume V' do sólido remanescente, em metro cúbico, é dado por:

$V' = (144 - 2 \cdot 2^3) \Rightarrow V' = 128$

Da superfície total do paralelepípedo do item **a** foram retirados 4 quadrados de lado medindo 2 m e acrescentados 8 quadrados de lados medindo 2 m; logo, a área total A'_T do sólido remanescente, em metro quadrado, é dada por: $A'_T = 216 - 4 \cdot 2^2 + 8 \cdot 2^2 \Rightarrow A'_T = 232$

10. Indicando por x a medida de altura do paralelepípedo, em centímetro, a largura é $3x$ e o comprimento mede $4x$. Assim, temos:

$\sqrt{x^2 + (3x)^2 + (4x)^2} = 2\sqrt{26} \Rightarrow x = 2$

Logo, o comprimento, a largura e a altura do paralelepípedo medem 8 cm, 6 cm e 2 cm, respectivamente.

Concluímos, então, que o volume V do paralelepípedo é dado por:

$V = (8 \cdot 6 \cdot 2)\ \text{cm}^3 \Rightarrow V = 96\ \text{cm}^3$

11. alternativa **c**

Sendo x a medida, em metro, de cada aresta da base, temos que a área total A_T do prisma é dada por:

$A_T = 2x^2 + 4 \cdot 3x$

Assim: $A_T = 80 \Rightarrow 2x^2 + 4 \cdot 3x = 80 \Rightarrow x^2 + 6x - 40 = 0$

As raízes dessa equação são 4 e −10 (não convém).

Logo, a medida de cada aresta da base mede 4 m.

Concluímos, então, que o volume V do prisma, em metro cúbico, é calculado por: $V = 4^2 \cdot 3 \Rightarrow V = 48$

12. Sendo a, b e c as medidas do comprimento, a largura e a altura, em metro, do paralelepípedo e k a constante de proporcionalidade, temos:

$$\frac{a}{9} = \frac{b}{4} = \frac{c}{1} = k \Rightarrow \begin{cases} a = 9k \\ b = 4k \\ c = k \end{cases}$$

O volume V, em metro cúbico, do paralelepípedo é dado por: $V = 9k \cdot 4k \cdot k = 36k^3$

Como a medida da capacidade da piscina é 288.000 L, que equivale a 288 m³, temos: $V = 288 \Rightarrow 36k^3 = 288 \Rightarrow k = 2$

Concluímos, então, que o comprimento, a largura e a profundidade do paralelepípedo medem 18 m, 8 m e 2 m, respectivamente.

13. **a.** Os volumes V_S e V_C da espuma de poliuretano usada nos colchões de solteiro e de casal, respectivamente, são calculados por:

$V_S = (90 \times 200 \times 25)\ \text{cm}^3 \Rightarrow V_S = 0{,}450\ \text{m}^3$

$V_C = (150 \times 200 \times 25)\ \text{cm}^3 \Rightarrow V_C = 0{,}750\ \text{m}^3$

Logo, a medida das massas M_S e M_C de poliuretano usado em cada tipo de colchão é dada por:

$M_S = (28 \times 0{,}450)\ \text{kg} \Rightarrow M_S = 12{,}6\ \text{kg}$

$M_C = (28 \times 0{,}750)\ \text{kg} \Rightarrow M_C = 21\ \text{kg}$

b. Calculando, para o colchão de solteiro, a área da superfície da espuma e a área do tecido para revestimento com 4% a mais, temos:

$A_{\text{espuma S}} = 2(200 \times 90 + 200 \times 25 + 90 \times 25)\ \text{cm}^2$

$A_{\text{espuma S}} = 50.500\ \text{cm}^2$

$A_{\text{tecido S}} = 1{,}04 \times 50.500\ \text{cm}^2 \Rightarrow A_{\text{tecido S}} = 52.520\ \text{cm}^2$

Calculando, para o colchão de solteiro, a área da superfície da espuma e a área do tecido para revestimento com 5% a mais, temos:

$A_{\text{espuma}}\ C = 2(200 \times 150 + 200 \times 25 + 150 \times 25)\ \text{cm}^2$

$A_{\text{espuma}}\ C = 77.500\ \text{cm}^2$

$A_{\text{tecido}}\ C = 1{,}05 \times 77.500\ \text{cm}^2 \Rightarrow A_{\text{tecido}}\ C = 81.375\ \text{cm}^2$

Indicando, respectivamente, por s e c o número de colchões fabricados de solteiro e de casal, temos:

$$\begin{cases} s + c = 28 \\ 52.520s + 81.375c = 1.701.400 \end{cases} \Rightarrow s = 20 \text{ e } c = 8$$

Logo, departamento produziu 20 unidades de colchão de solteiro e 8 unidades de colchão de casal.

14. Sendo a a medida, em decímetro, da aresta do cubo, temos: $6a^2 = 96 \Rightarrow a = 4$

a. $D = a\sqrt{3} = 4\sqrt{3}\ \text{dm}$

b. $A_{\text{lateral}} = 4 \cdot a^2 = 4 \cdot 4^2\ \text{dm}^2 = 64\ \text{dm}^2$

c. $V = a^3 = 4^3\ \text{dm}^3 = 64\ \text{dm}^3$

15. alternativa **b**

Indicando por x a medida, em centímetro, de cada aresta do cubo, temos: $x^3 = 3 \cdot 18 \cdot 4 \Rightarrow x = 6$

16. alternativa **a**

O volume de água retirada é igual ao volume V de um paralelepípedo reto-retângulo de dimensões 50 cm por 30 cm por 2 cm: $V = (50 \cdot 30 \cdot 2)\ \text{cm}^3 \Rightarrow V = 3\ \text{L}$

17. Indicando por x a medida, em centímetro, da aresta do cubo maior, deduzimos que a medida da aresta do cubo menor é $0{,}8x$. Como a soma dos volumes dos cubos deve ser igual ao volume do paralelepípedo, temos:

$x^3 + (0{,}8x)^3 = 8 \cdot 9 \cdot 21 \Rightarrow x^3 = 1.000 \Rightarrow x = 10$

A medida y, em centímetro, de cada aresta do cubo menor é calculada por: $y = 0{,}8 \times 10 \Rightarrow y = 8$

Logo, o volume V do cubo menor é: $V = (8\ \text{cm})^3 \Rightarrow V = 512\ \text{cm}^3$

19. a. Sendo h a medida da altura, em centímetro, do prisma, temos: $\text{sen}\ 45° = \frac{h}{20} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{h}{20} \therefore h = 10\sqrt{2}\ \text{cm}$

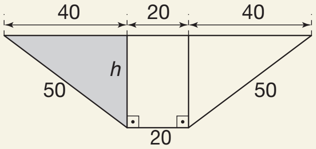
b. A área B da base é dada por:

$B = \left(\frac{7 \cdot 10}{2}\right)\ \text{cm}^2 = 35\ \text{cm}^2$

Assim, o volume V é dado por:

$V = (35 \cdot 10\sqrt{2})\ \text{cm}^3 = 350\sqrt{2}\ \text{cm}^3$

20. Inicialmente, calculamos a medida h, em centímetro, da altura do trapézio aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo sombreado e obtemos $h = 30$.



O volume interno V do bebedouro, em centímetro cúbico, é: $V = \frac{(100 + 20) \cdot 30}{2} \cdot 200 \Rightarrow V = 360.000$

Como $1\ \text{dm}^3 = 1\ \text{L}$ e $360.000\ \text{cm}^3 = 360\ \text{dm}^3$, concluímos que a medida da capacidade do bebedouro é 360 L.

21. O prisma triangular é regular com medidas da altura $2\sqrt{3}$ e aresta da base 2.

A área B da base é dada por: $B = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$

Logo, o volume V do prisma é dado por: $V = \sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3} = 6$

22. Indicando por $\overline{BC}$ a aresta lateral de extremo B, temos que a diagonal $\overline{AC}$ da base do prisma passa pelo centro da base; logo, a medida AC é o dobro da medida da aresta da base. Assim, indicando por x a medida, em decímetro, da aresta da base e aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo ABC, temos:

$x^2 = 9 \Rightarrow x = 3$ (ou $x = -3$, não convém)

Logo, a área B da base desse prisma é dada por:

$B = 6 \cdot \frac{3 \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2}}{2}\ \text{dm}^2 = \frac{3 \cdot 9\sqrt{3}}{2}\ \text{dm}^2 = \frac{27\sqrt{3}}{2}\ \text{dm}^2$

Portanto, o volume V do prisma é dado por:

$V = \frac{27\sqrt{3}}{2} \cdot 8\ \text{dm}^3 = 108\sqrt{3}\ \text{dm}^3$

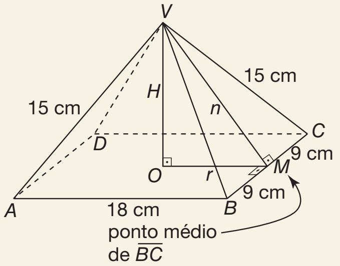
23. Sendo B a área da base do prisma octogonal, em centímetro quadrado, temos: $B = 8^2 - 4 \cdot \frac{2 \cdot 2}{2} \Rightarrow B = 56$

Assim, o volume V desse prisma, em centímetro cúbico, é dado por: $V = 56 \cdot 75 \Rightarrow V = 4.200 \therefore 4.200\ \text{cm}^3$.

24. O volume despejado é o volume V de um prisma reto de altura medindo 40 cm cuja base é um triângulo retângulo com medida de catetos 8 cm e 40 cm:

$V = \left(\frac{8 \cdot 40}{2}\right) \cdot 40\ \text{cm}^3 = 6.400\ \text{cm}^3 = 6{,}4\ \text{dm}^3 \therefore V = 6{,}4\ \text{L}$

26. Nomeamos os vértices da pirâmide, segundo o esquema a seguir.



a. Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo VMC, temos: $n = 12$ cm:

b. O apótema da base mede metade da aresta da base: $r = 9$ cm

c. Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo VOM, temos: $H = 3\sqrt{7}$ cm

d. A área A_f de cada face lateral é $108\ \text{cm}^2$

Logo, a área lateral A_ℓ da pirâmide é dada por:

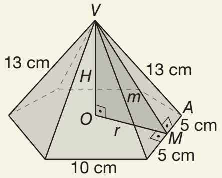
$A_\ell = 4 \cdot A_f = 432\ \text{cm}^2$

e. $B = 18^2\ \text{cm}^2 = 324\ \text{cm}^2$

f. $A_T = A_\ell + B \Rightarrow A_T = (432 + 324)\ \text{cm}^2 = 756\ \text{cm}^2$

g. $V = \frac{1}{3} \cdot B \cdot H \Rightarrow V = 324\sqrt{7}\ \text{cm}^3$

27. Nomeamos os vértices da pirami-de segundo o esquema a seguir.



a. Aplicando o teorema de Pitágoras no triangulo VMC, temos:

$n = 12$ cm

b. A medida r do apótema da base é a medida da altura de um triângulo equilátero de lado 10 cm:

$r = \frac{10\sqrt{3}}{2}\ \text{cm} = 5\sqrt{3}\ \text{cm}$

c. No triângulo VOM, temos:

$H^2 + (5\sqrt{3})^2 = 12^2 \Rightarrow H = \sqrt{69}\ \text{cm}$

d. A área A_f de cada face lateral é:

$A_f = \left(\frac{10 \cdot 12}{2}\right)\ \text{cm}^2 = 60\ \text{cm}^2$

Logo, a área lateral A_L é dada por:

$A_L = (6 \cdot 60)\ \text{cm}^2 = 360\ \text{cm}^2$

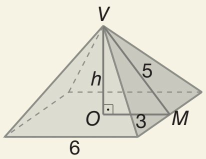
e. $B = 6 \cdot \left(\frac{10 \cdot 5\sqrt{3}}{2}\right)\ \text{cm}^2 = 150\sqrt{3}\ \text{cm}^2$

f. $A_T = A_L + B = (360 + 150\sqrt{3})\ \text{cm}^2 =$

$= 30(12 + 5\sqrt{3})\ \text{cm}^2$

g. $V = \frac{1}{3} \cdot B \cdot H = 150\sqrt{23}\ \text{cm}^3$

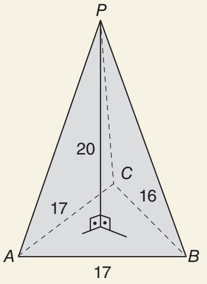
28. A pirâmide é quadrangular regular medindo 6 dm de aresta da base e 5 dm de apótema. Indicando por h a medida, em decímetro, da altura dessa pirâmide, esquematizamos:



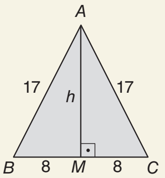
Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo VOM, temos: $h = 4$ dm.

ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

29. a. A base da pirâmide é um triângulo isósceles *ABC* de base $\overline{BC}$ de medida 16 cm. Sendo *h* a medida, em centímetro, da altura desse triângulo, relativa ao lado $\overline{BC}$, esquematizamos:



Base da pirâmide



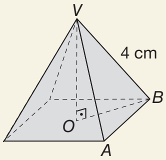
Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo *AMC*, temos: $h = 15$

Assim, a área A_b, em centímetro quadrado, da base da pirâmide é calculada por: $A_b = \frac{16 \cdot 15}{2} = 120$

Finalmente, calculamos o volume *V* da pirâmide:

$$V = \left(\frac{1}{3} \cdot 120 \cdot 20\right) \text{cm}^3 \Rightarrow V = 800 \text{ cm}^3$$

b. No esquema, *O* é o centro da base da pirâmide; logo, a medida do segmento $\overline{OB}$ é metade da medida da diagonal do quadrado, ou seja, $OB = 2\sqrt{2}$ dm.

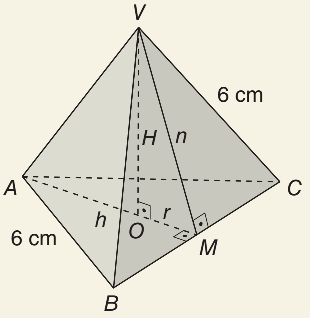


Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo *VOB*, calculamos a medida *VO*, em decímetro: $VO = 2\sqrt{2}$

Concluímos calculando o volume V_p da pirâmide:

$$V_p = \left(\frac{1}{3} \cdot 4^2 \cdot 2\sqrt{2}\right) \text{dm}^3 \Rightarrow V_p = \frac{32\sqrt{2}}{3} \text{ dm}^3$$

30. Nomeamos os vértices do teatraedro segundo o esquema:



a. Num teatraedro regular, todas as faces são triângulo equiláteros; logo, o apótema desse tetraedro é a altura de um triângulo equilátero de lado 6 cm:

$$n = \frac{6\sqrt{3}}{2} \text{ cm} = 3\sqrt{3} \text{ cm}$$

b. A medida *r* do apótema da base é a terça parte da altura de um triângulo equilátero de lado 6 cm:

$$r = \frac{1}{3} \cdot 3\sqrt{3} \text{ cm} = \sqrt{3} \text{ cm}$$

c. Aplicamos o teorema de Pitágoras no triângulo *VOM*, obtendo:

$$27 = H^2 + (\sqrt{3})^2 \Rightarrow H^2 = 24$$

$$\therefore H = 2\sqrt{6} \text{ cm}$$

d. $A_T = 4 \cdot \frac{6^2\sqrt{3}}{4} \text{ cm}^2 = 36\sqrt{3} \text{ cm}^2$

e. A área *B* da base é a área de um triângulo equilátero com 6 cm de lado, logo,

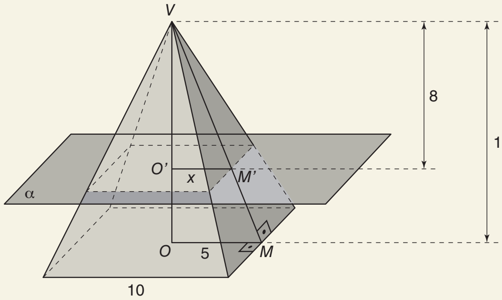
$$B = \frac{6^2\sqrt{3}}{4} \text{ cm}^2 \Rightarrow B = 9\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

Como o volume V é calculado por $V = \frac{1}{3} \cdot B \cdot H$, temos:

$$V = \frac{1}{3} \cdot 9\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{6} \text{ cm}^3 \Rightarrow V = 18\sqrt{2} \text{ cm}^3$$

31. a. O apótema de um quadrado é o segmento de reta que une o centro do quadrado ao ponto médio de um dos lados. Assim, $r = 5$ cm.

b. Indicando por *x* a medida do apótema $\overline{O'M'}$ da secção *ABCD*, esquematizamos:



Da semelhança entre os triângulos *VO'M'* e *VOM*, temos:

$$\frac{x}{5} = \frac{8}{12} \Rightarrow x = \frac{40}{12} \therefore x = \frac{10}{3}$$

Deduzimos, então, que a medida do lado da secção transversal *ABCD* é $\frac{20}{3}$ cm. Portanto, a área *S* dessa secção é dada por: $S = \left(\frac{20}{3}\right)^2 \text{cm}^2 \Rightarrow S = \frac{400}{9} \text{ cm}^2$

Finalmente, calculamos o volume *v* da pirâmide *VABCD*:

$$v = \frac{1}{3} \cdot \frac{400}{9} \cdot 8 \text{ cm}^3 \Rightarrow v = \frac{3.200}{27} \text{ cm}^3$$

32. O volume *V* da pirâmide de água formada com o cubo inclinado é dado por:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{(9 \cdot 12)}{2} \cdot 12 \text{ cm}^3 = 216 \text{ cm}^3$$

Esse volume é o mesmo do paralelepípedo de água formado quando o cubo está com sua base *EFGH* na posição horizontal; logo:

$$12 \cdot 9 \cdot x = 216 \Rightarrow x = 2 \therefore 2 \text{ cm}$$

34. O plano separa a pirâmide *P* em dois sólidos: uma pirâmide *P'* e um tronco de pirâmide *T*. Indicando por ℓ a medida da aresta da base de *P'*, temos: $\frac{12}{6} = \frac{4}{\ell} \Rightarrow \ell = 2$ cm

Os volumes V_P e $V_{P'}$ das pirâmides *P* e *P'*, respectivamente, são:

$$V_P = \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{6 \cdot 4 \cdot 2 \cdot \sqrt{3}}{2} \cdot 12\right) \text{cm}^3 = 96\sqrt{3} \text{ cm}^3 \text{ e}$$

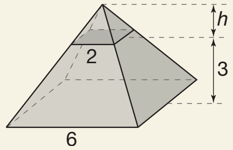
$$V_{P'} = \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{6 \cdot 2 \cdot \sqrt{3}}{2} \cdot 6\right) \text{cm}^3 = 12\sqrt{3} \text{ cm}^3$$

Logo, o volume V_T do tronco de pirâmide é dado por:

$$V_T = V_P - V_{P'} = (96\sqrt{3} - 12\sqrt{3}) \text{ cm}^3 = 84\sqrt{3} \text{ cm}^3$$

35. alternativa **e**

Prolongando as arestas laterais desse tronco de pirâmide, obtemos uma pirâmide de altura $3 + h$, em metro, conforme mostra a figura:



ILUSTRAÇÕES: ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

Assim, temos: $\frac{h+3}{h} = \frac{6}{2} \Rightarrow h = 1{,}5$ m

Logo, o volume V do tronco de pirâmide é dado por:

$$V = \left(\frac{1}{3} \cdot 6^2 \cdot 4{,}5 - \frac{1}{3} \cdot 2^2 \cdot 1{,}5\right) \text{ m}^3 = 52 \text{ m}^3$$

$\therefore V = 52.000 \text{ dm}^3 \Rightarrow V = 52.000$ L

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

2. **a.** A área B da base do prisma é dada por:

$$B = 6 \cdot \frac{2\sqrt{3} \cdot 3}{2} \text{ m}^2 = 18\sqrt{3} \text{ m}^2 \approx 30{,}6 \text{ m}^2$$

Assim, a pressão P_B sobre o plano da base é calculada por: $P_B \approx \frac{61{,}2 \text{ N}}{30{,}6 \text{ m}^2} \Rightarrow P_B \approx 2 \text{ N/m}^2$

b. A área A_f de uma face lateral do prisma é dada por:

$A_f = 2\sqrt{3} \cdot 6 \text{ m}^2 = 12\sqrt{3} \text{ m}^2 \Rightarrow A_f \approx 20{,}4 \text{ m}^2$

Assim, a pressão P_f sobre o plano de uma face lateral é calculada por: $P_f \approx \frac{61{,}2 \text{ N}}{20{,}4 \text{ m}^2} \Rightarrow P_f \approx 3 \text{ N/m}^2$

3. alternativa **d**

O volume V dos dois tipos de lata deve ser o mesmo, que é dado por: $V = (24 \cdot 24 \cdot 40) \text{ cm}^3 = 23.040 \text{ cm}^3$

Cada lado da base da nova lata terá medida $(1{,}25 \cdot 24)$ cm, ou seja, 30 cm. Assim, sendo h a medida, em centímetro, da altura da nova lata, temos:

$30 \cdot 30 \cdot h = 23.040 \Rightarrow h = 25{,}6$ m

Logo, a altura da nova lata terá $40 - 25{,}6 = 14{,}4$ cm a menos que a altura da lata atual. Então, $\frac{14{,}4}{40} = 0{,}36$

Concluímos que a altura da lata atual deve ser reduzida em 36%.

4. alternativa **b**

Sendo x a medida da aresta do cubo menor, a aresta do cubo maior mede $2x$. Assim, o volume do cubo menor é x^3 e o do cubo maior é $8x^3$. Logo, a capacidade total do recipiente é $9x^3$.

Como a torneira já despejou $4x^3$ da água no tanque em 8 minutos, concluímos que para despejar o volume restante, que é de $5x^3$, ela levará mais 10 minutos.

5. alternativa **c**

A água deslocada com a submersão do objeto teria o formato de um paralelepípedo com 40 cm de comprimento por 30 cm de largura. Sendo x a medida, em centímetro, da altura desse paralelepípedo, temos: $40 \cdot 30 \cdot x = 2.400 \Rightarrow x = 2$

Assim, deduzimos que o nível da água subiria 2 cm e, consequentemente, a altura da água no tanque seria 22 cm.

6. Sendo V o volume de água no recipiente cuja face de dimensões é 20 cm e 10 cm, temos:

$V = (20 \cdot 10 \cdot 6) \text{ cm}^3 \Rightarrow V = 1.200 \text{ cm}^3$

Ao apoiar uma face de dimensões 10 cm por 8 cm sobre o tampo da mesa, seja x a distância entre a superfície da água e a face superior, temos:

$10 \cdot 8 \cdot (20 - x) = V \Rightarrow x = 5$ cm

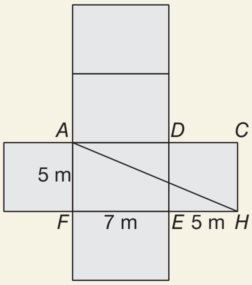
7. Sejam x e y as dimensões, em centímetro, da face de área 80 cm²; x e z as dimensões, em centímetro, da face de área 24 cm²; z e y as dimensões, em centímetro, da face de 30 cm². Assim, temos:

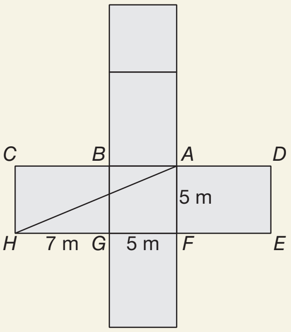
$$\begin{cases} xy = 80 \\ xz = 24 \\ zy = 30 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{80}{x} \\ z = \frac{24}{x} \\ zy = 30 \end{cases}$$

Portanto, $x = 8$, $y = 10$ e $z = 3$.

Logo, o volume V do paralelepípedo é $V = 240 \text{ cm}^3$.

8. O fio pode ser embutido nas paredes *ADEF* e *CDEH* ou nas paredes *ABGF* e *BCHG*. Planificando o paralelepípedo para as duas situações, temos:





ILUSTRAÇÕES: ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

O caminho mais curto, $\overline{AH}$, é a hipotenusa de um triângulo retângulo com catetos de 12 cm e 5 cm. Aplicando o teorema de Pitágoras temos que $\overline{AH}$ mede 13 cm.

9. **a.** Indicando por x a medida, em decímetro, do comprimento da caixa atual (paralelepípedo), temos que a medida d de uma diagonal desse paralelepípedo é 25 dm; logo:

$$d = 25 \Rightarrow \sqrt{x^2 + 15^2 + \frac{9x^2}{16}} = 25$$

$\therefore x^2 = 256 \Rightarrow x = 16$

As dimensões dessa caixa são 16 dm, 15 dm e 12 dm.

Assim, sua capacidade C é dada por:

$C = (16 \cdot 15 \cdot 12) \text{ dm}^3 \Rightarrow C = 2.880 \text{ dm}^3$

Como 1 dm = 1 L, concluímos que a capacidade da caixa atual é de 2.880 L.

b. A capacidade C' da nova caixa (cúbica) é calculada por:

$C' = (0{,}6 \cdot 2.880) \text{ dm}^3 \Rightarrow C' = 1.728 \text{ dm}^3$

Assim, sendo ℓ a medida, em decímetro, da aresta dessa nova caixa, temos: $\ell^3 = 1.728 \Rightarrow \ell = 12$

Concluímos, finalmente, que a medida D da diagonal da nova caixa é dada por: $D = 12\sqrt{3}$ dm

10. A figura é a planificação de um prisma hexagonal regular de aresta da base 4 cm e altura 10 cm. A área da base do prisma é a soma das áreas de 6 triângulos equiláteros, portanto, a área B da base é:

$$B = 6 \cdot \left(\frac{4 \cdot 2\sqrt{3}}{2}\right) \text{ cm}^2 = 24\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

Logo, o volume V desse prisma é dado por:

$V = 24\sqrt{3} \cdot 10 \text{ cm}^3 = 240\sqrt{3} \text{ cm}^3$

11. O volume V da barra, em centímetro cúbico, é dado por:

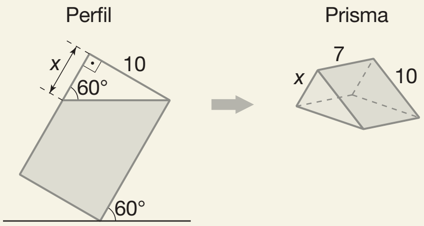
$V = \frac{(5 + 3) \cdot 1}{2} \cdot 16 \Rightarrow V = 64$

Como a densidade do ouro é 19,28 g/cm³, a massa M, em grama, da barra é: $M = 19{,}28 \cdot 64 \Rightarrow M = 1.233{,}92$

Como o preço do grama de ouro puro era R$ 148,39, deduzimos que o preço P da barra, em real, é dado por:

$P = 148{,}39 \cdot 1.233{,}92 \Rightarrow P = 183.101{,}3888$

12. O volume do leite derramado é o mesmo do prisma representado pelo espaço vazio dentro da caixa inclinada. Indicando por x a medida, em centímetro, da menor aresta da base desse prisma, esquematizamos:



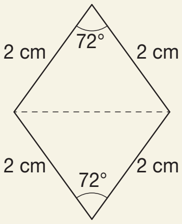
Assim, temos: $\text{tg } 60° = \frac{10}{x} \Rightarrow x = \frac{10\sqrt{3}}{3}$ cm

Concluímos, então, que o volume V do leite derramado é dado por: $V = \frac{\frac{10\sqrt{3}}{3} \cdot 10}{2} \cdot 7 \text{ cm}^3 \Rightarrow V = \frac{350\sqrt{3}}{3} \text{ cm}^3$

13. a. Cada losango pode ser dividido em dois triângulos congruentes, como ilustra a figura. Assim, a área B de uma base é dada por:

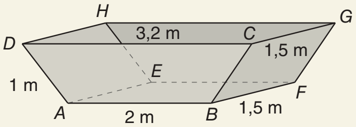
$B = 10 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \text{sen } 72° \Rightarrow$

$\Rightarrow B = 20 \cdot 0{,}95 \therefore B = 19 \text{ cm}^2$

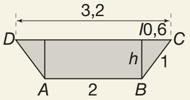


b. O volume V do prisma, em centímetro cúbico, é dado por: $V = 19 \cdot 8 \Rightarrow V = 152$

14.



a. Sendo h a altura de um trapézio da base, temos:



Pelo teorema de Pitágoras no triângulo BIC, $h = 0{,}8$ m; assim, o volume V da caçamba é:

$V = \left[\frac{(3{,}2 + 2) \cdot 0{,}8}{2}\right] \cdot 1{,}5 \text{ m}^3 = 3{,}12 \text{ m}^3$

b. Devem ser pintados quatro retângulos de dimensões 1 m por 1,5 m, dois retângulos de dimensões 2 m por 1,5 m e quatro trapézios de altura 0,8 m e base de 3,2 m e 2 m. Logo, a área S a ser pintada é dada por:

$S = \left[4 \cdot 1 \cdot 1{,}5 + 2 \cdot 2 \cdot 1{,}5 + 4 \cdot \frac{(3{,}2 + 2) \cdot 0{,}8}{2}\right] \text{ m}^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow S = 20{,}32 \text{ m}^2$

15. Sendo n a medida do apótema dessa pirâmide, temos, como face lateral, o triângulo isósceles:

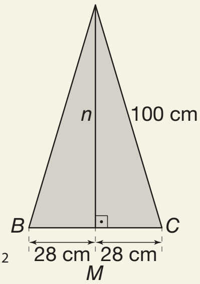
Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo AMC, $n = 96$ cm

Assim, a área A_f dessa face é:

$A_f = \left(\frac{56 \cdot 96}{2}\right) \text{ cm}^2 = 2.688 \text{ cm}^2$

Logo, a área A do pano é dada por:

$A = 8A_f = (8 \cdot 2.688) \text{ cm}^2 = 21.504 \text{ cm}^2$



16. a. O segmento $\overline{MN}$ é mediana relativa à base do triângulo isósceles MCD; logo, $\overline{MN}$ também é altura relativa a essa base; portanto, $\overline{MN} \perp \overline{CD}$. Analogamente, o segmento $\overline{MN}$ é mediana relativa à base do triângulo isósceles NAB; logo, $\overline{MN}$ também é altura relativa a essa base; portanto, $\overline{MN} \perp \overline{AB}$. Assim, o segmento $\overline{MN}$ é perpendicular as arestas $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$.

b. Os segmentos $\overline{AN}$ e $\overline{BN}$ são apótemas do tetraedro; logo, são alturas de triângulos equiláteros de lado $2\sqrt{3}$ dm; portanto: $AN = BN = \frac{2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{2}$ dm

Do triângulo retângulo AMN, concluímos que:

$(MN)^2 + (\sqrt{3})^2 = 3^2 \Rightarrow MN = \sqrt{6}$

A distância entre as retas reversas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{CD}$ é $\sqrt{6}$ dm.

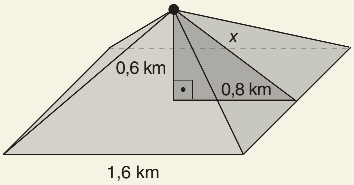
17. a. O volume da parte emersa do *iceberg* é, aproximadamente, o volume V de uma pirâmide quadrangular regular de altura 0,6 km e aresta da base 1,6 km, isto é:

$V = \frac{1}{3} \cdot 1{,}6^2 \cdot 0{,}6 \text{ km}^3 \Rightarrow V = 0{,}512$

Assim, sendo V_a o volume do *iceberg*, em quilômetro cúbico, temos: $0{,}2\, V_a = 0{,}512 \Rightarrow V_a = 2{,}56$

Logo, o volume do *iceberg* é 2,56 km³.

b. Indicando por x a medida, em quilômetro, do apótema da pirâmide descrita no item **a**, temos:



Pelo teorema de Pitágoras, $x = 1$.

Assim, a área A_f de cada face lateral dessa pirâmide é dada por: $A_f = \frac{1{,}6 \cdot 1}{2} \text{ km}^2 = 0{,}8 \text{ km}^2$

Portanto, a área lateral A_ℓ da pirâmide é calculada por:

$A_\ell = 4 \cdot 0{,}8 \text{ km}^2 = 3{,}2 \text{ km}^2$

Logo, a área lateral da parte emersa do *iceberg* é, aproximadamente, 3,2 km².

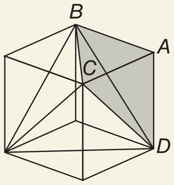
18. alternativa **a**

O sólido retirado é um tetraedro com um triedro trirretangular. O volume V desse tetraedro é dado por:

$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2}{2} \cdot a = \frac{a^3}{6}$

19. alternativa **e**

O volume do tetraedro é a diferença entre o volume do cubo e 4 vezes o volume V_{ABCD} da pirâmide $ABCD$ representada na figura.



Sendo k a medida da aresta do cubo, temos:

$V_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{k^2}{2} \cdot k = \frac{k^3}{6}$

Logo, o volume V_T do tetraedro é dado por:

$V_T = k^3 - 4 \cdot \frac{k^3}{6} \Rightarrow V_T = \frac{k^3}{3}$

Portanto, a fração do volume do cubo ocupada pelo tetraedro é $\frac{\frac{k^3}{3}}{k^3}$, ou seja, $\frac{1}{3}$.

ILUSTRAÇÕES: ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

20. alternativa **b**

Unindo os centros O e O' de duas faces adjacentes do cubo ao ponto médio M da aresta comum a essas faces, temos um triângulo retângulo.

Aplicando o teorema de Pitágoras no triangulo OMO', temos: $OO' = \sqrt{2}$

O volume V do octaedro é duas vezes o volume da pirâmide quadrangular regular de aresta da base $\sqrt{2}$ e altura 1; logo: $V = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot (\sqrt{2})^2 \cdot 1 = \frac{4}{3}$

21. alternativa **b**

Sendo x a medida, em metro, da aresta da base e da altura da pirâmide, temos que seu volume V é dado por:

$V = \frac{1}{3}x^3 \Rightarrow \frac{1}{3}x^3 = 9 \Rightarrow x^3 = 27 \therefore x = 3$

A medida do apótema da base é igual à metade da medida da aresta da base, ou seja, $OM = \frac{3}{2}$.

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo POM:

$(PM)^2 = (OM)^2 + (PO)^2 \therefore PM = \frac{3\sqrt{5}}{2}$

Logo, a medida do apótema da pirâmide é $\frac{3\sqrt{5}}{2}$ m.

22. alternativa **b**

O volume de parafina da vela original equivale ao de uma pirâmide quadrangular regular com altura 16 cm e 6 cm de aresta da base, e o volume de parafina do bloco superior é o de uma pirâmide com 4 cm de altura e 1,5 cm de aresta da base. Assim, retirando-se o bloco superior, o volume V de parafina remanescente é dado por:

$V = \left[\frac{1}{3} \cdot 6^2 \cdot 16 - \frac{1}{3} \cdot (1{,}5)^2 \cdot 4\right] \text{cm}^3 = 189 \text{ cm}^3$

VERIFIQUE O QUE APRENDEU NO CAPÍTULO 9

1. alternativa **e**

Como o preço é calculado em metro quadrado, vamos transformar centímetro em metro (30 cm = 0,3 m).

Calculando a área lateral da caixa cúbica, temos:

$4 \cdot (0{,}3 \text{ m})^2 = 4 \cdot 0{,}09 \text{ m}^2 = 0{,}36 \text{ m}^2$

Calculando a área da base, temos: $(0{,}3 \text{ m})^2 = 0{,}09 \text{ m}^2$

Sabendo que o metro quadrado do material utilizado para as faces laterais custa R$ 5,00 e para a base custa R$ 6,00, temos:

$0{,}36 \cdot 5{,}00 + 0{,}09 \cdot 6{,}00 = 1{,}80 + 0{,}54 = 2{,}34$

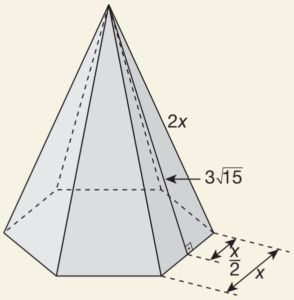
O custo do material para uma caixa, em reais, é R$ 2,34.

2. alternativa **d**

$V = (2 \cdot 1{,}5 \cdot 0{,}8) \text{ m}^3 = 2{,}4 \text{ m}^3$

3. alternativa **b**

Indicando por x a medida, em decímetro, de cada aresta da base da pirâmide, esquematizamos:



Pelo teorema de Pitágoras, temos:

$\left(\frac{x}{2}\right)^2 + (3\sqrt{15})^2 \Rightarrow x = 6$

Logo, a área total A_T dessa pirâmide é:

$A_T = \left(6 \cdot \frac{6^2 \cdot \sqrt{3}}{4} + 6 \cdot \frac{6 \cdot 3 \cdot \sqrt{15}}{2}\right) \text{dm}^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow A_T = 54(\sqrt{3} + \sqrt{15}) \text{ dm}^2$

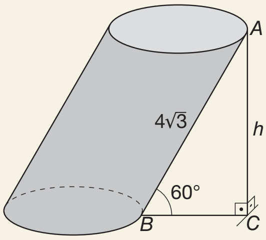
CAPÍTULO 10 Corpos redondos

ALÉM DA TEORIA

3. $V = \frac{4 \cdot \pi \cdot R^3}{3} = \frac{4 \cdot \pi \cdot 4^3}{3} \Rightarrow \frac{256\pi}{3} \therefore V = \frac{256\pi}{3} \text{ cm}^3$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Considerando h a medida, em centímetro, da altura desse cilindro, no triangulo retângulo ABC, temos:



$\text{sen } 60° = \frac{h}{4\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{h}{4\sqrt{3}} \therefore h = 6$

2. Seja r a medida, em decímetro, do raio da base do cilindro equilátero e d a medida, em decímetro, de uma diagonal de uma secção meridiana do cilindro. Sabendo que uma secção meridiana de um cilindro equilátero é um quadrado, temos: $d = 2r\sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{2} = 2r\sqrt{2} \Rightarrow r = 2$

Assim, o perímetro P, em decímetro, do círculo da base desse cilindro é: $P = 2\pi r \Rightarrow P = 4\pi \therefore P = 4\pi$ dm

3. **a.** $A_L = (2\pi \cdot 2 \cdot 5) \text{ m}^2 = 20\pi \text{ m}^2$
b. $B = (\pi \cdot 2^2) \text{ m}^2 = 4\pi \text{ m}^2$
c. $A_T = (20\pi + 2 \cdot 4\pi) \text{ m}^2 = 28\pi \text{ m}^2$
d. $A_{SM} = (4 \cdot 5) \text{ m}^2 = 20 \text{ m}^2$
e. $V = (4\pi \cdot 5) \text{ m}^3 = 20\pi \text{ m}^3$

4. **a.** $A_L = (2\pi \cdot 4 \cdot 8) \text{ cm}^2 = 64\pi \text{ cm}^2$
b. $B = (\pi \cdot 4^2) \text{ cm}^2 = 16\pi \text{ cm}^2$
c. $A_T = (64\pi + 2 \cdot 16\pi) \text{ cm}^2 = 96\pi \text{ cm}^2$
d. $A_{SM} = 8^2 \text{ cm}^2 = 64 \text{ cm}^2$
e. $V = (16\pi \cdot 8) \text{ cm}^3 = 128\pi \text{ cm}^3$

5. Sendo r a medida, em decímetro, do raio da base do cilindro equilátero, temos: $(2r)^2 = 144 \Rightarrow r = 6$

$A_L = 2\pi \cdot 6 \cdot 12 \text{ dm}^2 = 144\pi \text{ dm}^2$

$A_T = (144\pi + 2 \cdot \pi \cdot 6^2) \text{ dm}^2 = 216\pi \text{ dm}^2$

$V = \pi \cdot 6^2 \cdot 12 \text{ dm}^3 = 432\pi \text{ dm}^3$

6. A secção meridiana é equivalente a uma das bases do cilindro. Sendo h a medida, em centímetro, da altura do cilindro, temos: $10h = \pi \cdot 5^2 \Rightarrow h = \frac{5\pi}{2}$

$A_L = \left(2\pi \cdot 5 \cdot \frac{5\pi}{2}\right) \text{cm}^2 = 25\pi^2 \text{ cm}^2$

$A_T = (25\pi^2 + 2 \cdot \pi \cdot 5^2) \text{ cm}^2 = 25\pi(\pi + 2) \text{ cm}^2$

$V = \left(25\pi \cdot \frac{5\pi}{2}\right) \text{cm}^2 \Rightarrow V = \frac{125\pi^2}{2} \text{ cm}^3$

ILUSTRAÇÕES: ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

7. Calculando o volume *V* de cada tanque, temos:

$V = \pi \cdot 20^2 \cdot 20\ \text{m}^3 \Rightarrow V = 3{,}14 \cdot 400 \cdot 20\ \text{m}^3$

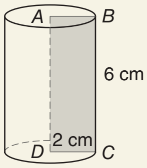
$\therefore V = 25.120\ \text{m}^3 \Rightarrow V = 25.120.000\ \text{L}$

Dividindo a quantidade de gasolina a ser armazenada pelo volume de cada tanque, obtemos:

$\dfrac{70.336.000}{25.120.000} = 2{,}8$

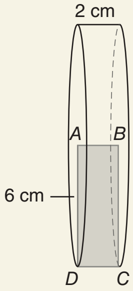
Portanto, o menor número possível a ser utilizado é 3.

8. a.



$V = (\pi \cdot 2^2 \cdot 6)\ \text{cm}^3 =$
$= 24\pi\ \text{cm}^3$

b.



$A_T = (2\pi \cdot 6 \cdot 2 +$
$+ 2 \cdot \pi \cdot 6^2)\ \text{cm}^2$
$A_T = 96\pi\ \text{cm}^2$

9. alternativa **b**

$V_1 = \pi \cdot 6^2 \cdot 4 = 144\pi$ e $V_2 = \pi \cdot 3^2 \cdot x = 9x\pi$

$V_1 = 1{,}6 \cdot V_2 \Rightarrow 144\pi = 1{,}6 \cdot 9 \cdot x \cdot \pi \Rightarrow x = 10$

Logo, a medida da altura desconhecida é 10 cm.

10. alternativa **d**

Temos que 1 m = 100 cm e 10,99 kg = 10.990 g.

Assim, o volume *V* de PVC que compõe o tubo é dado por:

$V = (\pi \cdot 13^2 \cdot 100 - \pi \cdot 12^2 \cdot 100)\ \text{cm}^3 \Rightarrow V = 2.500\pi\ \text{cm}^3$

Adotando $\pi = 3{,}14$, temos $V = 7.850\ \text{cm}^3$.

Assim, a densidade *d* do PVC é calculada por:

$$d = \frac{10.990\ \text{g}}{7.850\ \text{cm}^3} = 1{,}4\ \text{g/cm}^3$$

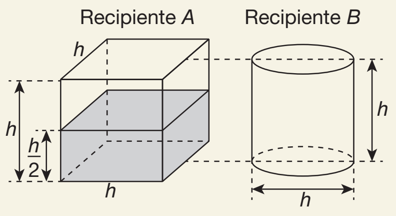
11. a. $V = \dfrac{1}{2}\pi r^2 h \Rightarrow V = 125\pi\ \text{cm}^3$

b. $A_\ell = 2rh + \pi rh \Rightarrow A_\ell = 50(2 + \pi)\ \text{cm}^2$

c. $A_T = A_\ell + \pi r^2 \Rightarrow A_T = (100 + 50\pi + 25\pi)\ \text{cm}^2 =$
$= 25(4 + 3\pi)\ \text{cm}^2$

12. alternativa **d**

Indicando por *h* a medida da aresta do cubo, esquematizamos:

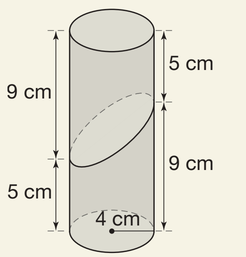


O volume *V* de água contida no recipiente *A* é: $V = \dfrac{h^3}{2}$

Despejando essa água no recipiente *B* ela atingirá a altura *x*, em relação à base interna de *B*. Assim, devemos ter:

$\pi \cdot \left(\dfrac{h}{2}\right)^2 \cdot x = \dfrac{h^3}{2} \Rightarrow x = \dfrac{2h}{\pi} \approx 0{,}637h \therefore \approx 63{,}7\%$ de *h*

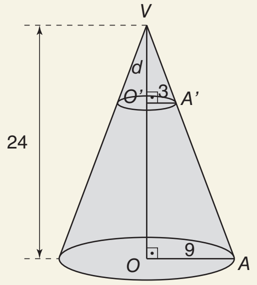
13. Colocando sobre esse tronco outro congruente a ele, obtemos o cilindro. O volume V_T do tronco é metade do volume desse cilindro, então:



$V_T = \left(\dfrac{\pi \cdot 4^2 \cdot 14}{2}\right)\ \text{cm}^3$

$V_T = 112\pi\ \text{cm}^3$

15. Seja *O* e *O'* os centros das bases do cone e da secção transversal, respectivamente, e *d* a distância, em centímetro, do vértice *V* do cone ao plano da secção.



Da semelhança entre os triângulos *VOA* e *VO'A'*, deduzimos que: $\dfrac{24\ \text{cm}}{d} = \dfrac{9\ \text{cm}}{3\ \text{cm}} \Rightarrow$

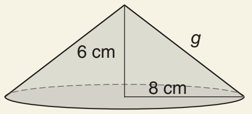
$\Rightarrow d = 8\ \text{cm}$

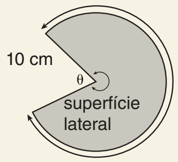
16. Uma secção meridiana de um cone equilátero é um triângulo equilátero cujo lado tem a mesma medida do diâmetro da base do cone. Assim, sendo *r* e *h* as medidas, em decímetro, do raio da base e da altura do cone, respectivamente, temos: $h = \dfrac{2r\sqrt{3}}{2} \Rightarrow r = 4$

A área A_B da base do cone, em decímetro quadrado, é:

$A_B = \pi r^2 \Rightarrow A_B = \pi \cdot 4^2 \therefore A_B = 16\pi$

17. Inicialmente, aplicamos o teorema de Pitágoras para o cálculo da medida *g* da geratriz do cone, obtendo *g* = 10 cm. Em seguida, representamos no plano a superfície lateral do cone.





a. A área lateral A_L é obtida pela regra de três:

Comprimento do arco do setor (cm)	**Área do setor (cm²)**
$2 \cdot \pi \cdot 10$	$\pi \cdot 10^2$
$2 \cdot \pi \cdot 8$	A_ℓ

$\therefore A_\ell = 80\pi\ \text{cm}^2$

b. $B = (\pi \cdot 8^2)\ \text{cm}^2 = 64\pi\ \text{cm}^2$

c. $A_T = (80\pi + 64\pi)\ \text{cm}^2 = 144\pi\ \text{cm}^2$

d. A medida θ, em grau, do ângulo central do setor circular equivalente à superfície lateral do cone é obtida pela regra de três:

Comprimento do arco do setor (cm)	**Medida do ângulo central (grau)**
$2 \cdot \pi \cdot 10$	360°
$2 \cdot \pi \cdot 8$	θ

$\theta = \dfrac{(16\pi \cdot 360^\circ)}{20\pi} = \dfrac{8\pi}{5\ \text{rad}}$ ou 288°

e. Qualquer secção meridiana desse cone é um triângulo isósceles de lados com 10 cm, 10 cm e 16 cm. Logo:

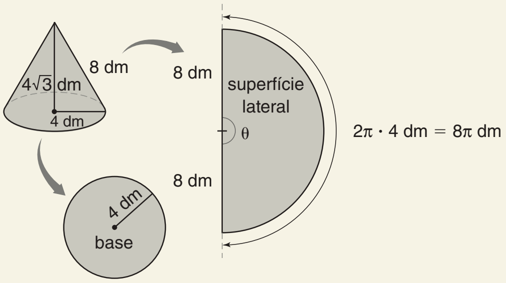
$A_{SM} = \dfrac{16 \cdot 6}{2}\ \text{cm}^2 = 48\ \text{cm}^2$

f. $V = \left(\dfrac{1}{3} \cdot 64\pi \cdot 6\right)\ \text{cm}^3 = 128\pi\ \text{cm}^3$

ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

NEIDE TOYOTA/ARQUIVO DA EDITORA

18.



a. A área lateral A_L é obtida pela regra de três:

Comprimento do arco do setor (dm)	Área do setor (dm²)
$2 \cdot \pi \cdot 8$	$\pi \cdot 8^2$
$2 \cdot \pi \cdot 4$	A_ℓ

$\therefore A_\ell = 32\pi \text{ dm}^2$

b. $B = (\pi \cdot 4^2) \text{ dm}^2 = 16\pi \text{ dm}^2$

c. $A_T = (32\pi + 16\pi) \text{ dm}^2 = 48\pi \text{ dm}^2$

d. A medida θ, em grau, do ângulo central do setor circular equivalente à superfície lateral do cone é obtida pela regra de três:

Comprimento do arco do setor (cm)	Medida do ângulo central (grau)
$2 \cdot \pi \cdot 8$	360°
$2 \cdot \pi \cdot 4$	θ

$\theta = \pi$ rad ou 180°

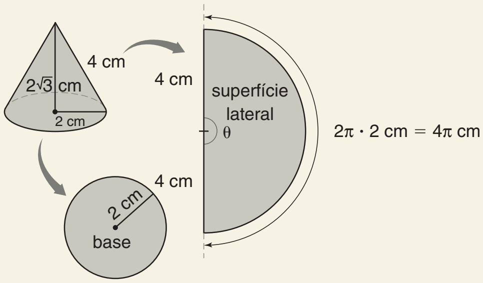
e. Qualquer secção meridiana desse cone é um triângulo equilátero com 8 dm de lado; logo:

$$A_{SM} = \frac{8^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \text{ dm}^2 = 16\sqrt{3} \text{ dm}^2$$

f. $V = \frac{1}{3} \cdot 16\pi \cdot 4\sqrt{3} \text{ dm}^3 = \frac{64\pi\sqrt{3}}{3} \text{ dm}^3$

19. Sendo g a medida, em centímetro, do lado de um desses triângulos: $A_{SM} = 4\sqrt{3} \Rightarrow \frac{g^2\sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3} \therefore g = 4$

Assim, temos:



A área lateral A_L é obtida pela regra de três:

Comprimento do arco do setor (cm)	Área do setor (cm²)
$2 \cdot \pi \cdot 4$	$\pi \cdot 4^2$
$2 \cdot \pi \cdot 2$	A_L

$$A_L = \frac{(4\pi \cdot 16\pi)}{8\pi} \text{ cm}^2 = 8\pi \text{ cm}^2$$

$$A_T = (8\pi + \pi \cdot 2^2) \text{ cm}^2 = 12\pi \text{ cm}^2$$

$$V = \left(\frac{1}{3} \cdot 4\pi \cdot 2\sqrt{3}\right) \text{ cm}^3 = \frac{8\pi\sqrt{3}}{3} \text{ cm}^3$$

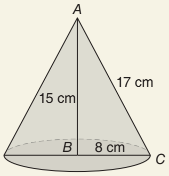
20. O volume V de biju com cada casquinha é a diferença entre os volumes dos cones de alturas 12 cm e 11 cm e raios das bases 3 cm e 2,7 cm, respectivamente, ou seja:

$$V = \left(\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 3^2 \cdot 12 - \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot (2{,}7)^2 \cdot 11\right) \text{ cm}^3 \approx 29{,}12 \text{ cm}^3$$

21. Inicialmente, calculamos a medida do cateto $\overline{BC}$.

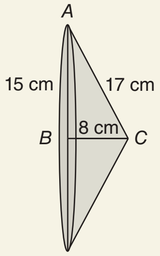
$(BC)^2 + 15^2 = 17^2 \Rightarrow BC = 8$ cm

a.



$$V = \left(\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 8^2 \cdot 15\right) \text{ cm}^3 =$$
$$= 320\pi \text{ cm}^3$$

b.



$$A_T = (\pi \cdot 15 \cdot 17 + \pi \cdot 15^2) \text{ cm}^2 =$$
$$= 480\pi \text{ cm}^2$$

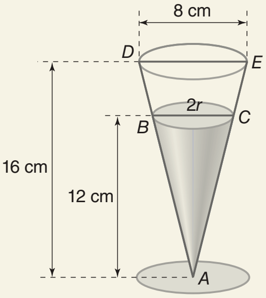
22. Uma secção meridiana desse cone mostra dois triângulos semelhantes ABC e ADE, conforme a figura a seguir, em que r é a medida, em centímetro, do raio da base do cone formado pela água. Dessa semelhança, resulta:

$$\frac{8}{2r} = \frac{16}{12} \Rightarrow r = 3 \text{ cm}$$

Logo, o volume V de água no copo é dado por:

$$V = \left(\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 3^2 \cdot 12\right) \text{ cm}^3 =$$
$$= 36\pi \text{ cm}^3$$

Como 1 cm^3 = 1 mL, concluímos que o volume de água no copo é de 36π mL.

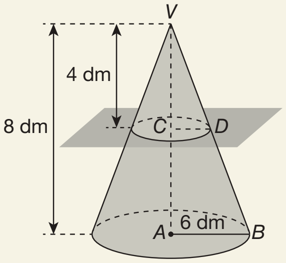


23. alternativa **b**

A medida θ do ângulo central do setor é dada por $\theta = \frac{360°r}{g}$, em que r e g são, respectivamente, as medidas do raio da base e da geratriz do cone. Logo, a medida r, em centímetro, é: $270° = \frac{360°r}{12} \Rightarrow r = 9$

Sendo h a altura do cone, em centímetro, pelo teorema de Pitágoras, temos $h = 12$.

25. Uma secção meridiana do cone determina os triângulos VAB e VCD, conforme mostra a figura a seguir.



Pelo caso A.A. deduzimos que os triângulos VAB e VCD são semelhantes. Assim, obtemos a medida, em decímetro, do segmento $\overline{CD}$: $\frac{4}{8} = \frac{CD}{6} \Rightarrow CD = 3$

Pelo teorema de Pitágoras: $VD = 5$ dm e $VB = 10$ dm.

a. O volume V_T do tronco é a diferença entre o volume do cone original e o volume do cone determinado anteriormente do plano α, isto é:

ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

$$V_T = \left(\frac{1}{3}\cdot\pi\cdot 6^2\cdot 8 - \frac{1}{3}\cdot\pi\cdot 3^2\cdot 4\right)\ \text{dm}^3 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow V_T = 84\pi\ \text{dm}^3$$

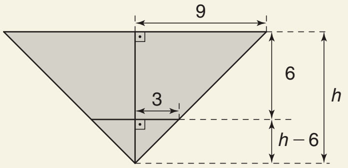
b. A área lateral A_L do tronco é a diferença entre a área lateral do cone original e a área lateral do cone determinado anteriormente do plano α, isto é:

$$A_L = \pi\cdot 6\cdot 10 - \pi\cdot 3\cdot 5\ \text{dm}^2 \Rightarrow A_L = 45\pi\ \text{dm}^2$$

c. A área total A_T do tronco é a soma da área lateral com a área das bases, isto é:

$$A_T = 45\pi + \pi\cdot 6^2 + \pi\cdot 3^2\ \text{dm}^2 \Rightarrow A_T = 90\pi\ \text{dm}^2$$

26. Sendo h a medida, em metro, do cone obtido pelos prolongamentos das geratrizes desse tronco, temos a secção meridiana a seguir.



MARIO MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

$$\frac{h}{h-6} = \frac{9}{3} \Rightarrow h = 9$$

Assim, o volume V do tronco de cone é dado por:

$$V = \left(\frac{1}{3}\cdot\pi\cdot 9^2\cdot 9 - \frac{1}{3}\cdot\pi\cdot 3^2\cdot 3\right)\ \text{m}^3 \Rightarrow V = 234\pi\ \text{m}^3$$

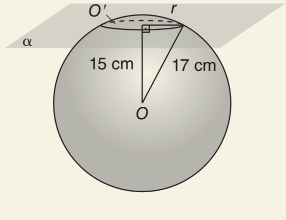
Para $\pi = 3{,}14$, temos: $V = 734{,}76\ \text{m}^3 = 734.760\ \text{dm}^3$

Como $1\ \text{L} = 1\ \text{dm}^3$, $V = 734.760$ L.

27. a. A secção plana da esfera é um círculo. Sendo r a medida, em centímetro, do raio desse círculo.

Pelo teorema de Pitágoras, a medida $r = 8$.

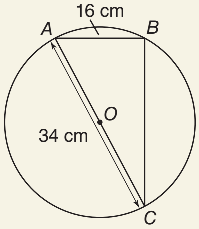
A área A da secção plana é: $A = 64\pi\ \text{cm}^2$



b. $P = 2\cdot\pi\cdot 8\ \text{cm} \Rightarrow P = 16\pi\ \text{cm}$

c. A intersecção da esfera com o plano pl(ABC) é um círculo de diâmetro $\overline{AC}$; logo, o triângulo ABC é retângulo em B, pois está inscrito na metade desse círculo:

Pelo teorema de Pitágoras, a distância $BC = 30$ cm



28. alternativa **e**

Sejam:

- O e O' os centros da esfera e da secção plana, respectivamente;
- r e d, respectivamente, as medidas, em centímetro, do raio da secção plana e da distância entre os centros O e O';
- A_C e A_S as áreas, em centímetro quadrado, do círculo máximo e da secção plana, respectivamente.

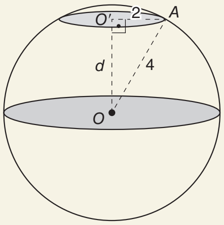
Temos:

$A_C = \pi\cdot 4^2 \Rightarrow A_C = 16\pi$

$A_C = 4A_S \Rightarrow 16\pi = 4\cdot\pi\cdot r^2 \therefore r = 2$

Pelo teorema de Pitágoras, no triângulo AOO', temos: $d = 2\sqrt{3}$ cm

Logo, a área da secção plana é $4\pi\ \text{cm}^2$.

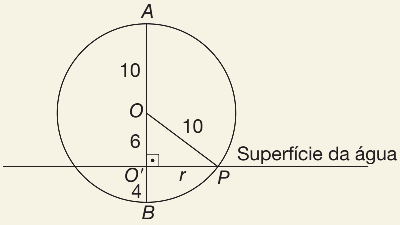


ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

29. Sejam:

- $\overline{AB}$ o diâmetro vertical da bola de centro O;
- O' o centro da circunferência determinada pela intersecção da superfície da bola com o plano da superfície da água;
- P um ponto dessa circunferência;
- r a medida, em centímetro, do raio dessa circunferência.

Assim, esquematizamos:



Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo POO', temos: $r = 8$ cm

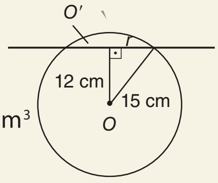
30. Sendo O e O' os centros da esfera e da secção plana, respectivamente, e r o raio dessa secção, temos:

$r^2 + 12^2 = 15^2 \Rightarrow r = 9$ cm

a. $A_{sec} = (\pi\cdot 9^2)\ \text{cm}^2 = 81\pi\ \text{cm}^2$

b. $A_{sup} = (4\pi\cdot 15^2)\ \text{cm}^2 = 900\pi\ \text{cm}^2$

c. $V = \left(\frac{4}{3}\cdot\pi\cdot 15^3\right)\ \text{cm}^3 = 4.500\pi\ \text{cm}^3$



31. Sejam:

- O' o centro da secção plana;
- R e r as medidas, em decímetro, dos raios da esfera e da secção plana, respectivamente.

Assim: $\frac{4\pi R^3}{3} = \frac{256\pi}{3} \Rightarrow R = 4$

a. $AS = 4\pi\cdot 4^2\ \text{dm}^2 \Rightarrow AS = 64\pi\ \text{dm}^2$

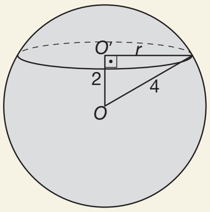
b. $AC = \pi\cdot 4^2\ \text{dm}^2 \Rightarrow AC = 16\pi\ \text{dm}^2$

c. Esquematizando:

Aplicando o teorema de Pitágoras, temos: $r = 2\sqrt{3}$

Concluímos, então, que o perímetro P_S da secção plana é dado por: $P_S = 2\pi\cdot 2\sqrt{3}\ \text{dm} \Rightarrow$

$\Rightarrow P_S = 4\pi\sqrt{3}\ \text{dm}$



32. Sejam:

- A_S a área da superfície dessa esfera;
- A_C a área de um círculo máximo dessa esfera;
- A_H a área total do hemisfério.

Assim, temos:

$$A_H = \frac{A_S}{2} + A_C \Rightarrow A_H = \frac{4\pi r^2}{2} + \pi r^2 \Rightarrow A_H = 3\pi r^2$$

Resolvemos a regra de três direta:

Área	**Galões de tinta**	
πr^2	12	
$3\pi r^2$	x	$\therefore x = 36$

33. Sendo R a medida, em centímetro, do raio da esfera original, temos: $\frac{4}{3}\cdot\pi\cdot R^3 = 8\cdot\frac{4}{3}\cdot\pi\cdot 5^3 \Rightarrow R = 10$

34. Indicando por r e R as medidas, em centímetro, do raio da bola e do raio interno do aro, respectivamente, temos:

$$\begin{cases} 4\pi r^2 = 576\pi \\ 2\pi R = 45\pi \end{cases} \Rightarrow r = 12 \text{ e } R = 22{,}5$$

ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

Assim, obtemos: $\frac{2R}{2r} = \frac{45}{24} = 1{,}875 = 187{,}5\%$

Logo, o diâmetro interno do aro é 87,5% maior que o diâmetro da bola.

35. a. Indicando por V_A o volume, em centímetro cúbico, do líquido do tubo de menor diâmetro, temos:

$$V_A = \frac{1}{2}\cdot\frac{4\pi\cdot 1^3}{3} + \pi\cdot 1^2\cdot 8 \Rightarrow V_A = \frac{26\pi}{3}$$

Assim, a densidade D_A desse líquido é:

$$D_A = \frac{26}{\frac{26\pi}{3}}\ \text{g/cm}^3 \Rightarrow D_A = \frac{3}{\pi}\ \text{g/cm}^3$$

b) Indicando por V_B o volume, em centímetro cúbico, do líquido do tubo de maior diâmetro, temos:

$$V_B = \frac{1}{2}\cdot\frac{4\pi\cdot 2^3}{3} + \pi\cdot 2^2\cdot(h-2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_B = \frac{\pi(12h-8)}{3}$$

Como o líquido é o mesmo nos dois tubos, temos que a altura h, em centímetro, é:

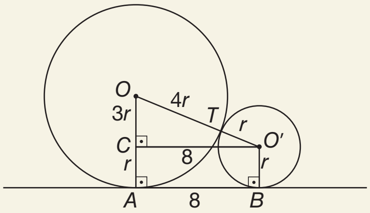
$$\frac{26}{\frac{\pi(12h-8)}{3}} = \frac{3}{\pi} \Rightarrow 26 = 12h - 8 \Rightarrow h = \frac{34}{12}$$

Logo, a altura h é $\frac{17}{6}$ cm ou 2,83 cm, aproximadamente.

37. Sejam:

- O e O' os centros da esfera maior e da menor, respectivamente;
- T o ponto de tangência entre as esferas; r a medida, em decímetro, do raio da esfera menor; C o ponto de intersecção da reta $\overleftrightarrow{OA}$ com a reta que passa por O' e é paralela a $\overleftrightarrow{AB}$.

Assim, esquematizamos:

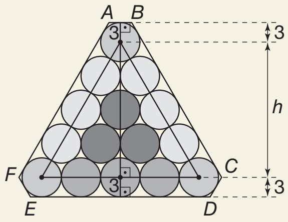


Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo COO', temos: $r = 2$

Portanto, os raios das esferas medem 2 dm e 8 dm

38. A figura a seguir representa as projeções ortogonais das bolas sobre a base do prisma. Portanto, cada círculo amarelo tangencia um lado da base do prisma, cada círculo azul tangencia três lados da base do prisma e cada círculo vermelho tangencia seis círculos.

Como os centros de dois círculos tangentes estão alinhados com o ponto de tangência e o raio de um círculo é perpendicular à reta tangente no ponto de tangência, temos que os centros dos círculos azuis são vértices de um triângulo equilátero com 24 cm de lado.



Sendo h a medida, em centímetro, da altura do triângulo equilátero descrito anteriormente, temos:

$$h = \frac{24\sqrt{3}}{2} \Rightarrow h = 12\sqrt{3}$$

Logo, a distância x entre as arestas $\overline{AB}$ e $\overline{ED}$ é:

$x = (12\sqrt{3} + 3 + 3)$ cm $\Rightarrow x = 6(2\sqrt{3} + 1)$ cm

39.

Ângulo (grau)	**Volume (m³)**
360	$\frac{4\cdot\pi\cdot 1^3}{3}$
20	V_C

$$V_C = \left(\frac{20\cdot\frac{4\pi}{3}}{360}\right) = \frac{2\pi}{27}$$

40.

Ângulo (rad)	**Volume (cm³)**
2π	$\frac{4\pi\cdot 2^3}{3}$
$\frac{3\pi}{8}$	V_C

$$V_C = \left(\frac{\frac{3\pi}{8}\cdot\frac{32\pi}{3}}{2\pi}\right) = 2\pi$$

41. Sendo R a medida, em centímetro, do raio da cunha, temos:

Ângulo (grau)	**Volume (cm³)**
360	$\frac{4\pi R^3}{3}$
60	6π

$80\pi R^3 = 2.160\pi \Rightarrow R = 3$

42.

Ângulo (grau)	**Área (m²)**
360	$4\cdot\pi\cdot 5^2$
80	A_f

$$A_f = \left(\frac{80\cdot 4\cdot\pi\cdot 25}{360}\right) = \frac{200\pi}{9}$$

43. Sejam R, V e A_e a medida do raio, o volume e a área da superfície da esfera, respectivamente, nas unidades: decímetro, decímetro cúbico e decímetro quadrado, temos:

$V = \frac{4}{3}\pi\cdot R^3 \Rightarrow \frac{4}{3}\pi\cdot R^3 = 36\pi \Rightarrow R = 3$

$A_e = 4\pi\cdot 3^2 \Rightarrow A_e = 36\pi$

A medida x, em grau, do ângulo diedro do fuso é calculada pela regra de três:

Área	**Ângulo (grau)**
36π	360
3π	x

$$\therefore x = \frac{360\cdot 3\pi}{36\pi} = 30$$

Logo, o ângulo desse fuso mede 30°.

44. a. O volume V_C de cada um dos pedaços pode ser calculado pela regra de três:

Medida do ângulo diedro (grau)	**Volume (cm³)**
360	$\frac{4\pi\cdot 6^3}{3}$
45	V_C

$$\therefore V_C = 36\pi$$

ILUSTRAÇÕES: ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

b. A área A_f da película, em cada pedaço, é a área de um fuso esférico com 6 cm de raio e 45° de ângulo diedro.

Medida do ângulo diedro (grau)		**Volume (cm²)**
360	————	$\frac{4\pi \cdot 6^2}{3}$
45	————	A_f

$\therefore A_f = 18\pi$

c. A área total A_T de cada pedaço é a soma da área A_f do fuso com a área de um círculo de raio 6 cm, ou seja:

$A_T = (18\pi + \pi \cdot 6^2)\ \text{cm}^2 \Rightarrow A_T = 54\pi\ \text{cm}^2$

Como a área A_E da embalagem é 10% maior que a área A_T, concluímos que a área da embalagem é calculada por: $A_E = 1,1 \cdot (54\pi\ \text{cm}^2) = 59,4\pi\ \text{cm}^2$

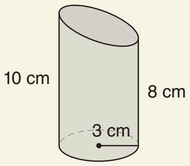
EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

1. A panela cilíndrica moldada tem 16 cm de raio da base e 12 cm de altura; logo, a capacidade V da panela é:

$V = (\pi \cdot 16^2 \cdot 12)\ \text{cm}^3 = 3.072\pi\ \text{cm}^3 = 3,072\pi\ \text{dm}^3$

Logo, a capacidade da panela é de 3,072π L ou, aproximadamente, 9,6 L.

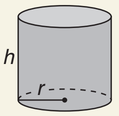
2. O volume de água é o volume V do seguinte tronco de cilindro reto com base circular:



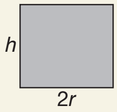
Logo:

$$V = \left(\frac{\pi \cdot 3^2 \cdot (10 + 8)}{2}\right) \text{cm}^3 = 81\pi\ \text{cm}^3$$

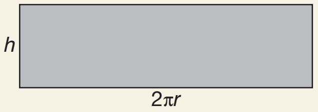
3. Sendo r e h as medidas, em centímetro, do raio da base e da altura do cilindro, respectivamente, esquematizamos:



Secção meridiana



Superfície lateral



ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

Assim temos:

$$\begin{cases} 2rh = 36 \\ 2\pi r \cdot h = 36\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} rh = 18 \\ rh = 18 \end{cases}$$

Portanto, a única conclusão que obtivemos com os dados disponibilizados é que $rh = 18$. Essa conclusão é insuficiente para a determinação de h, pois há infinitos números positivos cujo produto é 18, por exemplo: $6 \cdot 3$; $9 \cdot 2$; $4,8 \cdot 3,75$.

Logo, faltam dados para a resolução do problema.

4. alternativa **b**

Sejam:

- r e h as medidas, em metro, do raio da base e da profundidade do poço, respectivamente;
- V_P e V_C os volumes, em metro cúbico, interno do poço e do cone de terra, respectivamente.

$V_P = \pi r^2 h$

$V_C = \frac{1}{3} \cdot \pi(3r)^2 \cdot 2,4$

$V_C = 1,2V_P \Rightarrow \frac{1}{3} \cdot \pi(3r)^2 \cdot 2,4 = 1,2 \cdot \pi r^2 h$

$\frac{1}{3} \cdot \cancel{\pi} \cdot 9\cancel{r^2} \cdot 2,4 = 1,2 \cdot \cancel{\pi}\cancel{r^2}h \Rightarrow \frac{1}{3} \cdot 9 \cdot 2,4 = 1,2 \cdot h \Rightarrow h = 6$

Portanto, a profundidade do poço é 6 metros.

5. **b.** 100 cm = 1 m. Logo, o volume V_A é dado por:

$$V_A = \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot 4,8\ \text{m}^3 \Rightarrow V_A = 0,3\ \text{m}^3$$

c. Prolongando-se as geratrizes do tronco, obtém-se o cone de vértice A que contém esse tronco. Sendo x a medida, em metro, da distância entre V e a base menor do tronco, esquematizamos a figura 1:

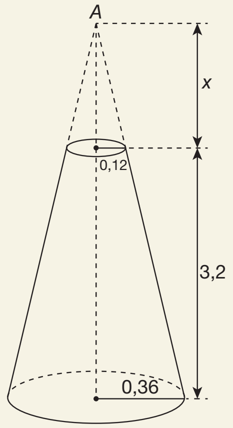


Figura 1

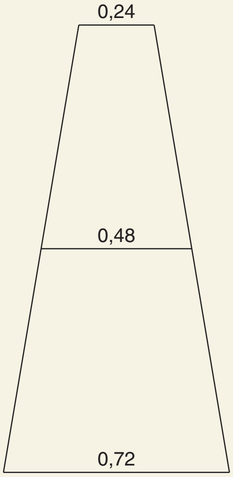
Por semelhança de triângulos, obtemos x:

$$\frac{x}{0,12} = \frac{x + 3,2}{0,36} \Rightarrow x = 1,6$$

Logo, o volume V_T do tronco é calculado por:

$$V_T = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot (0,36)^2\ 4,8 - \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot (0,12)^2 \cdot 1,6 \Rightarrow V_T = 0,19968\pi$$

Para o cálculo de V_A, vamos representar uma secção meridiana do tronco de cone e calcular a medida da base média do trapézio que representa essa secção (a medida da base média do trapézio é a média aritmética entre as medidas das bases).



ILUSTRAÇÕES: MARIO MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Assim, o comprimento c do barbante, em metro, é dado por:

$c = 2 \cdot \pi \cdot 0,24 = 0,48\pi$

Logo, V_A, em metro cúbico, é dado por:

$$V_A = \left(\frac{0,48\pi}{4}\right)^2 \cdot 3,2 = 0,04608\pi^2$$

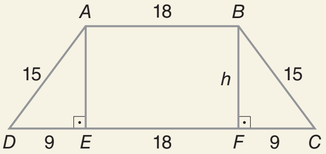
Calculamos, o percentual p que V_A representa de V_T:

$$\frac{V_A}{V_T} = \frac{0,04608\pi^2}{0,19968\pi} = \frac{0,04608\pi}{0,19968} \Rightarrow \frac{V_A}{V_T} \approx 72,46\%$$

6. **a.** O comprimento da circunferência que limita a base menor do tronco é 18π cm; logo, a medida r, em centímetro, do raio dessa base é: $2\pi r = 18\pi \Rightarrow r = 9$

O comprimento da circunferência que limita a base maior do tronco é 36π cm; logo, a medida R, em centímetro, do raio dessa base é: $2\pi R = 36\pi \Rightarrow R = 18$ cm

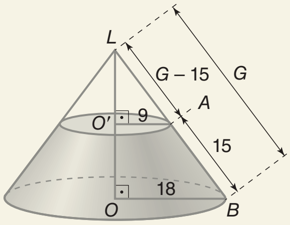
b. Os diâmetros das bases do tronco medem 18 cm e 36 cm, e a geratriz mede 15 cm. Assim, uma secção meridiana desse tronco é o trapézio isósceles representado a seguir, em que h é a medida, em centímetro, da altura do tronco.



Pelo teorema de Pitágoras aplicado no triângulo BCF, obtemos $h = 12$ cm.

c. Prolongando as geratrizes do tronco, obtemos o cone C que o contém. Assim, esquematizamos a figura a seguir, em que O e O' são os centros das bases e G é a medida, em centímetro, da geratriz de C. Observe que $G - 15$ é a medida, em centímetro, da geratriz do cone C', contido em C, cuja base coincide com a base menor do tronco.

MARIO MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA



Da semelhança entre os triângulos *LOB* e *LO'A*, obtemos a medida *G*, em centímetro:

$$\frac{18}{9} = \frac{G}{G - 15} \Rightarrow G = 30$$

Assim, a área lateral A_ℓ do tronco é:

$$A_\ell = (\pi \cdot 18 \cdot 30 - \pi \cdot 9 \cdot 15)\ \text{cm}^2 = 405\pi\ \text{cm}^2$$

Logo, a área de tecido usado na confecção dessa copa é de 405π cm².

7. Volume *V* da Terra é:

$$V = \frac{4 \cdot \pi \cdot 6.370^3}{3}\ \text{km}^3 \Rightarrow V \approx 1{,}08 \cdot 10^{12}\ \text{km}^3$$

Convertendo essa medida para centímetro cúbico, obtemos: $V \approx 1{,}08 \cdot 10^{27}$

Logo, a massa *M* do planeta Terra é:

$$M \approx 1{,}08 \cdot 10^{27} \cdot 5{,}5\ \text{g} \Rightarrow M \approx 5{,}94 \cdot 10^{27}\ \text{g}$$

Convertendo essa medida para quilograma, obtemos: $M \approx 5{,}94 \cdot 10^{24}$ kg

8. a. O volume inicial, V_i, da bola à temperatura ambiente é: $V_i = \frac{4\pi \cdot 12^3}{3}\ \text{cm}^3 \Rightarrow V_i = 2.304\pi\ \text{cm}^3$

Assim, o volume final, V_F, ao final do aquecimento é:

$$V_F = (2.304\pi + 61 \cdot 36\pi)\ \text{cm}^3 \cdot V_F = 4.500\ \text{cm}^3$$

Sendo R_F o raio da bola, em centímetro, ao final do aquecimento, temos:

$$V_F = \frac{4\pi\,(R_F)^3}{3} \Rightarrow 4.500\pi = \frac{4\pi\,(R_F)^3}{3}\ \therefore\ R_F = 15$$

b. Sendo A_i e A_F as áreas, inicial e final, da superfície da bola: $A_i = 4\pi \cdot 12^2\ \text{cm}^2 = 576\pi\ \text{cm}^2$

$$A_F = 4\pi \cdot 15^2\ \text{cm}^2 = 900\pi\ \text{cm}^2$$

Logo:

$$\frac{A_F - A_i}{61}\ \text{cm}^2/\text{min} = \frac{900\pi - 576\pi}{61}\ \text{cm}^2/\text{min} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{A_F - A_i}{61}\ \text{cm}^2/\text{min} \approx 5{,}31\ \text{cm}^2/\text{min}$$

Assim, a taxa média de variação da área da superfície da bola foi de 5,31 cm²/min, aproximadamente.

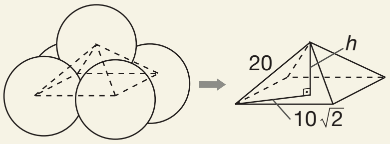
9. a. Do triângulo CPQ, temos:

$$\text{sen}\ \theta = \frac{R}{R + h} \Rightarrow R = R\text{sen}\ \theta + h\text{sen}\ \theta$$

$$\therefore R - R\text{sen}\ \theta = h\text{sen}\ \theta \Rightarrow R(1 - \text{sen}\ \theta) = h\text{sen}\ \theta$$

$$\therefore R = \frac{h\text{sen}\ \theta}{1 - \text{sen}\ \theta}$$

10. Os centros das bolas são vértices de uma pirâmide regular quadrangular em que todas as arestas têm a mesma medida de 20 cm, conforme mostra o esquema a seguir. Assim, a altura *H* da pilha de bolas é a soma da altura *h* da pirâmide com 2 vezes o raio de uma bola.



Pelo teorema de Pitágoras, temos: $h = 10\sqrt{2}$ cm

Logo: $H = (10\sqrt{2} + 2 \cdot 10)\ \text{cm} \Rightarrow H = 10(\sqrt{2} + 2)\ \text{cm}$

11. a.

Ângulo (grau)		Volume (cm³)
360	———	$\frac{4 \cdot \pi \cdot 15^3}{3}$
30	———	V_C

$\therefore V_C = 375\pi$

b.

Ângulo (grau)		Volume (cm³)
360	———	$4 \cdot \pi \cdot 15^2$
30	———	A_t

$\therefore A_t = 75\pi$

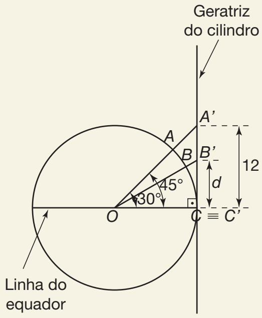
c. A área total A_T da superfície da cunha é a soma da área do fuso com as áreas de dois semicírculos de raio 15 cm, isto é: $A_T = (75\pi + 225\pi)\ \text{cm}^2 = 300\pi\ \text{cm}^2$

MATEMÁTICA SEM FRONTEIRAS

1. Consideramos:

- uma secção da esfera terrestre, contendo o eixo do globo;
- os pontos *A*, *B* e *C* dessa secção pertencentes aos paralelos 45° N, 30° N e à linha do equador, respectivamente.
- as projeções cilíndricas *A'*, *B'* e *C'* dos pontos *A*, *B* e *C*, respectivamente.

Assim, indicando por *d* a distância, em centímetro, entre os pontos *C'* e *B'*, esquematizamos:



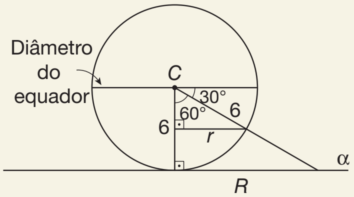
Dos triângulos retângulos *OA'C'* e *OB'C'*, temos:

$$\begin{cases} \text{tg}\ 45° = \frac{12}{OC} \\ \text{tg}\ 30° = \frac{d}{OC} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 = \frac{12}{OC} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{d}{OC} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} OC = 12 & (1) \\ \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{d}{OC} & (2) \end{cases}$$

Substituindo (1) em (2): $\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{d}{12} \Rightarrow d = 4\sqrt{3}$

Concluímos, então, que a distância entre as linhas que representam os paralelos 0° N e 30° N é $4\sqrt{3}$ cm.

3. a. Considerando uma secção que contenha o diâmetro com extremos nos polos norte e sul, e indicando por *r* e *R* as medidas do raio do paralelo 30° N e de sua projeção sobre α, temos:



Assim:

- $\text{sen}\ 60° = \frac{r}{6} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{r}{6}$

ILUSTRAÇÕES: ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

Logo, o comprimento x do paralelo 30° N, nesse globo, é dado por: $x = 2 \cdot \pi \cdot 3\sqrt{3}$ cm $\Rightarrow x \approx 33$cm

- tg $60° = \frac{R}{6} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{R}{6} \therefore R = 6\sqrt{3}$ cm

Logo, o comprimento y da projeção do paralelo 30° N, desse globo, sobre o plano α é dado por:
$x = 2 \cdot \pi \cdot 6\sqrt{3}$ cm $\Rightarrow y \approx 65$ cm

VERIFIQUE O QUE APRENDEU NO CAPÍTULO 10

1. Sendo r a medida, em centímetro, do raio da base do cilindro, temos que o rótulo é um retângulo de comprimento $2\pi r$ e altura 10 cm. Assim, temos:

$$2\pi r \cdot 10 = 80\pi \Rightarrow r = 4$$

Logo, a área total da superfície da lata é:

$$A_T = (2 \cdot \pi \cdot 4 \cdot 10 + 2 \cdot \pi \cdot 4^2)\,\text{cm}^2 = 112\,\text{cm}^2$$

2. alternativa **d**

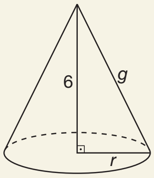
Temos: 350 L = 350 dm^3, 8 cm = 0,8 dm e 1,2 m = 12 dm. Assim, indicando por r a medida, em decímetro, do raio da base do cilindro, temos:

$$\pi \cdot r^2 \cdot 0{,}8 = 350 \Rightarrow \pi r^2 = \frac{350}{0{,}8} = 437{,}5$$

Então, a capacidade V do reservatório é:

$$V = \pi r^2 \cdot 12\,\text{dm}^3 = 437{,}5 \cdot 12\,\text{dm}^3 = 5.250\,\text{dm}^3 \Rightarrow V = 5.250\,\text{L}$$

3. Considere r e g as medidas, em decímetro, do raio da base e da geratriz do cone.



Pelo teorema de Pitágoras e pelo fato de a área lateral A_L ser o dobro da área B da base, temos:

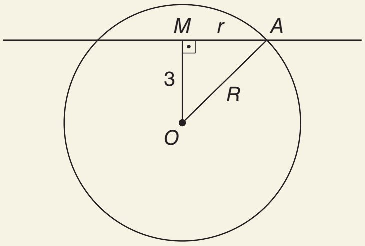
$$\begin{cases} g^2 = r^2 + 6^2 \\ \pi r g = 2\pi r^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g^2 = r^2 + 36 \\ r = \dfrac{g}{2} \end{cases}$$

Assim, $g = 4\sqrt{3}$ dm.

4. alternativa **b**

Igualando a área total do cone com a área lateral do cilindro, temos: $\pi R\left(2R + R\right) = 2\pi R H \Rightarrow H = \frac{3R}{2}$

5. Indicando por R e r as medidas, em centímetro, do raio da esfera de centro O e do raio da secção de centro M, esquematizamos:



ILUSTRAÇÕES: ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

Pelo fato de a área da secção ser 27π cm^2 e pelo teorema de Pitágoras aplicado no triângulo OMA, temos:

$$\begin{cases} \pi r^2 = 27\pi \\ r^2 + 3^2 = R^2 \end{cases} \Rightarrow R = 6$$

O volume V da esfera é: $V = \frac{4\pi R^3}{3}$

Desse modo: $V = \frac{4 \cdot \pi \cdot 6^3}{3}\,\text{cm}^3 \Rightarrow V = 288\pi\,\text{cm}^3$

A área A da superfície dessa esfera é dada por $A = 4\pi R^2$, ou seja: $A = 4\pi \cdot 6^2\,\text{cm}^2 \Rightarrow A = 144$ cm

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS COMENTADAS

BICUDO, M. A. V. (org.). **Educação matemática**. 2. ed. São Paulo: Centauro, 2005.

Traz artigos relacionados a pesquisas realizadas em educação matemática, com foco em metodologia e ensino.

BLACK DOG INSTITUTE. Structured Problem Solving. Disponível em: https://www.blackdoginstitute.org.au/wp-content/uploads/2020/04/16-structured-problem-solving.pdf. Acesso em: 22 set. 2024.

Roteiro para solução estruturada de problemas.

BRACKMANN, C. P. **Desenvolvimento do pensamento computacional através de atividades desplugadas na Educação Básica**. 2017. Tese (Doutorado em Informática na Educação) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2017.

Pesquisa sobre a possibilidade de desenvolver o pensamento computacional na Educação Básica exclusivamente por meio de atividades sem o uso de computadores.

BRASIL. **Lei nº 14.533, de 11 de janeiro de 2023**. Diário Oficial da União: seção 1, Brasília, DF, 12 jan. 2023.

Lei que institui a Política Nacional de Educação Digital.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. 2018. Brasília, DF: MEC, 2018.

Documento que regulamenta o ensino nas escolas brasileiras públicas e particulares de Educação Infantil, Ensinos Fundamental e Médio.

BRASIL. Ministério da Educação. Política Nacional de Ensino Médio. **Gov.br.** Brasília, DF, 2024. Disponível em: https://www.gov.br/mec/pt-br/areas-de-atuacao/eb/politica-nacional-ensino-medio. Acesso em: 31 ago. 2024.

Lei que regulamenta a Política Nacional de Ensino Médio.

BRASIL. Ministério da Educação. **Temas contemporâneos transversais na BNCC**: proposta de práticas de implementação. Brasília, DF: MEC, 2019.

Guia com explicações e orientações a respeito dos temas contemporâneos transversais.

CRUZ, L. F. C. Bases neuroanatômicas e neurofisiológicas do processo ensino e aprendizagem. *In*: **III Curso de Atualização de Professores da Educação Infantil, Ensino Fundamental e Médio. A Neurociência e a Educação**: Como nosso cérebro aprende?. Ouro Preto, 2016.

Documento com artigos sobre a neurociência e a educação.

CURY, H. N. **Análise de erros**: o que podemos aprender com as respostas dos alunos. Belo Horizonte: Autêntica, 2007.

O livro traz uma revisão da literatura sobre a temática no Brasil e no mundo, discutindo-as com base em diferentes perspectivas.

DENARDI, V. B. Teoria dos registros e representação semiótica: contribuições para a formação de professores de matemática. *In*: XXI Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática, 2017, Pelotas, RS. **Anais do XXI EBRAPEM**. Pelotas: Universidade Federal de Pelotas, 2017.

Partes de uma pesquisa que tem como objetivo investigar as contribuições da semiótica para a compreensão de conceitos matemáticos necessários à formação de professores de matemática.

HOFFMANN, J. **Avaliar para promover**: as setas do caminho. Porto Alegre: Mediação, 2005.

O livro apresenta os cinco princípios essenciais da avaliação mediadora.

ITAÚ EDUCAÇÃO E TRABALHO (org.). **O Futuro do mundo do trabalho para as juventudes Brasileiras**. São Paulo: Itaú educação e trabalho, 2023.

A pesquisa traça um perfil de jovens entre 14 e 29 anos sobre a inserção educacional e laboral desse grupo.

LUCKESI, C. C. **Avaliação da aprendizagem escolar**. São Paulo: Cortez, 2000.

O livro apresenta um panorama de contextos e abordagens relacionados à avaliação da aprendizagem.

MONTEIRO, A.; POMPEU JÚNIOR, G. **A Matemática e os temas transversais**. São Paulo: Moderna, 2003.

A obra questiona alguns conceitos relacionados aos temas transversais e à função que a Matemática exerce nesse mecanismo.

MORAN, J. M.; MASSETTO, M. T.; BEHRENS, M. A. **Novas tecnologias e mediação pedagógica**. 12. ed. Campinas: Papirus, 2006.

A obra aborda os problemas do ensino e da educação, além de discutir o uso da tecnologia como mediação pedagógica.

NOGUEIRA, N. R. **Pedagogia dos projetos**: uma jornada interdisciplinar rumo ao desenvolvimento das múltiplas inteligências. 7. ed. São Paulo: Érica, 2010.

Nessa obra a autora discute questões conceituais, procedimentais e atitudinais na dinâmica de trabalho com projetos.

ORGANIZAÇÃO das Nações Unidas para a Educação, a Ciência e a Cultura. **Violência escolar e *bullying***: relatório sobre a situação mundial. Brasília, DF: UNESCO, 2019.

Relatório apresentado no Simpósio Internacional sobre Violência Escolar e *bullying*: das evidências à ação, Seul, República da Coreia, de 17 a 19 de janeiro de 2017.

PITANGA, G. *et al. Bullying* e violência escolar: suas consequências e como combatê-las. *In*: **Blog #tmjUNICEF**. Brasília, DF: 18 jul. 2023. Disponível em: https://www.unicef.org/brazil/blog/bullying-e-violencia-escolar. Acesso em: 22 set. 2024.

Texto sobre *bullying* e violência escolar apresentando suas consequências e dicas para serem combatidos.

SILVA, M. R. G. da. Considerações sobre o trabalho em grupo na aula de Matemática. **Mimesis**, Bauru, v. 19, n. 2, 1998.

Artigo sobre a aprendizagem matemática por meio da organização dos estudantes em grupos.

ISBN 978-85-16-13984-1

9 788516 139841